PRÁCTICA 2: *Soluciones*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1.

   a) Definimos a $\mathbb{N}_3$ como el mínimo conjunto tal que:
      - $0 \in \mathbb{N}_3$.
      - $x \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow x + 3 \in \mathbb{N}_3$.

   b) Definimos a $\mathbb{Z}_3$ el mínimo conjunto tal que:
      - $0 \in \mathbb{N}_3$.
      - $x \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow x + 3 \in \mathbb{N}_3$.
      - $x \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow x - 3 \in \mathbb{N}_3$.

2.

   a) Definimos Σ^* como el mínimo conjunto tal que:
      - $\lambda, a, b, c \in \Sigma^*$.
      - $x, y \in \Sigma^* \Rightarrow xy \in \Sigma^*$.

   Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in \Sigma^*$, luego:
      - Si $P(\lambda), P(a), P(b), P(c)$ son ciertas y;
      - De ser ciertas $P(x)$ y $P(y)$ también es cierta $P(xy)$;

   entonces P es cierta para cualquier elemento de Σ^*.

   b) Definimos B como el mínimo conjunto tal que:
      - $b \in B$.
      - $x \in B \Rightarrow axcc \in B$.

   Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in B$, luego:
      - Si $P(b)$ es cierta y;
      - De ser cierta $P(x)$ también es cierta $P(axcc)$;

   entonces P es cierta para cualquier elemento de B.

3.

a) Definimos A como el mínimo conjunto tal que:
   - $\lambda \in A$.
   - $x \in A \Rightarrow xa \in A$.

b) Definimos B como el mínimo conjunto tal que:
   - $\lambda, a, b, c \in B$.
   - $x \in B \Rightarrow axa \in B$.
   - $x \in B \Rightarrow bxb \in B$.
   - $x \in B \Rightarrow cxc \in B$.

c) Definimos C como el mínimo conjunto tal que:
   - $a, b \in C$.
   - $x, y \in C \wedge |x| = |y| = 1 \wedge x \neq y \Rightarrow xy \in C$.

4.

a) Definimos M como el mínimo conjunto tal que:
   - $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M$.
   - $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$.
   - $x \in M \Rightarrow x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M$.

b) Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in M$, luego:
   - Si $P\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$ son ciertas y;
   - De ser ciertas $P(x), P(y)$ también es cierta $P(x + y)$ y;
   - De ser cierta $P(x)$ también es cierta $P\left(x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$;

   entonces P es cierta para cualquier elemento de M.

5. Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in \mathbb{P}$, luego:
   - Si $P(0)$ es cierta y;
   - De ser cierta $P(n)$ también es cierta $P(n + 2)$;

   entonces P es cierta para cualquier elemento de $\mathbb{P}$.

Demostración

- Caso base: Para $n = 0 \in \mathbb{P}$, considerando $m = 0 \in \mathbb{N}_0$ resulta $n = m + m$.
- Caso inductivo: Sea $n \in \mathbb{P}$, supongamos que $n = m+m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ (H.I.). Luego $n + 2 \underbrace{=}_{H.I.} m + m + 2 = (m+1) + (m+1) \in \mathbb{N}_0$.

6.

a) Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in \Delta$, luego:

- Si $P(a)$ es cierta y;
- De ser cierta $P(\alpha)$ también es cierta $P(b\alpha b)$;

entonces P es cierta para cualquier elemento de Δ.

b)

- Caso base: a tiene $0 \in \mathbb{P}$ símbolos b.
- Caso inductivo: Sea $\alpha \in \Delta$, supongamos que α tiene $2k \in \mathbb{P}$ numero de caracteres b (H.I.). Luego $b\alpha b$ tiene $2 + \underbrace{2k}_{H.I.} = 2(1+k) \in \mathbb{P}$ numero de caracteres b.

7.

a) Sea $P(x)$ una propiedad definida sobre $x \in \Gamma$, luego:

- Si $P(\lambda)$ es cierta y;
- De ser cierta $P(\alpha)$ también es cierta $P(b\alpha)$;
- De ser cierta $P(\alpha)$ también es cierta $P(a\alpha)$;

entonces P es cierta para cualquier elemento de Δ.

b)

- $b \in \Gamma$ como demuestra la siguiente secuencia de formación: $\lambda \to b\lambda = b$.
- $a \in \Gamma$ como demuestra la siguiente secuencia de formación: $\lambda \to a\lambda = a$.

- Veamos primero que todos los elementos de Γ tienen 0 símbolos c:
  - Caso base: λ tiene 0 símbolos.
  - Caso inductivo: Sea $\alpha \in \Gamma$, supongamos que α tiene 0 símbolos c (H.I.). Luego:
    - $b\alpha$ tiene $0 + \underbrace{0}_{H.I.} = 0$ símbolos c.
    - $a\alpha$ tiene $0 + \underbrace{0}_{H.I.} = 0$ símbolos c.

  Como $babacbaca$ tiene 1 símbolo c, podemos afirmar que $babacbaca \notin \Gamma$.
- $aba \in \Gamma$ como demuestra la siguiente secuencia de formación: $\lambda \to a\lambda = a \to ba \to aba$.

c)

- Probaremos por inducción en $\alpha \in \Delta$ que $b\alpha \in \Delta$:
  - Caso base: Para $\alpha = \lambda$ resulta: $\lambda \to \lambda b = b\lambda$.
  - Caso inductivo: Supongamos que para $\alpha \in \Delta$ resulta $b\alpha \in \Delta$. Veamos si para αb y αa resulta $b\alpha b \in \Delta$ y $b\alpha a \in \Delta$:
    - Si el ultimo constructor aplicado en la cadena de formación de $b\alpha$ fue el primero, quiere decir que $\alpha = \beta b$. Su derivación será: $\lambda \to \ldots \to b\beta \to b\beta b$, luego $\lambda \to \ldots \to b\beta \to b\beta bb = b\alpha b$. Análogamente para $b\alpha a$.
    - Si el ultimo constructor aplicado en la cadena de formación de $b\alpha$ fue el segundo, quiere decir que $\alpha = \beta a$. Su derivación será: $\lambda \to \ldots \to b\beta \to b\beta a$, luego $\lambda \to \ldots \to b\beta \to b\beta a \to b\beta ab = b\alpha b$. Análogamente para $b\alpha a$.
- Análogo.
- Probaremos por inducción en Γ que todas las palabras están en Δ:
  - Caso base: Para $\alpha = \lambda$ vale trivialmente.
  - Caso inductivo: Supongamos que para una palabra $\alpha \in \Gamma$ resulta $\alpha \in \Delta$. Queremos ver si $a\alpha \in \Delta$ y $b\alpha \in \Delta$. Ambas valen por el apartado anterior.
- Análogo.
- Por los resultados anteriores, $\Delta = \Gamma$.

8.

a)

- $0 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow (0,0) \in S$.
- Supongamos $0 \in S$, luego como $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ resultara $0 \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Absurdo.
- $(2,3) \in S$ como demuestra la siguiente secuencia de formación: $(2,2) \to (2,3)$.
- $(3,4) \in S$ como demuestra la siguiente secuencia de formación: $(3,3) \to (3,4)$.

b) Sea $P(n,m)$ una propiedad definida sobre $(n,m) \in S$, luego:

- Si $P(n,n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y;
- De ser cierta $P(n,m)$ también es cierta $P(n,m+1)$;

entonces P es cierta para cualquier elemento de S.

Demostración

- Caso base: Sea $(n,n) \in S/n \in \mathbb{N}_0$ luego $n \leq n$.
- Caso inductivo: Sea $(n,m) \in S$ y supongamos que $n \leq m$ (H.I.). Luego para $(n,m+1) \in S$ resulta $n \leq m \leq m+1$.

c) COMPLETAR.

9.

- Caso base: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1 = 2^0$.
- Caso inductivo: Supongamos que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (H.I.). Luego:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] = 2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} =$$

$$\underbrace{=}_{H.I.} 2 + (2^n - 1) + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{=}_{H.I.} 2 + (2^n - 1) + (2^n - 1) =$$

$$2^n + 2^n = 22^n = 2^{n+1}$$

10.

a) $append\left(Nil, l_2\right) = l_2$

b)

- Caso base: $append\left(Nil, Nil\right) = Nil$.
- Caso inductivo: Supongamos que para xs resulta $append\left(xs, Nil\right) = xs$. Luego: $append\left(Cons\left(x, xs\right), Nil\right) = Cons\left(x, append\left(xs, Nil\right)\right) \underbrace{=}_{H.I.} Cons\left(x, xs\right)$

c)

- Caso base: $append\left(append\left(Nil, l_2\right), l_3\right) = append\left(l_2, l_3\right) = append\left(Nil, append\left(l_2, l_3\right)\right)$
- Caso inductivo: Supongamos que para xs resulta:

$$append\left(append\left(xs, l_2\right), l_3\right) = append\left(xs, append\left(l_2, l_3\right)\right)$$

Luego:

$$append\left(append\left(Cons\left(x, xs\right), l_2\right), l_3\right) = append\left(Cons\left(x, append\left(xs, l_2\right)\right), l_3\right)$$
$$= append\left(Cons\left(x, append\left(xs, l_2\right)\right), l_3\right) = Cons\left(x, append\left(append\left(xs, l_2\right), l_3\right)\right)$$
$$\underbrace{=}_{H.I.} Cons\left(x, append\left(xs, append\left(l_2, l_3\right)\right)\right) = append\left(Cons\left(x, xs\right), append\left(l_2, l_3\right)\right)$$

11.

- Casos base:
  - $nleafs\left(Null\right) = 0 \leq 1 = 0 + 1 = nnodes\left(Null\right) + 1$.
  - $nleafs\left(Leaf\right) = 1 \leq 1 = 0 + 1 = nnodes\left(Leaf\right) + 1$.
- Caso inductivo: Supongamos que la propiedad vale para l y r. Luego:

$$nleafs\left(Node\left(l, r\right)\right) = nleafs\left(l\right) + nleafs\left(r\right)$$
$$\underbrace{\leq}_{H.I.} nnodes\left(l\right) + 1 + nnodes\left(r\right) + 1 = nnodes\left(Node\left(l, r\right)\right) + 1$$

12.

a) Para poder concluir que los caballos de C_1 y C_2 son todos del mismo color es necesario que dichos conjuntos no sean disjuntos; y esto debe hacerse independientemente de k. Sin embargo esto no es posible para $k = 1$ puesto que al ser $C_1 = \{c_1\}$ y $C_2 = \{c_2\}$ disjuntos, c_1 puede no ser del mismo color de c_2.

b) Si $k + 1 = 1$ entonces $a = 1$ o $b = 1$ y en cuyo caso no vale la hipótesis inductiva: $1 = a \nless k + 1 = 1$ o $1 = b \nless k + 1 = 1$.