Capítulo 2

Cardinalidad

2.1. Definiciones

2.1.1. Función inyectiva

Decimos que $f : X \to Y$ es *inyectiva* si: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ o bien $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2.1.2. Función sobreyectiva

Decimos que $f : X \to Y$ es *sobreyectiva* si: $\forall y \in Y\ \exists x \in X / f(x) = y$.

2.1.3. Función biyectiva

Decimos que $f : X \to Y$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

2.1.4. Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad (son *equipotentes*) si existe una función biyectiva de A en B y lo notaremos: $\#A = \#B$, $A \sim B$.

2.1.5. Cardinalidad precedente

La cardinalidad de un conjunto A es anterior a la de un conjunto B si existe una función inyectiva f de A en B y lo notaremos $\#A \preceq \#B$. Si ademas ninguna de las funciones inyectivas de A en B es sobreyectiva entonces: $\#A \prec \#B$.

2.1.6. Conjuntos finitos

Un conjunto es finito cuando es vacío o equipotente a $\{1, 2, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario se dice infinito.

2.1.7. Conjuntos numerables

Diremos que un conjunto A es numerable si es finito, o bien resulta que $A \sim \mathbb{N}$ en cuyo caso se dice que A es infinito numerable. Si nada de lo anterior aplica se dice que A no es numerable.

2.1.8. Familia de conjuntos

Un conjunto F se dice una familia de conjuntos si sus elementos son conjuntos. Diremos que F es una familia indexada de conjunto indice I (no vacío) si existe una función con dominio I y recorrido F. Llamando S_α (con $\alpha \in I$) a los elementos de la familia F, podemos entonces decir que $F = \{S_\alpha / \alpha \in I\}$.

2.1.9. Conjunto de partes

Dado un conjunto S, el conjunto de partes de S denotado por $\mathcal{P}(S)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de S.

2.2. Teoremas

2.2.1. Teorema de Cantor-Schroder-Bernstein

Enunciado Si $\#A \preceq \#B$ y $\#B \preceq \#A$ entonces $A \sim B$. En otras palabras: si existe una función inyectiva de A en B y otra de B en A entonces existe una función biyectiva de A a B.

Demostración Consultar «Daniel J. Velleman. *How to Prove It.*» y «Richard Hammack. *Book of Proof.*» paginas 322 y 232.

2.2.2. Cardinalidad de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Enunciado El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito numerable.

Demostración Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (n, 1)$. Esta función es trivialmente inyectiva. Sea $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(a, b) = 2^a 3^b$. El teorema fundamental de la aritmética nos permite asegurar que esta función es inyectiva. Luego por el teorema de Cantor-Schroder-Bernstein concluimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Observación La función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f[(i, j)] = \frac{1}{2}(i + j - 1)(i + j - 2) + i$ es una biyeccion:

$f[(i,j)]$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	7	11	$\swarrow$
2	3	5	8	12	$\swarrow$	
3	6	9	13	$\swarrow$		
4	10	14	$\swarrow$			
5	15	$\swarrow$				
6	$\swarrow$					

2.2.3. Corolario

Enunciado $\mathbb{N}^d \sim \mathbb{N}$.

Demostración Lo demostraremos por inducción: Para $d = 1$ vale trivialmente. Veamos ahora que si $\mathbb{N}^d \sim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}^{d+1} \sim \mathbb{N}$. Escribamos $\mathbb{N}^{d+1} = \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}^d$ es numerable (por hipótesis inductiva) podemos listar a sus elementos: $\mathbb{N}^d = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{d+1}$ dada por $f(i, j) = (a_i, j)$ resulta $\mathbb{N}^{d+1} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

2.2.4. Unión numerable de conjuntos numerables

Enunciado Sean S_α conjuntos numerables (finitos o infinitos) y un conjunto indice I también numerable (finito o infinito) entonces la unión de los elementos de la familia $F = \{S_\alpha : \alpha \in I\}$, es decir $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ sera también numerable.

Demostración Nos pondremos en el peor caso posible: supondremos que tanto los conjuntos S_α como el conjunto indice I son infinito numerables. Dado que el conjunto indice I es infinito numerable, sin perder generalidad podemos considerar de aquí en mas que $I = \mathbb{N}$. Luego podemos escribir entonces $F = \{S_\alpha : \alpha \in I\} = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dado que S_i es infinito numerable, podemos escribir $S_i = \{a_{ij}/j \in \mathbb{N}\} = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots\}$. Observemos que podemos organizar los elementos de la unión de acuerdo a la siguiente tabla:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Luego la función $f : S \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(a_{ij}) = (i, j)$ es inyectiva y como $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ resulta que S es numerable.

2.2.5. Cardinalidad infinita mas pequeña

Enunciado Para todo conjunto infinito A, resulta: $\#\mathbb{N} = \aleph_0 \preceq \#A$.

Demostración Sea A un conjunto infinito:

- Como A es infinito resulta $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_1 \in A$.
- Como A es infinito resulta $A \neq \{x_1\} \Rightarrow \exists x_2 \in A / x_2 \neq x_1$.
- Como A es infinito resulta $A \neq \{x_1, x_2\} \Rightarrow \exists x_3 \in A / x_3 \neq x_1, x_2$.
- Como A es infinito resulta $A \neq \{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \exists x_4 \in A / x_4 \neq x_1, x_2, x_3$.

De esta forma se puede construir una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de A tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Definimos $f : \mathbb{N} \to A$ dada por $f(i) = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como f es inyectiva resulta que $\aleph_0 \preceq \#A$.

2.2.6. Cardinalidad del conjunto de partes

Enunciado Para todo conjunto S, resulta: $\#S \prec \#\mathcal{P}(S)$.

Demostración La función $f(x) = \{x\}$ es inyectiva de S en $\mathcal{P}(S)$ por lo que $\#S \preceq \#\mathcal{P}(S)$. Veamos ahora que no existe función sobreyectiva de S en $\mathcal{P}(S)$. Supongamos existe $g : S \to \mathcal{P}(S)$ sobreyectiva y definamos $B = \{x \in S / x \notin g(x)\} \subseteq S$ el conjunto de los elementos de S que no pertenecen a su imagen a través de g. Como g es sobreyectiva y $B \in \mathcal{P}(S)$ sabemos que $\exists x \in S / g(x) = B$.

- Si $x \in B$: por definición de B resulta $x \notin g(x) = B$. Contradicción.
- Si $x \notin B$: por definición de B resulta $x \in g(x) = B$. Contradicción.

Por lo tanto g no es sobreyectiva.

2.2.7. Innumerabilidad del continuo

Enunciado El conjunto de los números reales no es numerable.

Demostración Alcanza con probar que el intervalo $(0,1)$ no es numerable pues $(0,1) \sim \mathbb{R}$. En efecto $f(x) = tan\left(x\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ o bien $g(x) = ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ demuestran este hecho. Representemos los elementos de $(0,1)$ por su expansión decimal infinita, por ejemplo $0,229384112598\ldots$. Supongamos que $(0,1)$ es numerable, habrá entonces un primer elemento, segundo, etc. Listemoslos del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccc}
0,\boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \ldots \\
0,a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ldots \\
0,a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & \ldots \\
0,a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boldsymbol{a_{44}} & a_{45} & \ldots \\
0,a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \boldsymbol{a_{55}} & \ldots \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Consideremos ahora el numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$ donde cada dígito b_i puede ser cualquier dígito excepto a_{ii} (es decir los números en negrita ubicados en la diagonal). Es claro que $b \in (0,1)$ pero es distinto a todos los números del listado ya que difiere de cada numero en por lo menos un dígito. Esto constituye una contradicción, luego el intervalo $(0,1) \sim \mathbb{R}$ no es numerable.

2.3. Ejemplos

2.3.1. Cardinalidad de $\mathbb{Z}$

Puesto que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n/2$ (si n es par) y $f(n) = (1-n)/2$ (si n es impar) es biyectiva, resulta $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. En forma alternativa $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, \ldots\}$ es u. n. c. n.

2.3.2. Cadinalidad de $\mathbb{Q}$

Podemos escribir a $\mathbb{Q}$ como una u. n. c. n.: $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$ con $A_k = \big\{\ldots, -\frac{2}{k}, -\frac{1}{k}, \frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots\big\}$.