Университет ИТМО

ФПИиКТ

Лабораторная работа №3
по Вычислительной математике

Выполнил: Балтабаев Дамир
Группа: P3210
Вариант: 4

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург
2022

Цель лабораторной работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнение работы:

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя, исходя из варианта:
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1 (столбец 3), точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 6$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 6$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

Рабочие формулы используемых методов:

Метод прямоугольников:

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}64$ $\quad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}040$ $\quad I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2}$

Метод трапеций:

$$I_{\text{трап}} = \int_1^2 x^2 dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Формула Ньютона - Котеса :

Формула Ньютона-Котеса порядка n:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

Листинг программы

Метод прямоугольников:

```
@Override
    public void mainMethod() {
        Integer n = 4;

        Double IAverage;
        Double IRight;
        Double ILeft;

        Double IAveragePrevious = Double.MAX_VALUE;
        Double IRightPrevious = Double.MAX_VALUE;
        Double ILeftPrevious = Double.MAX_VALUE;

        while (true) {
            IRight = 0.0;
            IAverage = 0.0;
            ILeft = 0.0;

            Double h = (getB() - getA()) / n;

            for (int i = 1; i <= n; i++) {
                IRight = IRight + functionEvaluation(getA() + i * h);
                ILeft = ILeft + functionEvaluation(getA() + (i - 1) * h);
                IAverage = IAverage + functionEvaluation(((getA() + (i - 1) *
h) + (getA() + (i) * h)) / 2);
            }

            IAverage = IAverage * h;
            IRight = IRight * h;
            ILeft = ILeft * h;

            if ((Math.abs(IAveragePrevious - IAverage) / 3 <= getAccuracy()
                    && Math.abs(IRightPrevious - IRight) / 3 <= getAccuracy()
                    && Math.abs(ILeftPrevious - ILeft) / 3 <= getAccuracy()))
break;

            if (n > 1000000){
                System.out.println("Количество разбиений превысило отметку в
1.000.000!");
                break;
            }

            IAveragePrevious = IAverage;
            IRightPrevious = IRight;
            ILeftPrevious = ILeft;

            n = n * 2;

        }

        System.out.println("Ответ полученный методом средних прямоугольников:
" + IAverage);
        System.out.println("Ответ полученный методом правых прямоугольников:
" + IRight);
```

```
        System.out.println("Ответ полученный методом левых прямоугольников: "
+ ILeft + "\n");

        System.out.println("Оценка погрешности правилом Рунге: \n" +
                "Оценка погрешности для метода средних прямоугольников: " +
Math.abs((IAveragePrevious - IAverage) / 3) + "\n" +
                "Оценка погрешности для метода правых прямоугольников: " +
Math.abs((IRightPrevious - IRight) / 3) + "\n" +
                "Оценка погрешности для метода левых прямоугольников: " +
Math.abs((ILeftPrevious - ILeft) / 3) + "\n");

        System.out.println("Число разбиения интервала: " + n + "\n");

        System.out.println("Точное значение интегралла методом Ньютона
Лейбница = " + functionNewtonLeibniz());
        System.out.println("Погрешность в вычислении интеграла составляет:\n"
+
                "ΔIсред = I-Iсред = " + Math.abs(functionNewtonLeibniz() -
IAverage) + "\n" +
                "ΔIлев = I-Iлев = " + Math.abs(functionNewtonLeibniz() -
ILeft) + "\n" +
                "ΔIправ = I-Iправ = " + Math.abs(functionNewtonLeibniz() -
IRight) + "\n");
    }
```

Метод трапеций:

```
@Override
    public void mainMethod() {
        Integer n = 4;

        Double answer;
        Double answerPrevious = Double.MAX_VALUE;


        while (true) {
            answer = 0.0;
            Double h = (getB() - getA()) / n;
            for (int i = 1; i <= n - 1; i++) {
                answer += functionEvaluation(getA() + i * h);
            }
            answer = h * (answer + ((functionEvaluation(getB()) +
functionEvaluation(getA())) / 2));
            if ((Math.abs((answerPrevious - answer) / 3) <= getAccuracy()))
break;

            if (n > 1000000) {
                System.out.println("Количество разбиений превысило отметку в
1.000.000!");
                break;
            }

            answerPrevious = answer;
            n = n * 2;


        }

        System.out.println("Ответ полученный методом трапеций: " + answer +
"\n");
```

```
        System.out.println("Оценка погрешности правилом Рунге: \n" +
                "Оценка погрешности правилом Рунге для метода трапеций: " +
Math.abs((answerPrevious - answer) / 3) + "\n");

        System.out.println("Число разбиения интервала: " + n + "\n");

        System.out.println("Точное значение интегралла методом Ньютона
Лейбница = " + functionNewtonLeibniz());
        System.out.println("Погрешность в вычислении интеграла составляет:\n"
+
                "ΔI =I-Iтрап = " + Math.abs(functionNewtonLeibniz() -
answer));
    }
```

Результаты выполнения программы

Метод прямоугольников:

```
Введите номер функции:
Функции:
1: -2x^3-4x^2+8x-4
2: -2x^3-3x^2+x+5
3: 3x^3+5x^2+3x-6
1
Введите нижний предел интегрирования (a):
1
Введите верхний предел интегрирования (b):
2
Введите точность:
0.001
Выберите номер метода для решения функции
1: Метод прямоугольников
2: Метод трапеций
1
Ответ полученный методом средних прямоугольников: -8.833333268761635
Ответ полученный методом правых прямоугольников: -8.83553072810173
Ответ полученный методом левых прямоугольников: -8.83113619685173

Оценка погрешности правилом Рунге:
Оценка погрешности для метода средних прямоугольников: 6.457169850667317E-8
Оценка погрешности для метода правых прямоугольников: 7.325510183970133E-4
Оценка погрешности для метода левых прямоугольников: 7.322927316029867E-4

Число разбиения интервала: 4096

Точное значение интегралла методом Ньютона Лейбница = -8.833333333333332
Погрешность в вычислении интеграла составляет:
ΔIсред = I-Iсред = 6.457169732243528E-8
ΔIлев = I-Iлев = 0.0021971364816018024
ΔIправ = I-Iправ = 0.0021973947683981976
```

Метод трапеций:

```
Введите номер функции:
Функции:
1: -2x^3-4x^2+8x-4
2: -2x^3-3x^2+x+5
3: 3x^3+5x^2+3x-6
1
Введите нижний предел интегрирования (a):
1
Введите верхний предел интегрирования (b):
2
Введите точность:
0.001
Выберите номер метода для решения функции
1: Метод прямоугольников
2: Метод трапеций
2
Ответ полученный методом трапеций: -8.8338623046875

Оценка погрешности правилом Рунге:
Оценка погрешности правилом Рунге для метода трапеций: 5.289713541666666E-4

Число разбиения интервала: 64

Точное значение интегралла методом Ньютона Лейбница = -8.833333333333332
Погрешность в вычислении интеграла составляет:
ΔI =I-Iтрап = 5.289713541678509E-4
```

Вычисление заданного интеграла

Вычислительная реализация

Вариант 4

1. Точное вычисление

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)\,dx = -\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 4x^2 - 4x \Big|_{-3}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 4 + 4 - \left(-\frac{81}{2} + \frac{108}{3} + 36 + 12\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 8 + \frac{81}{2} - \frac{108}{3} - 36 - 12 =$$

$$= 40 - \frac{104}{3} - 40 = -\frac{104}{3} \approx -34.6666\ldots$$

2. $n = 6$; Метод Ньютона - Котеса

$C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$; $h = \frac{b-a}{n} = +\frac{1}{3}$

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)dx = C_6^0 f(-3) + C_6^1 f\left(-\frac{8}{3}\right) + C_6^2 f\left(-\frac{7}{3}\right) +$$

$$+ C_6^3 f\left(-\frac{6}{3}\right) + C_6^4 f\left(-\frac{5}{3}\right) + C_6^5 \left(-\frac{4}{3}\right) + C_6^6 (-1) =$$

$$= \frac{41 \cdot 2 \cdot (-10)}{840} + \frac{18 \cdot (-8)}{35}$$

$$= -\frac{820}{840} + \frac{18 \cdot (-15,8519)}{35} + \frac{18 \cdot (-19,0370)}{280} + \frac{68 \cdot (-20)}{105} +$$

$$+ \frac{18 \cdot (-19,1852)}{280} + \frac{18 \cdot (-17,0370)}{35} + \frac{82 \cdot (-14)}{840} \approx$$

$$\approx -34,666671$$

3. Метод средних прямоугольников при $n=6$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)\,dx = \frac{1}{3}\left(f\left(-\frac{17}{6}\right) + f\left(-\frac{15}{6}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(-\frac{13}{6}\right) + f\left(-\frac{11}{6}\right) + f\left(-\frac{9}{6}\right) + f\left(-\frac{7}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(-13,2870 - 17,75 - 19,7685 - 19,7870 - 18,25 -$$

$$- 15,6019) \approx -34,8148$$

~~4. Метод трапеций при $n=6$~~

$$\cancel{\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{f(-3) + f(6)}{2} + \right.}$$

4. Метод трапеций при $n=6$

$$\int_{-3}^{-1} (-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4)\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{f(-3) + f(-1)}{2} + f\left(-\frac{8}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(-\frac{7}{3}\right) + f\left(-\frac{6}{3}\right) + f\left(-\frac{5}{3}\right) + f\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}(-12 +$$

$$+ (-15,8519) - 19,0370 - 20 - 19,1852 - 17,0370) =$$

$$\approx -34,37037$$

5. Метод Симпсона при $n=6$

$$\int_{-3}^{-1}(-2x^3-4x^2+8x-4)\,dx=\frac{1}{9}\Big(f(-3)+4\big(f(-\tfrac{8}{3})+f(-\tfrac{6}{3})+$$

$$+f(-\tfrac{4}{3})\big)+2\big(f(-\tfrac{7}{3})+f(-\tfrac{5}{3})+f(-\tfrac{1}{3})\big)+f(-1)\Big)=$$

$$=\frac{1}{9}\Big(-10+4(-15{,}8519-20-17{,}0370)+$$

$$+2(-19{,}0370-19{,}1852-7{,}0370)-14\Big)\approx$$

$$\approx -34{,}666\ldots$$

6. Оценка погрешностей:

Средних прямоугольников: $\left|\dfrac{-34{,}66+34{,}6148}{-34{,}66}\right|\approx$

$\approx 0{,}00428\approx 0{,}43\%$

Трапеций: $\left|\dfrac{-34{,}66+34{,}37037}{-34{,}66}\right|\approx 0{,}0084\approx 0{,}84\%$

Симпсона: $\left|\dfrac{-34{,}66+34{,}66}{34{,}66}\right| = 0\%$

Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы я научился находить приближенное значение интеграла разными методами. Поработал с методами: Ньютона-Котеса, прямоугольников, трапеций, Симпсона. Узнал о правиле Рунге, для завершения вычислительного процесса и оценки погрешности.