PRÁCTICA 1: *Soluciones*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1.

a) Sea $f : \mathbb{N} \to P$ definida por $f(x) = 2x$:

- f es inyectiva: $f(x_1) = f(x_2) \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2$.
- f es sobreyectiva: Sea $y \in P$ luego $y = 2k$. Para $x = k$ resultará $f(x) = 2k = y$.

b) Sea $f : A \to B$. Puesto que B es un conjunto unitario resultara necesariamente $f(x) = 7$ para cualquier $x \in A$. Luego $f(1) = f(2) = 7$ pero $1 \neq 2$ (f no es inyectiva).

c) Sean $C = [a, b]$ y $D = [c, d]$, definiremos una función lineal $f : [a, b] \to [c, d]$ que pase por los puntos (a, c) y (b, d). Sea $f(x) = mx + h$, luego $m = \frac{d-c}{b-a}$. Ahora como $f(a) = c$ resulta:

$$c = \left(\frac{d-c}{b-a}\right) a + h \iff c - \left(\frac{d-c}{b-a}\right) a = h$$

es decir,

$$f(x) = \left(\frac{d-c}{b-a}\right) x + c - \left(\frac{d-c}{b-a}\right) a = \left(\frac{d-c}{b-a}\right)(x-a) + c$$

- f es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff mx_1 + h = mx_2 + h \iff mx_1 = mx_2 \iff x_1 = x_2$$

- f es sobreyectiva: Sea $y \in D$ definimos $x = (y-c)\left(\frac{b-a}{d-c}\right) + a$. Luego:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{d-c}{b-a}\right)\left[(y-c)\left(\frac{b-a}{d-c}\right) + a - a\right] + c = \\ &= \left(\frac{d-c}{b-a}\right)(y-c)\left(\frac{b-a}{d-c}\right) + c = y - c + c = y \end{aligned}$$

Ademas $x \in C$ pues:

$$\begin{array}{ccccc} c & \leq & y & \leq & d \\ 0 & \leq & y-c & \leq & d-c \\ 0 & \leq & (y-c)\left(\frac{b-a}{d-c}\right) & \leq & (d-c)\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = b-a \\ a & \leq & x & \leq & b \end{array}$$

d) La función biyectiva $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definida por $f(x) = e^x$ prueba que $(-\infty, \infty) \sim (0, \infty)$. Consideremos ahora la función biyectiva $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = tan(x)$. La función $g(\pi x)$ tiene como dominio el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ mientras que la función biyectiva $g\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ tendrá el dominio $(0, 1)$, por lo que podemos concluir que $(0, 1) \sim (-\infty, \infty)$.

2.

a) Sea $\begin{array}{ccc} f : A & \to & B \\ x \in A & \to & f(x) = x \end{array}$ luego f es inyectiva pues $f(x_1) \neq f(x_2) \iff x_1 \neq x_2$.

b) Observemos que $A - B \subseteq A$ luego por el ítem anterior $A - B \preceq A$.

c) Sea $\begin{array}{ccc} f : A & \to & A \times \{b\} \\ x \in A & \to & f(x) = (x, b) \end{array}$ entonces:

- f es inyectiva: $f(x_1) \neq f(x_2) \iff (x_1, b) \neq (x_2, b) \iff x_1 \neq x_2$.
- f es biyectiva: Sea $y = (x, b) \in A \times \{b\}$, luego para $x \in A$ resulta $f(x) = y$.

d) Sea $\begin{array}{ccc} f : A \times B \times C & \to & A \times (B \times C) \\ (x, y, z) \in A \times B \times C & \to & f(x, y, z) = (x, (y, z)) \end{array}$ entonces:

- f es inyectiva: $(x, (y, z)) = (a, (b, c)) \iff x = a \wedge y = b \wedge z = c \iff (x, y, z) = (a, b, c)$.
- f es biyectiva: Sea $y = (a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$, luego para $x = (a, b, c) \in A \times B \times C$ resulta $f(x) = y$.

e) Sea $\begin{array}{ccc} f : A \times B & \to & B \times A \\ (x, y) \in A \times B & \to & f(x, y) = (y, x) \end{array}$ entonces:

- f es inyectiva: $(y_1, x_1) = (y_2, x_2) \iff y_1 = y_2 \wedge x_1 = y_2 \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
- f es biyectiva: Sea $y = (a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$, luego para $x = (a, b, c) \in A \times B \times C$ resulta $f(x) = y$.

f) Sabemos que existe una función inyectiva $f : B \to C$ luego la función

$$\begin{array}{ccc} g : A \times B & \to & A \times C \\ (x, y) \in A \times B & \to & g(x, y) = (x, f(y)) \end{array}$$

resulta inyectiva pues:

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$

- Si $x_1 \neq x_2$ entonces $g(x_1, y_1) = (x_1, f(y_1)) \neq (x_2, f(y_2)) = g(x_2, y_2)$.
- Si $y_1 \neq y_2$ entonces $g(x_1, y_1) = (x_1, f(y_1)) \neq (x_2, f(y_2)) = g(x_2, y_2)$ pues como f es inyectiva resulta $f(y_1) \neq f(y_2)$.

g) Para cada $H \subseteq A$ definimos $\chi_H : A \to B = \{0,1\}$ tal que:

$$\chi_H = \begin{cases} 0 & x \notin H \\ 1 & x \in H \end{cases}$$

Cada subconjunto H de A determina una única función χ_H (y viceversa), de manera tal de que el problema de determinar cuantos subconjuntos tiene A ($card\,(\mathcal{P}\,(A))$) es equivalente al de determinar cuantas funciones hay de A en B.

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ luego cada función $\chi : A \to B$ se identifica con la tupla $(\chi(a_1), \chi(a_2), \ldots, \chi(a_n)) \in \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n}$.

Luego $card\,(\mathcal{P}\,(A)) = card\,(B \times B \times \ldots \times B) = 2^n$.

Argumento combinatorio

- Subconjuntos de 0 elementos hay: $\binom{n}{0}$.
- Subconjuntos de 1 elementos hay: $\binom{n}{1}$.
- Subconjuntos de 2 elementos hay: $\binom{n}{2}$.
- $\vdots$
- Subconjuntos de n elementos hay: $\binom{n}{n}$.

Puede probarse por inducción que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n = card\,(\mathcal{P}\,(A))$.

3.

a)

- Reflexividad: Para todo conjunto A, la función identidad es biyectiva, luego $A \sim A$.
- Transitividad: Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces existen funciones biyectivas f y g, luego la función $f \circ g$ es una biyeccion de A a C. Por lo tanto $A \sim C$.
- Simetria: Si $A \sim B$ entonces existe una funcion biyectiva f, luego la función f^{-1} es una biyeccion de B a A. Por lo tanto $B \sim A$.

b)

- Reflexividad: Análogo.
- Transitividad: Análogo.
- Antisimetria: Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$ entonces existen funciones inyectivas de A a B y de B a A y por el teorema de Cantor-Schroder-Bernstein existe una biyeccion de A a B por lo que $A \sim B$.

4. Sabemos existen $f : A \to B$ y $g : C \to D$ biyectivas, luego la función

$$\begin{array}{rcc} h : A \times C & \to & B \times D \\ (x, y) \in A \times C & \to & h(x, y) = (f(x), g(y)) \end{array}$$

es biyectiva pues:

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$

- Si $x_1 \neq x_2$ entonces $h(x_1, y_1) = (f(x_1), g(y_1)) \neq (f(x_2), g(y_2)) = h(x_2, y_2)$ por ser f biyectiva.
- Si $y_1 \neq y_2$ entonces $h(x_1, y_1) = (f(x_1), g(y_1)) \neq (f(x_2), g(y_2)) = h(x_2, y_2)$ por ser g biyectiva.

La afirmación reciproca no vale pues basta considerar $A = D = \{1\}$ y $B = C = \{1, 2\}$. De esta manera $A \times C = \{(1, 1), (1, 2)\}$ y $B \times D = \{(1, 1), (2, 1)\}$ de donde $A \times C \sim B \times D$ pero claramente $A \nsim B$ ni $C \nsim D$.

5. Sabemos que existen $f : A \to B$ y $g : C \to D$ inyectivas, luego la funcion

$$\begin{array}{rcc} h : A \cup C & \to & B \cup D \\ x \in A \cup C & \to & h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in C - A \end{cases} \end{array}$$

es inyectiva. En efecto sean $x_1, x_2 \in A \cup B / x_1 \neq x_2$ luego:

- Si $x_1, x_2 \in A$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = h(x_2)$ pues f es inyectiva.
- Si $x_1, x_2 \in C \wedge x_1, x_2 \notin C$: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) = g(x_1) \neq g(x_2) = h(x_2)$ pues g es inyectiva.
- Si $x_1 \in A \wedge x_2 \notin A \wedge x_2 \in C$: $h(x_1) = f(x_1) \in B$ y $h(x_2) = g(x_2) \in D$ luego debera ser $h(x_1) \neq h(x_2)$ pues de lo contrario resultaria $B \cap D \neq \emptyset$.

6. Las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x$ y $g(x) = x$ son inyectivas y por el teorema citado, existe una biyeccion entre dichos conjuntos, por lo tanto son equipotentes.

7.

a)
- $P_0 = \mathbb{N}$.
- $P_3 = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 / \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}\}$.
- $P_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \ldots + \alpha_n x^n / \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$.

b) $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} P_i$.

c) Sea $\begin{array}{llc} f : P_i & \rightarrow & \mathbb{Z}^{i+1} \\ p \in P_i & \rightarrow & f(p) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_i) \end{array}$. Puesto que en P_i todos los polinomios tienen el mismo grado, dos polinomios serán diferentes si alguno de sus coeficientes es diferentes y en consecuencia también lo serán sus imágenes.

d) $D_i \preceq \mathbb{Z}^{i+1} \sim \mathbb{N}^{i+1} \sim \mathbb{N}$.

8.

a) Observemos que $A \subseteq X = \left\{ \frac{\sqrt[m]{m}}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Ademas podemos escribir a X como $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sqrt[m]{m}}{i} : m \in \mathbb{N} \right\}$, luego $A \preceq X \preceq \mathbb{N}$.

b) Podemos escribir a B como $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} \{\langle i, i+r, i+2r, \ldots, i+nr, \ldots \rangle / r \in \mathbb{Z}\}$ y por ser unión numerable de conjuntos numerables resulta $B \sim \mathbb{N}$.

c) Sea $f : C \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f([a,b]) = (a,b)$, es fácil ver que esta función es inyectiva. Luego $C \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

9.

a) Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ luego para $P(x) = qx - p$ resulta $P\left(\frac{p}{q}\right) = q\frac{p}{q} - p = 0$.

b) $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{A}$.

c) En efecto para $P(x) = x^2 - 2$ resulta $P\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}^2 - 2 = 0$.

d) En efecto para $P(x) = x^2 + 1$ resulta $P(i) = \sqrt{-1}^2 + 1 = 0$.

e) Observemos que $\mathbb{A} = \bigcup\limits_{p \in P} \{x \in \mathbb{C} : p(x) = 0\}$. Cada uno de estos conjuntos es numerables pues cada polinomio tiene una cantidad finita de raíces. Luego, por ser unión numerable de conjuntos numerables, resulta $\mathbb{A} \sim \mathbb{N}$.

10.

a) Supongamos lo contrario, luego $\mathbb{A} = \mathbb{C} \sim \mathbb{N}$. Contradicción.

b) Supongamos lo contrario, es decir $\mathbb{T} \sim \mathbb{N}$ luego como $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ resulta ser unión numerable de conjuntos numerables por lo que $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$. Contradicción.

11. Claramente B no es numerable ($B \succeq \aleph_1$) pues si lo fuera, $B \cup A$ sería unión numerable de conjuntos numerables y resultaría $card\,(B \cup A) = \aleph_0$. Luego como $B \subseteq A \cup B$ debe ser $B \preceq A \cup B$, es decir $B \preceq \aleph_1$ por lo que $card\,(B) = \aleph_1$.

12.

a) Sean Σ_i los conjuntos de cadenas de longitud exactamente i, luego $card\,(\Sigma_i) = card\,(\Sigma)^i \in \mathbb{N}$. Luego el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto es $\Sigma^* = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ que por ser unión numerable de conjuntos numerables, resulta también ser numerable.

b) Como $card\,(\Sigma^*) = \aleph_0$ y un lenguaje es un elemento de $\mathcal{P}\,(\Sigma^*)$ entonces existen $\aleph_1$ lenguajes sobre Σ.

13.

a) Sean $B = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}(A, B)$ el conjunto de todas las funciones de A en B y para cada $S \in P(A)$ consideremos la función:

$$\begin{aligned} \chi_S : A \to& B \\ x \to& \chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

Definimos:

- $$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) \to& \mathcal{F}(A, B) \\ S \to& f(S) = \chi_S \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} g : \mathcal{F}(A, B) \to& \mathcal{P}(A) \\ F \to& g(F) = F^{-1}\left(\{1\}\right) \end{aligned}$$

(donde $F^{-1}\left(\{1\}\right)$ es el conjunto de todas las preimagenes de 1 a través de F)

Demostración Analicemos la función $\chi_{F^{-1}(\{1\})}$. Tenemos:

$$\chi_{F^{-1}(\{1\})}(x) = \begin{cases} 1 & x \in F^{-1}(\{1\}) \\ 0 & x \notin F^{-1}(\{1\}) \end{cases} = \begin{cases} 1 & F(x) = 1 \\ 0 & F(x) = 0 \end{cases} = F(x)$$

Ahora $(f \circ g)(F) = f\left[F^{-1}(\{1\})\right] = \chi_{F^{-1}(\{1\})} = F$ es decir: $(f \circ g)$ es la identidad en $\mathcal{F}(A, B)$. *(*)*
Sabemos que la preimagen de $\{1\}$ a través de χ_S es justamente S. Por lo tanto:

$$\forall S \in \mathcal{P}(A) : (g \circ f)(S) = g\left[f(S)\right] = g(\chi_S) = \chi_S^{-1}(\{1\}) = S$$

luego $(g \circ f)$ es la identidad en $\mathcal{P}(A)$. *(**)*
De *(*)* y *(**)* resulta que f y g son biyectivas, es decir, existen la misma cantidad de subconjuntos de A que de funciones de A en B.

b) Resulta trivial de definir una inyección de $\{f/f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ en $\{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ que extienda el dominio de las primeras.

c)

- Por el ítem *a*: $card(\{f/f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}) = card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \aleph_1$.
- Tenemos entonces: $\aleph_0 \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \aleph_1 \sim card(\{f/f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}) \preceq card(\{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$.

d) Del ejercicio 9 sabemos que para cualquier alfabeto, existen $\aleph_0$ cadenas (programas) sobre dicho alfabeto.

e) Podemos concluir que puesto que existen mas funciones naturales que programas, existen funciones que ningún programa puede calcular.