PRÁCTICA 1: *Cardinalidad*

Pablo Verdes Dante Zanarini Pamela Viale Alejandro Hernandez Mauro Lucci

1. Mediante el uso de biyecciones apropiadas, demuestre cada uno de los siguientes ítems:

   a) $P = \{x \in \mathbb{N} / x \bmod 2 = 0\}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

   b) $A = \{1, 2, 3\}$ no es equipotente a $B = \{7\}$.

   c) Todos los intervalos reales cerrados y acotados son equipotentes entre si.

   d) $(-\infty, \infty)$ es equipotente a $(0, 1)$ y a $(0, \infty)$.

2. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Mostrar que:

   a) Si $A \subseteq B$ entonces $card\,(A) \preceq card\,(B)$.

   b) $card\,(A - B) \preceq card\,(A)$.

   c) $card\,(A) = card\,(A \times \{b\})$ para cualquier b.

   d) $card\,(A \times B \times C) = card\,(A \times (B \times C))$.

   e) $card\,(A \times B) = card\,(B \times A)$.

   f) Si $card\,(B) \preceq card\,(C)$ entonces $card\,(A \times B) \preceq card\,(A \times C)$.

   g) Si $card\,(A) = n$ entonces $card\,(\mathcal{P}\,(A)) = 2^n$.

3. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) La relación $\preceq$ es una relación de orden.

4. Mostrar que si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times C \sim B \times D$. ¿Vale la afirmación reciproca?

5. Demuestre que si $A \preceq B$ y $C \preceq D$, y ademas $B \cap D = \emptyset$, entonces $A \cup C \preceq B \cup D$.

6. Demuestre que $[0, 1]$ es equipotente a $[0, 1)$. Sugerencia: utilice el teorema de Cantor-Schroder-Bernstein.

7. Sea P_i el conjunto de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado $i \in \mathbb{N}_0$. (Considere al polinomio nulo como un polinomio de grado 0).

   a) Describa por comprensión los conjuntos P_0, P_3 y P_n.

   b) Describa al conjunto P de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado natural, en términos de los conjuntos P_i.

   c) Defina una función $f : D_i \to \mathbb{Z}^{i+1}$ y demuestre que es inyectiva.

   d) Valiéndose de todo lo anterior y de las propiedades de las relaciones $\preceq$ y $\sim$, demuestre que P es numerable.

8. Mostrar que los siguientes conjuntos son infinito numerables:

   a) $A = \left\{ \frac{\sqrt[m]{m}}{n^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

   b) $B = \{$sucesiones de la forma $\langle s_0, s_0 + r, s_0 + 2r, \ldots, s_0 + nr, \ldots \rangle / s_0, r \in \mathbb{Z}\}$.

   c) $C = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b > a\}$.

9. Un numero $r \in \mathbb{C}$ se dice algebraico si y solo si es la solución de una ecuación polinómica a coeficientes enteros, es decir si y solo si: $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Probar que:

   a) Todo numero racional es algebraico.

   b) ¿Que se puede concluir a partir del ítem anterior con respecto a la cardinalidad del conjunto de los números algebraicos?

   c) $\sqrt{2}$ es algebraico.

   d) i es algebraico.

   e) El conjunto de los números algebraicos es numerable.

10. Los números que no son algebraicos se denominan trascendentes.

    a) Teniendo como hipótesis que $\mathbb{C}$ no es numerable, probar que existen números trascendentes.

    b) Probar que los números trascendentes no son numerables.

    Sugerencia: en ambos casos razonar por el absurdo y considerar a los reales como la unión de los reales algebraicos y trascendentes.

11. Se sabe que $\aleph_0 \prec c$, donde $\aleph_0 = card\,(\mathbb{N})$ y $c = card\,(\mathbb{R})$. Pero: ¿existe un cardinal α tal que $\aleph_0 \prec \alpha \prec c$? Cantor, al no poder dar una respuesta a esta pregunta, conjetura la validez de la llamada hipótesis del continuo. Esta expresa que:

$$\text{No existe un cardinal } \alpha \text{ tal que } \aleph_0 \prec \alpha \prec c$$

A partir de esto, al cardinal c se lo suele llamar también $\aleph_1$. Utilizando esta hipótesis, se pide demostrar el siguiente teorema:

$$card\,(A) = \aleph_0 \text{ y } card\,(B \cup A) = \aleph_1 \Rightarrow card\,(B) = \aleph_1$$

12. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. Σ^* denota el conjunto de todas las cadenas (secuencias finitas y ordenadas de símbolos) sobre el alfabeto Σ.

    a) ¿Cuantas cadenas se pueden construir sobre el alfabeto Σ?

    b) Teniendo en cuenta que un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^* ¿Cuantos lenguajes existen sobre el alfabeto Σ?

13.

    a) Muestre que la cardinalidad de $\mathcal{P}\,(X)$ es igual a la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de X en $\{0, 1\}$.

    b) Pruebe que $card\,(\{f/f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}) \preceq card\,(\{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$.

    c) Concluya que $\aleph_0 \prec \mathcal{P}\,(\mathbb{N}) \preceq card\,(\{f/f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$.

    d) Todo programa de computadora puede considerarse como una cadena sobre el alfabeto presente en el sistema. Por lo tanto, ¿cuantos programas se pueden programar en una maquina?

    e) ¿Que conclusiones pueden sacarse a partir de los últimos dos ítems?