Лабораторная работа № 4
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы: получить навыки представления и анализа случайных величин через законы распределения в различных формах.

Основные теоретические сведения

Биномиальное распределение

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически и графически.

Следует принять в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Для определения закона распределения величины X необходимо выявить возможные значения X и их вероятности. Событие A в n испытаниях может:

1) не появиться вообще (x_1 = 0);

2) появиться один раз (x_2 = 1);

3) появиться два раза (x_3 = 2);

4) появиться n раз ($x_{n+1} = n$).

Отсюда возможные значения X таковы: x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; $x_n = n$.

Для определения вероятности этих значений необходимо воспользоваться формулой Бернулли (вероятность появления события k-раз в n испытаниях):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{4.1}$$

где k = 0, 1, 2, …, n – возможные значения X в каждом испытании.

Данная формула является аналитическим выражением биноминального закона распределения. Правую часть равенства (4.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона (отсюда и название):

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях.

Второй член – $p^{n-1}q$ определяет вероятность наступления события

(n –1) раз. Последний член q^n определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A («успех» опыта) может появиться либо не появиться, вероятность наступления события A во всех испытаниях постоянна и равна p, то вероятность не появления $q = 1 – p$.

Представим биноминальный закон $X \sim B\ (n,\ p)$ в виде табл. 4.1 и графика:

Таблица 4.1

X	n	$n – 1$	…	k	0
P	p^n	$p^{n-1} \cdot q$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона – случай биномиального распределения, когда число испытаний n достаточно большое, а вероятность p события A мала ($P \leq 0{,}05$).

Дискретная случайная величина X с реализациями $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, что символически записывается как $X \sim \Pi\ (\lambda)$, если

$$P(X = x_k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $k = x_i$ – число наступления события A, $\lambda = n \cdot p$ – среднее значение распределения Пуассона, e = 2,7183 – основание натурального логарифма.

Ряд распределения Пуассона представлен в табл. 4.2

Таблица 4.2

x_i	0	1	2	...	k	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}/2!$	…	$\lambda^k \cdot e^{-\lambda}/k!$	…

Закон Пуассона зависит от одного параметра λ, смысл которого в следующем: он является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X, распределенной по закону Пуассона.

Распределение Пуассона играет большую роль в практическом применении теории вероятностей: многие физические явления приводят к такому распределению вероятностей.

Распределение Пуассона имеет место, когда есть поток событий, называемым простейшим (или стационарным пуассоновским потоком). Потоком событий называют последовательность таких моментов, как например, поступление вызовов на коммуникационный узел, приходы посетителей в магазин и т.д. Примером применения распределения Пуассона в контроле качества является модель количества дефектов, которые могут появиться в приборе или устройстве.

Задания на выполнение лабораторной работы

1. Изучите алгоритм работы с функциями MS Excel (БИНОМРАСП, ПУАССОНРАСП).
2. Исследуйте биноминальный закон распределения в зависимости от его параметров (n, p).
3. Исследуйте закон распределения Пуассона в зависимости от его параметра λ.
4. Ответьте на контрольные вопросы.

Методика выполнения работы

1. Для исследования биномиального закона распределения подготовьте таблицу в MS Excel, используя встроенную статистическую функцию БИНОМРАСП (рис. 4.1).

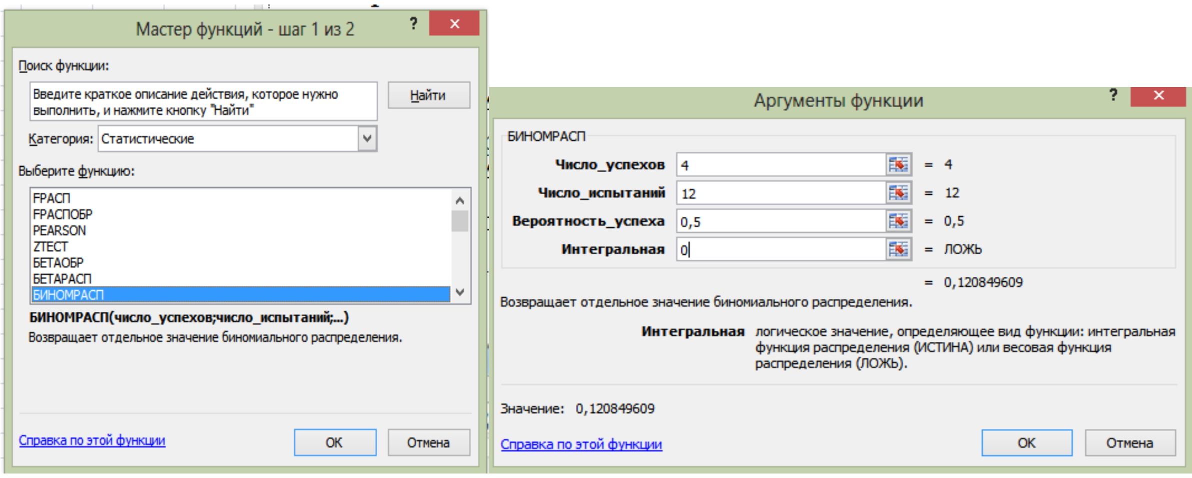


Рис. 4.1. Встроенная функция БИНОМРАСП

Синтаксис функции: БИНОМРАСП (Число успехов; Число испытаний; Вероятность успеха; Интегральная):

Число успехов – количество успешных испытаний (k).

Число испытаний – количество независимых испытаний (n).

Вероятность успеха – вероятность успеха каждого испытания (p).

Интегральная = 0 рассчитывается вероятность отдельного события

Интегральная = 1 рассчитывается интегральная вероятность.

2. Введите в таблицу MS Excel значения аргумента x в диапазоне от 0 до 30 с шагом 1 и вычислите вероятности того, что успех в серии из 30 испытаний произойдет ровно x раз (x от 0 до 30) при вероятности успеха: p_1 = 0,7; p_2 = 0,5; p_3 = 0,2.

3. Используя мастер диаграмм, постройте графики распределения для соответствующих значений вычисленных вероятностей и сравните результаты (рис. 4.3).

4. Исследуйте, как изменяются свойства биномиального распределения при увеличении числа экспериментов, измените значение n с 30 до 50. Введите в таблицу значения аргумента x в диапазоне от 0 до 50 с шагом 1 при одном из значений вероятностей. Постройте на одном графике распределения с разным значением n и сделайте вывод.

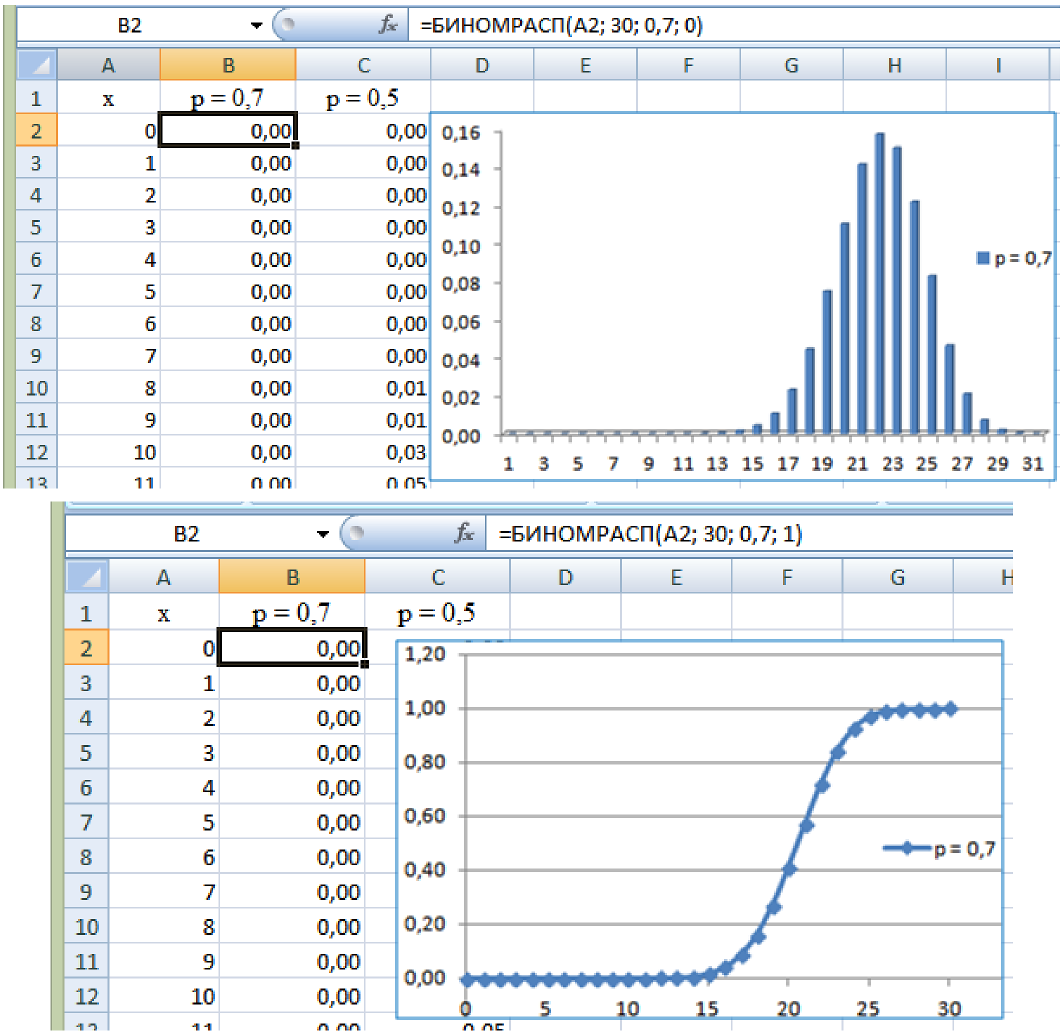


Рис. 4.3. Пример решения одного из вариантов задания

5. Для вычисления значений распределения Пуассона в MS Excel используйте встроенную статистическую функцию ПУАССОНРАСП (рис. 4.2).

Синтаксис функции – ПУАССОНРАСП (*X*; Среднее; Интегральная) :

X – значение, на основе которого вычисляется распределение Пуассона.

Среднее – среднее значение распределения Пуассона (λ).

Интегральная = 0 – рассчитывается вероятность отдельного события.

Интегральная = 1 – рассчитывается интегральная вероятность.

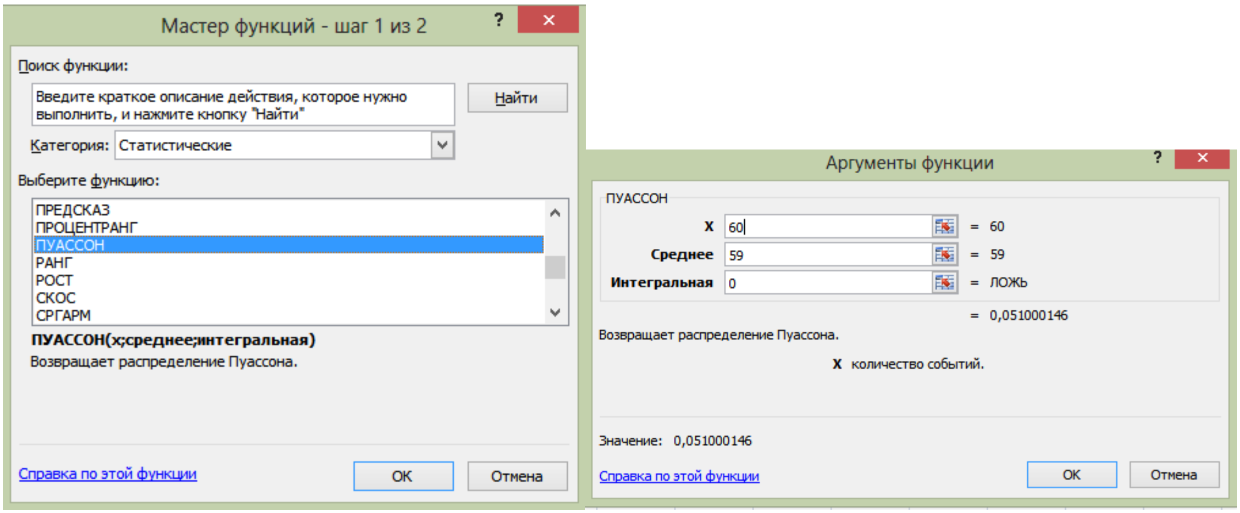
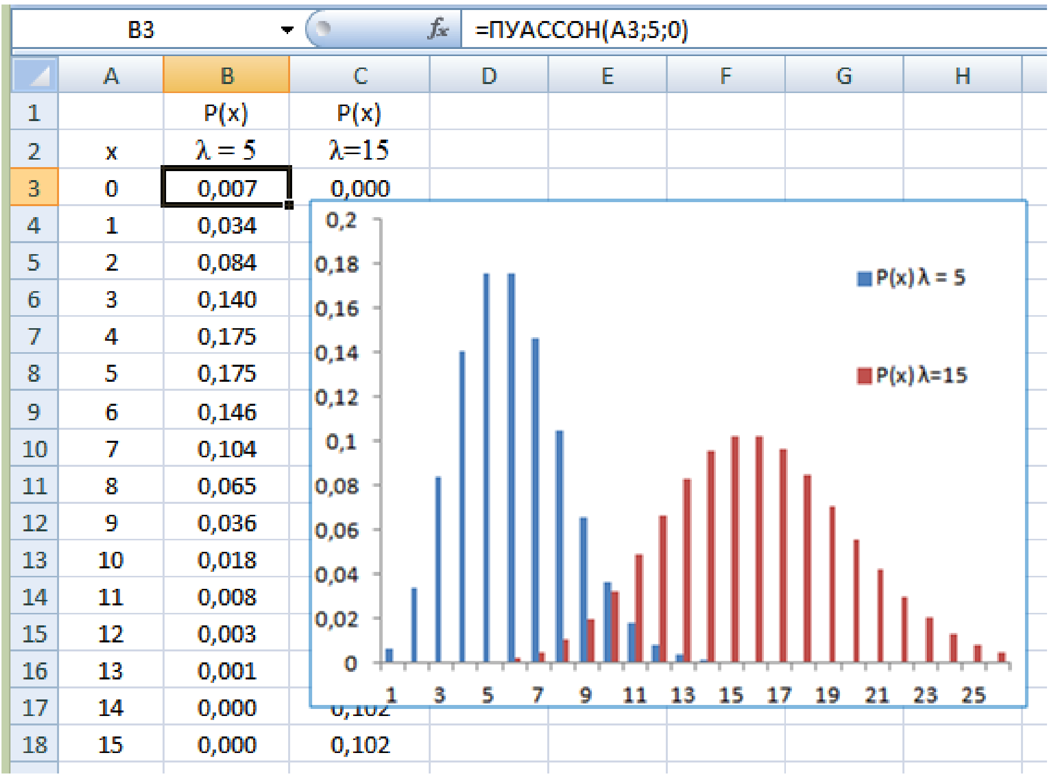


Рис. 4.2. Встроенная функция ПУАССОНРАСП

6. Исследуйте закон распределения Пуассона в зависимости от его параметра λ. Введите в таблицу значения аргумента *x* в диапазоне от 0 до 40 с шагом 1и вычислите вероятности того, что успех в серии из 40 испытаний произойдет ровно *x* раз (*x* от 0 до 40) при $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 10$; $\lambda_3 = 20$; $\lambda_4 = 30$.

7. Постройте соответствующие графики распределения для каждой таблицы результатов (для построения интегральной функции распределения идеально подходит диаграмма типа график, для плотности распределения вероятностей – гистограмма (рис. 4.4).

8. Исследуйте изменение распределения Пуассона при увеличении числа экспериментов. Введите в таблицу значения аргумента *x* в диапазоне от 0 до 50 с шагом 1 при одном из значений вероятностей. Постройте на одном графике распределения вероятностей с разным значением *n* и сделайте вывод.



B3 =ПУАССОН(A3;5;0)

	A	B	C
1		P(x)	P(x)
2	x	λ = 5	λ=15
3	0	0,007	0,000
4	1	0,034	
5	2	0,084	
6	3	0,140	
7	4	0,175	
8	5	0,175	
9	6	0,146	
10	7	0,104	
11	8	0,065	
12	9	0,036	
13	10	0,018	
14	11	0,008	
15	12	0,003	
16	13	0,001	
17	14	0,000	0,102
18	15	0,000	0,102

Рис. 4.4. Образец оформления результатов

Задания для индивидуального выполнения

Для своего варианта V, где V – номер студента в списке группы, определите параметры распределений для случайных величин :

X_1 имеет биномиальное распределение $B(n, p)$. Параметры n и p определите по следующим формулам

$$n = \begin{cases} 10, & \text{если} \quad 1 \le V \le 10, \\ 15, & \text{если} \quad 1 < V \le 20, \\ 20, & \text{если} \quad 21 \le V \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} (V \bmod 10)/10, & \text{если} \quad V \ne 10 \text{ и } V \ne 20 \\ 0{,}1, & \text{если} \quad V = 10, \\ 0{,}5, & \text{если} \quad V = 20. \end{cases}$$

X_2 имеет распределение Пуассона $P(\lambda)$. Параметр λ определите по формуле:

$$\lambda = (V \bmod 3) + 5.$$

Значения аргумента X примите от 1 до 25 с шагом 1.

Постройте график для вероятностей биномиального распределения и сравните его с распределением Пуассона.

Увеличьте значение *n* до 100 для обоих распределений и сравните результат.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие составляющие:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков.
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение случайной величине.
2. Какую случайную величину называют дискретной?
3. Какими параметрами характеризуется дискретная случайная величина?
4. Дайте определение функции распределения случайной величины.
5. Какими свойствами обладает функция распределения?
6. Назовите числовые характеристики случайных величин.
7. Приведите примеры практического применения основных законов распределения дискретных случайных величин.