PRÁCTICA 3: *Funciones Recursivas Primitivas*

Pablo Verdes   Dante Zanarini   Pamela Viale   Alejandro Hernandez   Mauro Lucci

Funciones recursivas primitivas

1. Mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{N}$ es recursiva primitiva.

2. Realice una traza de las siguientes funciones:

   a) $dos^{(2)}(17,3) = \Phi\left(s^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, c^{(2)}\right)\right)(17,3)$.

   b) $Mas2^{(1)}(5) = \Phi\left(s^{(1)}, s^{(1)}\right)(5)$.

   c) $\Sigma^{(2)}(2,3) = R\left(p_1^{(1)}, \Phi\left(s^{(1)}, p_3^{(3)}\right)\right)(2,3)$.

   d) $Pd^{(1)}(412) = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)(412)$.

3. Mostrar que las siguientes funciones son FRP:

   a) $\Pi(y,x) = y \times x$.

   b) $Fac(x) = x!$.

   c) $Exp(y,x) = x^y$.

   d) La función *diferencia*, definida por:

   $$\widetilde{d}(y,x) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$$

   Notamos generalmente $\widetilde{d}(y,x)$ como $x \dot{-} y$.

   e) La función *distinguidora del cero*, definida por:

   $$D_0(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

   f) $k(x,y) = |x - y|$.

g) La función $E^{(2)}$ definida por:

$$E(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

h) La función $\neg E^{(2)}$ definida por:

$$\neg E(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

i) La función *signo*, definida por:

$$Sgn(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

4. Defina la siguiente función: $\hat{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geq y \end{cases}$. Sugerencia: utilice la función $\widetilde{d}$ definida en el ejercicio anterior.

5. Sumatorias y productorias:

a) Sea $f^{(2)}$ una FRP de dos variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(2)}$ y $G^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$F^{(2)}(y,x) = \sum_{z=0}^{y} f^{(2)}(z,x)$$

$$G^{(2)}(y,x) = \prod_{z=0}^{y} f^{(2)}(z,x)$$

Mostrar que F y G son FRP.

b) Mas generalmente, sea $f^{(k+1)}$ una FRP de $k+1$ variables. Definimos dos nuevas funciones $F^{(k+1)}$ y $G^{(k+1)}$ de la siguiente manera:

$$F(y,X) = \sum_{z=0}^{y} f(z,X)$$

$$G(y,X) = \prod_{z=0}^{y} f(z,X)$$

donde X representa una k-upla. Mostrar que F y G son FRP. Mostrar que F y G son FRP.

6. Sea $f^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definimos una nueva función $F^{(2)}$ llamada función *potencia* de f como

$$F(y,x) = \begin{cases} x & y = 0 \\ f\left[F(y-1,x)\right] & y > 0 \end{cases}$$

   Notamos generalmente $F(y,x)$ como $f^y(x)$.

   a) Mostrar que $\Sigma(y,x) = s^y(x)$.

   b) Mostrar que si f es una FRP, entonces F resulta una FRP.

   c) Escribir la función diferencia $\hat{d}$ utilizando potencias.

Conjuntos recursivos primitivos

7. Mostrar que todo subconjunto unitario de $\mathbb{N}$ es un CRP.

8. Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son CRP, entonces $\neg A$, $A \cup B$ y $A \cap B$ son CRP.

9. Mostrar que todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ son CRP.

10. Repetir los tres ejercicios anteriores considerando ahora subconjuntos de $\mathbb{N}^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

11. Mostrar que el conjunto de los números pares es un CRP.

12. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 3 es un CRP.

    Sugerencia: Probar que la función $r_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que toma un natural y devuelve el resto de la división entera por 3 es una FRP, y usarla para escribir la función característica de los múltiplos de 3.

Relaciones recursivas primitivas

Una relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se dice *recursiva primitiva* (RRP) si es un CRP.

13. Mostrar que $=, \neq, \leq$ y $>$ son RRP.

14. Probar que si $R, S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son RRP, entonces también lo son las relaciones T, U y $\neg R$, donde
$$\begin{array}{rcl} xTy & = & xRy \wedge xSy \\ xUy & = & xRy \vee xSy \\ x\,(\neg R)\,y & = & \neg\,(xRy) \end{array}$$

15. Teniendo en cuenta los resultados del ultimo ítem, ¿como podríamos haber probado que $\neq$ y $>$ son RRP?

16. Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definimos $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ de la siguiente manera:
$$x\left(\bigwedge R\right)y \iff \forall k \in \mathbb{N}/0 \leq k \leq y \text{ se tiene } xRk$$
$$x\left(\bigvee R\right)y \iff \exists k \in \mathbb{N}/0 \leq k \leq y \text{ para el cual } xRk$$
Probar que si R es una RRP, entonces $\bigwedge R$ y $\bigvee R$ también son RRP.

Varios

17. Probar que la relación de divisibilidad entre naturales es una RRP.

    Sugerencia: Defina la familia de funciones $r_a^{(1)}, a = 1, 2, \ldots$; donde $r_a^{(1)}(n)$ devuelve el resto de dividir n por a, y escriba la función característica de la relación en términos de estas funciones.

18. Probar que las siguientes funciones son FRP:

    a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es multiplo de 3} \\ x+3 & \text{si } x \text{ tiene resto 1 en la division por 3} \\ x! & \text{si } x \text{ tiene resto 2 en la division por 3} \end{cases}$

    b) $max\,(x, y) = \begin{cases} y & x \leq y \\ x & y \leq x \end{cases}$