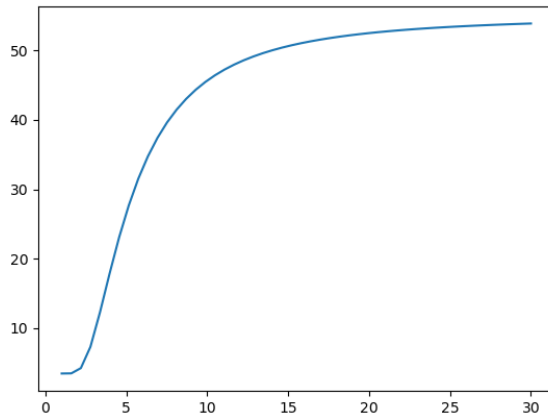


# Compte-rendu 1

1. Nous n'avons pas réussi à montrer l'existence d'un  $\phi$  minimisant l'énergie  $E$ . Cependant, nous avons réfléchi à quelques pistes de démonstrations. La principale consisterait à utiliser un argument de compacité, par exemple en montrant qu'en dehors d'un compact, l'énergie est de valeur absolue supérieure à un réel positif, puis à invoquer la continuité de l'énergie pour affirmer l'existence d'un minimum sur le compact, qui serait alors un minimum global. Cependant, cette méthode nécessiterait de définir une topologie sur l'ensemble de définition de  $E$ , c'est-à-dire sur  $\mathcal{D} \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^d)$ , or nous ne connaissons pas de topologie sur cet ensemble. Une solution à laquelle nous avons pensé serait d'utiliser la définition de  $V$  pour voir les  $\phi \in V$  comme fonctions d'un  $r$ -uplet d'éléments de  $\mathbb{R}^d$ , i.e.  $a_1, \dots, a_r$ . En effet,  $E$  pourrait alors être vue comme une fonction des  $a_i$ , i.e. définie sur  $\mathbb{R}^d$ , auquel cas un argument de compacité comme présenté ci-dessus pourrait être envisageable. Nous n'avons cependant pas poursuivi cette réflexion.
2. Nous n'avons pas réussi à déterminer des conditions pour que les  $K(z_i, \cdot)e_u$ , pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq u \leq d$ , soient une base de  $V$ .
3. Pour commencer, il est clair par son expression que  $E$  dépend affinement de  $\lambda$ . Pour  $\sigma > 0$  et  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^d$ , posons  $\Phi(\sigma, a_1, \dots, a_r) = I + v$ , où  $v$  est l'élément de  $V$  construit à partir de  $\sigma$  et  $a_1, \dots, a_r$  (et bien sûr  $z_1, \dots, z_r$ ). Afin d'étudier la dépendance de  $E$  en  $\sigma$ , nous avons procédé ainsi. Tout d'abord, la dépendance affine de  $E$  en  $\lambda$  signifie que changer  $\lambda$  ne fait que décaler le graphe obtenu de haut en bas, sans en modifier la forme. Ainsi, nous avons choisi de le représenter pour  $\lambda = 1$ . Nous avons fixé les deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  comme suit : pour  $C_1$ , nous avons choisi l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité, et pour  $C_2$ , les points de  $C_1$  tournés d'un angle  $\theta$  autour de l'origine (les deux courbes ont donc par construction le même nombre de points). Pour l'exemple, nous avons pris  $n = 10$  et  $\theta = \frac{\pi}{n}$ . Nous avons ensuite fait les hypothèses  $d = 2$ ,  $n = r$ , et que les  $z_i$  étaient exactement les points de  $C_1$ . Enfin, nous avons généré aléatoirement les  $a_i$  comme vecteurs de coordonnées comprises entre  $-1$  et  $1$  (uniquement pour simplifier la visualisation des déformations en jeu). Voici le graphe obtenu, représentant  $E(\Phi(\sigma, a_1, \dots, a_r))$  en fonction de  $\sigma$  :



4. Notons  $I$  l'identité de  $\mathbb{R}^2$  et  $v$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $v(x, y) = (y, x)$ .  $v$  est bien  $\mathcal{C}^\infty$ , mais  $I + v$  n'est pas un difféomorphisme car pas injectif. En effet, on a que  $(I + v)(0, 0) = 0 = (I + v)(1, -1)$ .

5. Nous n'avons pas réussi à obtenir une expression pour l'argmin.
6. Afin de visualiser l'effet d'une déformation  $\phi \in \mathcal{D}$  sur l'espace  $\mathbb{R}^d$ , nous nous sommes placés sous les hypothèses  $d = 2$ ,  $n = r$  et  $\sigma = 2$  (cette dernière hypothèse est totalement arbitraire et les graphes obtenus sont bien différents en modifiant la valeur de  $\sigma$ ). Comme pour la question 3, nous avons généré aléatoirement des vecteurs  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^d$ . Nous avons commencé par représenter une grille sur le plan (gauche), puis lui avons appliqué la déformation  $\Phi(\sigma, a_1, \dots, a_r)$  (droite). Voici les deux graphes obtenus :

