Funciones Recursivas

Pablo Verdes. LCC.

9 de Abril de 2019.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
  - Funciones parciales y totales.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
  - Funciones parciales y totales.
  - Relacion entre FTP y funciones totales.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
  - Funciones parciales y totales.
  - Relacion entre FTP y funciones totales.
  - La funcion de Ackermann.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
    - Funciones parciales y totales.
    - Relacion entre FTP y funciones totales.
    - La funcion de Ackermann.
- *Nuevo operador*: Minimizador.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
    - Funciones parciales y totales.
    - Relacion entre FTP y funciones totales.
    - La funcion de Ackermann.
- *Nuevo operador*: Minimizador.
- *Funciones recursivas*: Definicion.

Contenidos

- *Motivacion*: Las FRP no alcanza.
    - Funciones parciales y totales.
    - Relacion entre FTP y funciones totales.
    - La funcion de Ackermann.
- *Nuevo operador*: Minimizador.
- *Funciones recursivas*: Definicion.
- *Tesis de Church*.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *parcial* si no esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Ejemplos:

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *parcial* si no esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Ejemplos:
  - La funcion:

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{N} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto f(n) = n/3 \end{array}$$

solo esta definida para $n \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *parcial* si no esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Ejemplos:
  - La funcion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = n/3 \end{aligned}$$

    solo esta definida para $n \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.
  - La funcion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = \sqrt{n} \end{aligned}$$

    solo esta definida para $n \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *parcial* si no esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$. Ejemplos:
  - La funcion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = n/3 \end{aligned}$$

    solo esta definida para $n \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.
  - La funcion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n) = \sqrt{n} \end{aligned}$$

    solo esta definida para $n \in \{0, 1, 4, 9, 16 , 25, \ldots\}$.
  - La funcion definida como: $f(0) = 0$; $f(n + 2) = f(n) + 3$.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *total* si esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *total* si esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.
- *Teorema*: Si $f \in FRP$ entonces f es una funcion total. *Demostracion*: Por induccion sobre el conjunto FRP.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *total* si esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.
- *Teorema*: Si $f \in FRP$ entonces f es una funcion total. *Demostracion*: Por induccion sobre el conjunto FRP.
  - *Caso base*: Trivial. Las funciones base $c^{(k)}$, $p_i^{(k)}$ y $s^{(1)}$ son totales.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *total* si esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.
- *Teorema*: Si $f \in$ FRP entonces f es una funcion total. *Demostracion*: Por induccion sobre el conjunto FRP.
  - *Caso base*: Trivial. Las funciones base $c^{(k)}$, $p_i^{(k)}$ y $s^{(1)}$ son totales.
  - *Composicion*: Supongamos que $f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son totales y veamos que

$$h = \phi(f, g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

tambien es total. Dado $X \in \mathbb{N}^k$ podemos calcular

$$Y = (g_1(X), \ldots, g_n(X))$$

pues cada g_i es total (H.I.). Como f es total en $\mathbb{N}^n$, podemos tambien calcular f(Y). Por lo tanto $\exists\ z \in \mathbb{N}$ tal que $z = F(Y) = h(X)$. Dado que $\forall\ X \in \mathbb{N}^k\ \exists\ h(X)$, concluimos que h es una funcion total.

Las FRP no alcanzan

- *Definicion*: Una funcion numerica $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ se dice *total* si esta definida sobre todos los elementos de $\mathbb{N}^k$.
- *Teorema*: Si $f \in$ FRP entonces f es una funcion total. *Demostracion*: Por induccion sobre el conjunto FRP.
  - *Caso base*: Trivial. Las funciones base $c^{(k)}$, $p_i^{(k)}$ y $s^{(1)}$ son totales.
  - *Composicion*: Supongamos que $f^{(n)}, g_1^{(k)}, \ldots, g_n^{(k)}$ son totales y veamos que

    $$h = \phi(f, g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

    tambien es total. Dado $X \in \mathbb{N}^k$ podemos calcular

    $$Y = (g_1(X), \ldots, g_n(X))$$

    pues cada g_i es total (H.I.). Como f es total en $\mathbb{N}^n$, podemos tambien calcular $f(Y)$. Por lo tanto $\exists\, z \in \mathbb{N}$ tal que $z = F(Y) = h(X)$. Dado que $\forall\, X \in \mathbb{N}^k\ \exists\, h(X)$, concluimos que h es una funcion total.
  - *Recursion*: Ejercicio 1, Practica 4.

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total}\ \}$$

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total }\}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total }\}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total $\Rightarrow f \in$ FRP?

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total }\}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total ⇒ f ∈ FRP?
- La respuesta es no: veremos a continuacion la funcion de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\text{FRP} \subseteq \{ \text{ f} \mid \text{f es funcion total } \}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total $\Rightarrow$ f $\in$ FRP?
- La respuesta es no: veremos a continuacion la funcion de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.
- Para demostrar que dicha funcion no es FRP, la estrategia sera demostrar que todas las FRP cumplen cierta propiedad, mientras quela funcion de Ackermann no la cumple.

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\boxed{\text{FRP} \subseteq \{ f \mid f \text{ es funcion total } \}}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total $\Rightarrow f \in$ FRP?
- La respuesta es no: veremos a continuacion la funcion de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.
- Para demostrar que dicha funcion no es FRP, la estrategia sera demostrar que todas las FRP cumplen cierta propiedad, mientras quela funcion de Ackermann no la cumple.
- Resumiendo, las FRP no pueden representar a:

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\boxed{\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total }\}}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total $\Rightarrow$ f $\in$ FRP?
- La respuesta es no: veremos a continuacion la funcion de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.
- Para demostrar que dicha funcion no es FRP, la estrategia sera demostrar que todas las FRP cumplen cierta propiedad, mientras quela funcion de Ackermann no la cumple.
- Resumiendo, las FRP no pueden representar a:
  - Ninguna funcion parcial.

Las FRP no alcanzan

- En otras palabras, acabamos de probar que

$$\boxed{\text{FRP} \subseteq \{\ f \mid f \text{ es funcion total }\}}$$

- Es decir, las FRP no pueden representar funciones parciales.
- Consideremos la pregunta inversa. ¿Sera que todas las funcionestotales son FRP? Es decir, ¿sera cierto que f total $\Rightarrow$ f $\in$ FRP?
- La respuesta es no: veremos a continuacion la funcion de Ackermann, que es total pero no recursiva primitiva.
- Para demostrar que dicha funcion no es FRP, la estrategia sera demostrar que todas las FRP cumplen cierta propiedad, mientras quela funcion de Ackermann no la cumple.
- Resumiendo, las FRP no pueden representar a:
    - Ninguna funcion parcial.
    - Todas las funciones totales.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).
  - El concepto "f mayora a g", que indicaremos $f \uparrow g$.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).
  - El concepto “f mayora a g”, que indicaremos $f \uparrow g$.

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).
  - El concepto "f mayora a g", que indicaremos $f \uparrow g$.

  y demostraremos:

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).
  - El concepto “f mayora a g”, que indicaremos $f \uparrow g$.

  y demostraremos:
  1. $g \in FRP \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \mid f_k \uparrow g$

Las FRP no alcanzan

- Deciamos que vamos a demostrar que cierta funcion (llamada de Ackermann) no es FRP mostrando que:
  - Todos los elementos del conjunto FRP satisfacen cierta propiedad.
  - La funcion de Ackermann no la satisface.
- En terminos coloquiales, dicha propiedad sera la siguiente:
  Ser mayorado por algun elemento de la sucesion de Ackerman
- Para formalizar este argumento, a continuacion definiremos:
  - La sucesion (o serie) de Ackermann, $\{ f_k(x) \}$ con $k \in \mathbb{N}$.
  - La funcion de Ackemann, ACK(x).
  - El concepto "f mayora a g", que indicaremos $f \uparrow g$.

  y demostraremos:
  1. $g \in FRP \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \mid f_k \uparrow g$
  2. $\nexists\, k \in \mathbb{N} \mid f_k \uparrow ACK$

Sucesion (o serie) de Ackermann

- Consideremos la siguiente sucesion de funciones, que llamaremos *sucesion (o serie) de Ackermann*:

f(x) = s(x) = x + 1
f(x) = f(x) = s