Лабораторная работа № 5

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: получить навыки использования законов распределения вероятностей непрерывных случайных величин для решения практических задач.

Основные теоретические сведения

Нормальный закон распределения

Нормальным распределением называется распределение непрерывной случайной величины *X*, плотность которой определяется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-m)^2 / 2\sigma^2}, \quad 2)\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-(x-m)^2 \mid 2\sigma^2\right],$$

где m – математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X;
σ – среднее квадратическое отклонение, стандартное отклонение случайной величины X. Следовательно

$$M(X) = m, \ D(X) = \sigma^2; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma .$$

Размерности математического ожидания и среднего квадратического отклонения совпадают с размерностью случайной величины X.

Функция (интегральная) нормального распределения равна:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2 / 2\sigma^2} dx .$$

Для краткой записи нормального распределения с параметрами m и σ используют обозначение $X \sim N(m, \sigma^2)$.

В частном случае параметры $m = 0$, $\sigma = 1$. Нормальное распределение $X \sim N(0,1)$ называется стандартным нормальным распределением. В этом случае плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} .$$

Функция стандартного нормального распределения иногда называется функцией Лапласа, она имеет специальное обозначение

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt .$$

График плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = m$ и имеет колоколообразный вид (кривая Гаусса).

Нормальное распределение имеет широкое распространение в прикладных задачах. Это связано с тем, что в реальности многие исследуемые случайные величины являются следствием различных случайных событий. Многие реально существующие в природе, технике и обществе случайные величины очень хорошо моделируются с помощью нормальных случайных величин. Это, например, ошибка результатов измерений, разброс скоростей и энергий молекул в газе, рост или вес случайно взятого человека.

Величина, которая определяется взаимодействием большого числа независимых друг от друга причин и факторов, также подчиняется нормальному распределению.

Экспоненциальное распределение

Экспоненциальным (или показательным) называется распределение непрерывной случайной величины *X*, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{если} \quad x \geq 0; \\ 0 & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр экспоненциального распределения, постоянная положительная величина.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины *X*, имеющей показательное распределение, равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0; \\ \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал (*a, b*) непрерывной случайной величины *X*, распределенной по показательному закону:

$$P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} .$$

Функция экспоненциального распределения

$$F(x) = 1 - \lambda / e^{-\lambda \mathrm{x}} .$$

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей экспоненциальное распределение, равно

$$M(X) = 1/\lambda,$$

а дисперсия

$$D(X) = 1/\lambda^2.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = 1/\lambda, \text{ следовательно } M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda.$$

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. Интервал времени t между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \qquad t > 0.$$

Показательный закон удобен и прост для решения многих практических задач, так как обладает следующим важным свойством: вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивности отказов).

Особенность показательного распределения состоит в том, что оно определяется только одним параметром λ, это указывает на его преимущество по сравнению с другими распределениями, зависящими от большого числа параметров

В приложениях теории вероятностей показательное распределение – одно из основных распределений в теории: надежности; массового обслуживания; марковских случайных процессов.

Задания на выполнение лабораторной работы

1. Изучите алгоритм работы с функциями MS Excel.
2. Исследуйте нормальный закон распределения в зависимости от его параметров (m, σ).
3. Исследуйте экспоненциальный закон распределения в зависимости от его параметра λ.
4. Ответьте на контрольные вопросы.

Методика выполнения работы

1. Для исследования нормального распределения в MS Excel имеется встроенная статистическая функция НОРМРАСП (рис. 5.1).

Чтобы открыть эту функцию, активируйте значок функции $f(x)$ и в диалоговом окне выберите «Статистические».

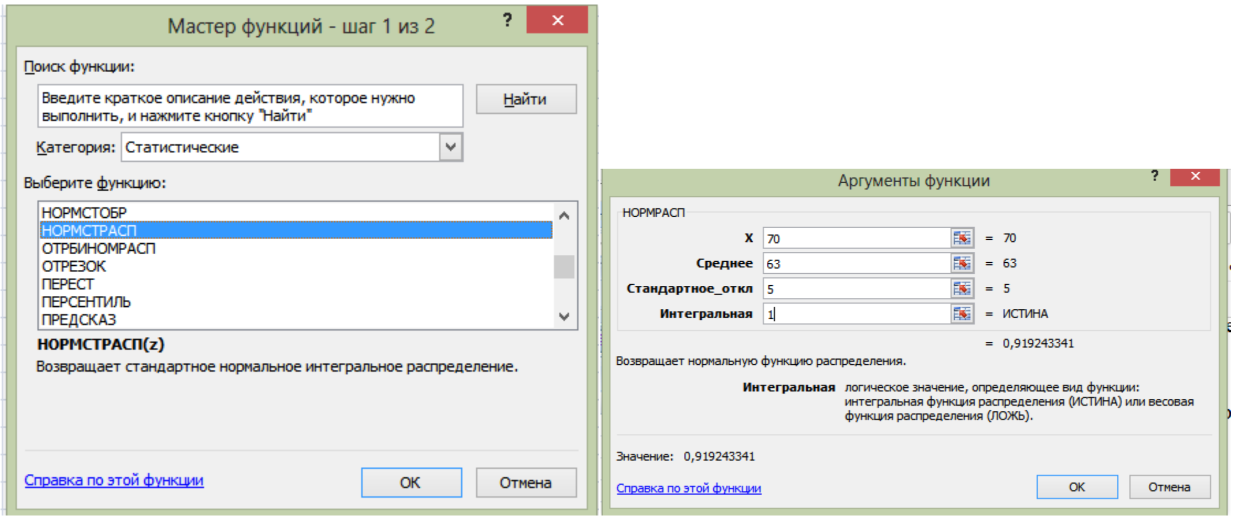


Рис. 5.1. Встроенная функция НОРМРАСП

Синтаксис функции:

= НОРМРАСП (*X*; Среднее; Стандартное откл; Интегральная).

X – значение аргумента (или ссылка на ячейку), на основе которого рассчитывается плотность или значение функции нормального распределения.

Среднее – математическое ожидание, используемое в качестве первого параметра модели нормального распределения.

Стандартное откл – среднеквадратичное отклонение, второй параметр модели.

Интегральная = 0 – рассчитывается плотность вероятности,

Интегральная = 1 – рассчитывается функция распределения.

2. Исследуйте нормальный закон распределения в зависимости от его параметров (m, σ) по следующему алгоритму.

– Введите в таблицу значения аргумента x в диапазоне от $(-3- V/2)$ до $(5 + V/2)$ с шагом 0,5 и вычислите значение плотности :

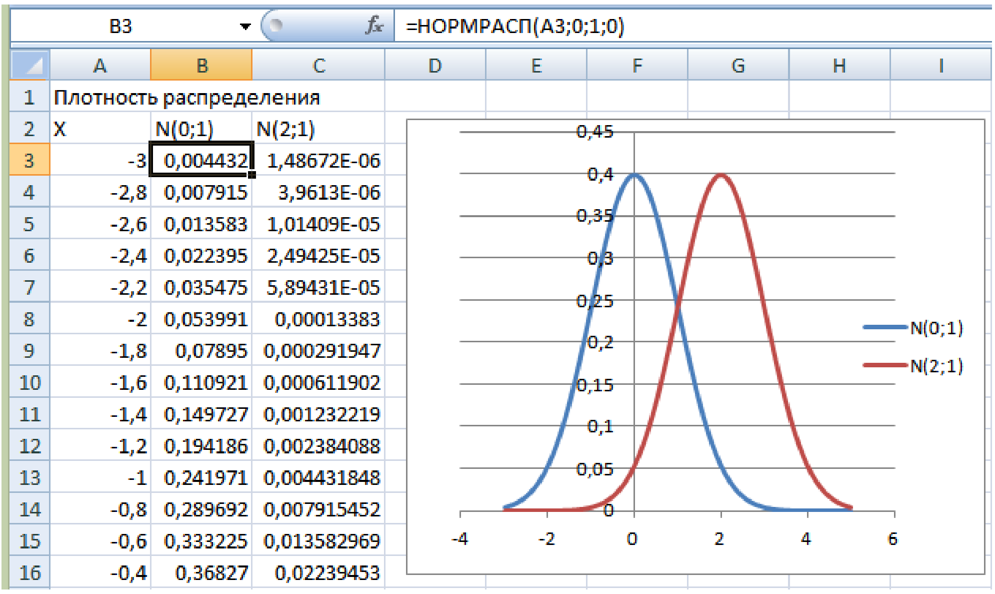
а) для нормального распределения с постоянным значением параметра $(m = 2 + V/2)$ и трех значений стандартного отклонения ($\sigma_1 = 0{,}5$; $\sigma_2 = 1$; $\sigma_3 = 2$).

Используя мастер диаграмм, постройте кривые распределения к соответствующей таблице результатов и проведите анализ влияния параметра σ на характер изменения их графического представления.

б) для нормального распределения с постоянным значением параметра

($\sigma = 2+V/2$) и трех значений математического ожидания ($m_1 = -2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$).

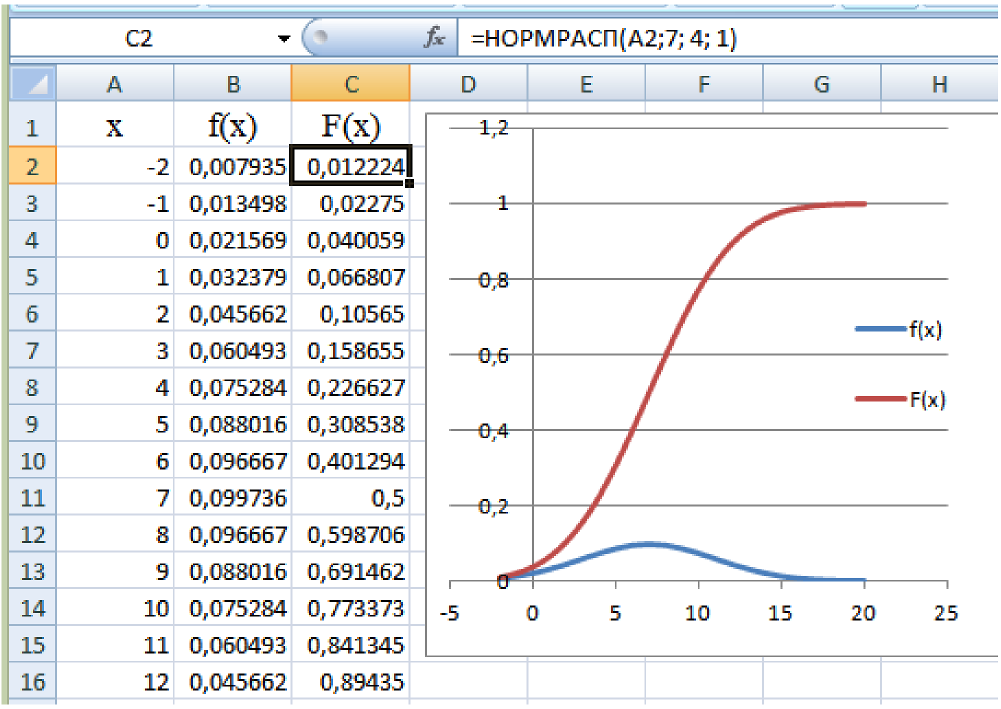
Постройте графики распределения плотности вероятности и функции распределения к соответствующей таблице результатов и выполните анализ влияния параметра m на характер изменения их графического представления.



B3 =НОРМРАСП(A3;0;1;0)

	A	B	C
1	Плотность распределения		
2	X	N(0;1)	N(2;1)
3	-3	0,004432	1,48672E-06
4	-2,8	0,007915	3,9613E-06
5	-2,6	0,013583	1,01409E-05
6	-2,4	0,022395	2,49425E-05
7	-2,2	0,035475	5,89431E-05
8	-2	0,053991	0,00013383
9	-1,8	0,07895	0,000291947
10	-1,6	0,110921	0,000611902
11	-1,4	0,149727	0,001232219
12	-1,2	0,194186	0,002384088
13	-1	0,241971	0,004431848
14	-0,8	0,289692	0,007915452
15	-0,6	0,333225	0,013582969
16	-0,4	0,36827	0,02239453

Рис. 5.2. Пример одного из вариантов решения



C2 =НОРМРАСП(A2;7; 4; 1)

	A	B	C
1	x	f(x)	F(x)
2	-2	0,007935	0,012224
3	-1	0,013498	0,02275
4	0	0,021569	0,040059
5	1	0,032379	0,066807
6	2	0,045662	0,10565
7	3	0,060493	0,158655
8	4	0,075284	0,226627
9	5	0,088016	0,308538
10	6	0,096667	0,401294
11	7	0,099736	0,5
12	8	0,096667	0,598706
13	9	0,088016	0,691462
14	10	0,075284	0,773373
15	11	0,060493	0,841345
16	12	0,045662	0,89435

Рис. 5.3. Пример представления результатов

3. Для вычисления значений плотности и функции экспоненциального распределения в MS Excel используйте встроенную статистическую функция ЭКСПРАСП (рис. 5.4).

Синтаксис функции:

= ЭКСПРАСП (*X*; Лямбда; Интегральная).

X – значение аргумента функции;

Лямбда – значение параметра;

Интегральная – логическое значение (0 или 1), которое определяет форму функции.

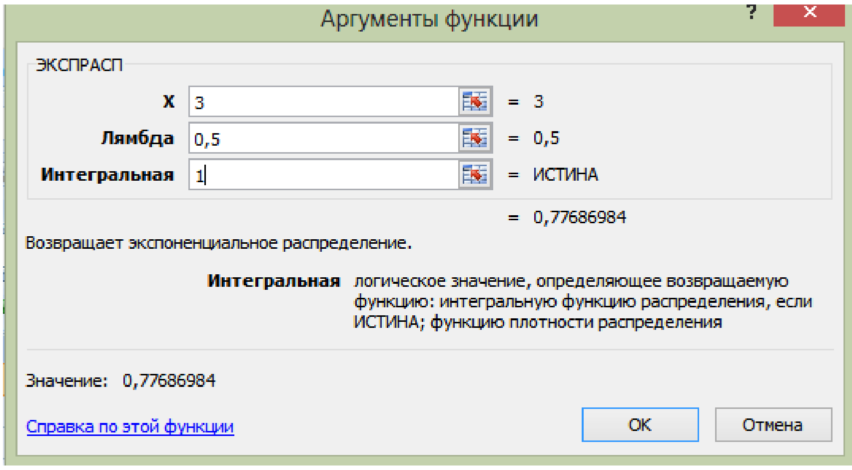


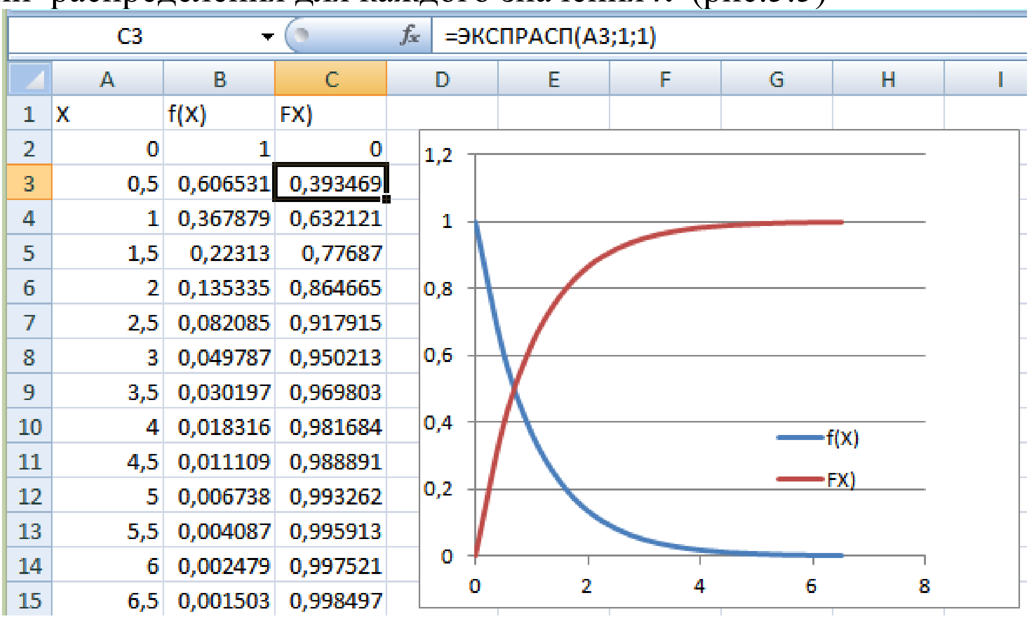
Рис. 5.4. Встроенная функция ЭКСПРАСП

4. Исследуйте экспоненциальный закон распределения в зависимости от его параметров по алгоритму:

– Введите в таблицу MS Excel значения аргумента *x* в диапазоне от 0 до 20 с шагом 0,5.

– Вычислите значения плотности экспоненциального распределения при $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0{,}5$; $\lambda_3 = 0{,}1$.

– Используя мастер диаграмм, постройте графики плотности и функции распределения для каждого значения λ (рис.5.5)



	A	B	C
1	X	f(X)	FX)
2	0	1	0
3	0,5	0,606531	0,393469
4	1	0,367879	0,632121
5	1,5	0,22313	0,77687
6	2	0,135335	0,864665
7	2,5	0,082085	0,917915
8	3	0,049787	0,950213
9	3,5	0,030197	0,969803
10	4	0,018316	0,981684
11	4,5	0,011109	0,988891
12	5	0,006738	0,993262
13	5,5	0,004087	0,995913
14	6	0,002479	0,997521
15	6,5	0,001503	0,998497

Рис. 5.5. Образец одного из вариантов решения

Задание для индивидуального выполнения

Для своего варианта V, где V – номер студента в списке группы, определите параметры распределений для случайных величин :

– X_1 имеет экспоненциальное распределение. Параметр λ определите по формуле.

$$\lambda = \begin{cases} (V \bmod 10)/10, & \text{если} \quad V \neq 10 \text{ и } V \neq 20 \\ 0{,}1, & \text{если} \quad V = 10, \\ 0{,}5, & \text{если} \quad V = 20. \end{cases}$$

– X_2 имеет нормальное распределение $N(m, \sigma)$. Значения параметров определите по формулам:

$$m = (V \bmod 10) - 5, \quad \sigma = (V \bmod 3) + 1.$$

Значения аргументов x примите от 1 до 25 с шагом 1.

Постройте графики плотностей распределения для указанных законов распределения и сравните результат.

Увеличьте значение n до 100 для экспоненциального распределения, сравните его с нормальным распределением и сделайте вывод.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие составляющие:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры практического применения равномерного, показательного и нормального законов распределения.
2. Какова особенность показательного распределения?
3. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону?
4. Сформулируйте понятие нормального закона распределения.
5. Какой закон распределения называют нормированным?
6. Перечислите свойства случайной величины распределенной по нормальному закону.