Hauteur après un lancer vertical

Février 2025

Eliott Arnold & Damien Rifflart

1 Introduction

On considère le lancement vertical d'un objet de masse m, à partir d'une hauteur y_A, avec une vitesse v_A. En tenant compte du poids de l'objet, ainsi que des forces de frottement dues à la résistance de l'air, on cherche à déterminer la hauteur maximale atteinte, notée y_B.

L'objet atteint sa hauteur maximale lorsque sa vitesse devient nulle. On déterminera alors l'expression de la vitesse en fonction du temps, puis on résoudra l'équation $v(t) = 0$ pour obtenir le temps correspondant, que l'on notera t_{max}. Finalement, on exprimera la hauteur en fonction du temps, afin de calculer $y_B = y(t_{max})$.
On se place dans un référentiel galiléen muni d'un repère cartésien.

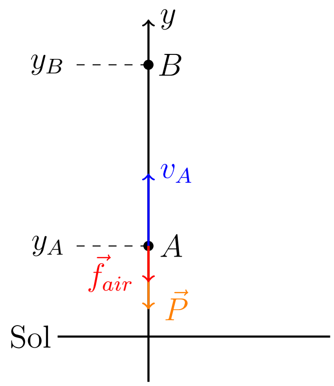


Figure 1: Lancement vertical avec frottement de l'air

2 Vitesse en fonction du temps

2.1 Seconde équation de Newton

La deuxième loi de Newton stipule qu'une force résultante appliquée à un objet est toujours égale au produit de la masse de l'objet et de son accélération. De plus, l'accélération produite et la force résultante ont la même orientation.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

L'accélération correspond à la dérivée de la vitesse, par rapport au temps. Nous pouvons alors réécrire l'équation.

$$\Sigma\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$$

2.2 Forces appliquées sur l'objet

Tout d'abord, l'objet est soumis à son propre poids $\vec{P} = -m\vec{g}$. Ensuite, l'objet est soumis aux forces de frottements, que l'on peut approximer à l'aide de la loi de Stokes ($f = -kv$). Cette loi s'applique aux objets de petite taille, se déplaçant à faible vitesse dans un fluide newtonien (dont la viscosité est constante).

$$\Sigma\vec{F} = -m\vec{g} - k\vec{v}$$

où k dépend notamment de la densité de l'air, de la taille de l'objet et de sa forme.

2.3 Equation de la vitesse

2.3.1 Equation initiale

Nous avons obtenu deux expressions équivalentes de la somme des forces appliquées sur l'objet.

$$\Sigma\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$$

$$\Sigma\vec{F} = -m\vec{g} - k\vec{v}$$

On peut déduire que, en enlevant les vecteurs:

$$m\dot{v} = -mg - kv$$

On peut ensuite isoler $\dot{v}$ en divisant par m:

$$\dot{v} = -g - \frac{k}{m}v$$

On rassemble ensuite les termes en v

$$\dot{v} + \frac{k}{m}v = -g$$

Finalement, on a:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \tag{2}$$

2.3.2 Facteur intégrant

Nous souhaitons résoudre l'équation différentielle suivante et isoler v :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

Pour cela, nous utilisons la méthode du **facteur intégrant**, qui permet d'intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = Q(t)$$

Le facteur intégrant, noté $\mu(t)$, est une fonction qui simplifie l'intégration de cette équation. Il est défini par :

$$\mu(t) = \exp\left(\int P(t)\, dt\right)$$

Dans notre cas, $y = v$, $P(t) = \frac{k}{m}$ et $Q(t) = -g$. Comme $P(t)$ est une constante, μ devient:

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{k}{m}\, dt\right) = \exp\left(\frac{k}{m}t\right)$$

Nous multiplions ensuite toute l'équation différentielle par le facteur intégrant $\mu(t)$:

$$\frac{dv}{dt} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + \frac{k}{m}v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) = -g \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right)$$

On reconnaît alors une dérivée de produit dans le membre gauche:

$$\frac{d}{dt}\left[v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right)\right] = -g \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right)$$

Cette nouvelle expression peut maintenant être facilement intégrée. On intègre chaque membre indépendamment.

Membre de gauche

$$\int \left[\frac{d}{dt}\left(v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right)\right)\right] dt = v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_1$$

Membre de droite

$$\begin{aligned}\int \left[-g \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right)\right] dt = -g \cdot \int \exp\left(\frac{k}{m}t\right) dt + C_2 &= -g \cdot \frac{1}{\frac{k}{m}} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2 \\ &= -g \cdot \frac{m}{k} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2 \\ &= -\frac{mg}{k} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2\end{aligned}$$

En faisant l'égalité des deux membres, on obtient:

$$v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_1 = -\frac{mg}{k} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2$$

On peut ensuite rassembler les deux constantes C_1 et C_2 en une, telle que $C = C_1 + C_2$.

$$v \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) = -\frac{mg}{k} \cdot \exp\left(\frac{k}{m}t\right) + C$$

Afin d'isoler v, on divise les deux membres par $\exp\left(\frac{k}{m}t\right)$.

$$v = -\frac{mg}{k} + \frac{C}{\exp\left(\frac{k}{m}t\right)} = -\frac{mg}{k} + C \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

2.3.3 Déterminer la constante C

Pour déterminer l'expression de C, on utilise les conditions initiales.

$$v(0) = v_A = -\frac{mg}{k} + C \cdot \exp(0) \Longleftrightarrow C = v_A + \frac{mg}{k}$$

2.3.4 Expression de $v(t)$

Finalement, en substituant C par $v_A + \frac{mg}{k}$, on trouve l'équation de $v(t)$:

$$\boxed{v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)} \tag{3}$$

3 Temps pour que la hauteur soit maximale (t_{max})

On rappelle que la hauteur maximale est atteinte lorsque $v(t) = 0$. On a alors cette expression, où l'on cherche à isoler t:

$$-\frac{mg}{k} + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 0$$

On additionne $\frac{mg}{k}$:

$$\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = \frac{mg}{k}$$

On divise par $\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)$:

$$exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = \frac{\frac{mg}{k}}{v_A + \frac{mg}{k}}$$

On prend le logarithme népérien:

$$-\frac{k}{m}t = \ln \frac{\frac{mg}{k}}{\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)}$$

On divise par $-\frac{k}{m}$:

$$t_{max} = \ln\left(\frac{\frac{mg}{k}}{\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{k}{m}} = \ln\left(\frac{\frac{mg}{k}}{\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)}\right) \cdot -\frac{m}{k}$$

On obtient

$$t_{max} = \ln\left(\frac{\frac{mg}{k}}{\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)}\right) \cdot -\frac{m}{k}$$

On peut utiliser la relation $\ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\frac{mg}{k}}{v_A + \frac{mg}{k}}\right) \cdot -\frac{m}{k} &= -\ln\left(\frac{v_A}{\frac{mg}{k}} + 1\right) \cdot -\frac{m}{k} = -\ln\left(v_A \cdot \frac{k}{mg} + 1\right) \cdot -\frac{m}{k} \\ &= -\ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right) \cdot -\frac{m}{k} \\ &= \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right) \end{aligned}$$

Finalement:

$$\boxed{t_{max} = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)} \tag{4}$$

4 Hauteur en fonction du temps

4.1 Rappel de la formule de la position

La position de l'objet peut être déterminée à partir de sa vitesse. En effet, la vitesse instantanée $v(t)$ est définie comme la dérivée de la position $y(t)$ par rapport au temps t :

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Pour retrouver la position $y(t)$ à partir de la vitesse, il faut effectuer l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire une intégration. En intégrant la vitesse par rapport au temps, on obtient l'expression de la position. Comme l'objet n'évolue que sur un axe vertical, on peut remplacer x par h.

$$y(t) = \int v(t)\,dt + C$$

où C est une constante d'intégration.

4.2 Calcul de $y(t)$.

On substitue alors $v(t)$ par l'expression trouvée précédemment.

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

$$y(t) = \int v(t)\,dt + x_A \Longleftrightarrow y(t) = \int \left[-\frac{mg}{k} + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right] dt$$

On se retrouve avec une intégrale contenant une somme, qu'on peut développer en une somme d'intégrales.

$$y(t) = \int \left(-\frac{mg}{k}\right) dt + \int \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) dt$$

Première intégrale

La première intégrale ne contient pas le terme t, ce qui signifie qu'elle correspond à l'intégration d'une constante.

On a donc :

$$\int \left(-\frac{mg}{k}\right) dt = -\frac{mg}{k} \cdot t + C_1$$

Deuxième intégrale

La deuxième intégrale contient une fonction exponentielle. Le terme $\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)$ est constant par rapport au temps t, donc on peut le sortir de l'intégrale :

$$\int \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) dt = \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \int \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) dt.$$

L'intégrale d'une fonction exponentielle de la forme $\exp(at)$ est bien connue :

$$\int \exp(at)dt = \frac{1}{a}\exp(at) + C$$

Ici, $a = -\frac{k}{m}$, donc :

$$\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \int \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) dt = \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot -\frac{m}{k}\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + C_2$$

En combinant ces deux résultats, on obtient:

$$y(t) = -\frac{mg}{k} \cdot t + C_1 - \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + C_2$$

On regroupe C_1 et C_2 en une seule constante C telle que $C = C_1 + C_2$:

$$y(t) = -\frac{mg}{k} \cdot t - \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + C$$

Pour déterminer C, on utilise les conditions initiales.

$$h(0) = y_A = 0 - \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \exp(0) + C \Longleftrightarrow C = y_A + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k}$$

On a finalement:

$$y(t) = -\frac{mg}{k} \cdot t - \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + y_A + \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k}$$

4.3 Simplication

On voit que les termes $\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k}$ se factorisent:

$$y(t) = -\frac{mg}{k}t + \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right] + y_A$$

On a enfin l'expression de la position en fonction du temps:

$$\boxed{y(t) = -\frac{mg}{k}t + \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right] + y_A} \tag{5}$$

5 Hauteur maximale y_B

Étant donné que nous disposons des expressions de $y(t)$ et de t_{max}, nous pouvons en déduire y_B en évaluant la position à l'instant t_{max} :

$$y_B = y(t_{max})$$

Avec les expressions :

$$y(t) = -\frac{mg}{k}t + \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right] + y_A$$

$$t_{max} = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)$$

5.1 Substitution de t_{max} dans $y(t)$

Commençons par substituer t_{max} dans chaque terme de $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t_{max}) = &- \frac{mg}{k} \cdot \underbrace{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)}_{t_{max}} \\ &+ \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot \underbrace{\frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)}_{t_{max}}\right)\right] + y_A \end{aligned}$$

5.2 Premier terme

$$y_1(t_{max}) = -\frac{mg}{k} \cdot \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right) = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)$$

5.3 Deuxième terme

$$\begin{aligned} y_2(t_{max}) &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot \frac{m}{k} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)\right)\right] \\ &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{km}{mk} \cdot \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)\right)\right] \\ &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \exp\left(-1 \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right)\right)\right] \end{aligned}$$

On utilise les règles $-\ln a = \frac{1}{a}$ et $\exp(\ln a) = a$, ce qui implique que $\exp(-\ln a) = \frac{1}{a}$:

$$\begin{aligned} y_2(t_{max}) &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{kv_A}{mg} + 1}\right] \\ &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{\frac{kv_A + mg}{mg}}\right] \\ &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[1 - \frac{mg}{kv_A + mg}\right] \\ &= \left[\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}\right] \cdot \left[\frac{kv_A + mg}{kv_A + mg} - \frac{mg}{kv_A + mg}\right] \\ &= \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{kv_A}{kv_A + mg} \end{aligned}$$

On peut simplifier $\left(v_A + \frac{mg}{k}\right)$, car $kv_A + mg = k(v_A + \frac{mg}{k}$:

$$
\begin{aligned}
y_2(t_{max}) &= \left(v_A + \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot \frac{kv_A}{k(v_A + \frac{mg}{k})} \\
&= \frac{m}{k} \cdot \frac{kv_A}{k} = \frac{mkv_A}{k^2}
\end{aligned}
$$

5.4 Expression finale

On a que $y(t_{max}) = y_1(t_{max}) + y_2(t_{max}) + y_A$.

$$y(t_{max}) = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right) + \frac{mkv_A}{k^2} + y_A$$

Finalement:

$$\boxed{y_B = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(\frac{kv_A}{mg} + 1\right) + \frac{mkv_A}{k^2} + y_A} \tag{6}$$

6 Verification du résultat

6.1 Avec les unités

6.1.1 Premier terme

Pour le coefficient devant le logarithme :

$$\left[\frac{m^2 g}{k^2}\right] = \frac{[\text{kg}]^2 \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]^2} \qquad = \frac{[\text{kg}]^2 \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{[\text{kg}]^2 \cdot [\text{s}^{-2}]} = [\text{m}]$$

Pour l'argument du logarithme, il doit être sans unité:

$$\left[\frac{kv_A}{mg}\right] = \frac{[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}] \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{[\text{kg}] \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]} \qquad = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}] \cdot [\text{s}^{-2}]}{[\text{kg}] \cdot [\text{m}] \cdot [\text{s}^{-2}]} = [1]$$

6.1.2 Deuxième terme

$$\left[\frac{mv_A}{k}\right] = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{[\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}]} \qquad = \frac{[\text{kg}] \cdot [\text{m}] \cdot [\text{s}^{-1}]}{[\text{kg}] \cdot [\text{s}^{-1}]} = [\text{m}]$$

6.1.3 Conclusion

On en conclut que y_B est bien exprimé en mètres, ce qui est attendu.

7 Interprétation

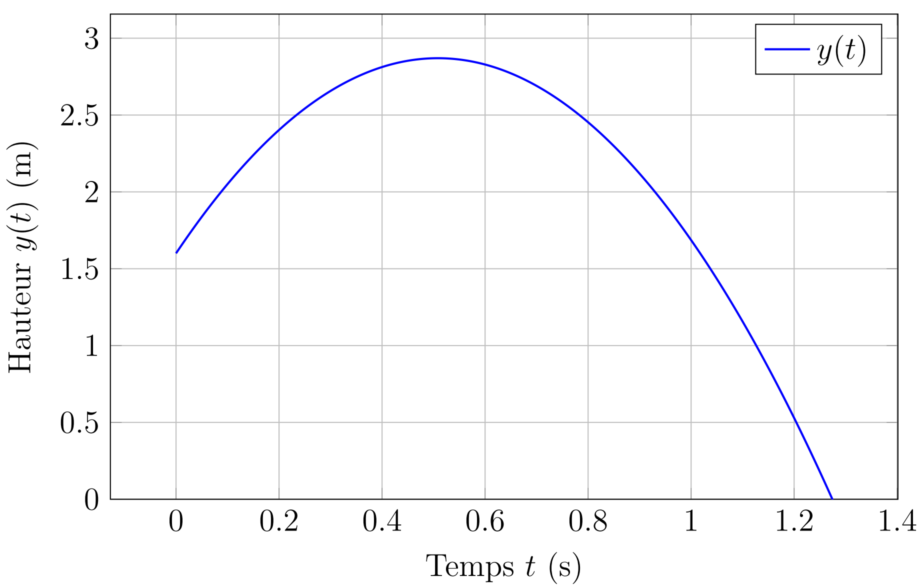
Les graphiques à venir utilisent des fichiers CSV contenant toutes les valeurs de $y(t)$ pour 10 000 échantillons de t. Comme $t \in [0; 2]$, on calcule la valeur de $y(t)$ toutes les environ 2 ms.

7.1 Graphique de la hauteur sur Terre

Nous pouvons réaliser un graphique avec des valeurs arbitraires pour voir comment la hauteur évolue sur Terre. Avec:
- $m = 0,5kg$
- $g = 9,81N \cdot kg^{-1}$
- $k = 0,005kg \cdot s^{-1}$
- $v_A = 5m \cdot s^{-1}$
- $y_A = 1,6m$

On obtient un graphique sur lequel on voit une courbe, qui a pour ordonnée à l'origine y_A, et comme maximum y_B.

Hauteur de l'objet en fonction du temps sur Terre

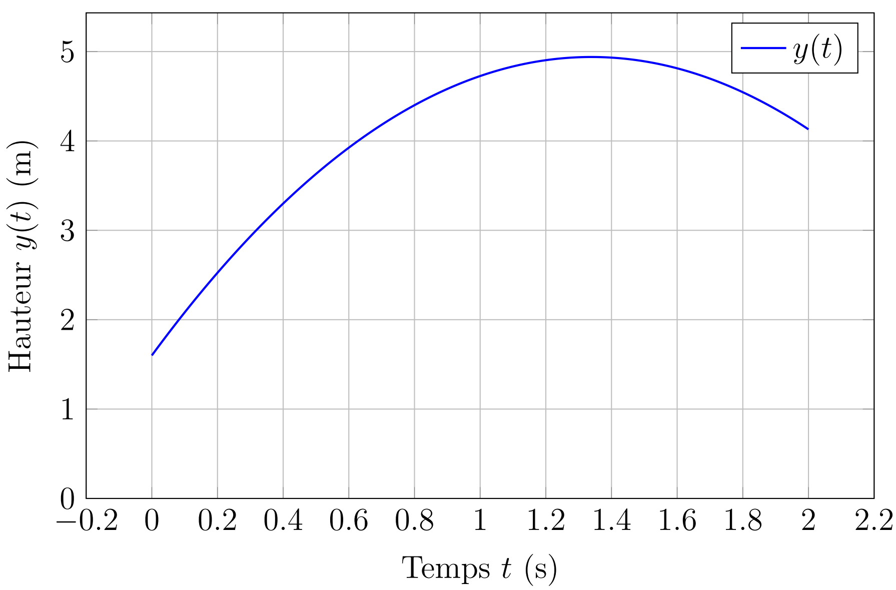


7.2 Graphique de la hauteur sur Mars

Nous pouvons faire la même chose pour voir comment la hauteur évolue sur Mars. Avec:
- $m = 0,5kg$
- $g = 3,71N \cdot kg^{-1}$
- $k = 0,005kg \cdot s^{-1}$
- $v_A = 5m \cdot s^{-1}$
- $y_A = 1,6m$

On obtient un graphique, où l'on voit que la hauteur y_B est atteinte après environ 0,8 seconde de plus que sur Terre. Ce résultat nous semble cohérent, car la gravité est moindre sur Mars.

Hauteur de l'objet en fonction du temps sur Mars



7.3 Valeurs de y_B

Nous pouvons donner quelques valeurs de y_B pour donner un ordre de grandeur, selon différentes conditions initiales. Partons d'une situation de référence:

y_B (m)	m (kg)	k (kg·s^{-1})	v_A (m·s^{-1})	y_A (m)
2,7	1,0	0,5	5,0	1,6

Table 1: Hauteurs maximales y_B calculées avec $g = 9{,}81\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$ pour les valeurs spécifiées (référence)

Comparons ensuite ce résultat, en modifiant uniquement une valeur à la fois:

y_B (m)	m (kg)	k $(kg \cdot s^{-1})$	v_A $(m \cdot s^{-1})$	y_A (m)	Variation
2,8	2,0	0,5	5,0	1,6	+0,03%
2,3	1,0	2,5	5,0	1,6	-8,5%
5,4	1,0	0,5	10,0	1,6	+101%
3,6	1,0	0,5	5,0	2,5	+33%

Table 2: Hauteurs maximales y_B calculées avec $g = 9,81 N \cdot kg^{-1}$ pour les valeurs spécifiées

8 Tentative d'analogie avec un oscillateur harmonique

Nous avons premièrement pensé à faire l'analogie entre ce problème et le problème de l'oscillateur harmonique amorti, que nous avions déjà résolu. En effet, l'objet va effectuer une période d'oscillation, faisant l'aller du point A au point B, pour revenir à sa position d'origine (le point A), sous l'effet de ce qui s'apparente à une force de rappel, ici le poids. Nous avons donc repris le même raisonnement que pour l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique amorti que nous avions trouvé, en remplaçant juste la force de rappel du ressort par le poids. Seulement, nous nous sommes rendus compte que, contrairement à la force de rappel d'un ressort, le poids ne dépend pas de la position de l'objet, mais est une constante. Ainsi, en continuant dans les équations, nous trouvions un temps $t \in \mathbb{C}$, ce qui n'avait aucun sens. Nous avons donc dû complètement repenser le problème, mais nous y sommes arrivés.