Capítulo 5

Funciones de lista

5.1. Definiciones

5.1.1. Lista

Una lista es una secuencia ordenada y finita de cero o mas elementos de $\mathbb{N}_0$.

Notación

- $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ para una lista de longitud k.
- $[]$ para la lista vaciá.
- Notaremos con $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las listas.
- Con $\mathcal{L}^n$ indicaremos el conjunto de listas que poseen exactamente n elementos.
- Con $\mathcal{L}^{\geq n}$ indicaremos el conjunto de listas con al menos n elementos.

5.1.2. Concatenación

Dadas dos listas $X = [x_1, \ldots, x_m]$ e $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ llamamos concatenación de X e Y a la lista $[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ y lo notaremos $[X, Y]$. Para distinguir ciertos elementos de intereses escribiremos $[a, X, b, Y]$. La concatenación es una operación asociativa cuyo elemento neutro es la lista vaciá.

5.1.3. Funciones de lista

Las funciones de listas son funciones que van de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$. Para indicar que una función F asigna a la lista X, la lista Y escribimos $F[X] = Y$ o bien $FX = Y$. Nótese la omisión de los paréntesis sobre los argumentos.

Observación Podemos pensar a las funciones numéricas $f : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ como funciones de listas $F : \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^1$.

5.1.4. Funciones base

Llamaremos funciones base a las siguientes 6 funciones:

- Cero a izquierda: $0_i[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [\mathbf{0}, x_1, x_2, \ldots, x_k]$.
- Cero a derecha: $0_d[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, x_k, \mathbf{0}]$.
- Borrar a izquierda: $\square_i[\boldsymbol{x_1}, x_2, \ldots, x_k] = [x_2, \ldots, x_k]$.
- Borrar a derecha: $\square_d[x_1, x_2, \ldots, \boldsymbol{x_k}] = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]$.
- Sucesor a izquierda: $S_i[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [\boldsymbol{x_1} + \mathbf{1}, x_2, \ldots, x_k]$.
- Sucesor a derecha: $S_d[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2, \ldots, \boldsymbol{x_k} + \mathbf{1}]$.

Observación Nótese que $dom(0_i) = dom(0_d) = \mathcal{L}$ y que $dom(\square_i) = dom(\square_d) = dom(S_i) = dom(S_d) = \mathcal{L}^{\geq 1}$.

5.1.5. Operadores

Definiremos dos operadores que nos permitirán construir nuevas funciones:

- El operador de composición que dadas dos funciones F y G construye la función $H = F \circ G$ que notaremos simplemente $H = FG$ definida como $HX = G[FX]$. Nótese que contrariamente a lo usual, primero se aplica la función F y al resultado se aplica la función G.

- El operador de repetición que dada una función F construye la función $\langle F\rangle$ definida como:

$$\langle F\rangle [x,Y,z] = \begin{cases} [x,Y,z] & x = z \\ F\langle F\rangle [x,Y,z] & x \neq z \end{cases}$$

  es decir que la función $\langle F\rangle$ actúa aplicando F hasta que el primer y ultimo elemento de su argumento sean iguales.

Dominio El dominio de la composición es $dom\,(FG) = \{X \in \mathcal{L}/X \in dom\,(F) \wedge FX \in dom\,(G)$ Observemos que $\langle F\rangle$ esta definida sobre listas de la forma $[x,Y,z]$, es decir, que tienen al menos dos elementos. Mas precisamente $X \in dom\,(\langle F\rangle)$ si en la sucesión $\{X, FX, FFX, FFFX, \ldots\}$ existe una lista cuyo primer y ultimo elemento son iguales.

5.1.6. Definición inductiva

Definimos inductivamente el conjunto de funciones recursivas de listas (FRL) como el menor conjunto tal que:

- Las funciones base pertenecen a FRL.
- Las funciones obtenidas aplicando un numero finito de operaciones de composición y repetición sobre elementos de FRL también pertenecen a FRL.

5.2. Ejemplos

5.2.1. Pasar a izquierda

La función $\triangleleft = 0_i \langle S_i\rangle \square_d$ pasa el elemento de la derecha a la izquierda. Observemos una traza:

	$[X,y]$
0_i	$[0,X,y]$
$\langle S_i\rangle$	$[y,X,y]$
$\square_d$	$[y,X]$

5.2.2. Pasar a derecha

La función $\triangleright = 0_d \langle S_d\rangle \square_i$ pasa el elemento de la izquierda a la derecha.

5.2.3. Duplicar a izquierda

La función $D_i = 0_d \langle S_d \rangle \triangleleft$ duplica el elemento de la izquierda (a la izquierda). Observemos una traza:

	$[y, X]$
0_d	$[y, X, 0]$
$\langle S_d \rangle$	$[y, X, y]$
$\triangleleft$	$[y, y, X]$

5.2.4. Duplicar a derecha

La función $D_d = 0_i \langle S_i \rangle \triangleright$ duplica el elemento de la derecha (a la derecha).

5.2.5. Intercambiar extremos

La función $\leftrightarrow = \triangleright 0_i \triangleleft 0_i \langle S_i \triangleright \triangleright S_i \triangleleft \triangleleft \rangle \square_d \square_i \triangleright$ intercambia los extremos de una lista. Observemos una traza:

	$[x, Y, z]$
$\triangleright$	$[Y, z, x]$
0_i	$[0, Y, z, x]$
$\triangleleft$	$[x, 0, Y, z]$
0_i	$[0, x, 0, Y, z]$
$\langle S_i \triangleright \triangleright S_i \triangleleft \triangleleft \rangle$	$[z, x, z, Y, z]$
$\square_d$	$[z, x, z, Y]$
$\square_i$	$[x, z, Y]$
$\triangleright$	$[z, Y, x]$

5.3. Representación de FR mediante FRL

Observemos que las funciones recursivas y las funciones de listas tienen distintos dominios y codominios, por lo que resultara necesario establecer una correspondencia entre ambas.

5.3.1. Representabilidad

Sea $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ una función recursiva entonces si existe una función de listas F_g tal que $\forall X^k \in Dom\,(g)$ y $\forall Y$ resulta $F_g\,[X, Y] = [g\,(X)\,, X, Y]$ diremos entonces que F_g representa a la función recursiva g como función de listas.

5.3.2. Casos base

Enunciado Para toda función recursiva base g existe una función de listas F_g que la representa.

Demostración

- Funciones cero $c^{(n)}$: son iguales a 0_i.
- Funciones proyección $p_k^{(n)}$: son iguales a $\triangleright^{k-1} D_i \left(\leftrightarrow \triangleleft\right)^{k-1}$.
- Función sucesor: es igual a $D_i S_i$.

5.3.3. Composición

Enunciado Dadas las funciones recursivas $f^{(n)}$ y $\left\{g_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{n}$ con representaciones en FRL dadas por F_f y $\left\{F_{gi}^{(k)}\right\}_{i=1}^{n}$, la composición $h = \Phi\left(f, g_1, \ldots, g_n\right)$ también tiene representación en funciones de listas.

Demostración Veamos que $F_h = F_{g1} \triangleright F_{g2} \triangleright \ldots F_{gn} \triangleleft^{n-1} F_f \triangleright \Box_i^n \triangleleft$ representa dicha composición:

	$[X, Y]$
F_{g1}	$[\boldsymbol{g_1(X)}, X, Y]$
$\triangleright$	$[X, Y, \boldsymbol{g_1(X)}]$
F_{g2}	$[\boldsymbol{g_2(X)}, X, Y, g_1(X)]$
$\triangleright$	$[X, Y, g_1(X), \boldsymbol{g_2(X)}]$
$\ldots F_{gn}$	$[\boldsymbol{G_n(X)}, X, Y, g_1(X), g_2(X), \boldsymbol{\ldots, g_{n-1}(X)}]$
$\triangleleft^{n-1}$	$[\boldsymbol{g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X)}, X, Y]$
F_f	$[\boldsymbol{f\{g_1(X), \ldots, g_n(X)\}}, g_1(X), \ldots, g_n(X), X, Y]$
$=$	$[\boldsymbol{h(X)}, g_1(X), \ldots, g_n(X), X, Y]$
$\triangleright$	$[g_1(X), \ldots, g_n(X), X, Y, \boldsymbol{h(X)}]$
$\Box_i^n$	$[X, Y, h(X)]$
$\triangleleft$	$[h(X), X, Y]$

5.3.4. Recursion

Enunciado Sean las funciones recursivas $g^{(k)}$ y $h^{(k+2)}$ con representaciones en FRL dadas por F_g y F_h, entonces la función $f^{(k+1)} = R(g,h)$ también tiene representación en FRL.

Demostración Veamos que $F_f = \triangleright F_g 0_i \langle \triangleright \leftrightarrow \triangleleft F_h \triangleright \square_i S_i \leftrightarrow \triangleleft \rangle \square_i \leftrightarrow \triangleleft$ representa dicha recursion. Aplicando el primer bloque de funciones:

	$[y,X,Y]$
$\triangleright$	$[X,Y,y]$
F_g	$[\boldsymbol{g(X)},X,Y,y]$
0_i	$[\mathbf{0},g(X),X,Y,y]$
	$[0,\boldsymbol{f(0,X)},X,Y,y]$

A partir de aquí hay 2 casos:

1. $y=0$:

	$[0,f(0,X),X,Y,y]$
$\langle\ldots\rangle$	$[0,f(0,X),X,Y,0]$
$\square_i$	$[f(0,X),X,Y,0]$
$\leftrightarrow$	$[0,X,Y,f(0,X)]$
$\triangleleft$	$[f(y,X),y,X,Y]$

2. $y\neq 0$:

	$[0,f(0,X),X,Y,y]$
$\langle\triangleright$	$[f(0,X),X,Y,y,\mathbf{0}]$
$\leftrightarrow$	$[\mathbf{0},X,Y,y,\boldsymbol{f(0,X)}]$
$\triangleleft$	$[\boldsymbol{f(0,X)},0,X,Y,y]$
F_h	$[\boldsymbol{h(f(0,X),0,X)},f(0,X),0,X,Y,y]$
$(*)$	$[\boldsymbol{f(1,X)},f(0,X),0,X,Y,y]$
$\triangleright$	$[f(0,X),0,X,Y,y,\boldsymbol{f(1,X)}]$
$\square_i$	$[0,X,Y,y,f(1,X)]$
S_i	$[\mathbf{1},X,Y,y,f(1,X)]$
$\leftrightarrow$	$[\boldsymbol{f(1,X)},X,Y,y,\mathbf{1}]$
$\triangleleft\rangle$	$[\mathbf{1},f(1,X),X,Y,y]$

A partir de aquí podemos ver que el resultado de la repetición sera $[y, f(y, X), X, Y, y]$. Luego aplicando el ultimo bloque de funciones:

	$[y, f(y, X), X, Y, y]$
$\Box_i$	$[f(y, X), X, Y, y]$
$\leftrightarrow$	$[\boldsymbol{y}, X, Y, \boldsymbol{f(y, X)}]$
$\triangleleft$	$[\boldsymbol{f(y, X)}, y, X, Y]$

5.3.5. Minimizacion

Enunciado Sea la función recursiva $h^{(n+1)}$ y F_h su representación en FRL entonces la función $g^{(n)} = M[h]$ también tiene representación en FRL.

Demostración Veamos que $F_g = 0_i F_h 0_d \langle \Box_i S_i F_h \rangle \Box_i \Box_d$ representa dicha minimizacion. Aplicando el primer bloque de funciones:

	$[X, Y]$
0_i	$[\boldsymbol{0}, X, Y]$
F_h	$[\boldsymbol{h(0, X)}, 0, X, Y]$
0_d	$[h(0, X), 0, X, Y, 0]$

A partir de aquí hay 2 casos:

1. $h(0, X) = 0$:

	$[h(0, X), 0, X, Y, 0]$
$\langle \ldots \rangle$	$[h(0, X), 0, X, Y, 0]$
$\Box_i$	$[h(0, X), X, Y, 0]$
$\Box_d$	$[h(0, X), X, Y]$
	$[\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y]$
	$[g(X), X, Y]$

2. $h(0, X) \neq 0$:

	$[h(0, X), 0, X, Y, 0]$
$\langle \Box_i$	$[0, X, Y, 0]$
S_i	$[\boldsymbol{1}, X, Y, 0]$
$F_h \rangle$	$[\boldsymbol{h(1, X)}, 1, X, Y, 0]$

Vemos que en general, el efecto de la repetición es transformar $[h(t, X), t, X, Y, 0]$ en $[h(t+1, X), t+1, X, Y, 0]$. La repetición se aplicara un numero k de veces hasta que $h(k, X) = 0$ y a partir de ahí aplicando el ultimo bloque de funciones:

	$[h(k, X), k, X, Y, 0]$
	$[0, k, X, Y, 0]$
$\square_i$	$[k, X, Y, 0]$
$\square_d$	$[k, X, Y]$
	$[\mu_t(h(t, X) = 0), X, Y]$
	$[g(X), X, Y]$

5.3.6. Conclusión

Con todo lo anterior hemos demostrado que toda función recursiva puede ser representada por una función de listas, con lo que las FRL son un modelo de calculo tan poderoso como el de las FR.