Capítulo 4

Funciones recursivas

4.1. Introducción

4.1.1. Función parcial y función total

Una función numérica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *parcial* si no esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Si esta definida para todos los elementos de $\mathbb{N}^k$ se dice *total*.

4.1.2. Función mayora

Decimos que una función $f^{(1)}$ mayora a otra función $g^{(n)}$ si $\forall \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in dom\left(g\right)$ se verifica que $g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq f\left[max\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right]$ y lo notamos $f^{(1)} \uparrow g^{(n)}$.

4.1.3. Serie de Ackermann

Consideremos la siguiente sucesión de funciones que llamaremos sucesión de Ackermann:

- $f_0\left(x\right) = s\left(x\right) = x + 1$.
- $f_1\left(x\right) = f_0^{x+2}\left(x\right) = s^{x+2}\left(x\right) = x + \left(x + 2\right) = 2x + 2$.
- $f_2\left(x\right) = f_1^{x+2}\left(x\right)$.
- $\vdots$
- $f_k\left(x\right) = f_{k-1}^{x+2}\left(x\right)$.
- $\vdots$

Calculemos algunos valores de $f_2(x)$:

- $f_2(0) = f_1^2(0) = f_1[f_1(0)] = f_1[f_0^2(0)] = f_1[2] = f_0^4(2) = 6.$
- $$\begin{aligned} f_2(1) =& f_1^3(1) = f_1\{f_1[f_1(1)]\} = f_1\left\{f_1\left[f_0^3(1)\right]\right\} = f_1\{f_1[4]\} = f_1\left\{f_0^6[4]\right\} = \\ =& f_1\{10\} = f_0^{12}\{10\} = 22. \end{aligned}$$
- $f_2(2) = f_1^4(2) = 2\{2[2(2{\cdot}2{+}2) + 2] + 2\} + 2 = 62.$
- $f_2(3) = 158.$

4.1.4. Función de Ackermann

Definimos una función que llamaremos ACK de la siguiente manera: $ACK(x) = f_x(x)$. O sea para encontrar su valor imagen para un determinado valor x, tomamos la x-esima función de Ackermann y la calculamos en dicho valor. Por ejemplo:

- $ACK(0) = f_0(0) = 1.$
- $ACK(1) = f_1(1) = 4.$
- $ACK(2) = f_2(2) = 62.$
- $$\begin{aligned} ACK(3) =& f_3(3) = f_2^5(3) = f_2[f_2(f_2\{f_2[f_2(3)]\})] = f_2[f_2(f_2\{f_2[158]\})] \\ =& f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{160}[158]\right\}\right)\right] = f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{159}[318]\right\}\right)\right] = \\ =& f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{158}[638]\right\}\right)\right] = f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{157}[1278]\right\}\right)\right] = \cdots = \\ =& f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{150}[163.838]\right\}\right)\right] = \cdots = f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{140}[167.772.158]\right\}\right)\right] = \cdots \\ =& f_2\left[f_2\left(f_2\left\{f_1^{137}[1.342.177.278]\right\}\right)\right] = \cdots \end{aligned}$$

4.2. Teoremas

4.2.1. Totalidad de las FRP

Enunciado Si $f \in FRP$ entonces f es una función total.

Demostración Lo demostraremos por inducción sobre el conjunto FRP.

- Caso base: Las funciones bases son totales por definición.
- Composición: Supongamos que $f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son totales. Veremos que $h = \Phi\left(f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}\right)$ también lo es.
  Sea $X \in \mathbb{N}^k$ podemos calcular $Y = (g_1[X], \ldots, g_n[X])$ puesto que cada g_i es total por hipótesis inductiva. Ademas f también es total por lo que podemos calcular $f(Y)$.
  Es decir, existe un numero natural $z = f(Y) = h(X)$.
- Recursion: Supongamos que $g^{(k)}, h^{(k+2)}$ son totales. Veremos que $f\left(y, X^k\right) = R(g,h)$ también lo es, por inducción en y.
  1. Caso base $y = 0$: $f(0, X^k) = g\left(X^k\right)$ que es total por hipótesis.
  2. Caso inductivo $y = p$: Supongamos $f\left(p, X^k\right)$ es total, luego:

  $$f\left(p+1, X^k\right) = h\left[p, X^k, \underbrace{f\left(p, X^k\right)}_{\text{total por HI}}\right]$$

  y como h es total resulta que f es total.

4.2.2. Propiedades de Ackermann

Enunciado

1. $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f_k \in FRP$.
2. $\forall x, k \in \mathbb{N} \Rightarrow f_k(x) > x$.
3. $\forall x_1, x_2, k \in \mathbb{N}$, si $x_1 < x_2$ entonces $f_k(x_1) < f_k(x_2)$.
4. $\forall x, k \in \mathbb{N} \Rightarrow f_k(x) < f_{k+1}(x)$.

Demostración

1. Lo demostraremos por inducción en k:
   a) Caso base $k = 0$: $f_0(x) = s(x)$.
   b) Caso inductivo $k = h$: Supongamos que f_h es FRP. Queremos ver si f_{h+1} también lo es. En efecto $f_{h+1}(x) = f_h^{x+2}(x) = f_h^{s[s(x)]}(x)$.
2. Consultar «Julio Hurtado, Raúl Kantor, Carlos Luna, Luis Sierra y Dante Zanarini. *Temas de Teoría de la Computación.*», pag. 56.
3. Consultar «Julio Hurtado, Raúl Kantor, Carlos Luna, Luis Sierra y Dante Zanarini. *Temas de Teoría de la Computación.*», pag. 56.
4. Ejercicio.

4.2.3. Mayorabilidad de las FRP

Enunciado Sea $g^{(n)} \in FRP$ entonces existe f_k de la serie de Ackermann tal que $f_k \uparrow g$.

Demostración Lo demostraremos por inducción:

1. Caso base: Todas las funciones bases son mayoradas por f_0.
2. Caso inductivo:
   a) Composición: Sean las funciones $C^{(m)}, h_1^{(n)}, \ldots, h_m^{(n)}$ tales que f_k mayora a todas ellas, definimos $g^{(n)} = \Phi\left(C^{(m)}, h_1^{(n)}, \ldots h_m^{(n)}\right)$. Veremos que $f_{k+1} \uparrow g^{(n)}$.
   Sabemos que $h_i^{(n)}(X) \leq f_k[max(X)]$ (por ser mayorada por f_k) luego $max\left\{h_1^{(n)}(X), \ldots, h_m^{(n)}(X)\right\} \leq f_k[max(X)]$ *(*)*.
   Ademas como $f_k \uparrow C^{(m)}$ resulta:

$$g(X) = C\left[h_1^{(n)}(X), \ldots, h_m^{(n)}(X)\right] \leq f_k\left[max\left(h_1^{(n)}(X), \ldots, h_m^{(n)}(X)\right)\right]$$

   y por *(*)* y propiedad *(3)* tenemos

$$f_k\left[max\left(h_1^{(n)}(X), \ldots, h_m^{(n)}(X)\right)\right] \leq f_k[f_k(max[X])]$$

   ahora aplicamos varias veces las propiedades *(2)* y *(3)* obteniendo:

$$g(X) \leq f_k [f_k (max [X])] \leq f_k^{max(X)+2} [max (X)] = f_{k+1} [max (X)] .$$

b) Recursion: Sea $g^{(n+1)} = R\left[B^{(n)}, h^{(n+2)}\right]$, veremos que $f_k \uparrow B \wedge f_k \uparrow h \Rightarrow f_{k+1} \uparrow g^{(n)}$. Por hipótesis $g(0, X) = B(X) \leq f_k [max (X)]$ *(**)* y ademas:

$$g(1, X) = h [0, X, g(0, X)] \leq f_k [max (0, X, g [0, X])]$$

luego aplicando *(**)* y propiedad *(3)*

$$f_k [max (0, X, g [0, X])] \leq f_k [max (0, X, f_k [max (X)])]$$

y puesto que $f_k [max (X)] > max (X, 0)$ $\forall k$ resulta

$$g(1, X) \leq f_k [max (0, X, f_k [max (X)])] \leq f_k [f_{\mathrm{k}} (max [X])]$$

Puede demostrarse por inducción que $g(y, X) \leq f_k^{(y+1)} (max [X])$. Finalmente:

$$f_k^{(y+1)} (max [X]) \leq f_k^{(y+1)} (max [y, X]) \leq f_k^{max(y,X)+1} (max [y, X])$$

y como $f_k^{max(y,X)+1} (max [y, X]) \leq f_k^{max(y,X)+2} (max [y, X]) = f_{k+1} [max (y, X)]$ resulta $g(y, X) \leq f_{k+1} [max (y, X)]$.

4.2.4. No primitividad de ACK

Enunciado La función $ACK(x)$ no es FRP.

Demostración Supongamos que $ACK(x) \in FRP$. Luego $ACK(x) + 1 \in FRP$. Por el teorema de mayorabilidad existe f_m en la serie de Ackermann que la mayora, es decir: $\forall x \in \mathbb{N}$ resulta:

$$ACK(x) + 1 \leq f_m (x) \iff f_x (x) + 1 \leq f_m (x)$$

y tomando $x = m$ obtenemos $f_m (m) + 1 \leq f_m (m)$. ¡Absurdo! Por lo tanto $ACK(x) \notin FRP$.

4.3. Definiciones

4.3.1. Operador de minimizacion

Dada $h^{(n+1)}$, decimos que $g^{(n)}$ se construye por *minimizacion* de h (y lo notaremos $g = M[h]$) cuando g se define del modo siguiente:

$$g(X) = M[h](X) = \mu_t [h(t, X) = 0]$$

donde $\mu_t [h(t, X) = 0]$ es, si existe, el mínimo valor de t tal que $h(t, X) = 0$.

Observación Nada garantiza que tal valor t exista, por lo que las funciones construidas con el operador M pueden ser parciales.

4.3.2. Definición inductiva

Definimos inductivamente el conjunto de Funciones Recursivas (FR) como el menor conjunto tal que:

- Las funciones base pertenecen a FR.
- Las funciones obtenidas aplicando un numero finito de operaciones de composición, recursion y minimizacion sobre elementos de FR también pertenecen a FR.

4.4. Ejemplos

4.4.1. División

La función numérica $div(x, y) = x/y$ solo esta definida si existe t tal que $ty = x$. Buscamos entonces $div(x, y) = \mu_t [h(t, x, y) = 0]$. Sea entonces $h(t, x, y) = \neg E [\Pi (t, y), x]$. Veamos algunos ejemplos:

- $div\,(25,5) = \mu_t\,[h\,(t,25,5) = 0]$.
  - $t = 0$: $h\,(0,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(0,5)\,,25] = \neg E\,[0,25] = 1 \neq 0$.
  - $t = 1$: $h\,(1,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(1,5)\,,25] = \neg E\,[5,25] = 1 \neq 0$.
  - $t = 2$: $h\,(2,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(2,5)\,,25] = \neg E\,[10,25] = 1 \neq 0$.
  - $t = 3$: $h\,(3,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(3,5)\,,25] = \neg E\,[15,25] = 1 \neq 0$.
  - $t = 4$: $h\,(4,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(4,5)\,,25] = \neg E\,[20,25] = 1 \neq 0$.
  - $\boxed{t = 5 : h\,(5,25,5) = \neg E\,[\Pi\,(5,5)\,,25] = \neg E\,[25,25] = 0.}$
- $div\,(4,3) = \mu_t\,[h\,(t,4,3) = 0]$.
  - $t = 0 : h\,(0,4,3) = \neg E\,[\Pi\,(0,3)\,,4] = \neg E\,[0,4] = 1 \neq 0$.
  - $t = 1 : h\,(1,4,3) = \neg E\,[\Pi\,(1,3)\,,4] = \neg E\,[3,4] = 1 \neq 0$.
  - $t = 2 : h\,(2,4,3) = \neg E\,[\Pi\,(2,3)\,,4] = \neg E\,[6,4] = 1 \neq 0$.
  - $t = 3 : h\,(3,4,3) = \neg E\,[\Pi\,(3,3)\,,4] = \neg E\,[9,4] = 1 \neq 0$.
  - $\vdots$
- $div\,(2,0) = \mu_t\,[h\,(t,2,0) = 0]$.
  - $t = 0 : h\,(0,2,0) = \neg E\,[\Pi\,(0,0)\,,2] = \neg E\,[0,2] = 1 \neq 0$.
  - $t = 1 : h\,(1,2,0) = \neg E\,[\Pi\,(1,0)\,,2] = \neg E\,[0,2] = 1 \neq 0$.
  - $\vdots$
- $div\,(0,0) = \mu_t\,[h\,(t,0,0) = 0]$.
  - $t = 0 : h\,(0,0,0) = \neg E\,[\Pi\,(0,0)\,,0] = \neg E\,[0,0] = 0$. ERROR.

Nuestra función h falla en el caso extremo $0/0$ pero podemos arreglarlo si la redefinimos como: $h\,(t,x,y) = \neg E\,\{\Pi\,[t,y]\,,x\} + D_0\,[y]$. Observemos que el termino que agregamos $D_0\,[y]$ da siempre 0 salvo cuando $y = 0$ en cuyo caso garantizamos que $h\,(t,x,0) \geq 1$ con lo que la función no se detiene. Veamos que pasa ahora:

- $div\,(0,0) = \mu_t\,[h\,(t,0,0) = 0]$.
  - $t = 0 : h\,(0,0,0) = \neg E\,\{\Pi\,[0,0]\,,0\} + D_0\,[0] = \neg E\,\{0,0\} + 1 = 0 + 1 = 1$.
  - $t = 1 : h\,(0,0,0) = \neg E\,\{\Pi\,[1,0]\,,0\} + D_0\,[0] = \neg E\,\{0,0\} + 1 = 0 + 1 = 1$.
  - $\vdots$

4.4.2. Logaritmo

La función numérica $Log\,(x,y) = log_x y$ solo esta definida si existe t tal que $x^t = y$. Buscamos entonces $Log\,(x,y) = \mu_t\,[h\,(t,x,y) = 0]$. Sea entonces $h\,(t,x,y) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,[x,t] + D_0\,[x] + D_1\,[x]\,,y\right\}$. Nótense los términos $D_0\,[x]$ y $D_1\,[x]$ que logran «indefinir» la función para las bases correspondientes. Veamos algunos ejemplos:

- $Log\,(0,0) = \mu_t\,[h\,(t,0,0) = 0]$:
  - $t = 0$: $h\,(0,0,0) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(0,0) + 1 + 0, 0\right\} = \neg E\,\{1+1+0,0\} = 1$.
  - $t = 1$: $h\,(1,0,0) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(0,1) + 1 + 0, 0\right\} = \neg E\,\{0+1+0,0\} = 1$.
  - $\vdots$
- $Log\,(1,0) = \mu_t\,[h\,(t,1,0) = 0]$:
  - $t = 0$: $h\,(0,1,0) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(1,0) + 0 + 1, 0\right\} = \neg E\,\{1+0+1,0\} = 1$.
  - $t = 1$: $h\,(1,1,0) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(1,1) + 0 + 1, 0\right\} = \neg E\,\{1+0+1,0\} = 1$.
  - $\vdots$
- $Log\,(10,100) = \mu_t\,[h\,(t,10,100) = 0]$:
  - $t = 0$: $h\,(0,10,100) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(10,0) + 0 + 0, 100\right\} = \neg E\,\{1+0+0,100\} = 1$.
  - $t = 1$: $h\,(1,10,100) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(10,1) + 0 + 0, 100\right\} = \neg E\,\{10+0+0,100\} = 1$.
  - $\boxed{t = 2 : h\,(2,10,100) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(10,2) + 0 + 0, 100\right\} = \neg E\,\{100+0,100\} = 0.}$
- $Log\,(2,3) = \mu_t\,[h\,(t,2,3) = 0]$:
  - $t = 0$: $h\,(0,2,3) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(2,0) + 0 + 0, 3\right\} = \neg E\,\{1+0+0,3\} = 1$.
  - $t = 1$: $h\,(1,2,3) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(2,1) + 0 + 0, 3\right\} = \neg E\,\{2+0+0,3\} = 1$.
  - $t = 2$: $h\,(2,2,3) = \neg E\left\{\widehat{Exp}\,(2,2) + 0 + 0, 3\right\} = \neg E\,\{4+0+0,3\} = 1$.
  - $\vdots$