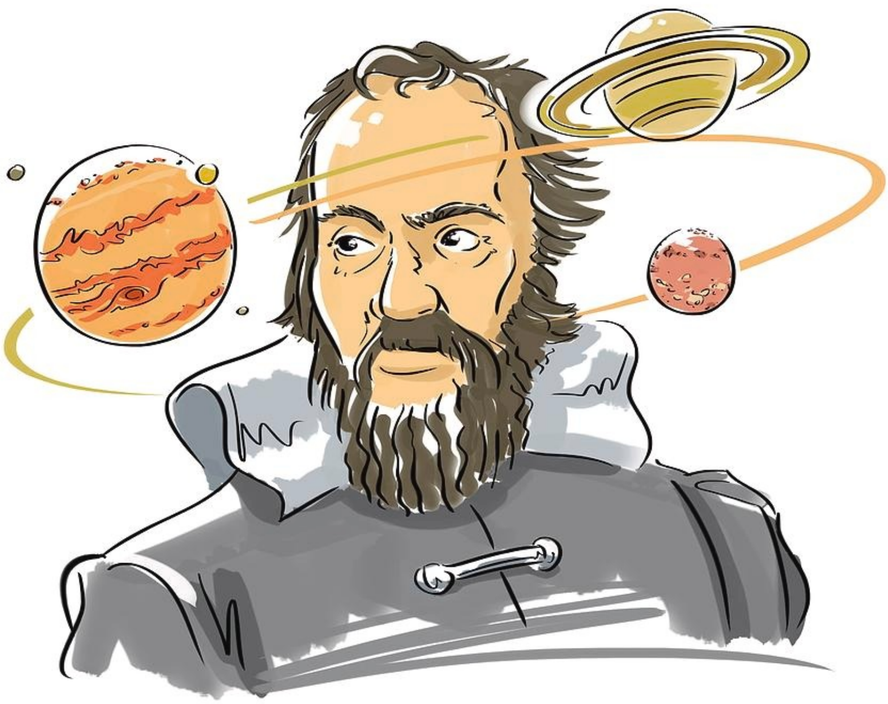
Esercizi di Fisica

Scienze Agrarie / Enologia

Damiano Del Sarto, Guglielmo Lami

11 marzo 2019



"La verità riesce a imporsi solo nella misura in cui noi la imponiamo; la vittoria della ragione non può essere che la vittoria di coloro che ragionano."

Vita di Galileo - Bertolt Brecht

Prefazione

Guida alla consultazione

La presente raccolta ha l'obiettivo di consentire al Lettore di prendere dimestichezza coi fondamenti teorici e pratici della Fisica di base e (quindi) di superare agevolmente l'Esame di Fisica Generale per Agraria o Enologia. Un consiglio: la Fisica NON si apprende facendo esercizi. Nella Fisica ogni definizione, ogni concetto, ogni formula ha un ruolo preciso e matematicamente ben definito all'interno di una teoria coerente, con la quale è necessario avere un minimo di confidenza per poter trarre profitto dagli esercizi. In altre parole: è senza dubbio preferibile prima studiare bene la teoria e poi cimentarsi con gli esercizi. Sicuramente questi risulteranno molto più facili se avrete già chiara la struttura logica della teoria.

La raccolta è suddivisa in Capitoli, ognuno dei quali riguarda un macro-argomento del programma di Fisica Generale. All'interno di ogni capitolo troverete degli Esercizi e dei Problemi. I primi sono quesiti di carattere molto semplice, che richiedono la sola applicazione di concetti e formule basilari, che dovrebbero essere stati appresi a lezione e sul libro di testo. É quindi indispensabile saperli risolvere senza difficoltà se si vuole superare l'esame. I Problemi invece hanno una struttura più articolata e richiedono, oltre allo Studio, logica e talvolta un pizzico di intuito. Sono catalogati in base alla difficoltà: quelli una stella sono poco più complessi degli Esercizi e corrispondono a un più che sufficiente livello di conoscenza; quelli due e tre stelle corrispondono a livelli di conoscenza buoni o addirittura ottimi e dovrebbero permettere il superamento della prova finale senza incertezze.

All'inizio della raccolta troverete anche un piccolo prontuario su come si affronta un esercizio di Fisica. Pensiamo che potrebbe risultare utile, specialmente per coloro che non hanno mai avuto occasione, alle Scuole Superiori, di svolgere da soli problemi di Fisica.

Buono studio e buon lavoro!

Per errori o suggerimenti scrivete a: d.delsarto2@studenti.unipi.it e guglami@gmail.com

Come si risolve un esercizio di Fisica

Quello che segue è un riferimento su come si imposta un problema di Fisica. È importante rimarcare che questo è solo un *aiuto* a chi si cimenta nella talvolta ardua fatica dello svolgere problemi.

Un consiglio generale è quello di cercare sempre di capire cosa si sta facendo e non procedere a caso "rigirando" le formule: se questo approccio può funzionare su esercizi più semplici vi garantiamo che fallirà in situazioni più complesse come quelle delle prove in itinere o delle prove scritte.

Ecco dunque alcuni consigli:

1. **Disegnate un grafico**: nel grafico cercate di includere tutte le quantità rilevanti allo svolgimento del problema (forze, masse, distanze...). Se per problemi semplici può sembrarvi tempo sprecato, un grafico fatto *bene* sarà uno devi vostri migliori alleati in problemi più articolati.
2. **Scegliete il riferimento migliore**: la scelta del sistema di riferimento spetta a voi: siete liberi di posizionare l'origine dove volete e di utilizzare coordinate cartesiane o polari. Spesso una scelta saggia del sistema di riferimento semplifica molto i calcoli.
3. **Scrivete i dati e le incognite**: per chi è alle prime armi con il calcolo letterale è facile confondere gli elementi noti da quelle che sono le incognite richieste. Farsi uno specchietto a inizio problema aiuta a non confondersi e a non perdere tempo.
4. **Risolvete i problemi in modo letterale**: oltre all'innegabile vantaggio di aver risolto un numero infinito di problemi, lasciando i dati espressi tramite un parametro (ad esempio invece di inserire il valore dell'angolo si può scrivere θ), si ha un procedimento più "pulito" ed eventualmente si possono sfruttare semplificazioni algebriche (ad es. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$).
5. **Controllate i casi limite**: dove possibile è interessante verificare se la descrizione che abbiamo dato del problema funziona andando a osservare alcuni casi limite. Ad esempio quando si tratta di angoli è interessate vedere cosa succede quando valgono 0° o 90°: sono spesso casi più intuitivi e una rapida verifica.
6. **Controllate le unità di misura**: nello specchietto del punto 2 è importante annotare anche le unità di misura di ogni dato in nostro possesso e delle incognite. Ad esempio se come dato ho la lunghezza a del lato di un triangolo so che la sua unità di misura in KMS sarà $[a] = \text{m}$, questo mi è utile perché, ottenuta l'espressione che identifica l'incognita cercata, posso controllare velocemente se corrisponde all'unità di misura che mi aspetto e che ho annotato nello specchietto (ad esempio per una velocità mi aspetto delle dimensioni m/s).
7. **Controllate che le vostre equazioni abbiano senso**: non si possono sommare mele e pere! Quindi non posso sommare quantità che hanno dimensioni diverse (ad esempio metri con kg). Allo stesso modo vettori devono essere sommati con altri vettori e nelle equazioni vettoriali dovrò avere vettori al membro sinistro uguagliati a vettori al membro destro.
8. **Controllate gli argomenti di alcune funzioni**: funzioni esponenziali (a^x), logaritmiche ($\log(x)$) e trigonometriche ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\text{atan}(x)$, ecc...) devono avere argomento *adimensionale*. Se quando eseguite il controllo dimensionale l'argomento di tali funzioni non è adimensionale avete sbagliato qualcosa.

Indice

1 Cinematica

1.1 Esercizi

Esercizio 1

Un segmento rettilineo delimitato da due punti A e B è lungo $\Delta x = 230$ km. Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniforme da A verso B. Qual è la sua *velocità scalare media* $\bar{v}$ se percorre il tratto in un tempo $\Delta t = 3.25$ h? Esprimere il risultato in km/h e in m/s.

Esercizio 2

Un cavallo si allontana dal suo addestratore percorrendo in linea retta 130 m in 14 s. Subito dopo si gira improvvisamente e torna al galoppo verso l'addestratore, percorrendo metà della distanza in 4.8 s. Considerando come positivo il verso della velocità del cavallo quando questi si allontana dall'addestratore e supponendo che la velocità del cavallo sia costante in ogni tratto, determinare:

a. il modulo della velocità del cavallo quando si allontana (v_1);

b. il modulo della velocità del cavallo quando torna indietro (v_2);

c. la *velocità scalare media* $\bar{v}_{\text{scalare}}$ nell'intero percorso;

d. la *velocità vettoriale media* $\bar{v}_{\text{vettoriale}}$ nell'intero percorso.

Esercizio 3

Due locomotive si muovono su due binari rettilinei fra loro paralleli. Entrambe partono al tempo $t = 0$, una dalla posizione $x = 0$ e l'altra dalla posizione $x_0 = 8.5$ km. La prima procede ad una velocità costante di +20 km/h, l'altra a una velocità costante di −30 km/h. Dopo quanto tempo si incontreranno? In che punto si incontreranno? Esprimere i risultati rispettivamente in secondi e in km.

Esercizio 4

Alcuni amici partono per un viaggio con due macchine. La prima parte al tempo $t = 0$ e procede a una velocità costante di 24 m/s; la seconda parte 100 s dopo la prima. A 12 km dal punto di partenza c'è un bivio. Quale deve essere la velocità v_1 della seconda macchina affinché questa raggiunga la prima macchina al bivio? Al bivio si accorgono di non aver portato la cartina e decidono di tornare insieme al punto di partenza. Percorsi 8 km in 300 s, ritrovano la cartina e si fermano. Calcolare la velocità scalare media $\bar{v}$ e la velocità vettoriale media v_m di entrambe le macchine.

Esercizio 5

Un aeroplano percorre 3100 km a una velocità costante di 790 km/h; poi incontra un vento di coda che fa aumenteare la sua velocità di 990 km/h per i successivi 2800 km. Qual è la durata complessiva del viaggio? Qual è la velocità scalare media dell'aeroplano in questo viaggio?

Esercizio 6

Una palla da bowling che viaggia con velocità costante v coplisce i birilli posti in fondo ad una pista da bowling lunga 16.5 m. Il giocatore sente il rumore della palla che colpisce i birilli 2.50 s dopo che la palla ha lasciato la sua mano. Quanto valeva v? Si assuma un valore della velocità del suono pari a $v_s \simeq 340$ m/s.

Esercizio 7

Un'automobile che viaggia su un rettilineo alla velocità costante di 95 km/h sorpassa una treno lungo 1.1 km che va nella stessa direzione su un binario parallelo alla strada. Se la velocità del treno è costante e pari a 75 km/h, quanto tempo impiegherà l'auto a superarlo e quale distanza avrà percorso in questo intervallo di tempo? Come cambiano i risultati se il treno viaggia con la velocità in modulo uguale a prima ma con verso opposto rispetto a quella dell'auto?

Esercizio 8

Un treno parte da una stazione da fermo e percorre, con accelerazione a costante, 1.5 km in 90 s lungo un rettilineo. Quanto vale a? A 90 s dalla partenza, qual è la sua velocità v? E la velocità media $\bar{v}$ fino a quel momento?

Esercizio 9

Un aeroplano leggero deve raggiungere una velocità di 30 m/s per poter decollare. Se la sua accelerazione è di 3 m/s^2 costante, quanto deve essere la lunghezza minima della pista per permettere il decollo?

Esercizio 10

Una macchina viaggia di moto rettilineo uniforme alla velocità di 100 km/h lungo un rettilineo. All'istante $t = 0$ inizia a frenare con un'accelerazione costante di -20 m/s^2 fino a fermarsi completamente. A che istante di tempo si ferma? E quanto spazio ha percorso? Ripetere i calcoli nel caso in cui la macchina abbia velocità iniziale di 200 km/h.

Esercizio 11

Un proiettile viene sparato verticalmente *verso l'alto* con velocità iniziale pari a 392 m/s. Calcolare l'altezza massima raggiunta e il tempo impiegato (accelerazione di gravità $g = 9.8\,m/s^2$).

Esercizio 12

Una macchina da corsa parte da ferma, accelera per 5 secondi con un'accelerazione di 8 m/s^2, mantiene la velocità raggiunta per altri 5 secondi e poi frena con un'accelerazione pari a $-10\,\text{m/s}^2$ fino a fermarsi. Quanto spazio ha percorso in tutto?

Esercizio 13

Determinare la distanza di arresto per un'automobile con una velocità iniziale di 95 km/h e un tempo di reazione umana di 1.0s: (a) per un'accelerazione $a = -4.0$ m/s^2; (b) per $a = -8.0$ m/s^2.

Esercizio 14

Una lumaca si muove lungo una pista di sabbia rettilinea. La retta lungo la quale si sposta è indicata dal versore $\hat{x}$ di un sistema di riferimento cartesiano. All'istante iniziale $t_i = 0$ s essa si trova nel punto $x_i = 0$. Subito dopo inizia a spostarsi e la sua velocità all'istante t generico è: $\vec{v}(t) = v(t)\hat{x}$. Un naturalista si interessa del movimento della lumaca tra $t_i = 0$ e $t_f = 8.0$ s e traccia un grafico mettendo sulle ascisse il tempo t (in s) e sulle ordinate la velocità $v(t)$ (in cm/s). Il risultato è riportato in Figura 1.1. Che tipo di moto caratterizza la lumaca nei tratti a, b, c, d, e, f, g, h? Qual è la massima velocità raggiunta dalla lumaca? Esprimerla in m/s e km/h. Qual è la massima accelerazione raggiunta dalla lumaca? Esprimerla in m/s^2 e km/h^2. Sapete dire in quale punto x_f si trova la lumaca a $t = t_f$? Qual è stata la sua *velocità vettoriale media*? Quanta distanza ha coperto in totale?

Esercizio 15

Usain Bolt e Tyson Gay partecipano alla finale dei 100 metri piani. Bolt, sin dallo sparo iniziale, mantiene una velocità costante di 36 km/h. Gay, invece, effettua un'accelerazione di 1 m/s^2 per tutta la durata della gara. Chi arriva prima? Con quali velocità tagliano il traguardo?

Esercizio 16

Un vaso di fiori viene lasciato cadere da una finestra del terzo piano (10 m di altezza). Quale tempo Δt impiega il vaso a cadere? Con che velocità arriva per terra? Se invece il vaso è stato lanciato verso il basso con una velocità di 1 m/s, come cambiano le risposte alle domande precedenti?

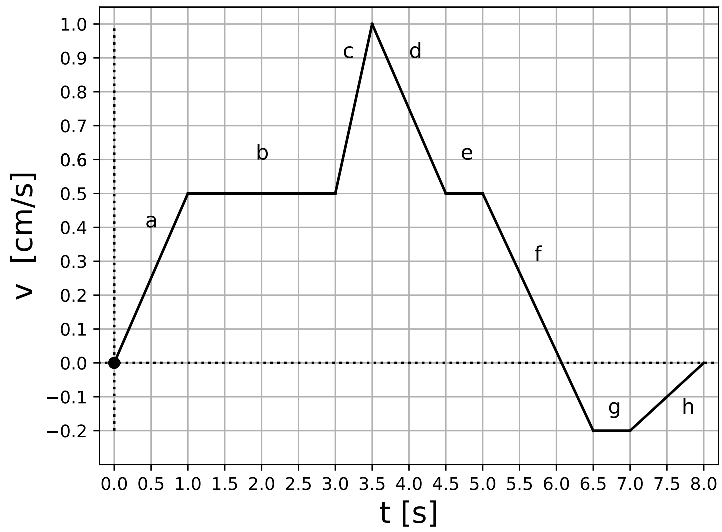


Figura 1.1: Grafico t (ascisse)/$v(t)$ (ordinate) per il moto della lumaca oggetto dell'esercizio.

b) Il ragionamento per questo secondo caso è identico al primo, tenendo però conto che ora $v_0 = 1\, m/s$. Calcoliamo allora il Δt_1 in questo caso:

$$y(\Delta t_1) = h = v_0 \Delta t_1 + \frac{1}{2} g \Delta t_1^2$$

da cui:

$$\Delta t_1 = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{v_0^2}{g^2}} = -\frac{1}{9.81} + \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9.81} + \frac{1}{(9.81)^2}}\, s = 1.33\,\mathrm{s}$$

Da notare che, essendo un'equazione di secondo grado in Δt_1, essa ha due soluzioni. Delle due, abbiamo però scelto l'unica che fornisce $\Delta t_1 \geq 0$.
Allo stesso modo del punto a), calcoliamo la velocità con cui il vaso arriva a terra:

$$v(\Delta t_1) = v_0 + g \cdot \Delta t_1 = 1 + 9.81 \cdot 1.33\, \frac{m}{s} = 14.04\, \frac{m}{s}$$

Esercizio 17

Sulla Luna l'accelerazione di gravità è circa $\frac{1}{6}$ di quella sulla Terra. Se un oggetto è lanciato verso l'alto sulla Luna con velocità iniziale v_0, di quando arriverà più in alto rispetto ad un lancio sulla Terra con la stessa velocità iniziale?

Esercizio 18

Una persona si butta in una piscina da una trampolino alto $h = 4.0$ m. Il suo moto avviene esclusivamente lungo l'asse y. La persona si ferma quando si trova 2.0 m al di sotto della superficie dell'acqua. Stimate la decelerazione media della persona sotto l'acqua.

1.2 Problemi

1.2.1 Moto uniformemente accelerato ⋆

Una pallina da tennis viene lanciata da terra con una velocità iniziale $\vec{v}_0$ che forma un angolo di 60° con l'asse orizzontale, cioè con il versore $\hat{x}$. Nel sistema di riferimento cartesiano scelto l'accelerazione di gravità è $\vec{g} = -g\hat{y}$, con $g \simeq 9.81$ m/s^2, e il punto di partenza della pallina è l'origine O del sistema. Scrivere esplicitamente le due componenti $(v_0)_x$ e $(v_0)_y$ del vettore $\vec{v}_0$. Scrivere le due funzioni $x(t)$ e $y(t)$, ovvero la legge oraria della pallina lungo i due assi. Ricavare la traiettoria, ovvero l'equazione $y(x)$ che lega la coordinata x alla coordinata y in un generico punto del percorso tracciato dalla pallina. Trovare le coordinate del punto di massima altezza raggiunto dalla pallina. Quando la pallina si trova in questo punto, qual è il suo vettore velocità $\vec{v}_1$? E la sua accelerazione? Scrivere esplicitamente le componenti di entrambi i vettori. Calcolare la gittata del lancio, ovvero la distanza della pallina da O nel momento in cui riatterra. Trovarne il valore numerico per un valore di v *ragionevolmente* simile alla velocità che potreste effettivamente imprimere alla pallina lanciandola a mano. Calcolare anche il tempo t_f in cui la pallina riatterra e il vettore velocità $\vec{v}_2$ in questo istante.

Soluzione

Il vettore velocità iniziale è:

$$\vec{v}_0 = \big((v_0)_x, (v_0)_y\big) = |v_0|\big(\cos(60°), \sin(60°)\big) = |v_0|\big(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$$

Il moto è uniformemente accelerato lungo $\hat{y}$:

$$y(t) = (v_0)_y t - \frac{1}{2}gt^2 = |v_0|\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Lungo $\hat{x}$ invece la pallina mantiene una velocità costante e quindi:

$$x(t) = (v_0)_x t = |v_0|\frac{1}{2}t$$

La traiettoria $y(x)$ lega le coordinate x e y e quindi si può ricavare mettendo a sistema le due ultime equazioni. Infatti se utilizziamo la seconda per ricavare:

$$t = \frac{2x(t)}{|v_0|}$$

sostituendo nella prima otteniamo:

$$y(t) = |v_0|\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2x(t)}{|v_0|} - \frac{1}{2}g\frac{4x^2(t)}{|v_0|^2}$$

e quindi la traiettoria è:

$$y = \sqrt{3}x - \frac{2g}{|v_0|^2}x^2$$

Si tratta di una parabola con concavità rivolta verso il basso. Il punto di massima altezza per la pallina corrisponde al vertice della parabola. Le coordinate del vertice V si possono ricavare utilizzando la nota formula:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad V = \big(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\big)$$

(oppure semplicemente calcolando la derivata $y'(x)$ e ponendola uguale a 0). Sostituendo $a = -\frac{2g}{|v_0|^2}$, $b = \sqrt{3}$ e $c = 0$ si ottiene:

$$V = \Big(\frac{\sqrt{3}|v_0|^2}{4g}, \frac{3|v_0|^2}{8g}\Big)$$

Detta $\vec{v_1}$ la velocità della pallina in questo punto, si avrà $(v_1)_y = 0$. Infatti: se fosse $(v_1)_y > 0$ allora all'istante di tempo successivo troveremo la pallina a una coordinata y maggiore, e quindi V non sarebbe il massimo in altezza della traiettoria, cosa assurda; se invece fosse $(v_1)_y < 0$ allora all'istante di tempo immediatamente precedente avremmo trovato la pallina a una coordinata y maggiore, di nuovo cosa assurda. La componente $(v_1)_x$ è invece uguale a $(v_0)_x = \frac{|v_0|}{2}$. Quando la pallina si trova in V ha banalmente accelerazione $\vec{a}$ uguale a $\vec{g}$, come del resto in ogni punto della sua traiettoria. Il punto in cui la pallina incontra di nuovo il terreno, ovvero l'asse x, si trova uguagliando a 0 l'espressione per $y(x)$:

$$x\big(\sqrt{3} - \frac{2g}{|v_0|^2}x\big) = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni: $x = 0$ e $x = \frac{\sqrt{3}|v_0|^2}{2g}$. La prima corrisponde all'origine O cioè al punto di lancio, la seconda al punto di atterraggio. La gittata è dunque:

$$d = \frac{\sqrt{3}|v_0|^2}{2g}$$

Notiamo che d è esattamente uguale a 2 volte la coordinata x di V, come ci si poteva aspettare notando la simmetria della parabola rispetto all'asse verticale passante per V. Un valore ragionevole per $|v_0|$ può essere attorno a 10 m/s. Per esempio per $|v_0| = 8$ m/s si ottiene: $d \simeq 5.65$ m. La traiettoria per questo valore è illustrata in Figura 1.2.

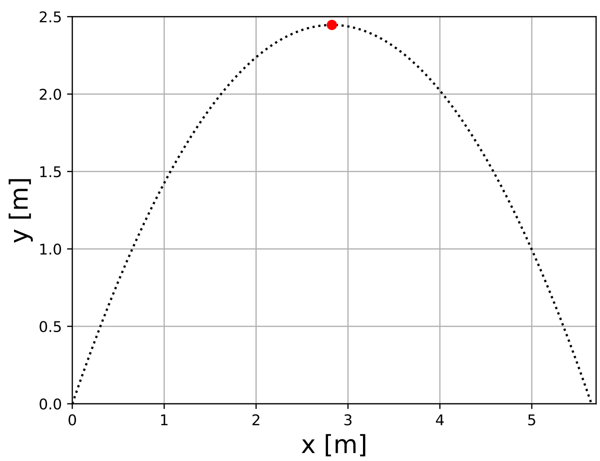


Figura 1.2: Traiettoria parabolica percorsa dalla pallina ($|v_0| = 8$ m/s).

Per ricavare t_f basta uguagliare la gittata d a $x(t_f)$:

$$\frac{\sqrt{3}|v_0|^2}{2g} = \frac{|v_0|}{2}t_f \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{\sqrt{3}|v_0|}{g}$$

Le componenti di $\vec{v}_1$ saranno allora:

$$(v_1)_x = (v_0)_x = \frac{|v_0|}{2}$$

$$(v_1)_y = (v_0)_y - gt_f = \frac{|v_0|\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}|v_0| = -\frac{|v_0|\sqrt{3}}{2}$$

Notiamo che $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_0|$.

1.2.2 Moto uniformemente accelerato bis ⋆

Una particella si muove su un piano cartesiano con accelerazione costante e pari a:

$$\vec{a} = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Che angolo forma l'accelerazione con l'asse delle x? Sapendo che al tempo $t_0 = 0$ la velocità della particella è $\vec{v}_0 = (v_0, 0)$ e la sua posizione $\vec{r}_0 = (0, \frac{d}{2})$, scrivere la legge oraria $\vec{r}(t)$, scomponendola poi nelle due componenti. In quale istante di tempo t_1 la particella attraversa la retta descritta dall'equazione $y(x) = -x + 2d$? Qual è il suo vettore velocità in questo istante? Che angolo forma con la velocità iniziale $\vec{v}_0$? Che angolo forma il vettore *variazione di velocità* fra gli istanti t_1 e t_0 con $\vec{v}_0$? Trovare i risultati numerici per $v_0 = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $d = 2$ m e $a = g/4$ con g l'accelerazione di gravità ($g \simeq 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

Soluzione

Il vettore $\vec{a}$ forma un angolo $\alpha = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 45°$ con l'asse delle x. Il moto della particella è uniformemente accelerato e quindi la sua legge oraria si scrive:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

Che scomposta in componenti diventa:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}at^2 + v_0 t$$

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}at^2 + \frac{d}{2}$$

All'istante di tempo t_1 in cui la particella attraversa la retta $y(x) = -x + 2d$ si ha, uguagliando la coordinata y al tempo t_1 per la retta e per la legge oraria:

$$y(t_1) = -x(t_1) + 2d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}at_1^2 + \frac{d}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}at_1^2 - v_0 t_1 + 2d$$

Si ottiene quindi un'equazione di secondo grado per t_1:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}at_1^2 + v_0 t_1 - \frac{3}{2}d = 0$$

Le due soluzioni sono:

$$\frac{1}{\sqrt{2}a}\left(-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 3\sqrt{2}ad}\right)$$

Solo la soluzione col + è positiva, per cui è quella che ci interessa. Con i valori numerici indicati nel testo si ottiene:

$$t_1 \simeq 1.06 \text{ s}$$

La velocità della particella a un generico istante t è:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

che in componenti diventa:

$$v_x(t) = v_0 + \frac{a}{\sqrt{2}}t$$
$$v_y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}t$$

L'angolo che questo vettore forma con l'asse delle x, e quindi con la velocità iniziale è $\vec{v}_0$, è:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}t}{v_0 + \frac{a}{\sqrt{2}}t}\right)$$

Sostituendo $t = t_1$ si trova:

$$\theta \approx 33°$$

La variazione di velocità è $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}t$ o in componenti:

$$\Delta v_x(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}t$$
$$\Delta v_y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}t$$

che è un vettore inclinato di $\frac{\pi}{4} = 45°$ rispetto all'origine. La retta, la traiettoria della particella e i vettori velocità $\vec{v_0}$ e $\vec{v}(t_1)$ sono rappresentati in Figura 1.3.

1.2.3 Lancio di un sasso ⋆

Una pietra viene lanciata verticalmente *verso l'alto*, con una velocità iniziale di 12.0 m/s, dal bordo di uno strapiombo alto 70 m. (a) Dopo quanto tempo raggiungerà la base dello strapiombo? (b) Quale sarà la sua velocità appena prima di colpire il suolo? (c) Quale sarà la distanza totale percorsa al momento dell'impatto?

Soluzione

La pietra si muove di moto uniformemente accelerato lungo l'asse y (nel sistema cartesiano in cui $\vec{g} = -g\hat{y}$). Detta $v_0 = +12.0$ m/s la velocità iniziale della pietra, la legge oraria del corpo è:

$$y(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

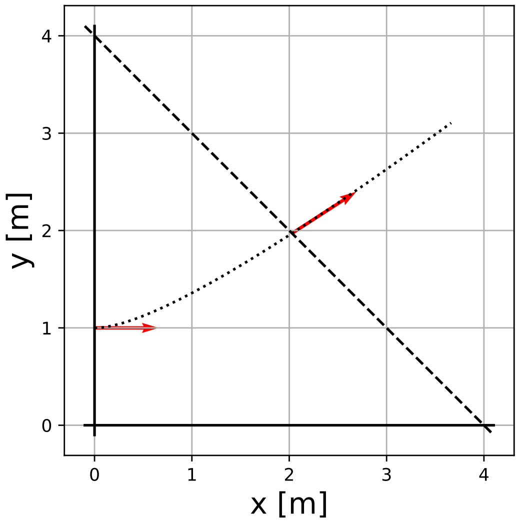


Figura 1.3: Retta $y = -x + 2d$, la traiettoria della particella e i vettori velocità $\vec{v}_0$ e $\vec{v}(t_1)$ (la lunghezza dei vettori in figura è puramente indicativa). I valori numerici utilizzati per a, d, v_0 sono quelli indicati nel testo.

a) Il tempo t_f in cui la pietra raggiunge la base dello strapiombo si trova imponendo che la coordinata y della pietra sia 0 al tempo t_f, quindi: $y(t_f) = 0$. Si ha allora:

$$\frac{1}{2}gt_f^2 - v_0 t_f - h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}$$

Si è risolta l'equazione di secondo grado per t_f prendendo l'unica soluzione fisica, quella con $t_f > 0$ ovvero con il segno $+$. Inserendo i valori numerici si ottiene:

$$t_f \simeq 5.19\mathrm{s}$$

b) La velocità $v_y(t)$ della pietra al tempo generico t si scrive:

$$v_y(t) = v_0 - gt$$

La velocità un'istante prima dell'impatto a terra si ottiene ponendo $t = t_f$, con t_f ricavato prima:

$$v_y(t_f) = -\sqrt{v_0^2 + 2hg} \simeq -39\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Per trovare la distanza percorsa in totale bisogna dapprima trovare l'altezza massima y_{max} raggiunta dalla pietra. Detto t^* l'istante di tempo in cui la pietra raggiunge l'altezza massima, si deve avere $v_y(t^*) = 0$. Allora:

$$t^* = \frac{v_0}{g} \quad \Rightarrow \quad y_{max} = y(t^*) = h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

La distanza totale percorsa dalla pietra sarà $y_{max} - h$ (tratto in salita) più y_{max} e quindi:

$$d = (y_{max} - h) + y_{max} = 2y_{max} - h = h + \frac{v_0^2}{g} \simeq 85\mathrm{m}$$

1.2.4 Moto di un razzo ⋆

Un razzo sale verticalmente, partendo da fermo, con un'accelerazione $a_0 = 3.2\,\mathrm{m/s^2}$ finché finisce il carburante a $h_1 = 1200\,\mathrm{m}$ di altezza. Dopo questo punto, la sua accelerazione è quella di gravità, verso il basso.

a) Qual è la velocità del razzo nel momento in cui finisce il carburante?

b) Quanto tempo impiega a raggiungere quel punto?

c) Quale altezza massima raggiunge il razzo?

d) Quanto tempo occorre per raggiungere la massima altezza?

e) Con quale velocità il razzo colpisce la Terra?

f) Per quanto tempo totale il razzo rimane in aria?

Soluzione

I primi due punti si risolvono subito utilizzando le note leggi del moto uniformemente accelerato:

$$a) \qquad v_1 = \sqrt{2a_0h_1} = 88\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$b) \qquad t_1 = \frac{v_1}{a_0} = 27\,\mathrm{s}$$

Il tratto aggiuntivo percorso dal razzo dopo la fine del carburante, prima che la (de)celerazione $-g$ riesca a fermarlo è:

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = 395\,\mathrm{m}$$

quindi l'altezza massima raggiunta sarà:

$$c) \qquad h_{max} = h_1 + h_2 = 1595\,\mathrm{m}$$

e il tempo impiegato per raggiungerla:

$$d) \qquad t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 36\,\mathrm{s}$$

Per schiantarsi a terra il razzo dovrà poi cadere partendo dall'altezza massima (quindi con una velocità iniziale nulla) sotto l'effetto dell'accelerazione di gravità. Quindi:

$$e) \qquad v_{impatto} = -\sqrt{2gh_{max}} = -177\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

E infine $t_{tot} = t_2 + t_{caduta}$, dove t_{caduta} è il tempo necessario affichè il razzo si schianti a terra dopo aver raggiunto l'altezza massima:

$$f) \qquad t_{tot} = t_2 + \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = (36+18)s = 54\,\mathrm{s}.$$

1.2.5 Attraversare un fiume ⋆ ⋆

Una barchetta, la cui velocità in acqua ferma è v_b, deve attraversare un fiume largo l_y e risalire il fiume di l_x. Per fare ciò il pilota dirige la barca controcorrente con un angolo di 45°. Quale è la velocità della corrente del fiume? Risolvere per: $v_b = 2\,\mathrm{m/s}$, $l_y = 260\,\mathrm{m}$, $l_x = 130\,\mathrm{m}$. La situazione è schematizzata in Figura 1.4.

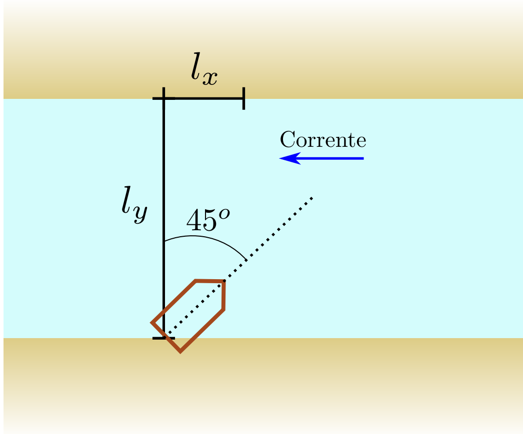


Figura 1.4: Barchetta che attraversa il fiume.

Soluzione

Siamo di fronte ad un problema in cui compaiono velocità relative, la relazione che lega i sistemi di riferimento è:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

Per sfruttare il dato del problema sulla velocità della barchetta in acqua ferma definiamo O' il sistema di riferimento solidale con la corrente $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_c$ mentre $\vec{v}' = \vec{v}_b$. Abbiamo dunque nel sistema di riferimento solidale con la sponda:

$$\vec{v} = (-v_c + v_{bx})\hat{x} + v_{by}\hat{y} = (-v_c + \frac{\sqrt{2}}{2}v_b)\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}v_b\hat{y}$$

Ora dobbiamo determinare per quanto tempo la barca naviga nel fiume, questo equivale a capire il tempo che la barca impiega per raggiungere la sponda opposta nel fiume, dunque:

$$v_{by} = \frac{l_y}{t^*} \Rightarrow t^* = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{l_y}{v_b} = \sqrt{2}\frac{l_y}{v_b}$$

Adesso, conoscendo la distanza del fiume che si vuole risalire ed il tempo di percorrenza, ricaviamo quale deve essere la velocità orizzontale della corrente:

$$l_x = (-v_c + \frac{\sqrt{2}}{2}v_b)\cdot t^* \Rightarrow v_c = \frac{\sqrt{2}}{2}v_b - \frac{l_x}{t^*} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_b - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_x}{l_y}v_b$$

Con i valori numerici si ottiene $v_c = \sqrt{2}/2\,\mathrm{m/s} \approx 0.71\,\mathrm{m/s}$.

1.2.6 Passaggio a livello ⋆

Un uomo si trova nella sua automobile, lungo un viale rettilineo. Sulla mappa della città il viale è individuato dall'equazione: $y(x) = -x/\sqrt{3}$. All'istante $t_0 = 0$ l'uomo si trova nel punto $P = d(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, con $d = 500$ m. In questo stesso istante egli inizia a muoversi con accelerazione costante a diretta lungo il versore $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{1}{2})$. Nel punto O origine del sistema di riferimento cartesiano, il viale incrocia perpendicolarmente una ferrovia, anch'essa descrivibile come una retta. Scriverne l'equazione. Scrivere le componenti del vettore velocità $\vec{v}$ di un treno che si muove di moto rettilineo uniforme lungo la ferrovia, puntando nella direzione degli x positivi. Supponiamo che $|\vec{v}| = 100$ km/h. Quanto vale $|\vec{v}|$ in m/s? All'istante t_0 la locomotiva del treno si trova a distanza $4d$ da O e ha coordinata x negativa. Scrivere le coordinate della sua posizione Q. Se il passaggio a livello si chiude quando il treno è a distanza $2d$ dall'origine, quale dev'essere al minimo l'accelerazione a dell'automobilista se egli vuole passare *prima* che il passaggio a livello si chiuda? Per questo valore di a scrivere le componenti del vettore velocità *relativa* fra treno e automobile nell'istante in cui questa passa per O.

Soluzione

Data una retta passante per l'origine $y = ax$, la retta a essa perpendicolare è $y = -\frac{1}{a}x$. Nel nostro caso $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi la retta che descrive la ferrovia sulla mappa della città è: $y = \sqrt{3}x$. Il versore $\hat{e}$ appartenente a questa retta e diretto verso gli x positivi è: $\hat{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quindi il vettore velocità del treno è a ogni istante:

$$\vec{v} = |\vec{v}|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Si ha:

$$|\vec{v}| = 100\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\frac{10^3 \text{ m}}{3.6 \cdot 10^3 \text{ s}} = \frac{100}{3.6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 27.78\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il punto Q corrisponde a un vettore posizione diretto lungo $-\hat{e}$ e di modulo $4d$, quindi:

$$Q = 4d\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La situazione è rappresentata in Figura 1.5.

L'automobilista si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione a. L'istante di tempo t_1 in cui l'automobilista arriva a O si trova ponendo $\frac{1}{2}at_1^2$ uguale allo spostamento d, quindi:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

L'istante di tempo t_2 in cui il treno arriva a distanza $2d$ da O (cioè quando si chiude il passaggio a livello) è:

$$t_2 = \frac{2d}{|\vec{v}|}$$

La condizione che vogliamo che si realizzi è $t_2 > t_1$, quindi:

$$\frac{2d}{|\vec{v}|} > \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

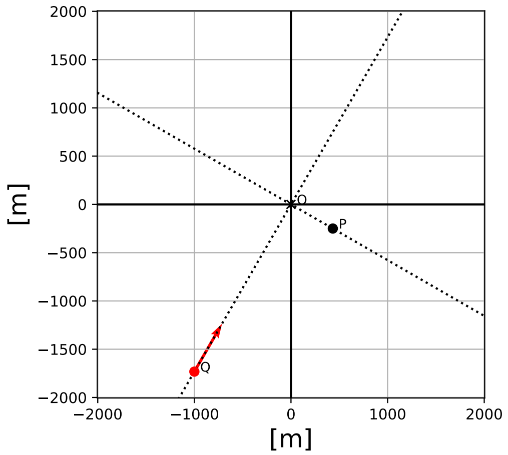


Figura 1.5: Mappa della città con la ferrovia, il viale e i punti P, Q e O (scala realistica per $d = 500$ m). E' raffigurato anche il vettore velocità del treno.

Prendendo il quadrato da entrambe le parti (N.B. si tratta di due quantità positive) si trova:

$$a > a_{min} = \frac{|\vec{v}|^2}{2d}$$

Per i valori numerici considerati: $a_{min} \simeq 0.77$ m/s^2. Se $a = a_{min}$ allora nel momento in cui raggiunge O, l'automobile ha una velocità (in modulo):

$$V = at_1 = \frac{|\vec{v}|^2}{2d}\frac{2d}{|\vec{v}|} = |\vec{v}|$$

Il suo vettore velocità è allora:

$$\vec{V} = |\vec{v}|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{1}{2}\right)$$

(si è considerato il versore $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ appartenente alla retta $y(x) = -x/\sqrt{3}$). Il vettore velocità relativa si ottiene sottraendo il vettore velocità del treno:

$$\vec{V} - \vec{v} = |\vec{v}|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

1.2.7 Passaggio a livello (seconda parte) ⋆ ⋆

Nella situazione dell'esercizio precedente si trovi la distanza D tra la locomotiva e l'automobile ad un istante di tempo t generico ($t > t_0 = 0$), ricavando così la funzione $D(t)$. Si determini poi a quale $t = \bar{t}$ la distanza è minima. Per facilitare i calcoli si introducano i parametri *adimensionali*:

$$f(t) = \frac{D^2(t)}{d^2} \qquad \alpha = \frac{a}{a_{min}} \qquad \tau = t\frac{v}{d}$$

e si consideri il caso particolare in cui $\alpha = 2$. *Suggerimento*: si svolgano i conti nel miglior sistema di riferimento possibile...

Soluzione

Conviene utilizzare un sistema di riferimento S' che abbia come assi cartesiani i due versori:

$$\hat{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \hat{e}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

S' si ottiene operando una rotazione di 60° (in senso antiorario) del sistema di partenza S. Quindi un punto di coordinate (x, y) in S ha coordinate:

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

in S' (Figura 1.6).

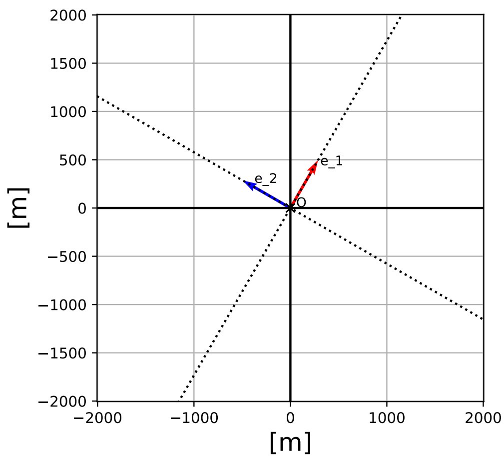


Figura 1.6: Sistema di riferimento S' dato dai versori $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$.

Le coordinate di Q e P diventano allora:

$$Q = 4d\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, +\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4d(-1, 0) \qquad P = d\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = d(0, -1)$$

in S', come del resto si poteva dedurre facilmente dal disegno. Le leggi orarie di treno e automobile sono allora rispettivamente:

$$\vec{r}_T(t) = (-4d + vt, 0)$$

$$\vec{r}_A(t) = \left(0, \frac{1}{2}at^2 - d\right)$$

v corrisponde a $|\vec{v}|$ dell'esercizio precedente. $\vec{r}_T(t)$ e $\vec{r}_A(t)$ sono i vettori posizione in S' a un istante generico di tempo $t > 0$. La distanza tra i due oggetti è: $D(t) = |\vec{r}_T(t) - \vec{r}_A(t)| = |(-4d + vt, -\frac{1}{2}at^2 + d)|$, e quindi, ricordando la definizione di modulo di un vettore:

$$D(t) = \sqrt{(-4d + vt)^2 + (d - \frac{1}{2}at^2)^2} = \sqrt{16d^2 - 8dvt + v^2t^2 + d^2 - dat^2 + \frac{1}{4}a^2t^4} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}a^2t^4 + t^2(v^2 - da) - 8dvt + 17d^2}$$

Conviene dividere tutto per d ed elevare al quadrato, ottenendo così $f(t)$ come definita nel testo:

$$f(t) = \frac{1}{4}\frac{a^2}{d^2}t^4 + t^2\frac{v^2}{d^2}\left(1 - \frac{ad}{v^2}\right) - 8\frac{v}{d}t + 17$$

Possiamo introdurre $a_{min} = \frac{v^2}{2d}$ dividendo e moltiplicando per questa quantità:

$$f(t) = \frac{1}{4}\frac{a^2}{a_{min}^2}\frac{a_{min}^2}{d^2}t^4 + t^2\frac{v^2}{d^2}\left(1 - \frac{d}{v^2}\frac{a}{a_{min}}a_{min}\right) - 8\frac{v}{d}t + 17$$

Infine sostituendo la definizione di a_{min}:

$$f(t) = \frac{1}{16}\alpha^2\left(\frac{v}{d}t\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)\left(\frac{v}{d}t\right)^2 - 8\left(\frac{v}{d}t\right) + 17$$

e quindi:

$$f(\tau) = \frac{1}{16}\alpha^2\tau^4 + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)\tau^2 - 8\tau + 17$$

Quello che dobbiamo fare è trovare il minimo di questa funzione rispetto a t, oppure rispetto a τ (è la stessa cosa, sono proporzionali). Per farlo calcoliamo la derivata e imponiamola uguale a 0:

$$f'(\bar{\tau}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\alpha^2\bar{\tau}^3 + (2-\alpha)\bar{\tau} = 8 \qquad\qquad \bar{\tau} = \bar{t}\frac{v}{d}$$

Questa è un'equazione di terzo grado, non facile da risolvere. Ma ponendo $\alpha = 2$ come consigliato nel testo troviamo:

$$\bar{\tau}^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau} = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{2d}{v}$$

In questo istante la distanza tra treno e automobile vale:

$$D(t) = \sqrt{\frac{1}{4}a^2\frac{16d^4}{v^4} - 8dv\frac{2d}{v} + 17d^2} = \sqrt{4d^2 - 16d^2 + 17d^2} = \sqrt{4d^2 - 16d^2 + 17d^2} = d\sqrt{5}$$

In 1.7 sono riportati i grafici di $D(\tau) = f^2(\tau)d^2$ per differenti valori di a, cioè di α : $\alpha = 0$ (linea azzurra), $\alpha = 1$ (linea arancione), $\alpha = 2$ (linea verde). La linea tratteggiata corrisponde a $\frac{D}{d} = \sqrt{5}$, che, come abbiamo visto, è la distanza minima per $\alpha = 2$ (infatti è la tangente alla linea verde). Notare che $D(\tau = 0) = D(t = 0)$ è uguale in tutti i casi (perché indipendentemente da a all'istante di tempo iniziale la distanza tra treno e automobile è $D(t = 0) = \sqrt{(4d)^2 + d^2} = d\sqrt{17} \simeq 4.12d$).

1.2.8 Lancio di un sasso da una collina ⋆ ⋆

Un ragazzo si trova in cima a una collina di pendenza 45°. In un sistema di riferimento cartesiano posizionato alla base della collina la sua posizione è: $(0, h)$, mentre il profilo della collina è dato dalla retta:

$$y = -x + h$$

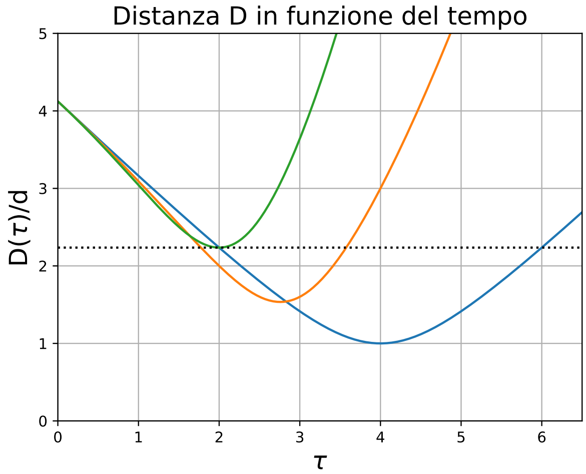


Figura 1.7: Funzione $D(\tau)$ per diversi α. Il caso studiato nell'esercizio è rappresentato dalla linea verde.

All'istante di tempo $t_0 = 0$ il ragazzo calcia un sasso con velocità iniziale:

$$\vec{v}_0 = (v_0, 0) \qquad v_0 = 15 \;\; \text{m/s}$$

In che istante di tempo t_1 il sasso incontra di nuovo la collina?

Soluzione

Il sasso si muove di moto uniformemente accelerato lungo $\hat{y}$, con accelerazione uguale a quella di gravità: $\vec{g} = -g\hat{y}$. Lungo $\hat{x}$ il moto invece è rettilineo uniforme. La legge oraria del sasso è quindi:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Al tempo t_1 (nostra incognita), il sasso si trova di nuovo lungo il profilo della collina, per cui:

$$y(t_1) = h - x(t_1) \quad \Rightarrow \quad h - \frac{1}{2} g t_1^2 = h - v_0 t_1$$

Ricaviamo quindi:

$$\frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2 v_0}{g}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene:

$$t_1 = \frac{2 \cdot 15 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} \simeq 3.06 \text{ s}$$

1.2.9 Canestro! ★ ★ ★

Un pallone da basket è lanciato da un'altezza iniziale $h = 2.40$ m con velocità iniziale $|\vec{v}_0| = 12$ m/s. In un sistema di riferimento cartesiano, la posizione iniziale del pallone è quindi: $(0, h)$.

L'angolo θ fra il vettore $\vec{v_0}$ e il versore $\hat{x}$ è $35°$. Il giocatore che lancia il pallone riesce a centrare un canestro posizionato nel punto (d,H) con $H = 3.05$ m. Qual è la distanza d del giocatore dal canestro? Con quale angolo rispetto a $\hat{x}$ la palla entra nel canestro? Si supponga che il pallone sia approssimatile come un punto materiale.

Soluzione

Il vettore velocità iniziale è:

$$\vec{v_0} = |v_0|\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$$

Il pallone da basket si muove di moto uniformemente accelerato lungo $\hat{y}$, con accelerazione uguale a quella di gravità: $\vec{g} = -g\hat{y}$. Lungo $\hat{x}$ il moto invece è rettilineo uniforme. La legge oraria del pallone è quindi:

$$x(t) = |v_0| t \cos(\theta)$$

$$y(t) = h + |v_0| t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2$$

La traiettoria descritta dal pallone è una parabola. Possiamo ricavarne l'equazione, scrivendo $t = \frac{x(t)}{|v_0|\cos(\theta)}$ e sostituendo nell'equazione per $y(t)$. Si ottiene così:

$$y = h + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} x - \frac{1}{2} \frac{g}{|v_0|^2 \cos^2(\theta)} x^2$$

Sappiamo che la traiettoria passa per il canestro, cioè per il punto (d,H). Allora:

$$H = h + \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} d - \frac{1}{2} \frac{g}{|v_0|^2 \cos^2(\theta)} d^2$$

Questa è un'equazione di secondo grado per l'incognita d. Le due soluzioni sono:

$$\frac{|v_0|^2 \cos^2(\theta)}{g} \left[+ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \pm \sqrt{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \frac{2g(H-h)}{|v_0|^2 \cos^2(\theta)}} \right]$$

Ci sono due soluzioni, entrambe positive. Questo perché la parabola passa due volte per l'altezza H: a sinistra e a destra del massimo in altezza (Figura 1.8). Sono entrambe soluzioni accettabili, tuttavia sembra più verosimile che il giocatore di basket faccia canestro sfruttando la seconda soluzione, quella con il segno $+$. Si ottiene quindi:

$$d = \frac{|v_0|^2 \cos^2(\theta)}{g} \left[+ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} + \sqrt{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \frac{2g(H-h)}{|v_0|^2 \cos^2(\theta)}} \right]$$

Sostituendo i numeri valori dati nel testo: $d \simeq 12.8$ m. L'istante di tempo in cui il pallone entra nel canestro è:

$$t_f = \frac{d}{|v_0|\cos(\theta)} \simeq 1.30 \text{ s}$$

La componente x della velocità in questo momento è ovviamente $|v_0|\cos(\theta)$. La componente y invece è:

$$v_y(t_f) = |v_0|\sin(\theta) - g t_f \simeq -5.88 \text{ m/s}$$

L'angolo con il quale il pallone entra nel canestro si trova considera

$$\tan(\theta') = \frac{v_y(t_f)}{v_x(t_f)} \quad \Rightarrow \quad \theta' \simeq -31°$$

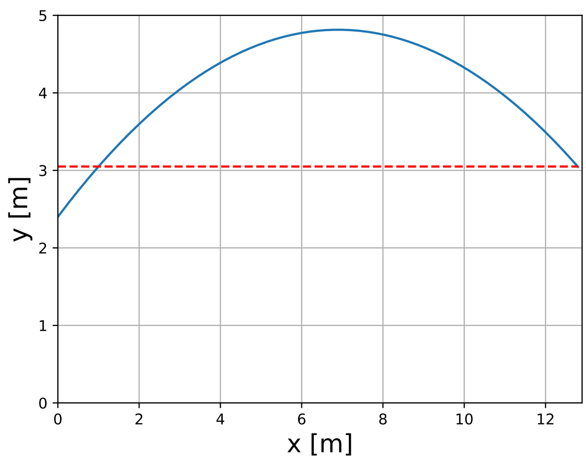


Figura 1.8: Traiettoria del pallone (linea continua). La linea tratteggiata indica l'altezza H a cui si trova il canestro.

1.2.10 Lancio doppio ⋆ ⋆ ⋆

Un sasso A è lasciato cadere da fermo dalla cima di un pozzo di altezza h all'istante di tempo $t_0 = 0$. In quale istante di tempo t_1 esso tocca il fondo? A un certo istante di tempo $0 < t_2 < t_1$ viene lanciato un secondo sasso B, con velocità iniziale $\vec{v} = v\hat{y}$ (nel sistema di riferimento cartesiano in cui $\vec{g} = -g\hat{y}$). Come dev'essere scelta la velocità v affinché B possa raggiungere A prima che questo tocchi il fondo? Qual è il minimo valore del modulo di v perché tale condizione sia realizzata? Calcolarne il valore numerico per $h = 15$ m e $t_2 = \frac{1}{2}t_1$.

Soluzione

La legge oraria del corpo A è quella di un moto uniformemente accelerato lungo $\hat{y}$:

$$y_A(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Quindi A raggiunge il fondo all'istante $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. La legge oraria di B sarà:

$$y_B(t) = h + v(t - t_2) - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2 \qquad 0 < t_2 < \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La condizione che vogliamo che si verifichi è che B raggiunga A prima che questo tocchi il fondo. Questo significa che:

$$y_B(\bar{t}) = y_A(\bar{t})$$

per un qualche $\bar{t}$ appartenente all'intervallo (t_2, t_1). La condizione diventa quindi:

$$v(\bar{t} - t_2) - \frac{1}{2}g(\bar{t} - t_2)^2 = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 \qquad t_2 < \bar{t} < t_1$$

Svolgendo il quadrato si ottiene:

$$v(\bar{t} - t_2) - \frac{1}{2}g(-2\bar{t}t_2 + t_2^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}gt_2\frac{t_2 - 2\bar{t}}{\bar{t} - t_2}$$

Occorre studiare v come funzione di $\bar{t}$ nell'intervallo di interesse, ovvero (t_2, t_1). In questo intervallo v è sicuramente < 0, perché $\bar{t} > t_2$ e quindi $2\bar{t} > t_2$. Questo fatto ha un senso fisico intuitivo: il sasso B deve essere lanciato con una certa velocità iniziale diretta verso il basso affinché possa raggiungere A, che ha già cominciato a cadere. Per $\bar{t} \to t_2^+$ la funzione $v(\bar{t})$ diverge a $-\infty$. Per $\bar{t} \to t_1^-$ essa tende invece al valore :

$$\frac{1}{2} g t_2 \frac{t_2 - 2t_1}{t_1 - t_2}$$

Nell'intervallo (t_2, t_1) la funzione è crescente. In definitiva i valori possibili di v affinché B incontri A a un $\bar{t}$ minore di t_2 e maggiore di t_1 sono:

$$-\infty < v < -\frac{1}{2} g t_2 \frac{2t_1 - t_2}{t_1 - t_2}$$

Il minimo valore del modulo di v è quindi $|v_{min}| = \frac{1}{2} g t_2 \frac{2t_1 - t_2}{t_1 - t_2}$. Se, come indicato nel testo $t_2 = \frac{1}{2} t_1$, allora:

$$|v_{min}| = \frac{3}{4} g t_1 = \frac{3}{4}\sqrt{2hg}$$

Per $h = 15$ m si ottiene $|v_{min}| \approx 12.8$ m/s. In Figura 1.9 sono rappresentate le leggi orarie $y_A(t)$ e $y_B(t)$ in questo caso, per $v = -|v_{min}|$ (linea tratteggiata) e per $v = -2|v_{min}|$ (linea continua).

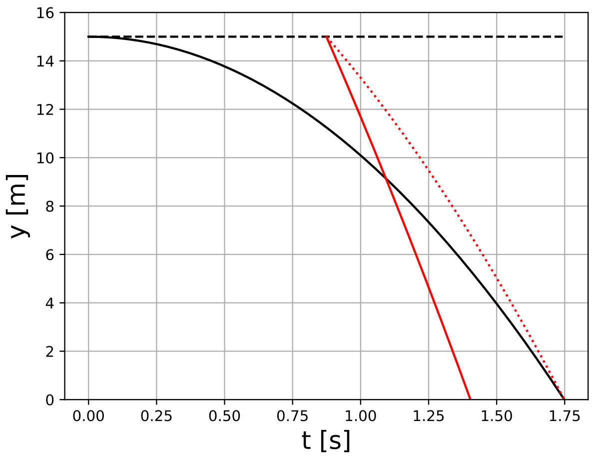


Figura 1.9: Legge oraria dei due sassi, per i valori numerici indicati nel testo e per due valori della velocità iniziale di B: $v = -|v_{min}|$ (linea tratteggiata) e $v = -2|v_{min}|$ (linea continua)