Университет ИТМО
ФПИиКТ

Лабораторная работа №5
по Вычислительной математике

Выполнил: Балтабаев Дамир
Группа: P3210
Вариант: 3
Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург
2022

Цель лабораторной работы:

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Порядок выполнения:

2. Вычислительная реализация задачи:
   - 2.1. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса вычислить значения функции при данных значениях аргумента (для значения X_1 и X_2, см. табл. 1 - 4).
   - 2.2. Построить таблицу конечных разностей.
   - 2.3. **Подробные вычисления привести в отчете.**

3. Программная реализация задачи:
   - 3.1. Исходные данные задаются в виде: а) набора данных (таблицы x,y), б) на основе выбранной функции (например, $\sin\ x$).
   - 3.2. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл.5).
   - 3.3. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами).
4. Анализ результатов работы: апробация и тестирование.

Рабочие формулы:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$N_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Первая интерполяционная формула Гаусса $(x > a)$

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\ + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} \\ + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \ldots \\ + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} \\ + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса $(x < a)$

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} \\ + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots \\ + \frac{(t+n-1)\ldots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} \\ + \frac{(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{n})(t+n-1)\ldots(t-n+\mathbf{1})}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Вычислительная реализация:

Таблица 3

x	y
1,10	0,2234
1,25	1,2438
1,40	2,2644
1,55	3,2984
1,70	4,3222
1,85	5,3516
2,00	6,3867

№ варианта	X_1	X_2
3	1,121	1,482

Многочлен Ньютона

Т.к x1 = 1,121 лежит в левой половине отрезка, то воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед(первой)

Для x1=1,121: t = (x-x0)/h = (1,121-1,1)/0,15 = 0,14

№	**xi**	**yi**	**Δyi**	**Δ2yi**	**Δ3yi**	**Δ4yi**	**Δ5yi**	**Δ6yi**
0	1,1	0,2234	1,0204	0,0002	0,0132	-0,0368	0,0762	-0,1313
1	1,25	1,2438	1,0206	0,0134	-0,0236	0,0394	-0,0551	
2	1,4	2,2644	1,034	-0,0102	0,0158	-0,0157		
3	1,55	3,2984	1,0238	0,0056	1E-04			
4	1,7	4,3222	1,0294	0,0057				
5	1,85	5,3516	1,0351					
6	2	6,3867						

N6(x) = y0+tΔ**y**0 + t(t-1)* Δ2**y**0/2! + t(t-1)(t-2)* Δ3**y**0/3! + t(t-1)(t-2)(t-3)* Δ4**y**0/4! + + t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)* Δ5**y**0/5! + t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)* Δ6**y**0/6!

y(1,121) = 0,2234 + 0,14*1,0204 + (0,14*(0,14-1)* 0,0002)/2 + (0,14*(0,14-1)*(0,14-2)* 0,0132)/6 + (0,14*(0,14-1)*(0,14-2)*(0,14-3)* -0,0368)/24 + (0,14*(0,14-1)*(0,14-2)*(0,14-3)*(0,14-4) *0,0762)/120 + (0,14*(0,14-1)*(0,14-2)*(0,14-3)*(0,14-4)*(0,14-5) *-0,1313)/720 = **0,37147968132678056**

Т.к x2 = 1,482 лежит в левой половине отрезка, то воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед(первой)

Для x1=1,482: t = (x-x0)/h = (1,482-1,4)/0,15 = 0,55

№	xi	yi	Δyi	Δ2yi	Δ3yi	Δ4yi	Δ5yi	Δ6yi
0	1,1	0,2234	1,0204	0,0002	0,0132	-0,0368	0,0762	-0,1313
1	1,25	1,2438	1,0206	0,0134	-0,0236	0,0394	-0,0551	
2	1,4	2,2644	1,034	-0,0102	0,0158	-0,0157		
3	1,55	3,2984	1,0238	0,0056	1E-04			
4	1,7	4,3222	1,0294	0,0057				
5	1,85	5,3516	1,0351					
6	2	6,3867						

N4(x) = y0+tΔ**y**0 + t(t-1)* Δ**2y**0/2! + t(t-1)(t-2)* Δ**3y**0/3! + t(t-1)(t-2)(t-3)* Δ4**y**0/4!

y(1,482) = 2,2644 + 0,55*1,034 + (0,55*(0,55-1)* -0,0102)/2 + (0,55*(0,55-1)*(0,55-2)* 0,0158)/6 + (0,55*(0,55-1)*(0,55-2)*(0,55-3)* -0,0157)/24 = **2,835882459453125**

Многочлен Гаусса

Т.к x1 = 1,121 > 1,1, то воспользуемся первой формулой Гаусса

Для x1=1,121: t = (x-x0)/h = (1,121-1,1)/0,15 = 0,14

xi	yi	Δyi	Δ2yi	Δ3yi	Δ4yi	Δ5yi	Δ6yi
X_0 = 1,1	Y_0 = 0,2234	Δ Y_0 = 1,0204	Δ2 Y_0 = 0,0002	Δ3 Y_0 = 0,0132	Δ4 Y_0 = -0,0368	Δ5 Y_0 = 0,0762	Δ6 Y_0 = -0,1313
X_1 = 1,25	Y_1 = 1,2438	Δ Y_1 = 1,0206	Δ2 Y_1 = 0,0134	Δ3 Y_1 = -0,0236	Δ4 Y_1 = 0,0394	Δ5 Y_1 = -0,0551	
X_2 = 1,4	Y_2 = 2,2644	Δ Y_2 = 1,034	Δ2 Y_2 = -0,0102	Δ3 Y_2 = 0,0158	Δ4 Y_2 = -0,0157		
X_3 = 1,55	Y_3 = 3,2984	Δ Y_3 = 1,0238	Δ2 Y_3 = 0,0056	Δ3 Y_3 = 1E-04			
X_4 = 1,7	Y_4= 4,3222	Δ Y_4 = 1,0294	Δ2 Y_4 = 0,0057				
X_5 = 1,85	Y_5 = 5,3516	Δ Y_5= 1,0351					
X_6 = 2	Y_6 = 6,3867						

P6(x) = y0+tΔ**y**0

y(1,121) = 0,2234+0,14*1,0204 = **0,366256**

Т.к x2 = 1,482 < 1,55, то воспользуемся второй формулой Гаусса

Для x2=1,482: t = (x-x0)/h = (1,482-1,55)/0,15 = -0,453

xi	**yi**	**Δyi**	**Δ2yi**	**Δ3yi**	**Δ4yi**	**Δ5yi**	**Δ6yi**
X_{-3} = 1,1	Y_{-3} = 0,2234	Δ Y_{-3} = 1,0204	Δ2 Y_{-3} = 0,0002	Δ3 Y_{-3} = 0,0132	Δ4 Y_{-3} = -0,0368	Δ5 Y_{-3} = 0,0762	Δ6 Y_{-3} = -0,1313
X_{-2} = 1,25	Y_{-2} = 1,2438	Δ Y_{-2} = 1,0206	Δ2 Y_{-2} = 0,0134	Δ3 Y_{-2} = -0,0236	Δ4 Y_{-2} = 0,0394	Δ5 Y_{-2} = -0,0551	
X_{-1} = 1,4	Y_{-1} = 2,2644	Δ Y_{-1} = 1,034	Δ2 Y_{-1} = -0,0102	Δ3 Y_{-1} = 0,0158	Δ4 Y_{-1} = -0,0157		
X_0 = 1,55	Y_0= 3,2984	Δ Y_0 = 1,0238	Δ2 Y_0 = 0,0056	Δ3 Y_0 = 1E-04			
X_1 = 1,7	Y_1= 4,3222	Δ Y_1 = 1,0294	Δ2 Y_1 = 0,0057				
X_2 = 1,85	Y_2 = 5,3516	Δ Y_2= 1,0351					
X_3 = 2	Y_3 = 6,3867						

P6(x) = y0+t Δ Y_{-1} + t(t+1) Δ2 Y_{-1} /2! + t(t+1)(t-1) Δ3 Y_{-2} /3! + t(t+2)(t+1)(t-1) Δ4 Y_{-2} /4! + t(t+2)(t+1)(t-1)(t-2) Δ5 Y_{-3} /5! + t(t+3)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2) Δ6 Y_{-3} /6!

y(1,482) = 3,2984+-0,453* 1,034+ (-0,453 *(-0,453+1) *-0,0102)/2 + (-0,453 *(-0,453+1)*(-0,453-1)* -0,0236)/6 + (-0,453 *(-0,453+2)*(-0,453+1)*(-0,453-1)* 0,0394)/24 + (-0,453 *(-0,453+2)*(-0,453+1)*(-0,453-1)*(-0,453-2)* 0,0762)/120 + (-0,453*(-0,453+3)*(-0,453+2)*(-0,453+1)*(-0,453-1)*(-0,453-2)* -0,1313)/720 = **2,830526968677011866809308750**

Листинг програмы

Многочлен Лагранжа

```
public double interpolation() {


    double L = 0;
    for (int i = 0; i < x.length; i++) {
        L += l(i, y[i]);
    }

    interpolationAnswer = L+" ";
    return L;

}


public double l(int indexOfL, double currentY) {
    double l = 1;
    for (int i = 0; i < x.length; i++) {
        if (i != indexOfL) {
            l *= (XCoordinate - x[i]) / (x[indexOfL] - x[i]);
        }
    }
    l = l * currentY;
    lstr += ("l" + indexOfL + " = " + l + "\n");
    return l;
}
```

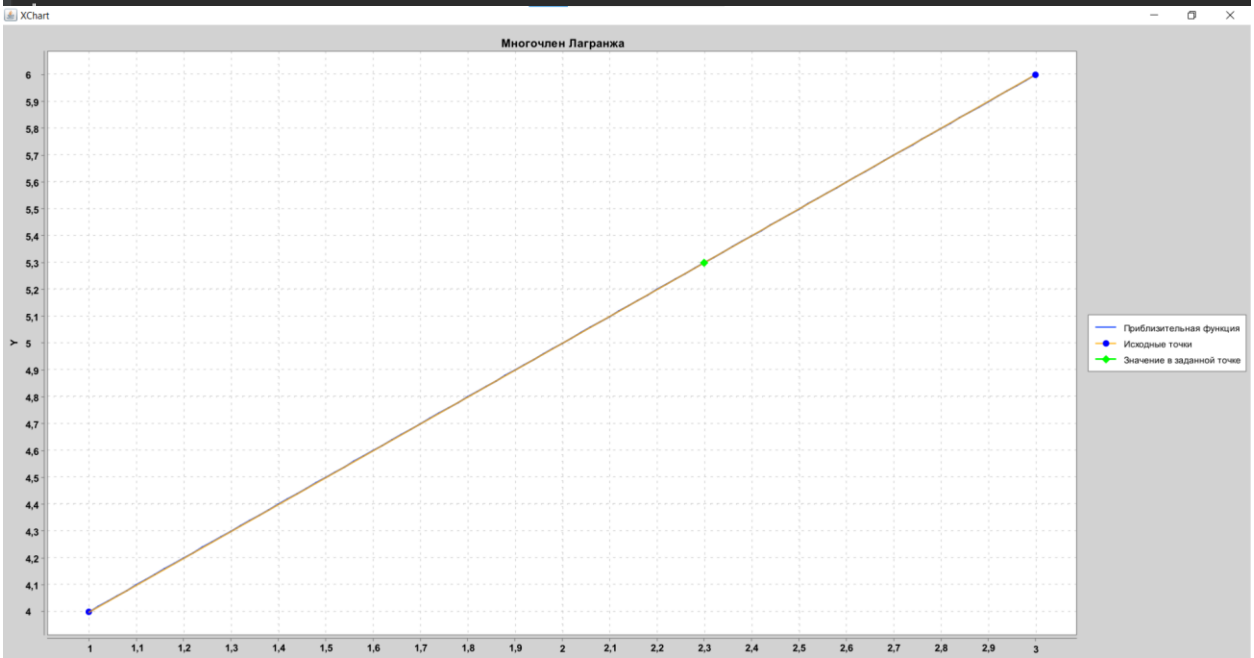
Многочлен Ньютона

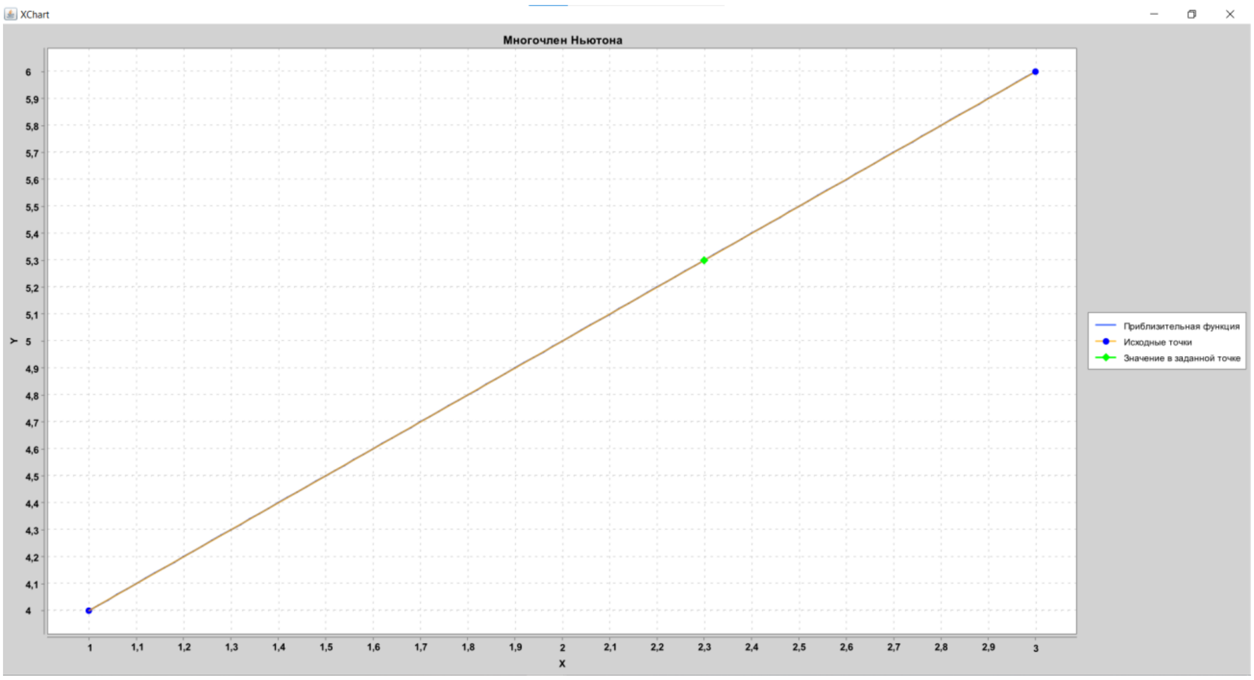
```java
public double interpolation() {

    double h = x[1] - x[0];
    double[][] deltaMatrix = new double[x.length][x.length];
    for (int i = 0; i < x.length; i++) {
        deltaMatrix[i][0] = y[i];
    }

    for (int i = 1; i < x.length; i++) {
        for (int j = 0; j < (x.length - i); j++) {
            deltaMatrix[j][i] = deltaMatrix[j + 1][i - 1] - deltaMatrix[j][i - 1];
        }
    }

    if (XCoordinate <= x[x.length / 2]) {
        return (firstInterpolationFunction(deltaMatrix, h));
    } else {
        return (secondInterpolationFunction(deltaMatrix, h));
    }

}
```

```java
public double firstInterpolationFunction(double[][] deltaMatrix, double h) {
    double answer;
    int x0 = x.length - 1;
    for (int i = 0; i < x.length; i++) {
        if (XCoordinate <= x[i]) {
            x0 = i - 1;
            if (x0 < 0) x0 = 0;
            break;
        }
    }
    double t = (XCoordinate - x[x0]) / h;
    answer = y[x0];

    for (int i = 1; i < x.length; i++) {
        double new_t = t;
        for (int j = 1; j < i; j++) {
            new_t *= t - j;
        }
        answer += (new_t * deltaMatrix[x0][i]) / getFactorial(i);
    }
    return answer;
}

public double secondInterpolationFunction(double[][] deltaMatrix, double h) {
    double answer;
    double t = (XCoordinate - x[x.length - 1]) / h;
    answer = y[x.length - 1];

    for (int i = 1; i < x.length; i++) {

        double new_t = t;
        for (int j = 1; j < i; j++) {
            new_t *= t + j;
        }

        answer += (new_t * deltaMatrix[x.length - i - 1][i]) / getFactorial(i);
    }
    return answer;
}
```

Результаты выполнения программы:

```
Выберите способ задания данных:(введите номер)
1. Набор данных (таблицы x,y)
2. На основе выбранной функции
1
Введите количество точек:
2
Введите значения X (через пробел):
1
3
Введите значения Y (через пробел):
4
6
Введите координату X:
2,3
Многочлен Лагранжа:
l0 = 1.4000000000000004
l1 = 3.8999999999999995

Ответ: L1(2.3) = 5.3

Многочлен Ньютона:
Ответ, полученный первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:
5.3
```





Вывод:

В результате выполнения данной лабораторной я познакомился с методами интерполяции функции и реализовал метод с использование многочлена Лагранжа и метод с использованием многочлена Ньютона с конечными разностями. Понял что такое интерполирование и для чего оно необходимо.