Capítulo 3

Funciones recursivas primitivas

3.1. Definiciones

3.1.1. Aridad

Sea $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ llamaremos *aridad* al numero de argumentos que toma la función, es decir n y notaremos $f^{(n)}$.

3.1.2. Función característica

Dado un conjunto X, para cada subconjunto $A \subseteq X$ definimos su *función característica* $\chi_A : X \to \{0,1\}$ como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

3.1.3. Función numérica

Llamaremos función numérica a toda función $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ con $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$ identificaremos a dicha función con un numero perteneciente a $\mathbb{N}$.

3.1.4. Funciones base

Llamaremos funciones base a las siguientes tres funciones:

- La función cero $c^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida por $c^{(n)}(X) = 0$.
- Las funciones proyección $p_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definidas por $p_k^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k$.
- La función sucesor $s^{(1)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $s^{(1)}(x) = x + 1$.

3.1.5. Operadores

Definiremos dos operadores que nos permitirán construir nuevas funciones:

- El operador de composición Φ que dada una función numérica $f^{(n)}$ y n funciones numéricas de aridad k, construye la función numérica h definida como:
$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^k &\to \mathbb{N} \\ X^k &\to h\left(X^k\right) = f\left[g_1\left(X^k\right), g_2\left(X^k\right), \ldots, g_n\left(X^k\right)\right] \end{aligned}$$
y que notaremos $h = \Phi\left(f, g_1, g_2, \ldots, g_n\right)$.

- El operador de recursion R que dadas dos funciones numéricas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$ construye una nueva función numérica $f^{(k+1)}$ definida como
$$f\left(y, X^k\right) = \begin{cases} g\left(X^k\right) & y = 0 \\ h\left[y-1, X^k, f\left(y-1, X^k\right)\right] & y > 0 \end{cases}$$
y notaremos $f = R(g, h)$.

3.1.6. Definición inductiva

Definimos inductivamente el conjunto de funciones recursivas primitivas (FRP) como el menor conjunto tal que:

- Las funciones base pertenecen a FRP.

- Las funciones obtenidas aplicando un numero finito de operaciones de composición y recursion sobre elementos de FRP también pertenecen a FRP.

3.2. Ejemplos

3.2.1. Predecesor natural

La función $\widehat{Pd}^{(1)}(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ y-1 & y > 0 \end{cases}$ es FRP pues:

1. $\widehat{Pd}^{(1)}(0) = 0 = c^{(0)}\left(\right)$.

2. $\widehat{Pd}^{(1)}(y) = y - 1 = p_1^{(2)}\left[y-1, \widehat{Pd}^{(1)}\left(y-1\right)\right]$.

por lo que $\widehat{Pd}^{(1)} = R\left(c^{(0)}, p_1^{(2)}\right)$.

3.2.2. Suma

La función $\Sigma^{(2)}(y,x) = y + x$ es FRP pues:

1. $\Sigma^{(2)}(0,x) = 0 + x = x = p_1^{(1)}(x)$.
2. $$\begin{aligned}\Sigma^{(2)}(y,x) &= y + x = y + x + 1 - 1 = (y-1) + x + 1 = s^{(1)}\left[\Sigma^{(2)}(y-1,x)\right] = \\ &= s^{(1)}\left\{p_3^{(3)}\left[y-1,x,\Sigma^{(2)}(y-1,x)\right]\right\} = \Phi\left(s^{(1)},p_3^{(3)}\right).\end{aligned}$$

y en consecuencia $\Sigma^{(2)} = R\left[p_1^{(1)},\Phi\left(s^{(1)},p_3^{(3)}\right)\right]$.

3.2.3. Función potencia

Dada una función $f^{(1)}$ definimos $F^{(2)}$ llamada potencia de f como:

$$F(y,x) = \begin{cases} x & y = 0 \\ f\left[F(y-1,x)\right] & y > 0 \end{cases}$$

y notaremos $F(y,x) = f^y(x)$.
La función $f^y(x)$ es FRP pues:

1. $F^{(2)}(0,x) = x = p_1^{(1)}(x)$.
2. $F^{(2)}(y,x) = f^{(1)}\left[F(y-1,x)\right] = f^{(1)}\left\{p_3^{(3)}\left[y-1,x,F(y-1,x)\right]\right\} = \Phi\left(f^{(1)},p_3^{(3)}\right)$.

entonces $F^{(2)} = R\left[p_1^{(1)},\Phi\left(f^{(1)},p_3^{(3)}\right)\right]$.

3.3. Conjuntos

3.3.1. Conjunto recursivo primitivo

Diremos $A \subseteq \mathbb{N}^k$ es un conjunto recursivo primitivo (CRP) si su función característica $\chi_A : \mathbb{N}^k \to \{0,1\}$ es FRP.

3.3.2. Relaciones recursivas primitivas

Una relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se dice recursiva primitiva (RRP) si es un CRP.