PRÁCTICA 6: *Lenguajes Formales y Gramáticas*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1.

a) Regular, pues las reglas 3 y 6 son de la forma $A \to a$ y las restantes de la forma $A \to aB$.

b) Estructurada por frases pues no es regular, ni libre de contexto ni sensible al contexto ya que la regla 2 no cumple los requisitos.

c) Sensible al contexto pues no es regular ni libre de contexto ya que la regla 3 no cumple los requisitos. Ademas la regla 3 es de la forma requerida considerando $\alpha = \lambda$, $\beta = a$ y $\delta = AB$, la regla 5 considerando$\alpha = \lambda$, $\beta = b$ y $\delta = AB$ y la regla 6 considerando $\alpha = \lambda$, $\beta = B$ y $\delta = AB$.

d) Libre de contexto pues no es regular ya que la regla 1 no cumple los requisitos.

2.

a) $\sigma \Rightarrow^{(1)} b\sigma \Rightarrow^{(1)} bb\sigma \Rightarrow^{(2)} bbaA \Rightarrow^{(5)} bbabA \Rightarrow^{(5)} bbabbA \Rightarrow^{(4)} bbabba\sigma \Rightarrow^{(3)} bbabbab$.

b) $\sigma \Rightarrow^{(1)} AB \Rightarrow^{(3)}\Rightarrow aAB \Rightarrow^{(4)} aABb \Rightarrow^{(2)} aBAb \Rightarrow^{(6)} abAb \Rightarrow^{(5)} abab$.

c) $\sigma \Rightarrow^{(2)} AAB \Rightarrow^{(4)}\Rightarrow AaaB \Rightarrow^{(3)} ABaaB \Rightarrow^{(7)} ABaab \Rightarrow^{(7)} Abaab \Rightarrow^{(4)} aabaab$.

d) $\sigma \Rightarrow^{(2)} ABA \Rightarrow^{(3)}\Rightarrow ABAB \Rightarrow^{(6)} abBAB \Rightarrow^{(7)} abbAB \Rightarrow^{(7)} abbabB \Rightarrow^{(7)} abbabb$.

3. Demostraremos por inducción en la cantidad de pasos en la derivación de una cadena, que todas las cadenas generadas por las reglas de producción de la gramática, tienen un numero par de símbolos a.

- Caso base $n = 1$: Tras aplicar una regla de producción las cadenas generadas pueden ser $aaBA$, ABB, aaB, λ, aBa, Aaa, $AaBa$ o bbb todas ellas con $2, 0, 2, 0, 2, 2, 2, 0$ símbolos a.
- Caso inductivo $n = k$. Supongamos que tras aplicar k reglas de producción, la cadena resultante α tiene $2c$ símbolos a.
  - Si aplicamos $A \to aaB$ la cadena resultante tendrá $2c + 2$ símbolos a.
  - Si aplicamos $A \to \lambda$ la cadena resultante tendrá $2c$ símbolos a.
  - Si aplicamos $aBa \to A$ la cadena resultante tendrá $2c - 2$ símbolos a.
  - Si aplicamos $Aaa \to B$ la cadena resultante tendrá $2c - 2$ símbolos a.
  - Si aplicamos $B \to AabaB$ la cadena resultante tendrá $2c + 2$ símbolos a.
  - Si aplicamos $B \to bbb$ la cadena resultante tendrá $2c$ símbolos a.

4.

a) $\sigma \to aA$, $A \to \lambda|aA|bA$.
b) $\sigma \to aA|bC$, $A \to bB$, $B \to bB|\lambda$, $C \to bC|aA$.
c) $\sigma \to aA|bB$, $A \to aA|bB$, $B \to bB|aA|a$.
d) $\sigma \to aA|bB$, $A \to aA|bB$, $B \to bB|aC$, $C \to aC|bC, \lambda$.
e) COMPLETAR.
f) $\sigma \to \lambda|a\sigma b$.
g) COMPLETAR.
h) $\sigma \to a\sigma a|b\sigma b|\lambda|a|b$.
i) $\sigma \to C|aAbC$, $A \to aAb|\lambda$, $C \to cC|\lambda$.
j) $\sigma \to aAa|bAb|\lambda$, $A \to aA|bA, \lambda$.
k) $\sigma \to aI|bI$, $I \to aP|bP|\lambda$, $P \to aI|bI$.
l) COMPLETAR.
m) COMPLETAR.
n) COMPLETAR.

5.

a) Falso: $abba \in \mathcal{L}$ pero $abba \notin L(G)$.
b) Verdadero.
c) Falso: $aba \in L(G)$ pero $aba \notin \mathcal{L}$.
d) Verdadero.
e) Falso: $\lambda \in \mathcal{L}$ pero $\lambda \notin L(G)$.

6.

- COMPLETAR.
- $S \to yX$, $X \to yY$, $Y \to \lambda$, $X \to xZ$, $Z \to xX$.

7. COMPLETAR

8.

- $S \to XA|WB|WZ$.
- $A \to S'Y$.
- $S' \to XA|WB|WZ$.
- $B \to S'Z$.
- $X \to x$.
- $Y \to y$.
- $W \to w$.
- $Z \to z$.

9.

a) $\left\{a^n b^n c^k / n, k \in \mathbb{N}\right\} \cap \left\{a^k b^n c^n / n, k \in \mathbb{N}\right\} = \{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$.

b) Observemos que $\mathcal{L} = \left\{a^i b^j c^k | i = j \wedge j = k\right\}$ luego $\overline{\mathcal{L}} = \left\{a^i b^j c^k | i \neq j \vee j \neq k\right\}$ por lo que $\overline{\mathcal{L}} = \left\{a^i b^j c^k | i \neq j\right\} \cup \left\{a^i b^j c^k | j \neq k\right\}$. Puesto que la unión es cerrada para lenguajes libres de contexto y ambas componentes de $\overline{\mathcal{L}}$ son lenguajes libres de contexto, entonces $\overline{\mathcal{L}}$ es libre de contexto. Supongamos que el complemento sea también una operación cerrada, luego $\overline{\overline{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$ es libre de contexto. Contradicción.

10. COMPLETAR.

11. COMPLETAR.

12.

- Caso base $n = 1$: Tras aplicar una regla de producción las cadenas generadas pueden ser aS, Sb, a o b; ninguna de ellas contiene la subcadena ba.
- Caso inductivo $n = k$. Supongamos que tras aplicar k reglas de producción, la cadena resultante $\alpha S \beta$ no contiene la subcadena ba:
  - Supongamos que al aplicar $S \to aS$ o $S \to a$ se forma la subcadena ba, luego $\alpha = b^m$ (con $m > 0$) pues de lo contrario α tendría como subcadena a ba lo cual no es cierto por H.I. Sin embargo para $n > 1$ todas las palabras comienzan con a. Contradicción. Por lo tanto si aplicamos estas reglas, no se forma la subcadena ba.
  - Analogamente si al aplicar $S \to Sb$ o $S \to b$ se forma la subcadena ba, entonces $\beta = a^m$ (con $m > 0$).

13.

- Caso base $n = 1$: Tras aplicar una regla de producción las cadenas generadas pueden ser $aSbS$, $bSaS$, o λ; todas ellas con misma cantidad de a's y b's.
- Caso inductivo $n = k$. Supongamos que tras aplicar k reglas de producción, la cadena resultante tiene m letras a y b.
  - Si aplicamos $S \to aSbS$ o $S \to bSaS$ la nueva cadena tendrá $m + 1$ letras a y b.
  - Si aplicamos $S \to \lambda$ la nueva cadena tendrá m letras a y b.

14. COMPLETAR.

15.

a)
$$\boxed{x + y * z} \equiv E \begin{cases} E & \begin{cases} E & \to V \to \boxed{z} \\ \boxed{*} & \\ E & \to V \to \boxed{y} \end{cases} \\ \boxed{+} & \\ E & \to V \to \boxed{x} \end{cases} \equiv E \begin{cases} E & \to V \to \boxed{z} \\ \boxed{*} & \\ E & \begin{cases} E & \to V \to \boxed{y} \\ \boxed{+} & \\ E & \to V \to \boxed{x} \end{cases} \end{cases}$$

b)

- $E \to E + T|T$
- $T \to T * F|F$
- $F \to (E)\,|V$
- $V \to x|y|z$