Лабораторная работа № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМ

Цель работы: получить навыки применения формул сложения и умножения вероятностей для решения задач надёжности электрических схем.

Основные теоретические сведения

Одно из важных приложений теории вероятностей – расчёт надёжности различных технических систем: электрических схем, компьютеров, трубопроводов, двигателей и т.д. Под надёжностью технического устройства понимают обычно вероятность его безотказной работы в течение определённого промежутка времени (вспомните гарантийный срок службы). К сожалению, обеспечить 100 % надёжность системы не могут даже самые передовые технические решения. Зато можно рассчитать её надёжность и заранее подготовиться к необходимому ремонту.

Рассмотрим задачи вида: задана схема электрической цепи с надежностью элементов (или вероятностями выхода из строя), найти вероятность работы цепи (или вероятность разрыва цепи).

Задачи могут иметь разные формулировки, но алгоритм решения для них одинаков.

1. Формализация задачи – следует ввести основные события:

X – событие цепь работает, цепь пропускает ток;

$\overline{X}$ – событие цепь не пропускает ток, произошел разрыв в цепи;

A_i – элемент i работает, пропускает ток;

$\overline{A_i}$ – элемент i отказал, не пропускает ток, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$p(A_i) = p_i$ – вероятности работы элементов (надежности);

$p(\overline{A_i}) = q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – вероятности отказа.

2. Выбор основных формул, которые необходимы в решении этого типа задач: <u>формулы сложения и умножения вероятностей</u>.

Для независимых в совокупности событий (отказы / работа элементов цепи – именно такие):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B); \tag{3.1}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B); \tag{3.2}$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{3.3}$$

Последовательное соединение

Элементы цепи «нанизаны» на провод один за другим, то есть следуют один за другим, отсюда и название последовательное соединение (рис.3. 1). Если откажет один из них (любой) − ток в цепи прервётся. Иначе говоря, цепь работает тогда и только тогда, когда все элементы работают. В терминах теории вероятностей получаем произведение событий:

$$X = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3,$$

а вероятность работы цепи

$$P(X) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3.$$

Рис. 3.1. Пример последовательного соединения

Если в цепи последовательно соединены не три, а больше независимо работающих элементов, формула легко обобщается и получается:

$$P(X) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n; \quad P(\overline{X}) = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n. \qquad (3.4)$$

Параллельное соединение

При параллельном соединении (рис. 3.2), если откажет, скажем, элемент 1, ток может пройти через 2-й элемент. Если откажут 1-й и 2-й элементы, ток пройдет через 3-й. И только если все элементы откажут, цепь разорвется.

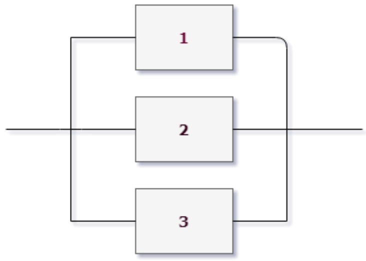


Рис. 3.2. Пример параллельного соединения

Иначе говорят, цепь работает, если работает хотя бы один элемент в ней. В терминах теории вероятностей − это сумма событий:

$$X = A_1 + A_2 + A_3.$$

Используется формула (3.3), чтобы записать вероятность работы такой цепи:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 .$$

И обобщается на случай *n* параллельных элементов в цепи:

$$P(X) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n ; \quad P(\overline{X}) = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n . \qquad (3.5)$$

Важно запомнить правило: последовательному соединению соответствует произведение событий, параллельному соединению – сумма событий.

Можно рассмотреть типовые электрические схемы, для которых при определении надежности в задачах нужно проводить декомпозицию: выделять уровни схемы и определять тип соединения на каждом уровне.

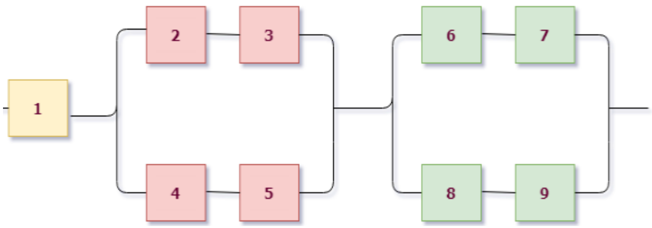


Рис. 3.3. Комбинированная схема

Например, на рис. 3.3 видно три группы элементов, соединенных последовательно: (1), (2, 3; 4, 5) и (6, 7; 8, 9) элементы. Выделим для наглядности цветом эти группы (рис. 3.4) и видим, что тип схемы на первом уровне – последовательный, следовательно, имеем:

$$X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 ,$$

где X_1 – работает первая группа элементов,

X_2 – работает вторая группа элементов,

X_3 –работает третья группа элементов.

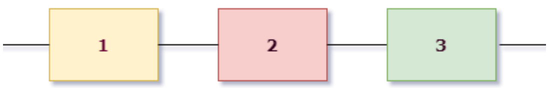


Рис. 3.4. Групповая последовательность

Далее необходимо рассмотреть каждую группу отдельно.

В первой группе всего один элемент, т.е. она работает, когда работает первый элемент цепи ($X_1 = A_1$). Мы дошли до элемента, следовательно разбор этой группы закончен.

Вторая группа имеет уже параллельную структуру – это второй уровень вложенности схемы.

Внутри второй группы элементы (A_2, A_3) и (A_4, A_5) соединены последовательно. Это уже третий уровень вложенности и он заканчивается отдельными элементами, следовательно разбор окончен.

Таким образом, вторая группа работает, если

$$X_2 = A_2 A_3 + A_4 A_5.$$

Аналогично разбирается третья подгруппа (она совпадает по структуре со второй):

$$X_3 = A_6 A_7 + A_8 A_9.$$

Сводится все в одну формулу, и получается искомое событие − цепь работает исправно:

$$X = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot A_5) \cdot (A_6 \cdot A_7 + A_8 \cdot A_9).$$

Далее следует перейти ко второму этапу решения задачи. Поскольку мы решаем задачу по теории вероятностей, то нужно определить вероятность того, что ток проходит в цепи.

Так как вероятность произведения для независимых событий равна произведению вероятностей, нужно использовать формулы (3.1–3.3) для получения:

$$P(X) = P(A_1) \cdot P(A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot A_5) \cdot P(A_6 \cdot A_7 + A_8 \cdot A_9).$$

Если заданы вероятности надежности отдельных элементов $p_i = P(A_i)$, то при подстановке их в формулу можно найти вероятность надежной работы всей схемы.

Задания на выполнение лабораторной работы

1. Повторите правила сложения и умножения вероятностей.
2. Рассмотрите алгоритм применения этих правил на примере электрических схем.
3. Решите задачи своего варианта с применением соответствующих формул.
4. Проведите исследование надежности электрических схем разной конфигурации.

5. Ответьте на контрольные вопросы.

Методика выполнения работы

1. Запишите содержание задачи и выполните математическое решение по алгоритму:

– определите по условию задачи вид электрической схемы (последовательная, параллельная или комбинированная);

– в случае комбинированной схемы, рассмотрите положения элементов, разделите их на уровни, в каждом уровне должно быть только последовательное или только параллельное соединение;

– в соответствии с соединением распишите формулу события каждого уровня и соответствующую ему вероятность;

– все выражения подставьте в общую формулу. Вид общей формулы выберите в соответствии с соединением всех уровней;

– то же самое выполните для формулы вероятности $P(X)$;

– подставьте числовые значения в формулы и решите задание.

2. Для исследования надежности электрических схем при выполнении лабораторной работы выполните следующие процедуры:

– для формирования массива из случайных чисел (рис. 3.5) в диапазоне от 0 до 1 , используйте функцию MS Excel: [= СЛЧИС()].

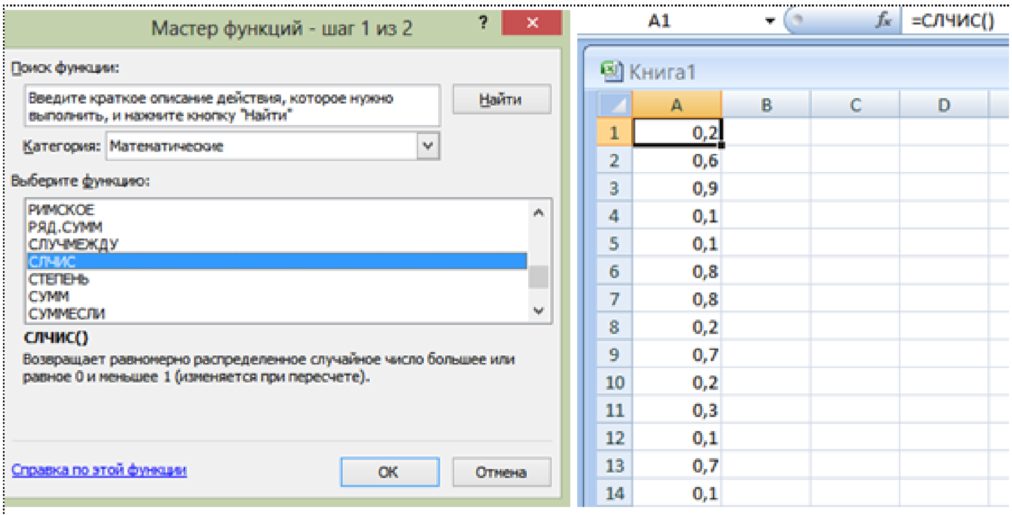


Рис. 3.5. Встроенная функция СЛЧИС()

– выполните настройку формата ячеек в «числовой» с одним знаком после запятой (рис. 3.6).

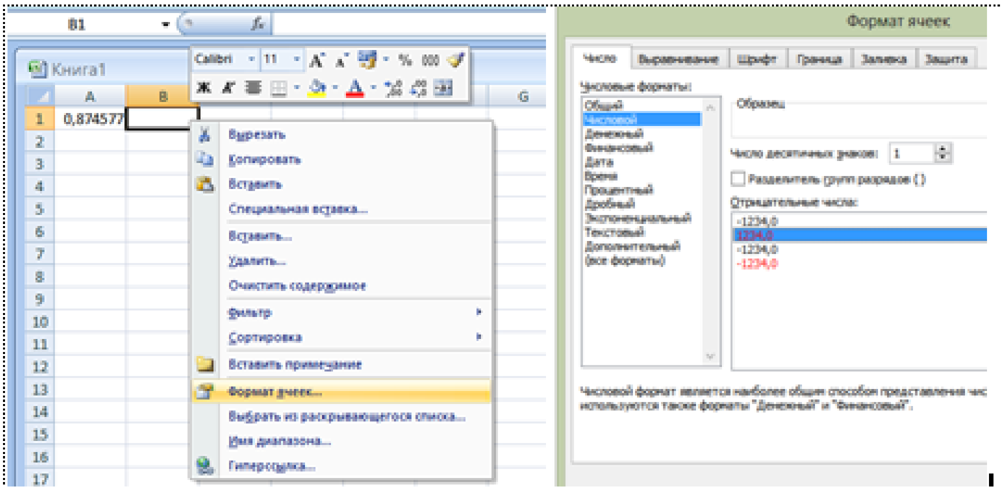
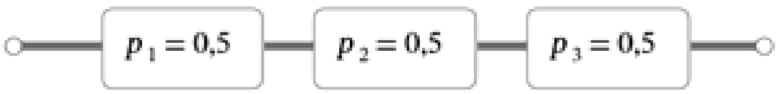


Рис. 3.6. Настройка формата ячейки

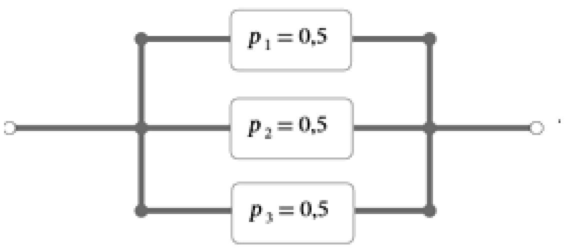
Задания для индивидуального выполнения

1. Три элемента соединены последовательно. Вероятности их безотказной работы – p_1, p_2, p_3. Вычислите по ним вероятность $P(A)$ безотказной работы всего устройства.



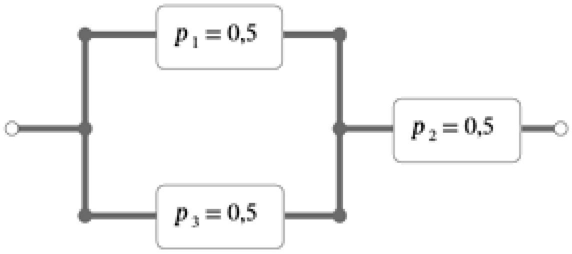
Исследуйте, как ведет себя $P(A)$ при изменении каждого из параметров случайным образом 25 раз, представьте таблицу результатов. Постройте график и проанализируйте результат. Пример оформления представлен на рис. 3.7.

2. Три элемента соединены параллельно. Вероятности их безотказной работы – p_1, p_2, p_3. Вычислите по ним вероятность $P(A)$ всего устройства.



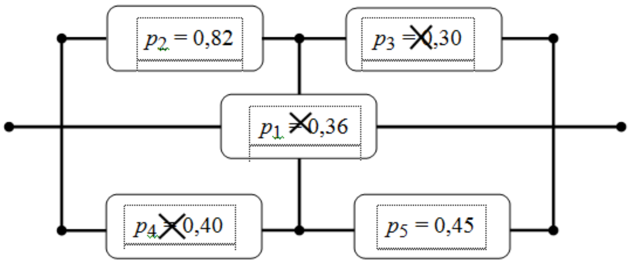
Исследуйте, как ведет себя $P(A)$ при изменении каждого из параметров случайным образом 25 раз. Постройте график и проанализируйте результат.

3. Три элемента соединены, как показано на схеме. Вероятности их безотказной работы $-\ p_1,\ \ p_2,\ \ p_3$. Вычислите по ним вероятность $P(A)$ безотказной работы всего устройства.



Исследуйте, как ведет себя $P(A)$ при изменении каждого из параметров случайным образом 25 раз. Постройте график и проанализируйте результат.

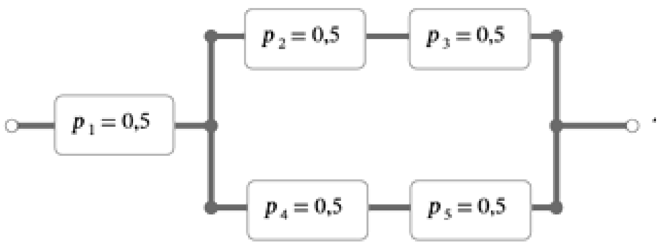
4. Пять элементов соединены, как показано на схеме. Вероятности их безотказной работы $-\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_5$. Вычислите по ним вероятность $P(A)$ безотказной работы всего устройства.



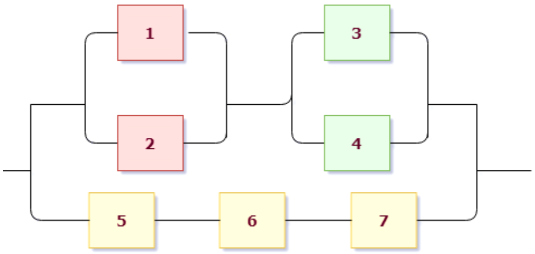
Исследуйте, как ведет себя $P(A)$ при разных параметрах $p_1, p_2, \ldots p_5$, разыграв для каждого из пяти элементов случайные отказы (крестик) в соответствии с заданными вероятностями.

5. Пять элементов соединены, как показано на схеме. Вероятности их безотказной работы $-\ p_1,\ \ p_2,\ \ldots\ p_5$. Вычислите по ним вероятность $P(A)$ безотказной работы всего устройства.

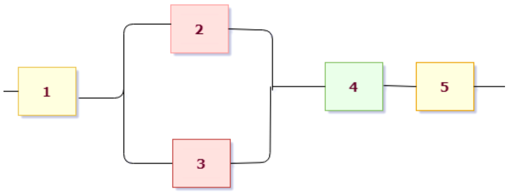
Исследуйте, как ведет себя $P(A)$ при изменении каждого из параметров случайным образом 25 раз. Постройте график и проанализируйте результат.



6. Найдите вероятность безотказной работы функциональной цепи, состоящей из независимо работающих элементов. Подберите случайным образом вероятности всех элементов для получения максимальной надежности.



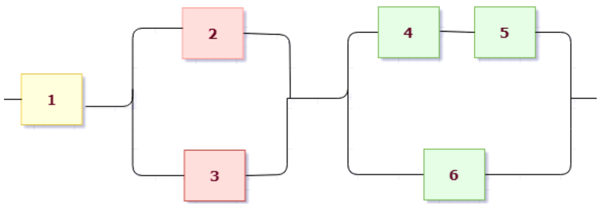
7. Найдите вероятность обрыва цепи, если вероятность отказа каждого элемента равна p_i. Значения этих элементов сгенерируйте случайным образом, а их отказы являются независимыми событиями.



8. Дана схема включения элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени T равна p:

1) найдите вероятность события B;

2) вычислите $P(B)$ при p_i = случайное число.



D4 f_x =A4*B4*C4

	A	B	C	D
2	Вероятности p			
3	p1	p2	p3	Вероятность безотказной работы P(A)
4	0,5	0,5	0,5	0,125
5	0,1	0,4	0,7	0,030
6	0,2	0,6	0,4	0,035
7	0,1	0,5	0,2	0,009
8	0,2	0,1	0,5	0,014
9	0,0	0,4	0,1	0,000
10	0,3	0,7	0,2	0,043
11	0,9	0,9	0,3	0,288
12	1,0	0,7	0,3	0,228
13	0,8	0,7	0,0	0,018
14	0,8	0,5	0,6	0,273
15	0,3	0,3	1,0	0,089

Рис. 3.7. Пример построения графика по результатам решения

H4 f_x =B4 * (1 - (1-C4)*(1-D4)) * (1 - (1-E4*F4)*(1-G4))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Параметры для решения задач				Задание 8			
2		Вероятности безотказной работы элементов						Результат
3	№	p1	p2	p3	p4	p5	p6	P(A)
4	1	0,97	0,86	0,95	0,79	0,88	0,42	0,794
5	2	0,85	0,74	0,50	0,77	0,49	0,22	0,379
6	3	0,74	0,79	0,26	0,17	0,59	0,44	0,306

Рис. 3.8. Пример оформления разных вариантов заданий

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие составляющие:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Чему равна вероятность суммы двух совместных событий?

2. Поясните условия применения теоремы сложения вероятностей несовместных событий.

3. Можно ли сказать, что чем надёжнее любой из элементов схемы, тем надёжнее вся схема?

4. Можно ли сказать, что надёжность любой схемы всегда лежит в диапазоне от минимальной до максимальной из $p_1, \dots, p_n$?

5. Влияет ли на надёжность данной схемы надёжность элемента x_i?