PRÁCTICA 2: *Conjuntos Inductivos*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

   a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.

   b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos:

   a) Σ^*.

   b) $B = \{a^n b c^{2n} / n \in \mathbb{N}\}$.

3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

   a) $A = \{a\}^*$.

   b) $B = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* / \alpha \text{ es un palindromo}\}$.

   c) $C = \{a, b, ab, ba\}$.

4. Considere el conjunto de las matrices

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} / a, b, c \in \mathbb{N}_0 \text{ donde } a, b, c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$

   a) Defina inductivamente el conjunto M.

   b) Enuncie el principio de inducción primitiva para M.

5. Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto $\mathbb{P}$, definido inductivamente como el menor conjunto tal que:

   - $0 \in \mathbb{P}$.
   - Si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n + 2) \in \mathbb{P}$.

   Utilice este principio para probar que para todo $n \in \mathbb{P}$ existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = m + m$.

6. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Δ inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $a \in \Delta$.
   - Si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$.

   a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Δ.

   b) Demuestre que cualquier cadena de Δ tiene un numero par de símbolos b.

7. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Γ inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $\lambda \in \Gamma$.
   - Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$.
   - Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$.

   a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ.

   b) Determine cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $b \in \Gamma$.
   - $a \in \Gamma$.
   - $babacbaca \in \Gamma$.
   - $aba \in \Gamma$.

   c) Considere ahora el conjunto Δ definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $\lambda \in \Delta$.
   - Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\alpha b \in \Gamma$.
   - Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\alpha a \in \Gamma$.

   Determine cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $\alpha \in \Delta \Rightarrow b\alpha \in \Delta$.
   - $\alpha \in \Delta \Rightarrow a\alpha \in \Delta$.
   - $\Gamma \subseteq \Delta$.
   - $\Delta \subseteq \Gamma$.
   - $\Delta = \Gamma$.

8. Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:

   - Si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(n, n) \in S$.
   - Si $(n, m) \in S$ entonces $(n, m+1) \in S$.

   a) Determine cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:
      - $(0, 0) \in S$.
      - $0 \in S$.
      - $(2, 3) \in S$.
      - $(3, 4) \in S$.

   b) Enuncie el principio de inducción primitiva para S. Demuestre, utilizando este principio que para todo par $(n, m) \in S$, $n \leq m$.

   c) Definimos inductivamente $Q \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:
      - Si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(0, n) \in Q$.
      - Si $(n, m) \in Q$ entonces $(n+1, m+1) \in Q$.

      Determine cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:
      - $S \subseteq Q$.
      - $Q \subseteq S$.
      - $Q = S$.

9. El número de formas de elegir k elementos a partir de un conjunto de n elementos, es exactamente $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Sabiendo que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$.

10. Considere la siguiente definición de listas:

    - Nil es una lista.
    - Si l es una lista, y x un elemento, entonces $Cons\,(x, l)$ es una lista.
    - Nada mas es una lista.

    y la siguiente función:

$$append\,(l_1, l_2) = \begin{cases} l_2 & l_1 = Nil \\ Cons\,(x, append\,(xs, l_2)) & l_2 = Cons\,(x, xs) \end{cases}$$

    demuestre las siguientes propiedades:

    a) Nil es elemento neutro de $append$ a izquierda.
    b) Nil es elemento neutro de $append$ a derecha.
    c) $append$ es asociativa.

11. Considere la siguiente definición de arboles binarios sin información:

    - $Null$ es un árbol.
    - $Leaf$ es un árbol.
    - Si l es un árbol y r es un árbol, entonces $Node\,(l, r)$ es un árbol.
    - Nada mas es un árbol.

    y las siguientes funciones:

$$nleafs\,(t) = \begin{cases} 0 & t = Null \\ 1 & t = Leaf \\ nleafs\,(l) + nleafs\,(r) & t = Node\,(l, r) \end{cases}$$

$$nnodes\,(t) = \begin{cases} 0 & t = Null \\ 0 & t = Leaf \\ 1 + nnodes\,(l) + nnodes\,(r) & t = Node\,(l, r) \end{cases}$$

    demuestre que $nleafs\,(t) \leq nnodes\,(t) + 1$ para cualquier árbol.

12. Explique cual es la falla en los siguientes razonamientos inductivos:

    a) Mostraremos por inducción en la cantidad de caballos, que todos los caballos tienen el mismo color.

    - Caso base $n = 1$: Para un conjunto de un único caballo $\{c_1\}$ la proposición es trivial
    - Caso inductivo $n = k$: Supongamos que para cualquier conjunto de k caballos, todos resultan ser del mismo color y sea $C = \{c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ un conjunto de $k+1$ caballos. Por hipótesis inductiva, $C_1 = \{c_1, \ldots, c_k\}$ son todos del mismo color y por la misma razón $C_2 = \{c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ también son del mismo color. Luego todos los caballos son del mismo color.

    b) Mostraremos por inducción en $\mathbb{N}_0$ que el doble de cualquier numero es cero.

    - Caso base $n = 0$: Trivial $(2 \cdot 0 = 0)$.
    - Inductivo fuerte $n \leq k$: Supongamos que para todo $n \leq k$ resulta $2k = 0$, y veamos que pasa para $k + 1$. Descompongamos a $k + 1$ en en la suma de dos naturales, es decir, sea $a + b = k + 1$. Como $a < k + 1$ y $b < k + 1$, por hipótesis inductiva $2a = 0$ y $2b = 0$, luego $2\,(k + 1) = 2\,(a + b) = 2a + 2b = 0$.