Capítulo 1

Principio de inducción

1.1. Definiciones

1.1.1. Conjunto Inductivo

Una definición inductiva de un conjunto A comprende base, inducción y clausura:

base conjunto de uno o mas elementos «*iniciales*» de A.

inducción una o mas reglas para construir «*nuevos*» elementos de A a partir de «*viejos*» elementos de A.

clausura determinar que A consiste exactamente de los elementos obtenidos a partir de los básicos y aplicando las reglas de inducción, sin considerar elementos «*extra*».

La forma de clausurar es pedir que A sea el mínimo conjunto que satisface las condiciones de base e inducción o en forma equivalente, definir a A como la intersección de todos los conjuntos que satisfacen dichas condiciones.

Definición formal Sean U un conjunto que llamaremos universo, B un subconjunto de U que llamaremos base y K un conjunto no vacío de funciones que llamaremos constructor. Diremos que un conjunto A esta definido inductivamente por B, K, U si es el mínimo conjunto que satisface:

- $B \subseteq A$.
- Si $f^{(n)} \in K$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ entonces $f\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in A$.

1.1.2. Secuencia de formación

Sean U, B, K como en la definición anterior. Una secuencia $a_1, \ldots, a_m$ de elementos de U es una secuencia de formación para a_m si $\forall i = 1, \ldots, m$ se verifica que:

- $a_i \in B$ o bien,
- $\exists f \in K$ con $ar(f) = n$ y $0 < i_1, \ldots, i_n < i$ tales que $f\left(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\right) = a_i$

Notemos que el conjunto A tiene todos los elementos de U que poseen una secuencia de formación. Diremos que B y K definen una gramática para las cadenas sintacticamente correctas del lenguaje A.

1.2. Demostraciones

1.2.1. Pertenencia

Para probar que un elemento pertenece a un conjunto inductivo, debemos dar su secuencia de formación.

Ejemplo Sea L el mínimo conjunto que satisface:

- $\lambda, 0, 1 \in L$.
- $a \in L \wedge b \in \{0, 1\} \Rightarrow bab \in L$

Probaremos que $110111011 \in L$. En efecto posee la siguiente secuencia de formación: $1 \Rightarrow 111 \Rightarrow 1011101 \Rightarrow 110111011$.

1.2.2. No pertenencia

Para probar que un elemento no pertenece a un conjunto inductivo, podemos:

- Mostrar que no existe una secuencia de formación para el elemento.
- Mostrar que si se quita al elemento del conjunto se siguen cumpliendo las clausulas.
- *Probar cierta propiedad del conjunto que sirva para excluir al elemento.*

Por ejemplo, para probar que $110111010 \notin L$ (definido en el apartado anterior) podríamos demostrar que todas las cadenas de L comienzan y terminan con el mismo caracter. Para demostrar este tipo de propiedades podemos valernos del principio de inducción primitiva que se detalla a continuación.

1.2.3. Principio de inducción primitiva

Enunciado Sea $A \subseteq U$ definido inductivamente por la base B y el constructor K, si:

1. vale $P(x)\ \forall x \in B$ y si
2. para cada $f \in K$ resulta: $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n) \Rightarrow P[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]$

entonces vale $P(x)\ \forall x \in A$.

Demostración Sea C el conjunto de todos los elementos de A que satisfacen una propiedad P, queremos probar que $C = A$.

- $C \subseteq A$ es trivial por definición del conjunto.
- Veamos que C satisface las clausulas de la definición inductiva de A:
    - Sea $x \in B$, luego por *(1)* vale $P(x)$ y entonces $x \in C$ por lo que $B \subseteq C$.
    - Sean $f^{(n)} \in K$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$ y $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$ queremos probar que $a \in C$:
        - Por definición de C valen $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)$.
        - Por *(2)* vale $P(a)$.

      Luego por definición de C resulta $a \in C$.

  Dado que A es el mínimo conjunto que cumple las clausulas de su definición inductiva concluimos que $A \subseteq C$.

Puesto que $C \subseteq A$ y $A \subseteq C$ entonces debe ser $A = C$.