Лабораторная работа № 2

СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ.
ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Цель работы: освоить применение формулы Бернулли для решения практических задач.

Основные теоретические сведения

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и то же испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется схемой повторных независимых испытаний или схемой Бернулли.

В общем виде схема повторных независимых испытаний записывается в виде задачи. Пусть производится *n* опытов, вероятность наступления события *A* в каждом из которых (вероятность успеха) равна ***p***, вероятность не наступления (неуспеха) − соответственно $q = 1 - p$. Чтобы найти вероятность, что событие *A* наступит в точности *k* раз в *n* опытах, нужно применить формулу Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где C_n^k − число сочетаний из *n* по *k*.

Задачи, которые решаются по схеме Бернулли, чрезвычайно разнообразны. В реальности эта схема часто применяется для решения задач, связанных с контролем качества продукции и надежности различных механизмов, все характеристики которых должны быть известны до начала работы.

Данная схема описывает большой пласт задач по теории вероятностей (от игры в лотерею до испытания приборов на надежность), главное, выделить несколько характерных моментов:

− Опыт повторяется в одинаковых условиях несколько раз. Например, кубик кидается 5 раз, монета подбрасывается 10 раз, проверяется 20 деталей из одной партии, покупается 8 однотипных лотерейных билетов.

− Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова. Этот пункт связан с предыдущим, рассматриваются детали, которые могут оказаться с одинаковой вероятностью бракованными или билеты, которые выигрывают с одной и той же вероятностью.

− События в каждом опыте наступают или нет независимо от результатов предыдущих опытов. Кубик падает случайно вне зависимости от того, как упал предыдущий и т.п.

Если эти условия выполнены – то можно применять схему испытаний Бернулли.

Задания на выполнение лабораторной работы

1. Изучите алгоритм применения схемы независимых испытаний по формуле Бернули.
2. Решите задачи своего варианта с применением соответствующих формул Бернули.
3. Освойте функции MS Excel, предназначенные для решения задач с применением формул Бернули.
4. Выполните решение указанных задач с помощью специальных функций MS Excel.
5. Ответьте на контрольные вопросы.

Методика выполнения работы

1. Запишите содержание задачи и выполните математическое решение по соответствующей формуле теории вероятностей.
2. Выполните решение этой задачи в MS Excel, для чего выберите соответствующую функцию БИНОМРАСП для вычисления вероятностей следующих событий:

– Событие произойдет в точности *k* раз из *n*:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

= БИНОМРАСП (*k*, *n*, *p*, 0),

где k – количество успешных испытаний (число успехов);
n – количество независимых испытаний (число испытаний);
p – вероятность успеха каждого испытания, (вероятность успеха);
0 – рассчитывается вероятность отдельного события (интегральная).

– Событие произойдет от k_1 до k_2 раз:

$$P_n(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i},$$

= БИНОМРАСП (*k*_2; *n*; *p*;1) – БИНОМРАСП (*k*_1; *n*; *p*; 1) + + БИНОМРАСП (*k*_1; *n*; *p*; 0).

– Событие произойдет не более k_3 раз:

$$P_n(0 \le X \le k_3) = \sum_{i=0}^{k_3} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i},$$

= БИНОМРАСП (*k*_3; *n*; *p*; 1).

– Событие произойдет не менее k_4 раз:

$$P_n(k_4 \le X \le n) = \sum_{i=k_4}^{n} C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i},$$

= 1– БИНОМРАСП (*k*_4; *n*; *p*;1) + БИНОМ. РАСП (*k*_4; *n*; *p*; 0).

– Событие произойдет хотя бы один раз:

$$P_n(X \ge 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n,$$

= 1– БИНОМРАСП (0; *n*; *p*; 0).

– Событие имеет наивероятнейшее число наступлений *m*:

$$np - q \le m \le np + p,$$

= ОКРУГЛВВЕРХ (*np* – *q*; 0).

Следует отметить, что в задачах, где нужно складывать несколько вероятностей, используется функция вида:

= БИНОМРАСП (*k*; *n*; *p*; 1),

так называемая интегральная функция вероятности, которая дает сумму всех вероятностей от 0 до *k* включительно.

4. Результаты решения каждой задачи оформите в соответствии с примерами (рис. 2.1, рис. 2.2).

СУММ =БИНОМ.РАСП(k;n;p;0)

БИНОМ.РАСП(число_успехов; число_испытаний; вероятность_успеха;

A	B					
Вводим параметры задачи для вычислений (вводите в серые ячейки)						
Число испытаний	n=	5				
Вероятность успеха	p=	0,3				
Вероятность неуспеха	q=	0,7				
Вероятность, что событие наступит в точности		k=	2		раз(а), равна	=БИНОМ.

Рис. 2.1. Пример оформления отчета

На рис.2.2 представлен образец результата решения при выполнении нескольких условий в содержание задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Число испытаний	n=	10					
2	Вероятность успеха	p=	0,3					
3	Вероятность неуспеха	q=	0,7					
4								
5								
6	Вероятность, что событие наступит в точности			k=	5		раз(а), равна	0,10292
7								
8	Вероятность, что событие наступит от k1=			5	до k2=	8	раз, равна	0,15012
9								
10	Вероятность, что событие наступит k3=				2	или менее	раз, равна	0,38278
11								
12	Вероятность, что событие наступит k4=				3	или более	раз, равна	0,61722
13								
14	Вероятность, что событие наступит хотя бы один раз, равна							0,97175
15								
16	Наивероятнейшее число наступлений от			2,3	до	3,3	равно	3
17	Вероятность наивероятнейшего числа наступлений равна							0,26683

Рис. 2.2. Образец результата решения

Задания для индивидуального выполнения

1. Ежедневно новая сделка совершается с вероятностью 0,2 (но не более одной в день). Какова вероятность того, что за 5 дней будет совершено 3 сделки?

2. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 1/4. Какова вероятность того, что из 10 визитов страхового агента 5 закончатся заключением договора?

3. Для вычислительной лаборатории приобретено 9 компьютеров, причем вероятность брака для одного компьютера равна 0,1. Какова вероятность того, что придется заменить более двух компьютеров?

4. Зачетная работа по предмету состоит из 6 задач, при этом зачет считается сданным, если студент решил хотя бы три из них. Студент Иванов может решить каждую задачу с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что он сдаст зачет?

5. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых нужно выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, будучи совершенно не готовым к тесту, студент угадает правильные ответы по крайней мере на 6 вопросов?

6. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность того, что из 10 проверенных документов большинство не будет содержать ошибки?

7. Система состоит из шести независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов системы; в) вероятность отказа системы, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы пять элементов.

8. Каждый из 100 компьютеров в интернет-кафе занят клиентом в среднем в течение 80 % рабочего времени. Какова вероятность того, что в момент проверки клиентами будет занято: а) от 70 до 90 компьютеров; б) не менее 80 компьютеров?

9. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6 (ничьи во внимание не принимаются)?

10. Играет два равных по силе игрока. Какая вероятность выше: выиграть одну партию из трех, или три из пяти?

11. Играют равносильные противники. Что вероятнее: выиграть не менее трех партий из четырех или не менее шести из восьми (ничьи не учитываются)?

12. Какова вероятность, что игрок, который слабее своего оппонента в два раза выиграет две партии из трех и три из пяти?

13. Вероятность того, что на один лотерейный билет выпадет выигрыш, равна 0,2. Куплено 5 билетов. Найдите вероятность того, что выиграют 2 билета.

14. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,3. Купили 8 билетов. Найдите вероятность того, что а) хотя бы один билет выигрышный; б) менее трех билетов выигрышные. Какое наиболее вероятное число выигрышных билетов?

15. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,2. Куплено 12 билетов. Найдите наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

16. С завода отправили 100 ящиков с хрупким товаром. Вероятность того, что ящик повредится в пути, равна 0,01. Какое наиболее вероятное число поврежденных ящиков будет на станции приема груза?

17. Вероятность того, что лампа не бракованная, равна 0,97. Для организации закупили 124 лампы. Каково наиболее вероятное число рабочих ламп?

18. Вероятность изготовления изделия высшего сорта на данном предприятии равна 0,8. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 100 изделий?

19. Рабочий обслуживает пять однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение дня, равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение дня этих требований будет ровно четыре.

20. Вероятность поломки одного из 6 работающих независимо друг от друга станков равна 0,2. Если происходит поломка, станок до конца дня не работает. Какова вероятность того, что в течение дня сломается более 2 станков?

21. На рабочем участке 5 однотипных станков. Вероятность того, что каждый из них исправен, равна 0,8. Плановое задание может быть выполнено, если исправно не менее 3 станков. Какова вероятность, что задание будет выполнено?

22. В цехе работают 8 станков. Вероятность безотказной работы каждого 0,9. Найдите вероятность того, что хотя бы один станок откажет в работе.

23. Система состоит из шести независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов; б) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов системы; в) вероятность отказа системы, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы пять элементов.

24. Каждый из 100 компьютеров в интернет-кафе занят клиентом в среднем в течение 80 % рабочего времени. Какова вероятность того, что в момент проверки клиентами будет занято: а) от 70 до 90 компьютеров; б) не менее 80 компьютеров?

25. Страховая фирма заключила 10 000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому в течение года составляет 2 %. Найти вероятность того, что таких случаев будет не более 250.

Требования к оформлению отчета

Отчет должен содержать следующие составляющие:

1. Тема лабораторной работы.
2. Цель работы.
3. Основные формулы, методика выполнения и алгоритм расчетов.
4. Полученные результаты в виде таблиц, графиков
5. Анализ полученных результатов.
6. Вывод по работе.

Контрольные вопросы

1. Какие испытания называют схемой Бернулли?
2. Вероятность какого события вычисляется по формуле Бернулли?
3. В каких случаях применяют предельные теоремы в схеме Бернулли?
4. Каким соотношением определяется наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли?
5. Дайте определение основным параметрам формулы Бернулли.

.