TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FAKULTÄT II – INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Christian Mehl, Thorsten Lucke

ANALYSIS I
WINTERSEMESTER 24/25

Hausaufgabenblatt Nr. 2

Induktive Mengen, Supremum und Infimum

Abgabe bis Freitag, 8. November 2024

Aufgabe 2.1 (4 Punkte). Sei $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass

$$(1-a)^2 \sum_{k=1}^{2024} k a^{k-1} = 1 - 2025 a^{2024} + 2024 a^{2025}$$

gilt.

Aufgabe 2.2 (6 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Menge $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ist induktiv.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Es existiert kein $p \in \mathbb{N}$ mit $n < p < n+1$.

Hinweis: Sie dürfen zum Lösen dieser Aufgabe nicht auf Satz 1.24 verweisen!

Aufgabe 2.3 (5 Punkte). Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{und} \quad A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Es gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(ii) Es ist $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Aufgabe 2.4 (5 Punkte). Untersuchen Sie, ob die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ mit } nx = n^2 + 2\}$$

nach oben bzw. nach unten beschränkt ist und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Entscheiden Sie außerdem, ob dies schon Maximum bzw. Minimum von M sind.