PRÁCTICA 4: *Soluciones*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1. Lo demostraremos por inducción sobre el conjunto FRP:
   - Casos base: Las funciones bases son totales por definición.
   - Composición: Supongamos que $f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son totales.
     Veamos que $h = \Phi\left(f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}\right)$ también lo es. Sea $X \in \mathbb{N}^k$ podemos calcular $Y = (g_1[X], \ldots, g_n[X])$ puesto que cada g_i es total por hipótesis inductiva. Ademas f también es total por lo que podemos calcular $f(Y)$.
     Es decir, existe un numero natural $z = f(Y) = h(X)$.
   - Recursión: Supongamos que $g^{(k)}, h^{(k+2)}$ son totales. Veremos que $f\left(y, X^k\right) = R(g, h)$ también lo es, por inducción en y.
     - Caso base $y = 0$: $f(0, X^k) = g\left(X^k\right)$ que es total por hipótesis.
     - Caso inductivo $y = p$: Supongamos $f\left(p, X^k\right)$ es total, luego:

$$f\left(p+1, X^k\right) = h\left[p, X^k, \underbrace{f\left(p, X^k\right)}_{\text{total por H.I.}}\right]$$

2.

   a) Lo demostraremos por inducción en k:
      - Caso base $k = 0$: $f_0(x) = s(x)$.
      - Caso inductivo $k = h$: Supongamos que f_h es FRP. Queremos ver si f_{h+1} tambien lo es. En efecto: $f_{h+1}(x) = f_h^{x+2}(x) = f_h^{s[s(x)]}(x)$.

   b) Lo demostraremos por inducción en k:
      - Caso base $k = 0$: $f_0(x) = s(x) > x$.
      - Caso inductivo $k = n$: Supongamos que $f_n(x) > x$, luego:

$$f_{n+1}(x) = f_n^{(x+2)}(x) = f_n\left[f_n^{(x+1)}(x)\right] \underbrace{>}_{H.I.} f_n^{(x+1)}(x) = f_n\left[f_n^{(x)}(x)\right] \underbrace{>}_{H.I.} f_n^{(x)}(x)$$

$$\vdots$$

$$= f_n\left[f_n^{(2)}(x)\right] \underbrace{>}_{H.I.} f_n^{(2)}(x) = f_n\left[f_n(x)\right] \underbrace{>}_{H.I.} f_n(x) \underbrace{>}_{H.I.} x$$

c) COMPLETAR.

d) $f_{k+1}(x) = f_k^{x+2}(x) = f_k^{x+1}[f_k(x)] \overbrace{>}^{(b)(c)} f_k^{x+1}(x) > \ldots > f_k(x)$.

3.

a) Buscamos un t tal que $t = x - y \iff t + y = x$. Sea entonces $f(x,y) = \mu_t \{\neg E[\Sigma(t,y), x] = 0\}$. Veamos algunos ejemplos:

- $f(4,2) = \mu_t \{\neg E[\Sigma(t,2), 4] = 0\}$:
  - $t = 0 : \neg E[\Sigma(0,2), 4] = \neg E[2,4] = 1$.
  - $t = 1 : \neg E[\Sigma(1,2), 4] = \neg E[3,4] = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : \neg E[\Sigma(2,2), 4] = \neg E[4,4] = 0}$.
- $f(2,4) = \mu_t \{\neg E[\Sigma(t,4), 2] = 0\}$:
  - $t = 0 : \neg E[\Sigma(0,4), 2] = \neg E[4,2] = 1$.
  - $t = 1 : \neg E[\Sigma(1,4), 2] = \neg E[5,2] = 1$.
  - $\vdots$

b) Buscamos un t tal que $t \leq \sqrt{x} < t + 1 \iff t^2 \leq x < (t+1)^2$. Sea entonces $g(x) = \mu_t \{Leq[\Pi(t+1, t+1), x] = 0\}$. Veamos algunos ejemplos:

- $g(4) = \mu_t \{Leq[\Pi(t+1, t+1), 4] = 0\}$:
  - $t = 0$: $Leq[\Pi(0+1, 0+1), 4] = Leq[1,4] = 1$.
  - $t = 1$: $Leq[\Pi(1+1, 1+1), 4] = Leq[4,4] = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : Leq[\Pi(2+1, 2+1), 4] = Leq[9,4] = 0.}$
- $g(5) = \mu_t [Leq[\Pi(t+1, t+1), 5] = 0]$:
  - $t = 0$: $Leq[\Pi(0+1, 0+1), 5] = Leq[1,5] = 1$.
  - $t = 1$: $Leq[\Pi(1+1, 1+1), 5] = Leq[4,5] = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : Leq[\Pi(2+1, 2+1), 5] = Leq[9,5] = 0.}$

c) La función numérica $h(x) = \sqrt{x}$ esta definida si existe t tal que $t = \sqrt{x} \iff t^2 = x$. Sea entonces $h(x) = \mu_t \{\neg E[\Pi(t,t), x] = 0\}$. Veamos algunos ejemplos:

- $h(4) = \mu_t \{\neg E[\Pi(t,t), 4] = 0\}$:
  - $t = 0$: $\neg E[\Pi(0,0), 4] = \neg E\{0,4\} = 1$.
  - $t = 1$: $\neg E[\Pi(1,1), 4] = \neg E\{1,4\} = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : \neg E[\Pi(2,2), 4] = \neg E\{4,4\} = 0.}$

- $h(3) = \mu_t \{\neg E[\Pi(t,t), 3] = 0\}$:
  - $t = 0$: $\neg E[\Pi(0,0), 3] = \neg E[0,3] = 1$.
  - $t = 1$: $\neg E[\Pi(1,1), 3] = \neg E[1,3] = 1$.
  - $t = 2$: $\neg E[\Pi(2,2), 3] = \neg E[4,3] = 1$.
  - $t = 3$: $\neg E[\Pi(3,3), 3] = \neg E[9,3] = 1$.
  - $\vdots$

4.

a) Buscamos un t tal que $t \leq x/y < t+1 \iff ty \leq x < ty + y$. Sea entonces $h(t,x,y) = Leq[\Pi(t,y) + y, x]$. Veamos algunos ejemplos:

- $div(0,0) = \mu_t[h(t,0,0) = 0]$:
  - $t = 0$: $h(0,0,0) = Leq[\Pi(0,0) + 0, 0] = Leq[0+0,0] = 1$.
  - $t = 1$: $h(1,0,0) = Leq[\Pi(1,0) + 0, 0] = Leq[0+0,0] = 1$.
  - $\vdots$
- $div(5,0) = \mu_t[h(t,5,0) = 0]$:
  - $t = 0$: $h(0,5,0) = Leq[\Pi(0,0) + 0, 5] = Leq[0+0,5] = 1$.
  - $t = 1$: $h(1,5,0) = Leq[\Pi(1,0) + 0, 5] = Leq[0+0,5] = 1$.
  - $\vdots$
- $div(6,3) = \mu_t[h(t,6,3) = 0]$:
  - $t = 0$: $h(0,6,3) = Leq[\Pi(0,3) + 3, 6] = Leq[0+3,6] = 1$.
  - $t = 1$: $h(1,6,3) = Leq[\Pi(1,3) + 3, 6] = Leq[3+3,6] = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : h(2,6,3) = Leq[\Pi(2,3) + 3, 6] = Leq[6+3,6] = 0.}$

b) Basta con definir h como: $h(t,x,y) = Leq\left\{\Pi[t,y] + y + \underbrace{\Pi[D_0(x), D_0(y)]}_{=1 \iff x=y=0}, x\right\}$.

c) Buscamos un t tal que $div(x,y) \times y + t = x$. Sea $h(t,x,y) = \neg E\{\Pi[div(x,y), y] + t, x\}$. Veamos algunos ejemplos:

- $mod(x,0) = \mu_t[h(t,x,0) = 0]$: no termina pues $div(x,0)$ no termina.
- $mod(7,2) = \mu_t[h(t,7,2) = 0]$:
  - $t = 0$: $h(0,7,2) = \neg E\{\Pi[3,2] + 0, 7\} = \neg E\{6,7\} = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{1} : h(1,7,2) = \neg E\{\Pi[3,2] + 1, 7\} = \neg E\{7,7\} = 0.}$

- $mod(10,4) = \mu_t \left[h\left(t,10,4\right) = 0\right]$:
  - $t = 0$: $h\left(0,10,4\right) = \neg E\left\{\Pi\left[2,4\right] + 0, 10\right\} = \neg E\left\{8,10\right\} = 1$.
  - $t = 1$: $h\left(1,10,4\right) = \neg E\left\{\Pi\left[2,4\right] + 1, 10\right\} = \neg E\left\{9,10\right\} = 1$.
  - $\boxed{t = \mathbf{2} : h\left(2,10,4\right) = \neg E\left\{\Pi\left[2,4\right] + 2, 10\right\} = \neg E\left\{10,10\right\} = 0.}$

5.

   a) $f\left(4\right) = \mu_y \left\{menos\left[4, pd\left(y\right)\right] = 0\right\}$:
   - $y = 0$: $menos\left[4, pd\left(0\right)\right] = menos\left[4,0\right] = 4$.
   - $y = 1$: $menos\left[4, pd\left(1\right)\right] = menos\left[4,0\right] = 4$.
   - $y = 2$: $menos\left[4, pd\left(2\right)\right] = menos\left[4,1\right] = pd\left\{menos\left[4,0\right]\right\} = 3$.
   - $y = 3$: $menos\left[4, pd\left(3\right)\right] = menos\left[4,2\right] = pd\left\{menos\left[4,1\right]\right\} = 2$.
   - $y = 4$: $menos\left[4, pd\left(4\right)\right] = menos\left[4,3\right] = pd\left\{menos\left[4,2\right]\right\} = 1$.
   - $\boxed{y = \mathbf{5} : menos\left[4, pd\left(5\right)\right] = menos\left[4,4\right] = pd\left\{menos\left[4,3\right]\right\} = 0}$.

   b) Observemos que $menos\left(x,y\right) = pd\left(x\right)^y$. Dado cualquier x, el minimizador aumentara la potencia hasta llegar eventualmente a 0, por lo que la función es total.

6. Sea $h\left(y,x\right) = \neg E\left[g\left(x,y\right), m\right]$ luego $f\left(x\right) = \mu_y \left\{\neg E\left[g\left(x,y\right), m\right] = 0\right\}$ es una función que busca el menor valor de y donde g vale m, para un x indicado como argumento.

7.

   - Definiremos primero $f\left(y,x\right) = \sqrt[y]{x}$. Buscamos t tal que $t = \sqrt[y]{x} \iff t^y = x$, sea entonces $h\left(t,y,x\right) = \neg E\left[Exp\left(y,t\right), x\right]$.
     - $f\left(5,25\right) = \mu_t \left[h\left(t,5,25\right) = 0\right]$:
       - $t = 0$: $h\left(0,5,25\right) = \neg E\left[0,25\right] = 1$.
       - $t = 1$: $h\left(1,5,25\right) = \neg E\left[1,25\right] = 1$.
       - $t = 2$: $h\left(2,5,25\right) = \neg E\left[32,25\right] = 1$.
       - $\vdots$
     - $f\left(4,81\right) = \mu_t \left[h\left(t,4,81\right) = 0\right]$:
       - $t = 0$: $h\left(0,4,25\right) = \neg E\left[0,81\right] = 1$.
       - $t = 1$: $h\left(1,4,25\right) = \neg E\left[1,81\right] = 1$.
       - $t = 2$: $h\left(2,4,25\right) = \neg E\left[16,81\right] = 1$.
       - $\boxed{t = \mathbf{3} : h\left(3,4,25\right) = \neg E\left[81,81\right] = 0.}$

- Luego $r(x) = x^2 + x + 6 = \Sigma\left\{\Sigma\left[\Pi(x,x), x\right], f_6\right\} =$

$$r(x) = \Phi\left\{\Sigma^{(2)}, \Phi\left[\Sigma^{(2)}, \Phi\left(\Pi^{(2)}, p_1^{(1)}, p_1^{(1)}\right), p_1^{(1)}\right], f_6^{(1)}\right\}$$

- Finalmente $g(y,x) = \sqrt[y]{x^2 + x + 6} = f[y, r(x)] = \Phi\left[f^{(2)}, p_1^{(2)}, \Phi\left(r^{(1)}, p_2^{(2)}\right)\right]$.
- No podemos escribir a g como FRP pues toda FRP es total y como vimos en el ejemplo f no lo es.

8.

- Definiremos primero $f(x) = \lfloor log_2(x) \rfloor$. Buscamos t tal que $t \leq log_2(x) < t+1 \iff 2^t \leq x < 2^{t+1}$ luego $h(t,x) = Leq\left[Exp(t+1, 2), x\right]$. Ejemplos:
  - $f(32) = \mu_t\left[h(t,32) = 0\right]$:
    - $t = 0$: $h(0,32) = Leq[2,32] = 1$.
    - $t = 1$: $h(1,32) = Leq[4,32] = 1$.
    - $t = 2$: $h(2,32) = Leq[8,32] = 1$.
    - $t = 3$: $h(3,32) = Leq[16,32] = 1$.
    - $t = 4$: $h(4,32) = Leq[32,32] = 1$.
    - $\boxed{t = \mathbf{5} : h(5,32) = Leq[64,32] = 0.}$
  - $f(30) = \mu_t\left[h(t,30) = 0\right]$:
    - $t = 0$: $h(0,30) = Leq[2,30] = 1$.
    - $t = 1$: $h(1,30) = Leq[4,30] = 1$.
    - $t = 2$: $h(2,30) = Leq[8,30] = 1$.
    - $t = 3$: $h(3,30) = Leq[16,30] = 1$.
    - $\boxed{t = \mathbf{4} : h(4,30) = Leq[32,30] = 0.}$
- Ahora $g(x) = (x+3)^3 = \Phi\left[Exp^{(2)}, f_3^{(1)}, \Phi\left(\Sigma^{(2)}, p_1^{(1)}, f_3^{(1)}\right)\right]$.
- Finalmente $\lfloor log_2\left[(n+3)^3\right] = \Phi\left[f^{(1)}, \Phi\left(g^{(1)}, p_1^{(1)}\right)\right]$.

9. $F(x) = M\left[\neg E\left(f^t(x), 1\right)\right]$