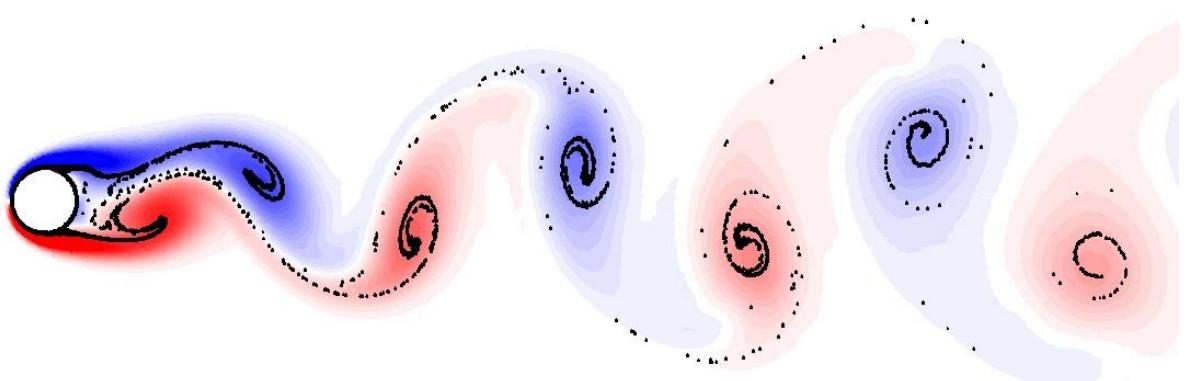


А.Б. Мазо

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

## Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов

Учебное пособие



Казань – 2018



Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского

Кафедра аэрогидромеханики

---

---

А.Б. Мазо

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА**

**Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов**

Учебное пособие

Казань - 2018

**УДК 532.5+519.6**

Публикуется по решению Учебно-методического совета  
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института математики и механики  
Протокол №2 от 28 ноября 2018 года

заседания кафедра аэрогидромеханики  
Протокол №2 от 28 сентября 2018 года

Научный редактор  
доктор физико-математических наук  
профессор Д.В. Маклаков

Рецензент  
доктор физико-математических наук  
профессор А.В. Лапин

**Мазо А.Б. Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов.** Учебное пособие / А.Б. Мазо - Казань: Казанский университет, 2018. -125 с.

Учебное пособие основано на курсе лекций и программе лабораторных занятий для студентов старших курсов и магистров Института математики и механики КФУ. В нём изложены основы построения сеточных схем для решения задач вычислительной гидродинамики методом конечных элементов (МКЭ). Метод Галёркина трактуется как теоретическая основа МКЭ. Разбираются все аспекты МКЭ: слабая форма постановки задачи, триангуляция области, базисные функции, преобразование координат, элементные вектора и матрицы, сборка глобальной системы уравнений. Детально рассмотрены несколько видов плоских конечных элементов: линейный треугольный, билинейный четырехугольный, элементы с базисными функциями второй и третьей степени, а также два трехмерных элемента. В пособии сделан упор на практическое применение метода в вычислительной практике. Реализация МКЭ излагается в приложении к решению типичных задач ВГ, сопровождается графической иллюстрацией результатов вычислений.

Пособие может быть полезно также аспирантам, научным работникам и инженерам соответствующих специальностей.

© Мазо А.Б., 2018

© Казанский федеральный университет, 2018

## **Предисловие**

Вычислительная гидродинамика (ВГ - CFD) нацелена на решение реальных нелинейных краевых задач механики жидкости и теплообмена в областях сложной геометрии. Для достижения этих целей есть весьма мощное, универсальное и удобное средство – метод конечных элементов (МКЭ). Он выгодно отличается от метода конечных разностей, прежде всего, тем, что без труда строит сетки (структурированные и неструктурные, равномерные и с управляемым сгущением) и сеточные аппроксимации дифференциальных операторов математической модели в областях сложной формы. Другим достоинством МКЭ является то, что сеточные уравнения собираются по единой методике, что обеспечивает «автоматическое» построение численных моделей на выбранных сетках для широкого класса задач ВГ. При этом участие пользователя в данном процессе ограничено. Данные свойства МКЭ выдвинули метод на передовые позиции в коммерческих пакетах CFD и в инженерных расчетах.

В данном учебном пособии ставится цель не только познакомить читателя с основами метода конечных элементов, но и научить решать конкретные задачи ВГ. Упор сделан именно на практическом использовании МКЭ; теоретические аспекты метода можно найти в списке основной литературы. Для большинства рассмотренных задач в пособии приводятся примеры из вычислительной практики и результаты расчетов, полученные при непосредственном участии составителя пособия.

# 1. МЕТОД ГАЛЁРКИНА

## *Об ортогональности функций*

Пусть  $D$  - область изменения координат  $\vec{x} = (x, y, \dots)$ , а  $f_i(\vec{x}), i = 1..∞$  - функции, определенные в области  $D$ . Через  $F$  обозначим класс этих функций. Две функции  $f, g \in F$  взаимно ортогональны в  $D$ , если

$$\int_D f g \, dx \equiv (f, g) = 0. \quad (1)$$

Из курса математического анализа известны следующие факты.

Если функция  $g$  ортогональна всем функциям класса  $F$ , то она тождественно равна нулю. Кратко это предложение можно записать так: если  $g \perp f_i \in F \quad \forall i$ , то  $g \equiv 0$ .

Пусть  $f_i(\vec{x})$  - полная в  $F$  система базисных функций. Тогда любая функция  $g \in F$  представима в виде разложения по базису

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i f_i(x)$$

где коэффициенты  $g_i$  определяются однозначно. Базисные функции линейно независимы, если из равенства  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i f_i(x) = 0 \quad \forall x$  следует, что все коэффициенты  $g_i$  равны нулю. Но тогда и  $g(x) \equiv 0$ . Итак, если функция ортогональна системе базисных функций, то она тождественно равна нулю.

## *Метод взвешенных невязок*

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \quad x \in D. \quad (2)$$

где  $L$  - линейный оператор, правая часть  $f$  и искомое решение  $u$  - функции из  $F$ . Пусть  $\tilde{u}$  - приближение к решению  $u$  уравнения (2). Обозначим через

$$R(x) = L\tilde{u} - f \quad (3)$$

невязку уравнения (2) на этом приближенном решении. Пусть, далее,  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  - система базисных функций в  $F$ . Тогда можно записать разложения

$$\tilde{u} = \sum_i u_i \varphi_i(x), \quad R = \sum_i u_i L\varphi_i(x) - f.$$

Чтобы найти коэффициенты  $u_i$ , в методе взвешенных невязок требуют, чтобы невязка  $R$  была ортогональна некоторой системе весовых функций  $W_i(x)$ , т.е.

$$\begin{aligned} \int_D R W_i(x) dx &= \int_D \left\{ L \sum_j u_j \varphi_j(x) - f(x) \right\} W_i(x) dx = 0, \quad \text{или} \\ \sum_j u_j \int_D L\varphi_j(x) W_i(x) dx &= \int_D f(x) W_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Последняя строка в (4) представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений  $\mathbf{A}u = \mathbf{b}$ , в которой коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}$  и вектор правой части  $\mathbf{b}$  вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_D L\varphi_j(x) W_i(x) dx, \quad b_i = \int_D f(x) W_i(x) dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Очевидно, численная реализация формул (5) предполагает, что как базисные функции  $\varphi_j(x)$ , так и весовые функции  $W_i(x)$  заданы.

### *Метод Галеркина*

В методе Галеркина вместо весовых функций  $W_i(x)$  используются базисные функции  $\varphi_i(x)$ , что приводит к следующей системе линейных уравнений относительно искомых коэффициентов разложения  $u_i$ :

$$\sum_j u_j \int_D L\varphi_j(x) \varphi_i(x) dx = \int_D f(x) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \left\{ a_{ij} \right\}, \quad \mathbf{b} = \left\{ b_i \right\}, \quad \mathbf{A}u = \sum_j a_{ij} u_j, \\ a_{ij} = \int_D L \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx, \quad b_i = \int_D f(x) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{6}$$

Замечание. В конечномерном пространстве  $i=1..N$ , и система уравнений (6) становится конечной.

### 1.1. Пример применения метода

Рассмотрим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx} - u = 0, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 1. \tag{7}$$

Точное решение этой задачи – это функция  $u(x) = e^x$ .

Выберем систему базисных функций

$$\varphi_i = x^i = \left\{ 1, x, x^2, \dots \right\}, \quad i = 0, \dots, N \tag{8}$$

и представим решение в виде разложения по базису,

$$u(x) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^N u_i x^i = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots \tag{9}$$

В разложении (9) искомыми являются коэффициенты  $u_i$ . Полагая  $x=0$ , из граничного условия (7) находим  $u_0 = u(0) = 1$ . Пусть  $N=2$ , тогда осталось найти  $u_1, u_2$ . Подставим (9) в (7) и вычислим невязку  $R$  уравнения

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=0}^2 u_i x^i &= 1 + u_1 x + u_2 x^2, \quad \frac{du}{dx} = u_1 + 2u_2 x, \quad Lu = \frac{du}{dx} - u, \\ R(x) &= Lu - 0 = -1 + u_1(1-x) + u_2(2x-x^2). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы невязка была ортогональна базисным функциям:  
 $(R, x) = 0, \quad (R, x^2) = 0$ . Получим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 \int_0^1 (1-x)xdx + u_2 \int_0^1 (2x-x^2)xdx = \int_0^1 xdx, \\ u_1 \int_0^1 (1-x)x^2dx + u_2 \int_0^1 (2x-x^2)x^2dx = \int_0^1 x^2dx. \end{cases}$$

Вычислим интегралы и получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{6}u_1 + \frac{5}{12}u_2 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{12}u_1 + \frac{3}{10}u_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение этой системы таково:  $u_1 = 8/11$ ,  $u_2 = 10/11$ , а приближенное решение (9) задачи (7) есть парабола

$$u(x) = 1 + \frac{8}{11}x + \frac{10}{11}x^2. \quad (10)$$

График этой функции в сравнении с точным решением  $e^x$  показан на рисунке

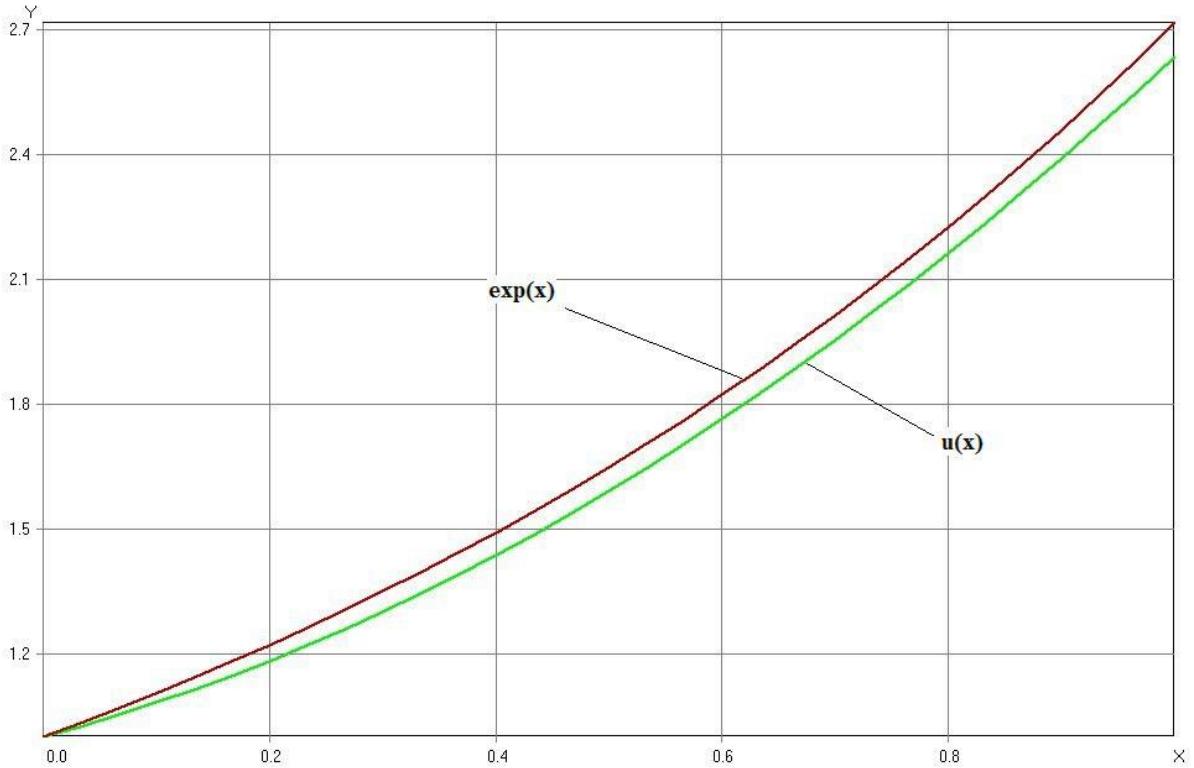


Рис. 1. Точное и приближенное решение задачи (5) методом Галеркина при  $N=2$ .

**Задача 1.** Решить задачу (7) методом Галёркина при  $N=3$ , сравнить с решением (10) для  $N=2$ .

## 1.2. Пирамидальные базисные функции

До сих пор мы рассматривали базисные функции, определенные всюду в  $D$ . Часто такой выбор неудобен; например для степенных базисных функций  $\varphi_i(x) = x^i, i = 0..N$  при большом  $N$  получаются полиномы высокого порядка, что затрудняет вычисления. В МКЭ обычно применяют базисные функции с конечным носителем, который связан с триангуляцией области, т.е. с ее сеточным разбиением на конечные элементы. Рассмотрим простейший пример равномерной сетки на отрезке  $[0,1]$  с узлами  $x_i = ih, h = 1/N, i = \overline{0, N}$ . Для каждого узла определим т.н. пирамидальную базисную функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases} \quad (11)$$

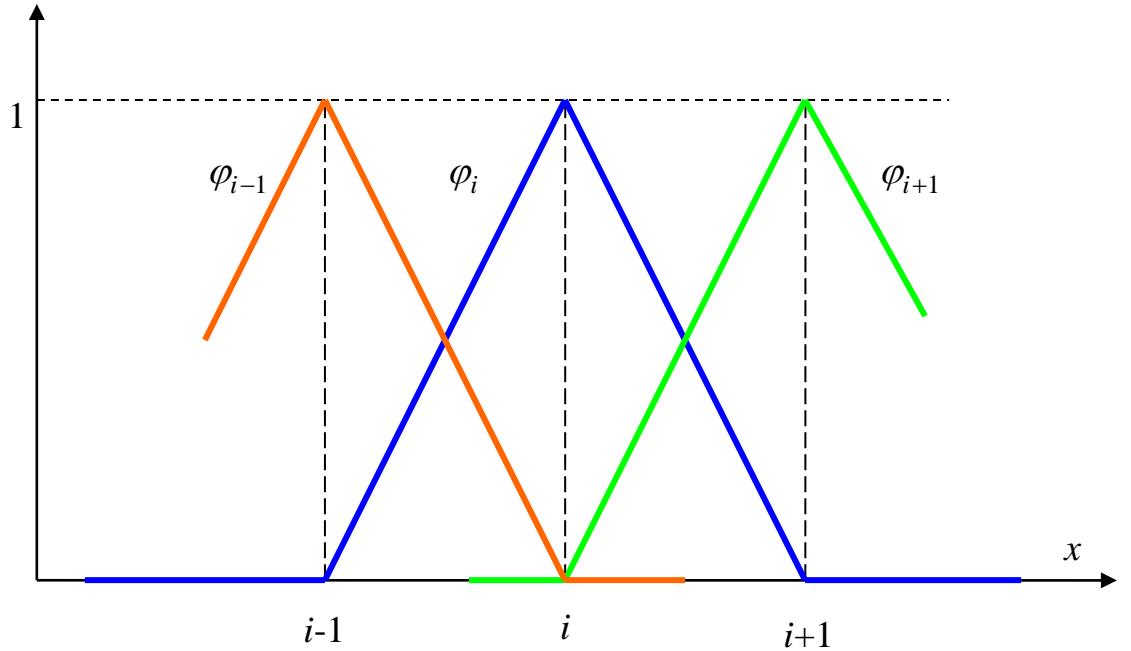


Рис. 2. Пирамидальные базисные функции

Заметим, что

$$\varphi_i(x_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (12)$$

Поэтому, во-первых, такая система базисных функций линейно-независима, а во-вторых, коэффициенты разложения (9) любой функции по этому базису будут равны значениям функции в узлах сетки:

$$u(x_i) = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=0}^N u_j \delta_i^j = u_i$$

## 2. СЛАБАЯ ФОРМА ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пусть требуется решить задачу

$$Lu = f \text{ в } D, \quad u, f \in F \quad (13)$$

где  $L$  - линейный дифференциальный оператор. Умножим это уравнение на произвольную пробную функцию  $v(x)$  и проинтегрируем по области  $D$ . Получим

$$\int_D v L u dx = \int_D v f dx \text{ или } (v, Lu) = (v, f). \quad (13a)$$

Равенство (13a) должно выполняться для любой<sup>1</sup> пробной функции  $v$ . Оно называется слабой формой исходного дифференциального уравнения. Связь обобщенной постановки (13a) с исходной «классической» задачей (13) такова: если существует единственное решение  $u$  исходной задачи, то оно будет и решением обобщенной постановки; однако задача (13a) может иметь и такие обобщенные решения, которые не совпадают с классическим. Термин «слабая форма», «слабое решение» обусловлен тем, что требование выполнения равенства (13) в каждой точке области  $D$  заменяется менее строгим интегральным равенством (13a) для каждой пробной функции  $v$ . Ниже будет показано, что для типичных дифференциальных уравнений ВГ класс функций, где ищется решение обобщенной задачи, шире класса  $F$ , содержащего классическое решение  $u$ ; т.е. на обобщенное решение накладываются более слабые ограничения. Идейно слабая форма уравнения (13a) связана с подходом Галеркина или с методом взвешенных невязок, поскольку может быть представлена в виде

$$\int_D v (Lu - f) dx = \int_D v(x) R(x) dx = (v, R) = 0 \quad \forall v \in F.$$

<sup>1</sup> Ниже будет показано, что на пробную функцию накладываются некоторые ограничения

Это равенство означает, что невязка уравнения  $R$  на точном решении  $u$  должна быть ортогональна любой функции  $v$  и, следовательно, должна равняться нулю.

Чтобы получить из слабой постановки задачи (13а) систему алгебраических уравнений для узловых значений  $u_i$ , достаточно

- 1) провести триангуляцию области;
- 2) выбрать ассоциированную с триангуляцией конечную систему базисных функций, обладающую свойством (12);
- 3) записать метод Галеркина (положить  $v_i = \varphi_i$ ):

$$u = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \quad \left( \sum_{j=1}^N u_j L\varphi_j, \varphi_i \right) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u &= \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \{a_{ij}\}, \quad \mathbf{b} = \{b_i\}, \quad \mathbf{A}u = \sum_j a_{ij}u_j, \\ a_{ij} &= (L\varphi_j(x), \varphi_i(x)), \quad b_i = (f(x), \varphi_i(x)). \end{aligned} \quad (15)$$

## 2.1. Пример использования базисных функций с конечным носителем

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения теплопроводности

$$u'' = 1, \quad x \in (0, 1); \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \quad (16)$$

Её точное решение имеет вид  $u(x) = 0.5x(x+1)$ . Для построения численного решения введем на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  равномерную сетку с шагом  $h = 1/2$  и узлами  $x_i = (i-1)h$ ,  $i = 1..N$ ;  $N = 3$ .

Выберем пирамидальные линейные базисные функции (11) и подсчитаем их производные:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \begin{cases} 1-2x, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h \leq x \leq 1; \end{cases} & \varphi'_1 &= \begin{cases} -2, & \\ 0 & \end{cases} \\
\varphi_2(x) &= \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq h, \\ 2(1-x), & h \leq x \leq 1; \end{cases} & \varphi'_2 &= \begin{cases} 2, & \\ -2 & \end{cases} \\
\varphi_3(x) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq h, \\ 2x-1, & h \leq x \leq 1; \end{cases} & \varphi'_3 &= \begin{cases} 0, & \\ 2. & \end{cases}
\end{aligned} \tag{17}$$

Используя представление приближенного решения

$$u(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + u_3\varphi_3(x) \tag{18}$$

и граничные условия в точках  $x_1 = 0$  и  $x_3 = 1$ , получаем

$$\begin{aligned}
u(0) &= u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow u_1 = 0, \\
u(1) &= u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 1 = 1 \Rightarrow u_3 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, осталось найти коэффициент  $u_2$ . Для этого достаточно определить вторую строку системы уравнений (15), а именно коэффициенты  $a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2$ . Непосредственное применение формул (15) для вычисления  $a_{ij}$  невозможно, поскольку предполагает вычисления вторых производных от линейных базисных функций (17). Это отражает очевидный факт, что линейные функции не могут служить базисом в классе дважды дифференцируемых функций, которому принадлежит решение исходной дифференциальной задачи. Однако если *ослабить* требование гладкости, то с помощью формулы интегрирования по частям можно записать

$$a_{ij} = (L\varphi_j(x), \varphi_i(x)) = (\varphi''_j, \varphi_i) = (\varphi'_j \varphi_i) \Big|_0^1 - (\varphi'_j, \varphi'_i) \tag{19}$$

В правую часть этой формулы теперь входят лишь первые производные базисных функций, которые определены в (17). При этом, несмотря на то, что производные терпят разрыв в узлах сетки, можно вычислить

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \left( \varphi'_j \varphi_i \right) \Big|_0^1 - \int_0^h \varphi'_j \varphi'_i \, dx - \int_h^1 \varphi'_j \varphi'_i \, dx = \\
&= \left( \varphi'_j \varphi_i \right) \Big|_0^1 - h \varphi'_j \varphi'_i \Big|_{x=0} - (1-h) \varphi'_j \varphi'_i \Big|_{x=1}
\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что для интересующих нас коэффициентов  $a_{2j}$  подстановка в правой части равенства (20) равна нулю, т.к.  $\varphi_2(x_1) = \varphi_2(x_3) = 0$ . Окончательно при  $h = 1/2$  получим формулу

$$a_{2j} = -\frac{1}{2} \left( \varphi'_j \varphi'_2 \Big|_{x=0} + \varphi'_j \varphi'_2 \Big|_{x=1} \right) \tag{21}$$

Подставляя сюда нужные значения производных из (17), найдем  $a_{21} = 2$ ,  $a_{22} = -4$ ,  $a_{23} = 2$ . Правая часть уравнения вычисляется интегрированием

$$b_2 = (f, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_2(x) \, dx = \int_0^h 2x \, dx + \int_h^1 2(1-x) \, dx = \frac{1}{2}.$$

Итак, второе уравнение системы уравнений для определения коэффициентов разложения решения имеет вид (учитывая  $h = 1/2$ )

$$2u_1 - 4u_2 + 2u_3 = \frac{1}{2}, \text{ или } \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} = 1. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение совпадает с конечно-разностной аппроксимацией  $u_{x\bar{x}} = 1$  исходного уравнения в центральном узле сетки.

Ранее с помощью граничных условий было установлено, что  $u_1 = 0$ ,  $u_3 = 1$ , так что из (22) легко найти  $u_2 = -(h^2 - 1)/2 = 3/8$ . Окончательно приближенное решение задачи методом Галёркина имеет вид

$$\tilde{u}(x) = \frac{3}{8} \varphi_2(x) + \varphi_3(x).$$

На рисунке показан график этой функции в сравнении с точным решением  $u(x) = 0.5x(x+1)$ .

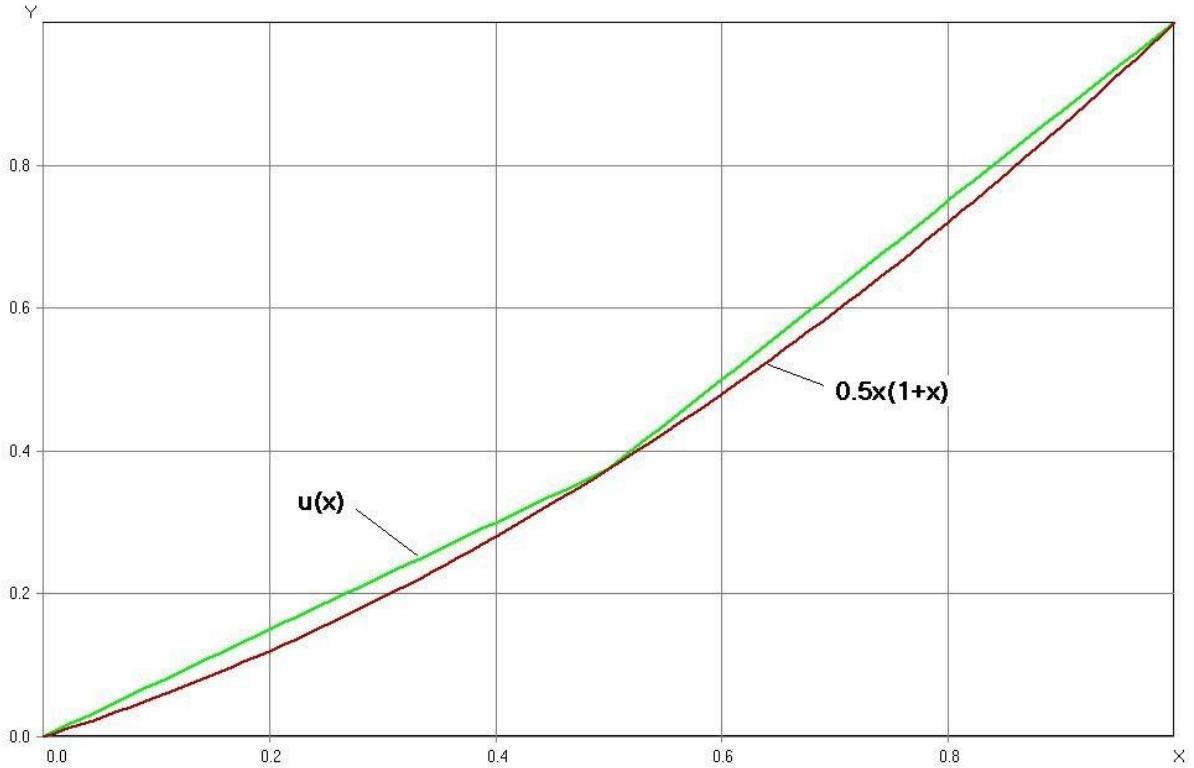


Рис. 2. Точное и приближенное решение МКЭ задачи теплопроводности (16) методом Галеркина на сетке с тремя узлами

**Задача 2.** Решить задачу теплопроводности (16) методом Галеркина на равномерной более подробной сетке при  $N=4$  и пирамидальными базисными функциями. Сравнить результат с решением для  $N=3$  и точным решением.

## 2.2. О граничных условиях и классе пробных функций

Выше был рассмотрен пример решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности, при этом граничные условия 1-го рода учитывались отдельно, вне общей процедуры вычисления коэффициентов матрицы СЛАУ по формулам (15). Поэтому, вообще говоря, обобщенная формулировка задачи Дирихле должна выглядеть так:

$$\begin{cases} (Lu, v) = (f, v), \quad x \in D \\ u|_{\Gamma} = u_{\Gamma} \end{cases} \quad (23)$$

В этом случае класс  $V$  пробных функций определяют так, чтобы все  $v \in V$  обращались в ноль на границе  $\Gamma$ . При этом для уравнений второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad x \in D = (a, b), \quad \Gamma = \{a, b\}, \quad L = -\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right)$$

формулировка (23) после интегрирования по частям принимает вид

$$\begin{aligned} & -k(x) \frac{du}{dx} v \Big|_{\Gamma} + \left( k(x) \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) = (f, v), \text{ или} \\ & \begin{cases} \int_a^b k u' v' dx = \int_a^b f v dx \\ u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь первый «границный» член слева равен нулю из-за того, что для участков границы  $\Gamma$ , где ставится граничное условие Дирихле, полагают  $v|_{\Gamma} = 0$ .

Другим ограничением на класс  $V$  пробных функций является требование достаточной гладкости. «Переброска» производной с искомой функции  $u$  на пробную функцию  $v$  с помощью интегрирования по частям привела к появлению в обобщенной постановке (24) производной  $dv/dx$ , так что класс  $V$  должен состоять из дифференцируемых функций.

Если же поставлены граничные условия Неймана или, в более общем случае, граничные условия 3-го рода

$$x \in \Gamma : k \frac{du}{dn} = -\alpha u + \beta, \quad n|_a = -x, \quad n|_b = x, \quad (25)$$

то требование  $v|_{\Gamma} = 0$  на пробные функции не накладывается, и «границный» зелёный член в (24) вычисляется с учетом (25):

$$-k(x) \frac{du}{dx} v \Big|_{x=a}^{x=b} = -(-\alpha u v + \beta v) \Big|_{x=a} - (-\alpha u v + \beta v) \Big|_{x=b}.$$

В результате обобщенная формулировка третьей краевой задачи принимает вид

$$\alpha uv|_a + \alpha uv|_b + \int_a^b k u' v' dx = \int_a^b f v dx + \beta v|_a + \beta v|_b, \quad (26)$$

где учтены граничные условия 3-го рода. В частном случае однородных условий Неймана ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ) все «граничные» члены в этом уравнении пропадают; при этом говорят о *естественных* граничных условиях; граничные условия 1-го рода называют *главными*.

Метод Галеркина построения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для приближенного решения дифференциальной задачи, в котором

- а) используются базисные функции с конечным носителем, ассоциированные с триангуляцией области (её полного покрытия сеткой непересекающихся элементов);
- б) граничные условия 2-го и 3-го рода учитываются в обобщенной слабой постановке задачи с помощью интегрирования по частям;

можно назвать методом конечных элементов (МКЭ) построения сеточной схемы для исходной дифференциальной задачи.

Детали применения МКЭ в вычислительной гидродинамике будут проиллюстрированы в последующих параграфах данного учебного пособия на примерах типичных многомерных задач.

### 3. СЕТОЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МКЭ

#### 3.1. Постановка задачи

Рассмотрим безразмерную краевую задачу для нестационарного уравнения конвекции - диффузии (теплопроводности) в двумерной области  $D$  с многосвязной границей  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{V}T) = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - pT + f, \quad . \quad (27)$$

$$t > 0; x, y \in D, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Здесь  $T(x, y, t)$  -- искомая функция (температура);  $\vec{V} = (u, w)$  -- заданный вектор скорости несжимаемой жидкости,  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ;  $\lambda > 0$  -- теплопроводность среды;  $p > 0$  -- интенсивность поверхностного стока тепла;  $f(x, y, t)$  -- внутренний массовый источник энергии.

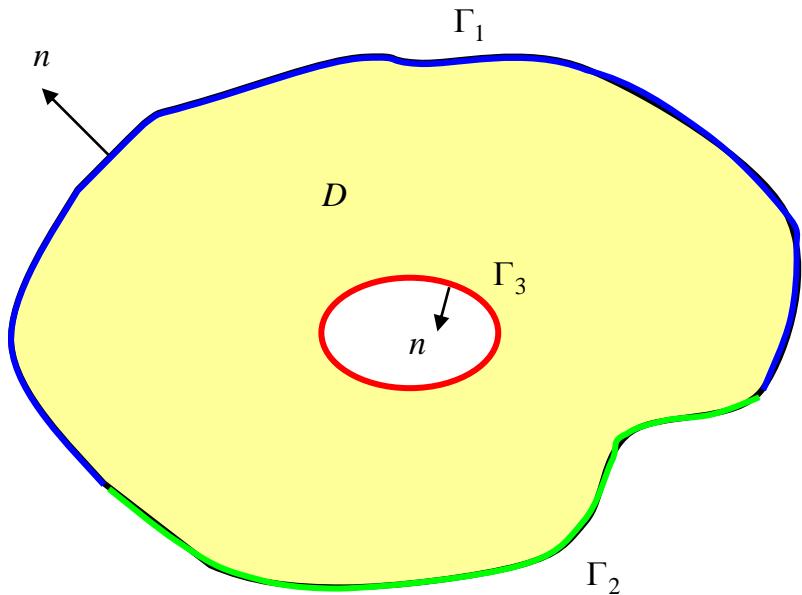


Рис.3. К постановке смешанной краевой задачи для уравнения диффузии

Зададим начальное условие  $T(x, y, 0) = T_0(x, y)$  и различные граничные условия на разных участках границы:

$$\begin{aligned}
x \in \Gamma_1 : & T = T_1; \\
x \in \Gamma_2 : & \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q; \\
x \in \Gamma_3 : & \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha u + \beta.
\end{aligned} \tag{28}$$

Для простоты будем считать, что течение ограничено твердыми стенками, на которых реализовано условие прилипания  $V_n|_{\Gamma} = V_s|_{\Gamma} = 0$ .

**Замечание.** В рамках безразмерной постановки эволюционной задачи (27), (28) могут быть описаны разнообразные модели ВГ. Укажем лишь некоторые из них.

1. Если, как это записано,  $T$  -- температура,  $\lambda = \text{Pe}^{-1}$ ,  $\text{Pe}$  -- число Пекле, то получаем модель формирования нестационарного температурного поля в области  $D$  под действием массовых и поверхностных источников. Уравнение учитывает механизмы конвективного и диффузационного (благодаря молекулярной теплопроводности) переноса тепла. Можно рассмотреть частные случаи: стационарные модели (отбросив  $\partial T / \partial t$ ); теплопроводность в твердых, неподвижных средах (положив  $\vec{V} \equiv 0$ ).

2. Процессы переноса примеси с помощью конвекции – диффузии. В том случае  $T = C$  -- концентрация примеси,  $\lambda = \text{Pe}_D^{-1}$ ,  $\text{Pe}_D$  -- диффузионное число Пекле.

3. Модель Навье-Стокса в преобразованных переменных «функция тока  $\psi$  -- завихренность  $\omega$ ». Здесь  $T = \omega$ ,  $\lambda = \text{Re}^{-1}$ ,  $\text{Re}$  -- число Рейнольдса;  $p = 0$ ;  $f = \partial g_y / \partial x - \partial g_x / \partial y$ , где  $g_x$ ,  $g_y$  -- компоненты вектора ускорения массовых сил.

4. Модель Навье-Стокса в естественных переменных «скорость  $\vec{V}$  -- давление  $p$ ». Здесь следует получить два уравнения импульсов из уравнения (27). В первом уравнении вместо  $T$  нужно взять продольную скорость  $u$  и положить  $f = -\partial p / \partial x + g_x$ , а во втором уравнении  $T = w$ ,

$f = -\partial p / \partial y + g_y$ . В обоих уравнениях  $p = 0$ ,  $\lambda = \text{Re}^{-1}$ ,  $\text{Re}$  -- число Рейнольдса.

Хотя уравнения 4 нелинейны, принципы построения аппроксимаций МКЭ для них те же, что и в линейных моделях 1 -3. Поэтому мы используем для изложения методов построения сеточных схем МКЭ общее эволюционное уравнение (27) при смешанных граничных условиях (28).

### *Интегральное тождество*

Обозначим с помощью верхнего индекса «галка»  $\breve{T}(t) = T(t - \tau)$  функцию на нижнем временном слое ( $\tau$  -- шаг сетки по  $t$ ). Запишем полудискретизованную по времени неявную схему для уравнения (27), заменив производную  $\partial u / \partial t$  конечно-разностным отношением  $u_{\bar{t}} = (u - \breve{u}) / \tau$  и относя конвективный член на нижний слой, а диффузионный – на текущий. Умножим получившееся уравнение на пробную функцию  $v(x, y)$  и проинтегрируем по области  $D$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_D v \frac{T - \breve{T}}{\tau} dD + \int_D v \operatorname{div}(\vec{V} \breve{T}) dD = \\ & = \int_D v \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dD - \int_D vpT dD + \int_D vf dD. \end{aligned}$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского (это многомерный аналог формулы интегрирования по частям, использовавшейся нами в одномерном случае) и учитывая при этом граничные условия (28), получим

$$\begin{aligned} & \int_D v \frac{T}{\tau} dD + \int_D \nabla v \cdot \lambda \nabla T d\Gamma + \int_D vpT d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \alpha T v d\Gamma = \int_D v \left( \frac{\breve{T}}{\tau} + f \right) dD - \\ & - \int_{\Gamma} v V_n \breve{T} d\Gamma + \int_D \nabla v \cdot (\vec{V} \breve{T}) dD + \int_{\Gamma_3} \beta v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} q v d\Gamma. \end{aligned} \quad (29)$$

Это уравнение должно быть дополнено граничным условием Дирихле (28) на  $\Gamma_1$ . При записи (29) учтено, что пробная функция  $v$  равна нулю на

участке  $\Gamma_1$  границы  $\Gamma$ ; кроме того, второй (зеленый) интеграл в правой части равен нулю при условии непротекания границы  $V_n|_{\Gamma} = 0$ .

В дальнейшем для простоты будем считать, что коэффициенты  $\lambda, \alpha, \beta, p, q$  постоянны. Кроме того, удобно доопределить параметры  $\alpha, \beta, q$  нулём на той части границы  $\Gamma$ , где они не заданы. Тогда *интегральное тождество* (29) можно записать чуть более компактно:

$$\begin{aligned} & (1 + \tau p) \int_D v T dD + \tau \lambda \int_D \nabla v \cdot \nabla T d\Gamma + \tau \alpha \int_{\Gamma} T v d\Gamma = \\ & = \int_D v (\bar{T} + \tau f) dD + \tau \int_D \nabla v \cdot (\bar{V} \bar{T}) dD + \tau (\beta + q) \int_{\Gamma} v d\Gamma \end{aligned} \quad (30)$$

Замечание Правая часть  $f$  исходного уравнения может содержать как распределенные, так и сосредоточенные источники тепла, например

$$f = g(x, y, t) + \delta(x - x^*) \delta(y - y^*) Q(t),$$

где  $g$  -- распределенный источник;  $Q$  -- мощность источника, сосредоточенного в подвижной точке  $(x^*(t), y^*(t))$ ;  $\delta$  -- дельта-функция Дирака. В этом случае первый интеграл в правой части (30) будет равен

$$\int_D v (\bar{T} + \tau f) dD = \int_D v (\bar{T} + \tau g) dD + \tau v (x^*, y^*) Q. \quad (31)$$

Замечание 2. Интегральное тождество (30) не содержит граничного условия Дирихле на  $\Gamma_1$ ; оно должно учитываться отдельно. Для этого существуют несколько приёмов, предполагающих модификацию матрицы и правой части системы сеточных (алгебраических) уравнений, которые будут построены на основе интегрального тождества. Однако можно указать способ приближенного учета условий Дирихле уже на стадии постановки обобщенной задачи. Он состоит в том, чтобы вместо условия  $T = T_1$  записать приближенно эквивалентное граничное условие 3-го рода

$$x, y \in \Gamma_1 : \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha T + \beta, \quad \alpha = B \gg 1, \quad \beta = Bu_1$$

Очевидно, что если разделить это равенство на очень большое число  $B$ , то получим следующее приближение:

$$x, y \in \Gamma_1 : T = T_1 + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{B} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \ll 1.$$

При этом структура интегрального тождества (30) не меняется; следует лишь должным образом задать коэффициенты  $\alpha, \beta$  на разных участках границы.

### 3.2. Сетка МКЭ

Покроем область  $D$  сеткой непересекающихся конечных элементов  $e_j$ ,  $j = 1..M$ , так чтобы

$$D = \bigcup_{j=1}^M e_j, \quad e_j \cap e_i = \delta_i^j \operatorname{mes} e_i.$$

Форма конечных элементов  $e_j$  пока не конкретизируется, но на практике при решении двумерных задач чаще всего используют многоугольники, а в трехмерном случае – тетраэдры, гексаэдры, призмы и т.д. Для произвольной функции  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in D$  и её следа на границе  $\Gamma$  справедливы аддитивные формулы интегрирования

$$\int_D f dD = \sum_{j=1}^M \int_{e_j} f dD, \quad \int_{\Gamma} f d\Gamma = \sum_{j=1}^{M^*} \int_{\Gamma_j} f d\Gamma$$

Звёздочка в последнем равенстве означает, что при интегрировании по границе в сумму входят лишь те конечные элементы  $e_j$ , границы которых  $\Gamma_j$  хотя бы частично лежат на границе  $\Gamma$ .

Рассмотрим отдельный конечный элемент. Например, это плоский многоугольник. Пусть он имеет  $m^j$  узлов. Тогда можно ввести базисные

функции этого элемента  $\varphi_i^j(x), i = \overline{1, m}$ . Эти функции линейно независимы и нормированы так, что  $\varphi_i^j(x_k) = \delta_i^k$ . Произвольная функция  $u(x)$  на элементе  $e_j$  может быть представлена разложением по базису

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m^j} u_i^j \varphi_i^j(x) = (\vec{u}, \vec{\varphi})_m^j, \quad x \in e_j \quad (32)$$

Индекс  $j$  обозначает принадлежность к  $j$ -му элементу. В дальнейшем, если это не приводит к недоразумениям, индекс  $j$  часто будем опускать. Индекс  $i = 1, 2, \dots, m$  используется для локальной нумерации узлов конечного элемента. Следует отметить, что локальные узлы элемента могут совпадать с вершинами многоугольника  $e$ , а могут и не совпадать с ними, как показано на рис. 4. Наряду с локальной вводят сквозную глобальную нумерацию узлов. Соответствие локальных и глобальных номеров, их координаты, а также связность (т.е. указание, какие узлы образуют элемент) задаётся с помощью двух основных таблиц, которые представляют МКЭ-сетку.

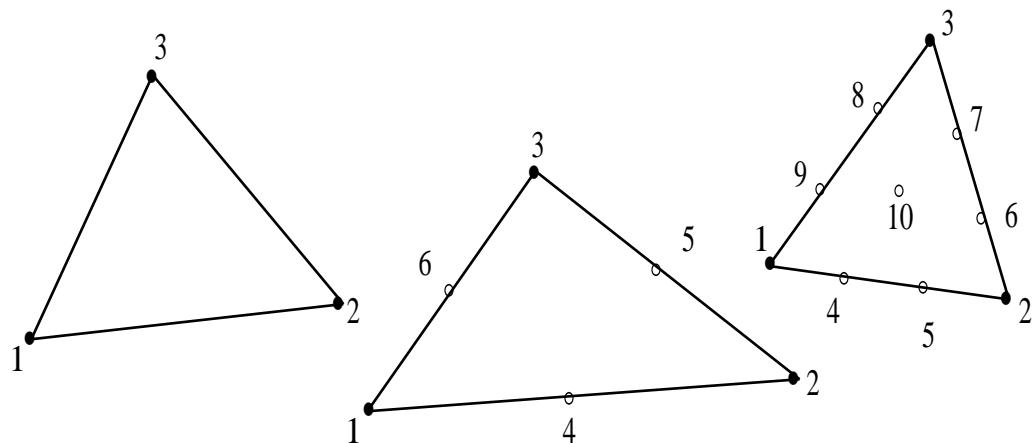


Рис. 4. Трехузловой, шестиузловой и десятиузловый треугольные конечные элементы

Таблица 1. Узлы

№	X	y	b	z
---	---	---	---	---

1				
I	$x_i$	$y_i$	$b_i$	$z_i$
N				

Поле  $b$  (bound) используется, чтобы отличить внутренние узлы ( $b = 0$ ) от граничных ( $b = 1, 2, \dots$ ). Признак  $b > 0$  позволяет в программе, использующей эту сетку, задавать нужное граничное условие; например, если  $b = 1$ , -- то это условие Дирихле,  $b = 2$  соответствует условию Неймана и т.д. на разных участках границы  $\Gamma$ . Поле  $z$  (zone) используется, чтобы задавать различные функции для коэффициентов решаемой задачи; например, коэффициент теплопроводности в композитных материалах:  $z = 1$  -- сталь,  $z = 2$  -- алюминий и т.д.

Таблица 1 не позволяет нарисовать МКЭ-сетку, а только её узлы. Это значит, что требуется еще одна таблица элементов, или таблица связности, в которой указывались бы связи узлов ребрами и то, какие узлы образуют элемент.

Таблица 2. Элементы

$\#$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	...	$n_m$	$z$
1						
j	213	45	41246			3
M						

Строка  $j$  таблицы элементов показывает, что конечный элемент  $e_j$  -- это треугольник с вершинами в узлах 213, 45 и 41246 и расположенный в зоне 3. Таким образом, эта таблица указывает соответствие локальных и глобальных номеров узлов. При этом локальный порядок нумерации определен заранее, например, так, как показано на рис. 4. Принято, чтобы

«основные» узлы элемента, т.е. узлы, совпадающие с вершинами многоугольника, нумеровались против хода часовой стрелки.

С помощью двух таблиц – узлов и элементов – легко нарисовать МКЭ-сетку. Для этого в цикле  $j = 1..M$  рисуется каждый элемент  $e_j$ . Конечный элемент  $e_j$  рисуется так: в строке  $j$  таблицы 2 последовательно берутся глобальные номера  $n_1, \dots, n_m$ , для каждого из них в строках  $n_1, \dots, n_m$  таблицы 1 берутся координаты, и затем узлы соединяются ребрами в порядке  $n_1 - n_2 - \dots - n_m - n_1$ . Таким образом, таблицы узлов и элементов однозначно определяют МКЭ-сетку.

*Замечание.* На практике наряду с этими таблицами удобно пользоваться таблицами инцидентности (или таблицами соседей). Так, для фрагмента сетки, показанной на рис. 5, таблицы 3, 4 инцидентных узлов и элементов выглядят так (заполнены только 1-я и 19-я строки)

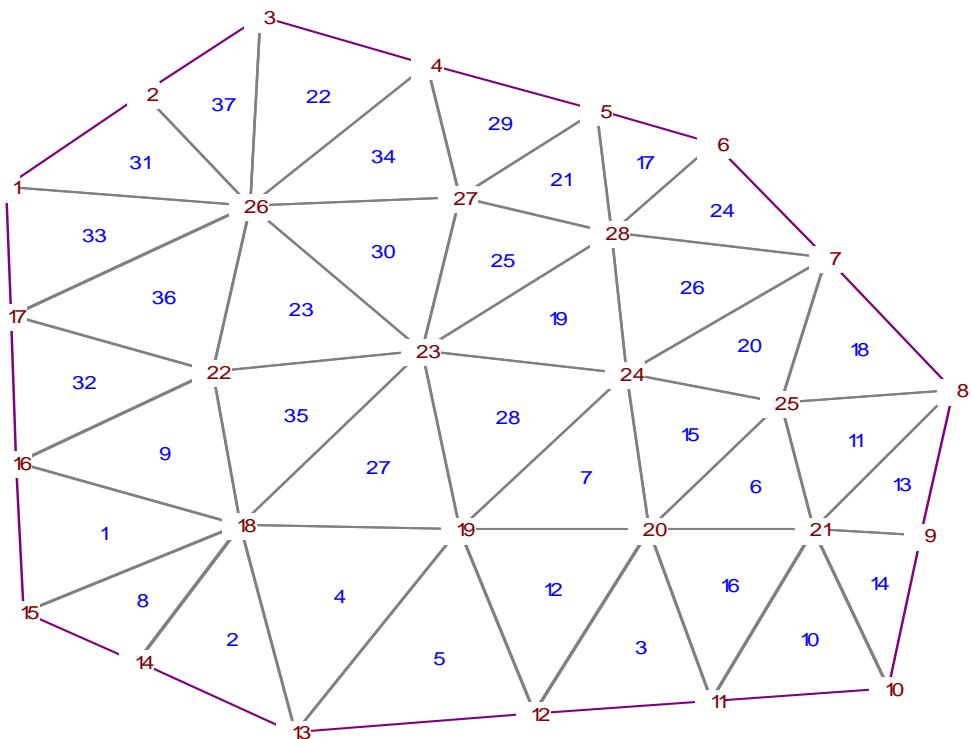


Рис. 5. Фрагмент МКЭ-сетки

Таблица 3. Инцидентные узлы

№	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	...	$e_p$
1	17	26	2					
19	13	12	20	24	23	18		
N								

Таблица 4. Инцидентные элементы

№	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	...	$z$
1	33	31						
19	5	12	7	28	27	4		
N								

Сетки МКЭ для трехмерных задач состоят из элементов сложных форм (см. рис. 6, 7) и для их описания используются дополнительные таблицы, в частности для описания граней.

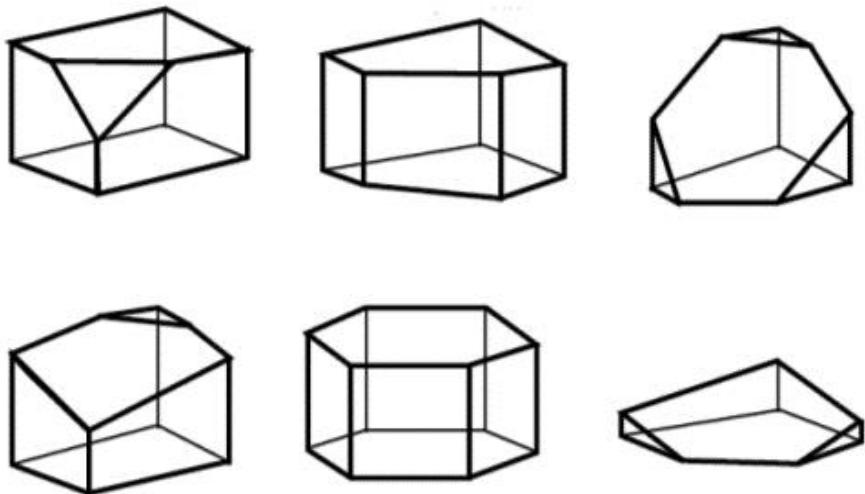


Рис. 6. Полиэдральные конечные элементы усложненных форм (пакет STAR-CD)

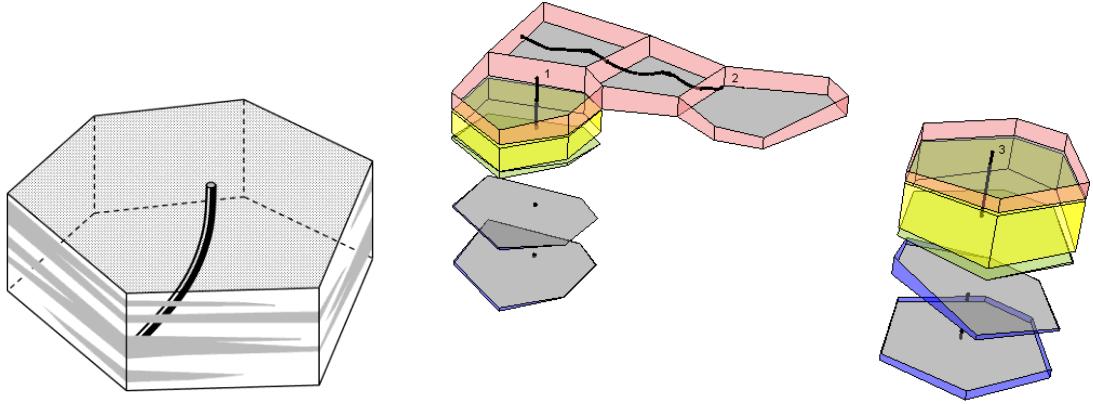


Рис. 7. Элементы 2.5D сетки для моделирования слоистого нефтяного пласта с наклонными скважинами (пакет Delta-Integra)

Подчеркнём, что излагаемый в данном учебном пособии на двумерном примере метод построения схем МКЭ вполне пригоден и для трехмерных сеток.

### 3.3. Элементные вектора и матрицы

Преобразуем интегральное тождество (30)

$$\begin{aligned} & (1 + \tau p) \int_D v T dD + \tau \lambda \int_D \nabla v \cdot \nabla T d\Gamma + \tau \alpha \int_{\Gamma} T v d\Gamma = \\ & = \int_D v (\bar{T} + \tau g) dD + \tau v (x^*, y^*) Q + \tau \int_D \nabla v \cdot (\vec{V} \bar{T}) dD + \tau (\beta + q) \int_{\Gamma} v d\Gamma \end{aligned} \quad (33)$$

на МКЭ-сетке, заменяя интегралы суммой интегралов по элементам и используя разложения функций по базису внутри каждого конечного элемента

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{p=1}^m T_p \varphi_p(x) = (\vec{T}, \vec{\varphi})_m, \\ v(x) &= \sum_{s=1}^m v_s \varphi_s(x) = (\vec{v}, \vec{\varphi})_m, \quad x \in e \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $\vec{T} = (T_1, \dots, T_m)$ ,  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$  - элементные вектора длиной  $m$  по числу их узлов, а  $(\vec{T}, \vec{v})_m$  -- их элементное скалярное произведение.

Начнем вычисления с первого интеграла в (33).

$$\begin{aligned}
\int_e v T dD &= \int_e \sum_{s=1}^m T_s \varphi_s \sum_{p=1}^m v_p \varphi_p dD = \sum_{p=1}^m v_p \left\{ \sum_{s=1}^m T_s \int_e \varphi_s \varphi_p dD \right\} = \\
&= \left( \vec{v}, \sum_{s=1}^m T_s m_{ij} \right)_m = \left( \vec{v}, \overrightarrow{\mathbf{M}} \right)_m, \quad \mathbf{M} = \{m_{ij}\}, \quad m_{ij} = \int_e \varphi_i \varphi_j dD
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь квадратная матрица  $\mathbf{M}$  размерности  $m \times m$  (число узлов элемента  $e$ ) называется элементной матрицей масс. Отметим некоторые её свойства. Во-первых, по построению она симметрична. Во-вторых, в общем случае она будет заполненной (примеры будут рассмотрены ниже), но если для вычисления её элементов воспользоваться квадратурной формулой численного интегрирования по узлам вида

$$m_{ij} = \int_e \varphi_i \varphi_j dD \approx \sum_{k=1}^m \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) w_k, \quad \sum_{k=1}^m w_k = |e|,$$

то в силу свойства базисных функций  $\varphi_i(x_k) = \delta_i^k$  получаем диагональную матрицу масс  $m_{ij} = |e| \delta_i^j$ , все диагональные элементы которой равны площади (объему) элемента  $e$ .

Перейдем к преобразованию интеграла

$$\begin{aligned}
\int_D \nabla v \cdot \nabla T dD &= \int_e \nabla \sum_{s=1}^m T_s \varphi_s \cdot \nabla \sum_{p=1}^m v_p \varphi_p dD = \\
&= \sum_{p=1}^m v_p \left\{ \sum_{s=1}^m T_s \int_e \nabla \varphi_s \cdot \nabla \varphi_p dD \right\} = \sum_{p=1}^m v_p \sum_{s=1}^m T_s a_{sp} = \left( \vec{v}, \overrightarrow{\mathbf{A}} \right)_m, \\
a_{sp} &= \int_e \nabla \varphi_s \cdot \nabla \varphi_p dD.
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь квадратная симметричная матрица  $\vec{\mathbf{A}} = \{a_{sp}\}$  размерности  $m \times m$  называется элементной матрицей жесткости.

Интеграл по границе в левой части интегрального тождества (33) вычисляется следующим образом.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} T v d\Gamma &= \sum_{p=1}^m v_p \left\{ \sum_{s=1}^m T_s \int_{\Gamma_j} \varphi_s \varphi_p d\Gamma \right\} = \\
&= \sum_{p=1}^m v_p \sum_{s=1}^m T_s \alpha_{sp} = (\vec{v}, \overline{\Lambda} \vec{T})_m, \quad \Lambda = \{\alpha_{ij}\}, \quad \alpha_{ij} = \int_{\Gamma_j} \varphi_i \varphi_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{37}$$

Принципиальное отличие коэффициентов  $\alpha_{ij}$  от элементов матрицы масс (36) в том, что интегрирование в (36) ведется не по площади элемента  $e_j$ , а лишь по той части его границы, которая лежит на границе области  $\Gamma$ . При этом из-за свойства  $\varphi_i(x_k) = \delta_i^k$  среди всех коэффициентов  $\alpha_{ij}$  будут отличны от нуля лишь те, для которых одновременно  $x_i \in \Gamma$  и  $x_j \in \Gamma$ . Например, для линейного треугольного элемента, показанного на рис. 8, элементная матрица  $\Lambda$  будет иметь следующую структуру

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{11} = \ell \int_0^1 s^2 ds = \frac{\ell}{3}, \quad \alpha_{33} = \ell \int_0^1 (1-s)^2 ds = \frac{\ell}{3}, \\
\alpha_{13} &= \alpha_{31} = \ell \int_0^1 s(1-s) ds = \frac{\ell}{6}, \quad \ell = |\Gamma_{13}| = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}.
\end{aligned} \tag{38}$$

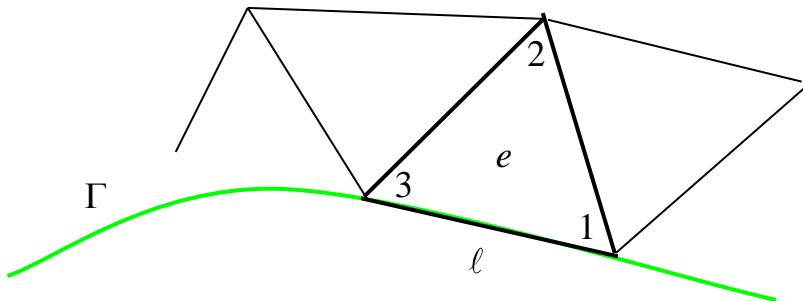


Рис. 8. К подсчету интеграла по границе

Перейдем к преобразованиям интегралов в правой части интегрального тождества (33). В первом из них обозначим  $f = \vec{T} + \tau g$  и точно так же, как (35), получаем

$$\int_e v f dD = (\vec{v}, \overrightarrow{\mathbf{M}f})_m \equiv (\vec{v}, \vec{F})_m, \quad (39)$$

где  $\mathbf{M}$  -- элементная матрица масс, определенная в (3.4), а вектор  $\vec{F} = \overrightarrow{\mathbf{M}f}$  называется элементным вектором сил или нагрузок.

Далее, вычислим интеграл, порожденный конвективной производной:

$$\begin{aligned} \int_e \nabla v \cdot (\vec{V} \vec{T}) dD &= \sum_{p=1}^m v_p \left\{ \sum_{s=1}^m \vec{T}_s \int_e \varphi_s \vec{V} \cdot \nabla \varphi_p dD \right\} = \\ &= \sum_{p=1}^m v_p \left\{ \sum_{s=1}^m c_{ps} \vec{T}_s \right\} = (\vec{v}, \mathbf{C} \vec{T})_m, \quad \mathbf{C} = \{c_{ps}\}, c_{ps} = \int_e \varphi_s \vec{V} \cdot \nabla \varphi_p dD. \end{aligned} \quad (40)$$

Интеграл по границе элемента  $e_j$  в правой части (33) вычисляется так:

$$\int_{\Gamma_j} v dS = \sum_{p=1}^m v_p \int_{\Gamma_j} \varphi_p dS = (\vec{v}, \vec{\beta})_m, \quad \beta_p = \int_{\Gamma_j} \varphi_p dS \quad (41)$$

Для примера на рис. 8 вектор  $\vec{\beta}$  равен  $\ell(0.5, 0, 0.5)$ .

Последнее оставшееся слагаемое в правой части (33) с учетом разложения (34) тоже приводится к виду короткого скалярного произведения:

$$v(x^*, y^*) = \sum_{p=1}^m v_p \varphi_p(x^*, y^*) = (\vec{v}, \overrightarrow{\varphi^*})_m, \quad \overrightarrow{\varphi^*} = \{\varphi_p(x^*, y^*)\}, p = 1..m \quad (42)$$

Заметим, что компоненты вектора  $\overrightarrow{\varphi^*}$  отличны от нуля, как правило, только для одного конечного элемента  $e_{j^*} \supset (x^*, y^*)$ ; исключение составляют два положения источника: 1) на границе раздела двух элементов и 2) в узле сетки. В этих особых случаях следует распределить мощность  $Q$  поровну на все инцидентные элементы.

Итак, интегральное тождество (33) можно переписать в виде суммы элементных вкладов:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \left( \vec{v}, \left\{ (1 + \tau p) \mathbf{M} + \tau \lambda \mathbf{A} + \tau \alpha \mathbf{\Lambda} \right\} \vec{u} \right)_m^j = \\ = \sum_{j=1}^M \left( \vec{v}, \left\{ \vec{F} + \tau \mathbf{C} \vec{T} + \tau (\beta + q) \vec{\beta} + \tau Q \vec{\varphi}^* \right\} \right)_m^j, \\ \vec{F}^j = \mathbf{M}^j \vec{f}^j, \quad \vec{f}^j = \vec{T}^j + \tau \vec{g}^j \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнение (42) непосредственно нельзя использовать для отыскания узловых значений  $u_i, i = 1..N$ , поскольку оно содержит произвольную пробную функцию  $v$  и, кроме того, записано в терминах элементных векторов и матриц, которые имеют локальную (для каждого конечного элемента  $e_j$ ) нумерацию,  $u_i^j, i = 1..m^j$ .

### **3.4. Расширенные и глобальные вектора и матрицы. Сборка системы уравнений МКЭ**

Для произвольного элементного вектора  $\vec{w}^j = (w_1, \dots, w_m)^j$  определим расширенный элементный вектор  $\tilde{w}^j = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_N)^j$  длиной  $N$  (по числу узлов МКЭ-сетки), у которого отличны от нуля только  $m^j$  компонент  $\tilde{w}_{n_1} = w_1, \tilde{w}_{n_2} = w_2, \dots, \tilde{w}_{n_m} = w_m$ . Например, для элемента 28 сетки, показанной на рис. 5,  $n_1 = 19, n_2 = 24, n_3 = 23$  (эти номера указаны в строке 28 таблицы связности). Поэтому компоненты элементного вектора  $\vec{w}^{28} = (w_1, w_2, w_3)$  образуют ненулевые компоненты расширенного элементного вектора

$$\tilde{w}^{28} = (0, 0, \dots, \tilde{w}_{19}, 0, \dots, 0, \tilde{w}_{23}, \tilde{w}_{24}, 0, \dots, 0)^{28}$$

Аналогично для произвольной элементной матрицы  $\mathbf{W}^j = \{w_{ps}\}$  размерности  $m \times m$  определим расширенную элементную матрицу  $\tilde{\mathbf{W}}^j = \{\tilde{w}_{kl}\}$  размерностью  $N \times N$ , у которой отличны от нуля только  $m^2$  компонентов, равных  $\{w_{ps}\}$  и расположенных в позициях  $k = n_p, l = n_s$ . Для треугольника  $e_{28}$  сетки на рис. 5 это элементы

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{19,19} &= w_{11}, \quad \tilde{w}_{19,24} = w_{12}, \quad \tilde{w}_{19,23} = w_{13}, \\ \tilde{w}_{24,19} &= w_{21}, \quad \tilde{w}_{24,24} = w_{22}, \quad \tilde{w}_{24,23} = w_{23}, \\ \tilde{w}_{23,19} &= w_{31}, \quad \tilde{w}_{23,24} = w_{32}, \quad \tilde{w}_{23,23} = w_{33}.\end{aligned}$$

По существу, расширенные элементные вектора и матрицы получаются из элементных векторов и матриц рассылкой их элементов на нужные позиции в соответствии с глобальной нумерацией узлов элемента, определенной таблицей связности.

Замечательное свойство расширенных векторов и матриц определяется расположением в них нулей и выражается следующими равенствами

$$\vec{\mathbf{A}} \tilde{\vec{v}}^j = \mathbf{A}^j \vec{v}^j, \quad \left( \tilde{\vec{u}}^j, \tilde{\vec{v}}^j \right)_N = \left( \vec{u}^j, \vec{v}^j \right)_m.$$

Используя эти свойства, можно переписать интегральное тождество (42) в терминах расширенных векторов и матриц:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^M \left( \vec{v}, \left\{ (1 + \tau p) \mathbf{M} + \tau \lambda \mathbf{A} + \tau \alpha \mathbf{\Lambda} \right\} \vec{u} \right)_N^j &= \\ &= \sum_{j=1}^M \left( \vec{v}, \left\{ \vec{F} + \tau \mathbf{C} \vec{T} + \tau (\beta + q) \vec{\beta} + \tau Q \vec{\varphi}^* \right\} \right)_N^j\end{aligned}$$

Определим, далее, глобальные вектора и матрицы как сумму расширенных элементных векторов и матриц:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^M \tilde{\vec{v}}^j, \quad \vec{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^M \mathbf{A}^j.$$

В этих терминах можно переписать последнее равенство в виде

$$\left( \vec{v}, \left\{ \left[ (1 + \tau p) \vec{\mathbf{M}} + \tau \lambda \vec{\mathbf{A}} + \tau \alpha \vec{\mathbf{\Lambda}} \right] \vec{u} - \vec{F} - \tau \vec{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{T}} - \tau (\beta + q) \vec{\beta} - \tau Q \vec{\varphi}^* \right\} \right)_N = 0.$$

Поскольку глобальный вектор  $\vec{v}$  здесь может выбираться произвольно, то выражение в фигурных скобках должно равняться нулю. Так мы приходим к глобальной системе уравнений МКЭ

$$\left[ (1 + \tau p) \vec{\mathbf{M}} + \tau \lambda \vec{\mathbf{A}} + \tau \alpha \vec{\mathbf{\Lambda}} \right] \vec{u} = \vec{F} + \tau \vec{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{T}} + \tau (\beta + q) \vec{\beta} + \tau Q \vec{\varphi}^*$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \vec{u} &= \mathbf{F}, \\ \mathbf{B} &= (1 + \tau p) \vec{\mathbf{M}} + \tau \left[ \lambda \vec{\mathbf{A}} + \alpha \vec{\mathbf{\Lambda}} \right], \\ \mathbf{F} &= \vec{F} + \tau \left[ \vec{\mathbf{C}} \vec{\mathbf{T}} + (\beta + q) \vec{\beta} + Q \vec{\varphi}^* \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Матрица  $\mathbf{B}$  этой системы складывается из глобальных матриц масс  $\vec{\mathbf{M}}$ , жесткости  $\vec{\mathbf{A}}$  и матрицы  $\vec{\mathbf{\Lambda}}$ , порожденной граничными условиями 3-го рода. Каждая из этих матриц, в свою очередь, представляет собой сумму вкладов от соответствующих элементных матриц. Структура правой части  $\mathbf{F}$  уравнения (44) аналогична в том смысле, что также представляет собой сумму вкладов от всех элементных векторов. Такая структура системы уравнений МКЭ определяет алгоритм *поэлементной сборки* ее матрицы и правой части. Вначале все элементы глобальной матрицы  $\mathbf{B}$  и глобального вектора правой части  $\mathbf{F}$  обнуляются, затем в цикле по конечным элементам  $e_j, j = \overline{1, M}$  вычисляются элементные матрицы и вектора и добавляются к соответствующим элементам  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ . Это соответствие определено в таблице 2 (таблице связности), где для каждого элемента  $e_j, j = \overline{1, M}$  указаны глобальные номера  $n_1, \dots, n_m$  его узлов. Непосредственно из алгоритма сборки видно, что матрица  $\mathbf{B}$  будет разреженной: в ее  $i$ -ю строку, соответствующую  $i$ -му узлу сетки, очевидно, попадут вклады от элементов, инцидентных

данному узлу (список таких элементов содержится в таблице 4). При этом номера столбцов  $i$ -ой строки, куда попадут эти вклады, совпадает со множеством глобальных номеров узлов, инцидентных  $i$ -му узлу сетки элементов. Эти номера и перечислены в  $i$ -ой строке таблицы 3. Аналогично производится поэлементная сборка вектора  $\mathbf{F}$  правой части системы уравнений МКЭ.

Итак, чтобы собрать систему уравнений МКЭ нужно

1. Триангулировать область  $D$ , т.е. построить МКЭ-сетку в виде таблиц узлов 1, связности 2 и, возможно, дополнительных таблиц инцидентности 3 и 4.
2. Определить базисные функции на каждом конечном элементе.
3. Вычислить элементные вклады с помощью интегралов (35), (36), (37), (38), (40) и формулы (41).
4. Выполнить поэлементную сборку глобальных векторов и матриц.

Проблемы 1 и 4 нами решены, а задачи 2 и 3 решаются с помощью т.н. базисного элемента, на котором легко и однообразно вводятся базисные функции и выполняются операции дифференцирования и интегрирования.

Замечание 1. Введенные выше понятия расширенных элементных векторов и матриц используются только для того, чтобы прояснить структуру глобальной системы уравнений МКЭ. На практике при построении этой системы глобальные вектора и матрицы получаются непосредственно из элементных векторов и матриц с помощью алгоритма поэлементной сборки.

Замечание 2. Все приведенные до сих пор формулы носят универсальный характер, т.е. пригодны для любых конечных элементов. Но вычисление элементных вкладов предполагает формальное определение каждого конечного элемента и его базисных функций.

Ниже будут рассмотрены некоторые конкретные типы конечных элементов, их базисные функции, операции дифференцирования и интегрирования.

## 4. ТРЕУГОЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Базисный треугольник  $\Delta$  -- это прямоугольный равносторонний треугольник с единичными катетами. Для него вводится специальная система координат  $\xi, \eta$ , ориентированных по катетам; нумерация его трех вершин - против хода часовой стрелки, см. рис. 4.

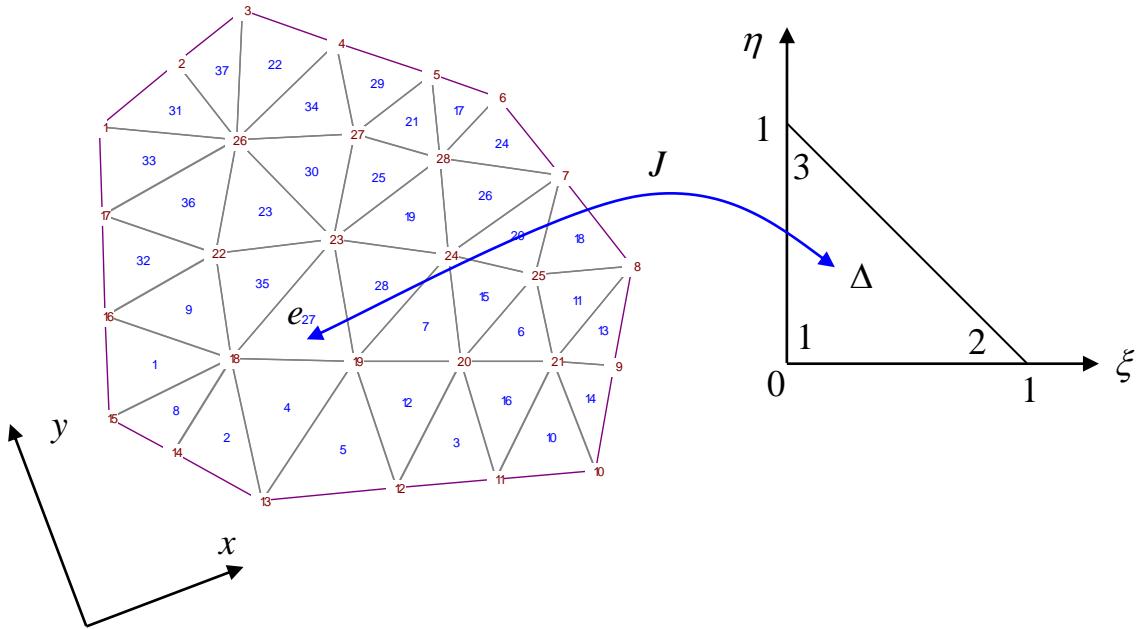


Рис. 9. Базисный треугольник  $\Delta$  и его отображение на элемент сетки  $e$

Базисный треугольник  $\Delta$  и реальный треугольник  $e_j$  МКЭ-сетки можно связать с помощью преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Обратное преобразование, очевидно, задается формулой

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

где якобиан преобразования равен

$$|J|^j = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 2 \operatorname{mes} e^j. \quad (47)$$

Отображение (147.45) – (6) задаёт взаимно-однозначное соответствие между произвольной точкой  $(x, y) \in e_j$  в физической плоскости и точкой  $(\xi, \eta)$  внутри базисного элемента  $\Delta$ . При этом соответствие вершин треугольников выглядит так:  $(0, 0) \leftrightarrow (x_1, y_1)$ ,  $(1, 0) \leftrightarrow (x_2, y_2)$ ,  $(0, 1) \leftrightarrow (x_3, y_3)$ .

#### 4.1. Дифференцирование и интегрирование

Пусть на  $e_j$  задана функция  $f(x, y)$ . Ей соответствует функция  $\hat{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , причем соответствие  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  определено формулами (45), (46). Справедливы формулы

$$\nabla f = \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{f}, \quad \left( J^{-1} \right)^T = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\int_{e_j} f \, dx dy = \int_{\Delta} |J| \hat{f} \, d\xi d\eta = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \hat{f}(\xi, \eta) \, d\eta d\xi. \quad (49)$$

В последнем равенстве учтено, что в случае треугольных конечных элементов якобиан преобразования не зависит от координат. С помощью формулы (49), в частности, можно вычислить интеграл по области:

$$\int_D f(x, y) \, dx dy = \sum_{j=1}^M \int_{e_j} f \, dx dy = \sum_{j=1}^M |J|^j \int_{\Delta} \hat{f} \, d\xi d\eta. \quad (50)$$

Если вместо функции  $f(x, y)$  в (50) подставить единицу, получим способ вычисления площади области  $D$ :

$$\int_D \, dx dy = \text{mes } D = \sum_{j=1}^M |J|^j \int_{\Delta} d\xi d\eta = \sum_{j=1}^M |J|^j \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^M \frac{2 \text{mes } e_j}{2}. \quad (51)$$

#### 4.2. Линейные базисные функции

Три линейные базисные функции  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3$  для базисного элемента -- равностороннего треугольника  $\Delta$  с нумерацией вершин

$V_1 = (0,0), V_2 = (1,0), V_3 = (0,1)$ , показанной на рис. 9, должны удовлетворять условию  $\hat{\phi}_i(V_j) = \delta_i^j$ . Такие функции определяются однозначно и равны

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, \quad \hat{\phi}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \hat{\phi}_3(\xi, \eta) = \eta, \\ \xi \in [0,1], \quad \eta \in [0,1-\xi]. \end{aligned} \quad (52)$$

Вторая строчка в этом определении может быть использована в качестве признака принадлежности точки  $\xi, \eta$  базисному треугольнику  $\Delta$ .

Произвольная функция  $f$  со значениями  $f_1, f_2, f_3$  может быть представлена на элементе  $\Delta$  разложением по базису (52):

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 f_i \varphi_i(\xi, \eta) = (\vec{f}, \vec{\phi})_3. \quad (53)$$

Градиенты линейных базисных функций (52) – это векторы

$$\nabla \hat{\phi}_1 = (-1, -1), \quad \nabla \hat{\phi}_2 = (1, 0), \quad \nabla \hat{\phi}_3 = (0, 1). \quad (54)$$

Обратим внимание, что градиенты линейных базисных функций не зависят от координат.

Коэффициенты элементных матриц выражаются через интегралы от базисных функций и их произведений. Поэтому нам потребуются значения следующих интегралов

$$\int_{\Delta} \hat{\phi}_i d\xi d\eta, \quad i = 1, 2, 3; \quad \int_{\Delta} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

а также интегралов от следов базисных функций и их произведений на границе.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{\phi}_1 d\xi d\eta &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1 - \xi - \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \left\{ (1 - \xi)^2 - \frac{\eta^2}{2} \Big|_0^{1-\xi} \right\} d\xi = \\ &= -\frac{(1 - \xi)^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{(1 - \xi)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\int_{\Delta} \hat{\phi}_2 d\xi d\eta = \frac{1}{6}, \quad \int_{\Delta} \hat{\phi}_3 d\xi d\eta = \frac{1}{6}.$$

Интегралы от произведений.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_1 d\xi d\eta &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1-\xi-\eta)^2 d\eta d\xi = - \int_0^1 \left. \frac{(1-\xi-\eta)^3}{3} \right|_0^{1-\xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-\xi)^3}{3} d\xi = \left. \frac{(1-\xi)^4}{12} \right|_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\int_{\Delta} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_2 d\xi d\eta = \int_{\Delta} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_3 d\xi d\eta = \frac{1}{12}.$$

Оставшиеся интегралы от произведения различных базисных функций равны

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 d\xi d\eta &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (1-\xi-\eta) \xi d\eta d\xi = - \int_0^1 \xi \left. \frac{(1-\xi-\eta)^2}{2} \right|_0^{1-\xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)^2}{2} d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) d\xi = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3 d\xi d\eta &= \int_{\Delta} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 d\xi d\eta = \int_{\Delta} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 d\xi d\eta = \\ &= \int_{\Delta} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_1 d\xi d\eta = \int_{\Delta} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_2 d\xi d\eta = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\left\{ \int_{\Delta} \hat{\phi}_i d\xi d\eta \right\} = \frac{1}{6}(1,1,1); \quad \left\{ \int_{\Delta} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\xi d\eta \right\} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Теперь, используя разложение (53) произвольной функции  $f$  по базису  $\hat{\phi}$ , легко подсчитать интеграл (50) этой функции по триангулированной области  $D$ :

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \sum_{j=1}^M |J|^j \int_{\Delta} \hat{f} d\xi d\eta = \sum_{j=1}^M |J|^j \sum_{i=1}^3 \hat{f}_i \int_{\Delta} \hat{\phi}_i d\xi d\eta = \\ &= \sum_{j=1}^M |J|^j \sum_{i=1}^3 \hat{f}_i \frac{1}{6} = \sum_{j=1}^M \frac{|J|^j}{2} \bar{f}^j, \quad \bar{f}^j = \frac{\hat{f}_1^j + \hat{f}_2^j + \hat{f}_3^j}{3}. \end{aligned} \quad (56)$$

### 4.3. Элементные векторы и матрицы

Вторая формула (55) в сочетании с определением операции интегрирования (49) позволяет вычислить элементную матрицу масс (35) для конечного элемента  $e_j$ :

$$\{m_{ij}\}^j = \frac{|J|^j}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Перейдем к вычислению элементной матрицы жесткости (36). Предварительно, используя соотношение (48), разложение по базису (53) и градиенты базисных функций (54), выведем формулу дифференцирования произвольной функции  $f$ .

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{f} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \hat{f}_i \nabla \hat{\phi}_i = \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \hat{f}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{f}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{f}_3 \right\} = \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_2 - \hat{f}_1 \\ \hat{f}_3 - \hat{f}_1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22}(\hat{f}_2 - \hat{f}_1) & -J_{21}(\hat{f}_3 - \hat{f}_1) \\ -J_{12}(\hat{f}_2 - \hat{f}_1) & J_{11}(\hat{f}_3 - \hat{f}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

Вспомним, что согласно (36) элементы матрицы жесткости определялись как

$$a_{ij} = \int_e \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dxdy = \int_{\Delta} |J| \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_j d\xi d\eta = \\ = \frac{|J|}{2} \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_j = \frac{1}{2|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_j.$$

Здесь учтено, что матрица  $J$  и производные линейных базисных функций не зависят от координат, поэтому выносятся из-под интеграла; кроме того, используется формула для площади треугольника  $|e_j| = |J|^j / 2$ .

Чтобы упростить и конкретизировать последнее выражение для  $a_{ij}$ , вначале вычислим входящие в них векторы

$$\begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{21} - J_{22} \\ J_{12} - J_{11} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{22} \\ -J_{12} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{21} \\ J_{11} \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно подсчитать элементы матрицы жесткости, попарно перемножая скалярно выписанные вектора:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ (J_{21} - J_{22})^2 + (J_{12} - J_{11})^2 \right\}; \\
a_{12} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ J_{22}(J_{21} - J_{22}) - J_{12}(J_{12} - J_{11}) \right\}; \\
a_{13} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ -J_{21}(J_{21} - J_{22}) + J_{11}(J_{12} - J_{11}) \right\}; \\
a_{22} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ J_{22}^2 + J_{12}^2 \right\}; \quad a_{21} = a_{12}; \\
a_{23} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ -J_{22}J_{21} - J_{12}J_{11} \right\}; \\
a_{33} &= \frac{1}{2|J|} \left\{ J_{11}^2 + J_{21}^2 \right\}; \quad a_{31} = a_{13}; \quad a_{32} = a_{23}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Матрица  $\Lambda^j$ , порожденная граничным условием 3-го рода, вычисляется интегрированием произведения базисных функций по границе, как это сделано в формулах (38) для частного случая, когда граничной стороной треугольника  $e_j$  является сторона 1-3. Все возможные случаи представлены в таблице.

Граничная сторона	1-3	1-2	2-3
$\Lambda$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$

При этом для граничной стороны  $i-k$  ненулевые коэффициенты матрицы  $\Lambda^j$  вычисляются по формулам

$$\alpha_{ii} = \alpha_{kk} = \frac{\ell}{3}, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{\ell}{6}, \quad \ell = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}. \tag{60}$$

Элементный вектор сил  $\vec{F}^j = \mathbf{M}^j(\vec{T}^j + \tau \vec{g}^j)$  в правой части уравнений МКЭ вычисляется с помощью той же элементной матрицы масс  $\mathbf{M}^j$  (57).

Элементная матрица  $\mathbf{C}$  (40), отвечающая за конвективный перенос, состоит из коэффициентов, которые на треугольном элементе с линейными базисными функциями равны

$$\begin{aligned} c_{ps} &= \int_e \varphi_s \vec{V} \cdot \nabla \varphi_p dD = \vec{V} \cdot \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_p |J| \int_{\Delta} \hat{\varphi}_s d\xi d\eta = \\ &= \vec{V} \cdot \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_p \int_{\Delta} \hat{\varphi}_s d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (61)$$

При записи этого выражения учтено, что якобиан  $J$ , градиенты линейных функций, а также скорость  $\vec{V} = (u, w)$ , не зависят от локальных координат  $\xi, \eta$ .

Используя формулы (54) для градиентов и (55) для интегралов функций базиса, можем записать

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_1 &= \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{21} - J_{22} \\ J_{12} - J_{11} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_2 &= \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{22} \\ -J_{12} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \nabla \hat{\varphi}_3 &= \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_{21} \\ J_{11} \end{pmatrix}; \\ \int_{\Delta} \hat{\varphi}_s d\xi d\eta &= \frac{1}{6}, \quad s = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (61) и получим

$$\begin{aligned} c_{1s} &= \frac{1}{6} [u(J_{21} - J_{22}) + w(J_{12} - J_{11})], \\ c_{2s} &= \frac{1}{6} (uJ_{22} - wJ_{12}), \quad c_{3s} = \frac{1}{6} (-uJ_{21} + wJ_{11}), \quad s = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Чтобы определить элементный вклад конвективного теплопереноса в вектор правой части системы уравнений МКЭ, осталось умножить матрицу  $\mathbf{C}$  на элементный вектор  $T$ :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CT})_1 &= \frac{\bar{T}}{2} [u(J_{21} - J_{22}) + w(J_{12} - J_{11})], \quad \bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}; \\ (\overrightarrow{CT})_2 &= \frac{\bar{T}}{2} (uJ_{22} - wJ_{12}), \quad (\overrightarrow{CT})_3 = \frac{\bar{T}}{2} (-uJ_{21} + wJ_{11}). \end{aligned} \quad (62)$$

Элементный вектор  $\overrightarrow{\beta^j}$ , порожденный граничными условиями 2-го и 3-го рода имеет компоненты (40), которые определяются интегрированием базисных функций по граничной стороне  $i-k$  треугольника  $e_j$ . Этот вектор длины  $m=3$  имеет ненулевые компоненты  $l^j/2$  в позициях  $i, k$ .

Наконец, укажем способ вычисления вклада в вектор правой части от точечного источника мощностью  $Q$  в точке  $x^*, y^*$ , который имеет компоненты (41). При поэлементной сборке системы МКЭ для каждого конечного элемента  $e_j$  необходимо определить, принадлежит ли точка  $(x^*, y^*)$  этому элементу (см. (52)), и при положительном исходе вычислить элементные вклады  $Q\varphi_i^j(x^*, y^*), i=1..3$ .

Итак, все элементные матрицы и векторы, необходимые для сборки системы МКЭ (44), определены. Поэлементная сборка глобальной системы сводится к добавлению коэффициентов элементных матриц  $b_{ik}^j, i,k=1..3$  к коэффициентам глобальной матрицы  $\mathbf{B}_{n_i n_k}$  и векторов  $f_p^j, p=1..3$  к компонентам глобального вектора  $\mathbf{F}_{n_p}$ . Глобальные номера  $n_i, i=1,2,3$  для треугольника  $e_j$  берутся из строки  $j$  таблицы связности.

#### 4.4. Примеры применения МКЭ на линейных элементах

##### 4.4.1. Потенциальное обтекание тела

Решение этой первой задачи мы обсудим достаточно подробно, а последующие задачи будут изложены в более сжатой форме.

Рассматривается плоский прямоугольный канал  $D_4 = [0, L] \times [0, H]$  с горизонтальными стенками *Top* ( $y = H$ ) и *Bot* ( $y = 0$ ), вертикальным входным сечением *In* ( $x = 0$ ) и выходным сечением *Out* ( $x = L$ ). Внутри канала расположено тело с замкнутой границей  $\gamma$ . Как известно, установившееся потенциальное (безвихревое) течение идеальной несжимаемой жидкости описывается единственной функцией – потенциалом  $\Phi(x, y)$ , через которую выражаются компоненты скорости

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi, u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (63)$$

Подставив (63) в уравнение неразрывности  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , получаем задачу Лапласа для потенциала

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \Delta \Phi = 0, \quad x, y \subset D = D_4 \setminus \gamma.$$

$$\begin{aligned} & \text{Top, Bot, } \gamma : \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0; \\ & \text{In} : \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -1; \\ & \text{Out} : \Phi = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

На твердых стенах задано условие гидроизоляции  $V_n = \partial \Phi / \partial n = 0$ ; на входе – равномерный единичный профиль скорости  $u = -V_n = -\partial \Phi / \partial n = 1$ , а в выходном сечении требуется отсутствие поперечных составляющих скорости:  $w = \partial \Phi / \partial y = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const} = 0$ .

Интегральное тождество для задачи (64) имеет вид

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \Phi dD = - \int_{In} v d\Gamma.$$

Левая часть после декомпозиции на элементы порождает элементную матрицу жесткости (59), в правая часть – элементный вектор  $\vec{\beta}$  (41) с двумя ненулевыми компонентами, равными  $-0.5\ell$ , где  $\ell$  -- длина стороны треугольника, лежащей на границе *In*; номера ненулевых компонент

элементного вектора  $\vec{\beta}$  совпадают с локальными номерами узлов этой стороны.

Решение задачи начинается с построения МКЭ-сетки. Сгущающаяся к поверхности  $\gamma$  обтекаемого тела сетка с числом узлов  $N \approx 9000$  и числом элементов  $M \approx 18000$  построена в генераторе «GridGen» и показана на рис. 10.

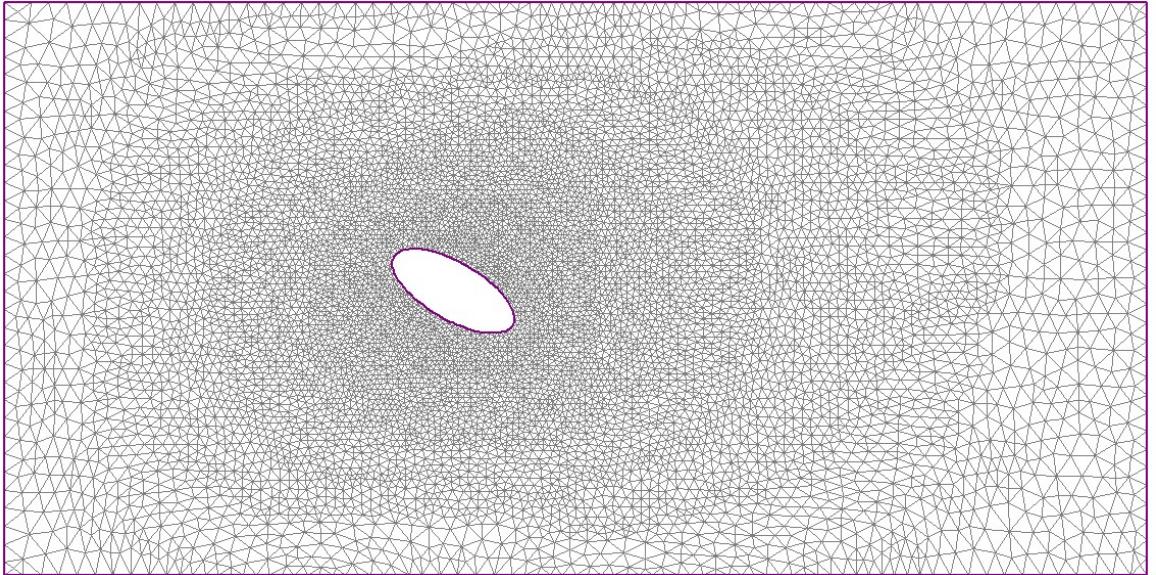


Рис. 10. Сетка треугольных конечных элементов для задачи (64).

По таблице узлов и таблице связности этой сетки для каждого элемента  $e_j, j = 1..M$  строится матрица  $J$  преобразования координат по формулам (45) – (47). По этой матрице определяется матрица жёсткости  $\mathbf{A}^j = \{a_{sp}\}^j, s, p = 1..3$  (59) и вектор  $\vec{\beta}^j = \{\beta_s\}^j, s = 1..3$  каждого элемента  $e_j$ , а глобальные номера узлов  $n1, n2, n3$  в строке  $j$  таблицы связности используются для рассылки величин  $a_{sp} \rightarrow \mathbf{B}, \beta_s \rightarrow \mathbf{F}$  и сборки глобальной системы уравнений МКЭ  $\mathbf{B}\Phi = \mathbf{F}$ .

Матрица этой СЛАУ разрежена, она хранится в разреженном строчном формате (хранятся только ненулевые элементы и номера столбцов каждой строки). Система алгебраических уравнений решается с помощью

соответствующих программ из открытых библиотек. Обсуждение этого этапа решения задачи выходит за рамки данного пособия.

Решение системы уравнений  $\mathbf{B}\Phi = \mathbf{F}$  даёт потенциал течения  $\Phi$  в узлах сетки. Изолинии этой функции (эквипотенциали) в окрестности границы  $\gamma$  представлены на рис. 1 Там же изображено поле скорости (63) в виде стрелок.

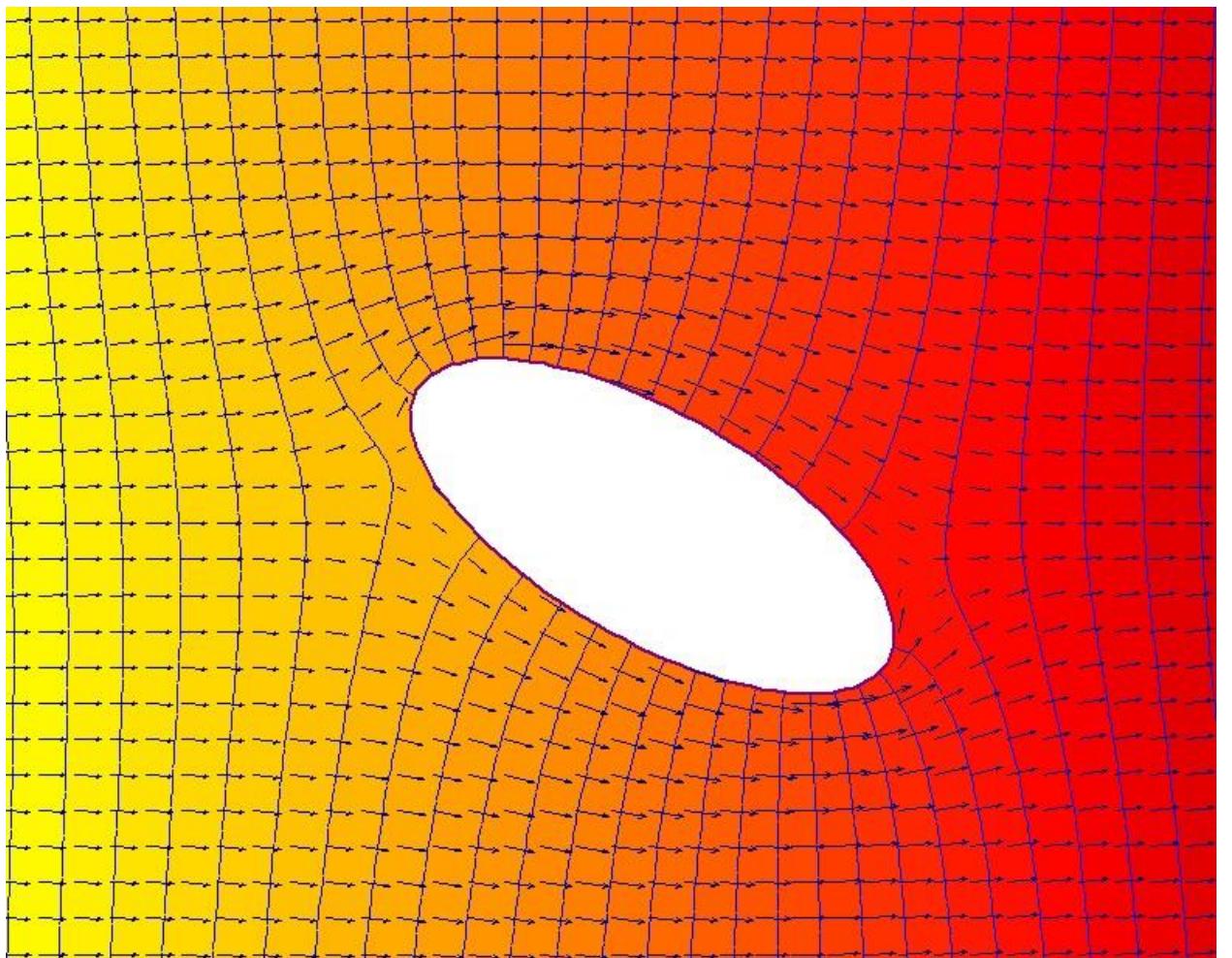


Рис. 1 Потенциал течения (линии  $\Phi = const$ ) и поле скорости (стрелки) вблизи границы обтекаемого тела

Компоненты скорости в каждом конечном элементе вычислялись по формулам (58):

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left\{ J_{22} (\hat{\Phi}_2 - \hat{\Phi}_1) - J_{21} (\hat{\Phi}_3 - \hat{\Phi}_1) \right\},$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left\{ -J_{12} (\hat{\Phi}_2 - \hat{\Phi}_1) + J_{11} (\hat{\Phi}_3 - \hat{\Phi}_1) \right\}.$$

Здесь  $\hat{\Phi}_i, i = 1, 2, 3$  -- значение искомой функции в узлах конечного элемента – вершинах треугольника.

**Задача 3.** Решить задачу (64) для потенциала. Вместо эллипса  $\gamma$  взять крыловской профиль. Посчитать и нарисовать распределение скорости  $u_s = \partial\Phi / \partial s$  и относительного давления  $p(s) = p_0 - u_s^2$  по контуру  $\gamma$  ( $ds$  - элемент дуги контура  $\gamma$ ,  $p_0 = \max u_s^2$ ).

#### 4.4.2. Моделирование лазерной термообработки

Лазерный луч как источник тепла при термообработке, сварке и резании твердых (кристаллических) тел характеризуется высокой концентрацией и глубоким проникновением энергии. В первом приближении такой источник тепла при воздействии на пластину можно считать линейным и не учитывать фазовые переходы. Тогда уравнение энергии после осреднения по толщине пластины и нормировки принимает вид рассмотренного нами выше безразмерного эволюционного уравнения (27) с подвижным точечным источником, в котором следует положить  $\vec{V} \equiv 0$ ,  $\lambda = 1$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla T - pT + \delta(x - x^*)\delta(y - y^*)Q. \quad (65)$$

Здесь параметр  $p$  моделирует интенсивность поверхностного охлаждения пластины, функции  $x^*(t)$ ,  $y^*(t)$  задают траекторию движения источника  $Q$ .

В качестве области расчета  $D$  выберем кольцо с центром в точке  $(0.5, 0.5)$ , внешним радиусом 0.5 и внутренним радиусом 0.25. Границу  $\Gamma$  этой области считаем теплоизолированной. При  $t = 0$  температура всюду в  $D$  равна нулю. Точечный нагреватель постоянной мощности  $Q$  движется по

окружности  $R = 0.35$  с постоянной линейной скоростью  $V = 20$ :  
 $x^* = 0.5 + R\cos\phi, y^* = 0.5 + R\sin\phi, \phi = Vt/R$ .

Интегральное тождество для полудискретизованного по времени уравнения (65) с естественными граничными условиями является частным случаем (30), (31):

$$(1 + \tau p) \int_D v T dD + \tau \int_D \nabla v \cdot \nabla T d\Gamma = \int_D v \bar{T} dD + \tau v(x^*, y^*) Q. \quad (66)$$

На основе этой обобщенной постановки задачи выписываются элементные вклады в систему МКЭ  $\mathbf{BT} = \mathbf{F}$ . Для каждого треугольника  $e_j, j=1..M$  сетки это матрицы масс  $\mathbf{M}^j$  (57) и жёсткости  $\mathbf{A}^j$  (59), порождаемые интегралами в левой части (66), а также вектор  $\overrightarrow{\mathbf{M}^j \bar{T}^j}$  от интеграла в правой части. Точечный источник в (66) порождает вклады в  $\mathbf{F}$  от единственного элемента  $e_{j*}$ , содержащего в текущий момент времени точку  $(x^*(t), y^*(t))$ , соответствующий элементный вектор имеет компоненты  $\tau Q \hat{\phi}_i(\xi^*, \eta^*), i=1,2,3$ , локальные координаты  $\xi^*, \eta^*$  вычисляются по координатам источника  $x^*, y^*$  по формуле (46). Матрица  $\mathbf{B}$  системы алгебраических уравнений  $\mathbf{BT} = \mathbf{F}$  собирается один раз, а правая часть  $\mathbf{F}$  -- на каждом временном слое. Соответственно, эта СЛАУ решается на каждом временном слое сеточной схемы.

Результаты решения задачи (66) в виде карты изотерм показаны на рис. 12. Левая картина соответствует началу процесса, когда значительная часть кольцевой пластины еще не прогрета. На правом рисунке представлено поле температуры на момент времени, когда источник тепла завершает оборот по окружности, а прогрев распространился на всю область расчета.

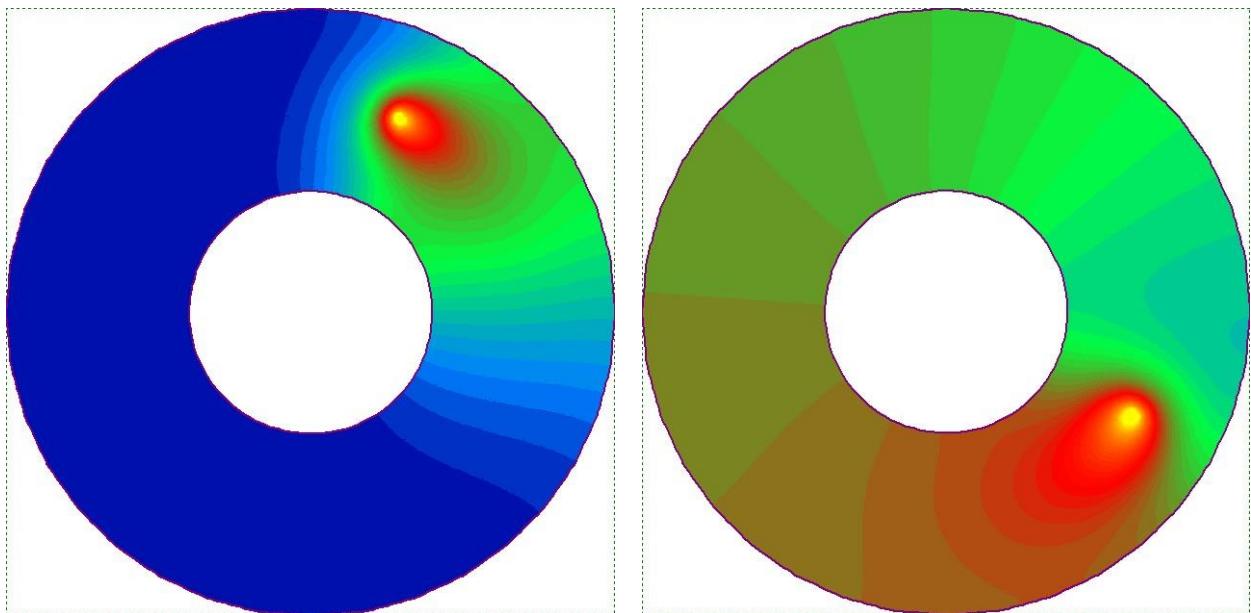


Рис. 12. Температурное поле от движущегося по окружности точечного источника на моменты времени  $t = 0.02$  (слева) и  $t = 0.1$ .

**Задача 4.** Решить задачу (66) для нестационарного температурного поля от движущегося нагревателя с использованием МКЭ на линейных треугольных элементах. Форму расчетной области и закон движения источника задать самостоятельно. Для построения сетки использовать программу «Gridgen», а для визуализации – программу «FEViewer». Создать мультфильм о динамике температурного поля при лазерной термообработке.

#### 4.4.3. Уравнения Навье-Стокса в преобразованных переменных

Плоское течение несжимаемой вязкой жидкости описывается функцией тока  $\psi$ , через которую выражаются компоненты скорости  $\vec{V}$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (67)$$

и завихренностью  $\omega$ , которая определяется формулой

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (68)$$

Решение задачи – пара функций  $\psi, \omega$  -- удовлетворяет безразмерной системе уравнений

$$\begin{aligned} -\Delta\psi &= \omega; \\ \frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\omega) &= \frac{1}{\text{Re}}\Delta\omega. \end{aligned} \quad (69)$$

Мы рассмотрим упрощенную модельную постановку задачи о течении в прямом прямоугольном канале высоты  $H$  и длины  $L$ , на осевой линии которого расположено тело  $\gamma$  -- круговой цилиндр единичного диаметра. На вход *In* ( $x = 0$ ) подается поток с равномерным единичным профилем скорости ( $u = 1, w = 0$ ). На непроницаемых горизонтальных стенках канала *Bot* ( $y = 0$ ) и *Top* ( $y = H$ ) пренебрегаем трением (условие свободного скольжения), а на поверхности цилиндра  $\gamma$  ставим условие прилипания. На выходном сечении канала *Out* ( $x = L$ ) ставится граничное условие свободного выхода жидкости. В первом приближении данные граничные условия можно записать следующим образом:

$$In, Bot, Top : \psi = y, \omega = 0.$$

$$\begin{aligned} \gamma : \psi &= \psi_\gamma = H/2, \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \\ Out : \frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\omega) &= 0; \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Особенность задачи Навье-Стокса в переменных  $\psi, \omega$  в том, что на обтекаемой поверхности  $\gamma$  нет физически содержательных граничных условий для вихря, зато ставятся два условия для функции тока, см. (70). При этом в нестационарных задачах значение  $\psi_\gamma$  постоянно вдоль контура  $\gamma$ , но, вообще говоря, зависит от времени. Для строгого определения граничного значения функции тока используется дополнительное нелокальное граничное условие

$$\int_{\gamma} \frac{\partial\omega}{\partial n} ds = 0, \quad (71)$$

численная реализация которого значительно усложняет задачу. Опыт многочисленных расчетов показал, что при условии геометрической симметрии, т.е. расположении цилиндра на оси канала  $y = H/2$ , относительные отклонения  $\psi_\gamma$  от половины расхода не превосходят долей процента, по крайней мере, при малых скоростях,  $Re \approx 10^2$ . Поэтому в данном параграфе учебного пособия мы принимаем постоянное значение  $\psi_\gamma = H/2$ .

Опишем метод решения задачи (67), (69), (70). Для уравнения переноса вихря записывается двухслойная полудискретизованная схема, явная по конвекции:

$$\omega - \frac{\tau}{Re} \Delta \omega = \bar{\omega} - \tau \nabla \cdot (\vec{V} \bar{\omega}) \quad (72)$$

Пусть на нижнем временном слое решение задачи – пара функций  $\bar{\psi}, \bar{\omega}$  -- найдено. Для перехода на текущий временной слой и определения решения  $\psi, \omega$  реализуется следующий алгоритм.

1. Решается задача для функции тока  $-\Delta \psi = \bar{\omega}$  с главным граничным условием  $\psi|_\gamma = \psi_\gamma$ .
2. Определяется поле скорости  $\vec{V} = (u, w)$ ,  $u = \partial \psi / \partial y$ ,  $w = -\partial \psi / \partial x$ .
3. Рассчитывается функция  $\omega_\gamma$  -- распределение вихря на границе -- как решение задачи  $\omega_\gamma = -\Delta \psi$  с естественным граничным условием  $\partial \psi / \partial n|_\gamma = 0$ .
4. Решается задача для завихренности (72) с граничным условием Дирихле  $\omega|_\gamma = \omega_\gamma$ .

Рассмотрим каждый пункт алгоритма более подробно.

Обобщенное решение для функции тока определяется интегральным тождеством

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \psi dD = \int_D v \tilde{\omega} dD \quad (73)$$

и главными граничными условиями *In,Top,Bot*:  $\psi = y$ ;  $\gamma : \psi = 0.5H$ .

Уравнение (73) порождает элементные матрицы жесткости  $\mathbf{A}^j = \{a_{sp}\}^j$ ,  $s, p = 1..3$  (59) и векторы сил  $\vec{F}^j = \mathbf{M}^j \tilde{\omega}^j$ , которые вычисляются с помощью матрицы масс  $\mathbf{M}^j = \{m_{sp}\}^j$ ,  $s, p = 1..3$  (55). Главные граничные условия учитываются с помощью коррекции глобальной системы МКЭ: в каждое уравнение  $i$ , соответствующее граничному узлу сетки  $i$  с заданным условием Дирихле  $\psi_i = f_i$ , на диагональ матрицы вместо  $a_{ii}$  ставится большое число  $B \gg 1$ , а правую часть – число  $B f_i$ .

2. Компоненты вектора скорости на каждом элементе  $e_j$  постоянны и вычисляются по формулам (58)

$$\begin{aligned} w^j &= -\frac{\partial \psi^j}{\partial x} = \frac{1}{|J^j|} (J_{21}(\psi_3 - \psi_1) - J_{22}(\psi_2 - \psi_1))^j, \\ u^j &= \frac{\partial \psi^j}{\partial y} = \frac{1}{|J^j|} (J_{11}(\psi_3 - \psi_1) - J_{12}(\psi_2 - \psi_1))^j. \end{aligned} \quad (74)$$

3. Граничное условие Дирихле для завихренности определяется на основе интегрального тождества

$$\int_D v \tilde{\omega} dD = \int_D \nabla v \cdot \nabla \psi dD,$$

в котором учтены однородные граничные условия Неймана. Левая часть этого уравнения порождает элементные матрицы масс  $\mathbf{M}^j$ , а правая часть – элементные векторы сил  $\vec{F}^j = \mathbf{A}^j \tilde{\psi}^j$ , где  $\mathbf{A}^j = \{a_{sp}\}^j$ ,  $s, p = 1..3$  – матрица жесткости конечного элемента  $e_j$ , а вектор  $\tilde{\psi}^j$  представлен узловыми значениями сеточной функции  $\psi$ , найденной в пункте. После поэлементной

сборки получается глобальная система уравнений вида  $\mathbf{M}\tilde{\omega} = \vec{F} = \mathbf{A}\vec{\psi}$ , решение которой – завихренность  $\tilde{\omega}$ . След этой функции на границе  $\gamma$  и есть искомое распределение  $\omega_\gamma$  завихренности, главное граничное условие для задачи (72).

4. Завихренность  $\omega$  на текущем временном слое определяется интегральным тождеством для уравнения (72)

$$\int_D v\omega dD + \frac{\tau}{Re} \int_D \nabla v \cdot \nabla \omega dD = \int_D v\bar{\omega} dD + \tau \int_D \nabla v \cdot (\vec{V}\bar{\omega}) dD \quad (75)$$

и граничными условиями I-го рода *In, Top, Bot*:  $\omega = y$ ;  $\gamma : \omega = \omega_\gamma$ , учитываемыми на матричном уровне. Интегралы в левой части (75) порождают элементные матрицы масс  $\mathbf{M}$  и жесткости  $\mathbf{A}$ . Первый член в правой части уравнения (75) порождает вектор нагрузок  $\mathbf{M}\vec{\omega}$ , а последний интеграл, содержащий конвекцию, порождает элементный вектор  $\mathbf{C}\vec{\omega}$  (62) с компонентами

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{C}\vec{\omega}})_1 &= \frac{\bar{\omega}}{2} [u(J_{21} - J_{22}) + w(J_{12} - J_{11})], \quad \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3}{3}; \\ (\overline{\mathbf{C}\vec{\omega}})_2 &= \frac{\bar{\omega}}{2} (uJ_{22} - wJ_{12}), \quad (\overline{\mathbf{C}\vec{\omega}})_3 = \frac{\bar{\omega}}{2} (-uJ_{21} + wJ_{11}), \end{aligned} \quad (76)$$

где компоненты  $u, v$  вектора скорости постоянны на каждом треугольнике и подсчитаны в пункте 2.

После поэлементной сборки получается система уравнений МКЭ

$$\left( \mathbf{M} + \frac{\tau}{Re} \mathbf{A} \right) \vec{\omega} = (\mathbf{M} + \tau \mathbf{C}) \bar{\omega},$$

которую необходимо решать на каждом временном слое.

Работа представленного вычислительного алгоритма демонстрируется на безразмерной задаче обтекания кругового цилиндра единичного диаметра, центр которого имеет координаты  $x_c = 10, y_c = 10$ . Ширина канала равна

$H = 20$ , длина  $L = 40$ . Число Рейнольдса  $Re = 100$ . Использовалась треугольная МКЭ-сетка со сгущением к обтекаемой поверхности  $\gamma$ . Число узлов сетки  $N=27385$ , число конечных элементов  $M=54329$ . Пространственный шаг (размер треугольных элементов) в пограничном слое  $\sim 0.04$ , шаг по времени  $\tau = 0.01$ .

Расчет начинался из состояния покоя. В начале моделирования наблюдался отрыв потока за телом с образованием пары симметричных замкнутых вихревых пузырей, внутри которых жидкость вращается по кольцевым траекториям. С течением времени эти рециркуляционные зоны удлинялись, их взаимная симметрия нарушалась, происходила потеря устойчивости течения, сопровождающаяся срывом вихревых сгустков с верхней и нижней щек цилиндра. К моменту  $t \sim 120$  устанавливается периодический режим обтекания тела с образованием вихревой дорожки Кармана в следе. Мгновенные линии тока (изолинии функции тока  $\psi$ ) и поле скорости  $\vec{V} = (u, w)$  вблизи цилиндра показаны на рис. 13.

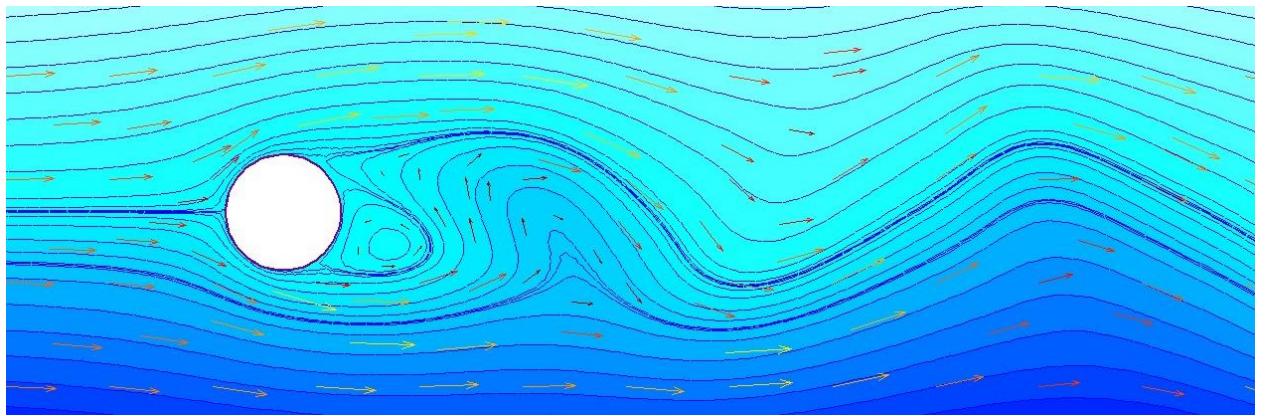


Рис. 13. Линии тока и векторное поле скорости при обтекании кругового цилиндра в режиме установившихся автоколебаний при  $Re = 100$

Вихревая дорожка Кармана изображена на рис. 14 с помощью изолиний функции завихренности  $\omega$  и визуализации невесомыми частицами «дыма», которые периодическими квантами выпускались с поверхности  $\gamma$ , а затем свободно переносились потоком. Оттенками красного цвета показаны области

$\omega > 0$  (вращение против хода часов), синим отмечена отрицательная завихренность.

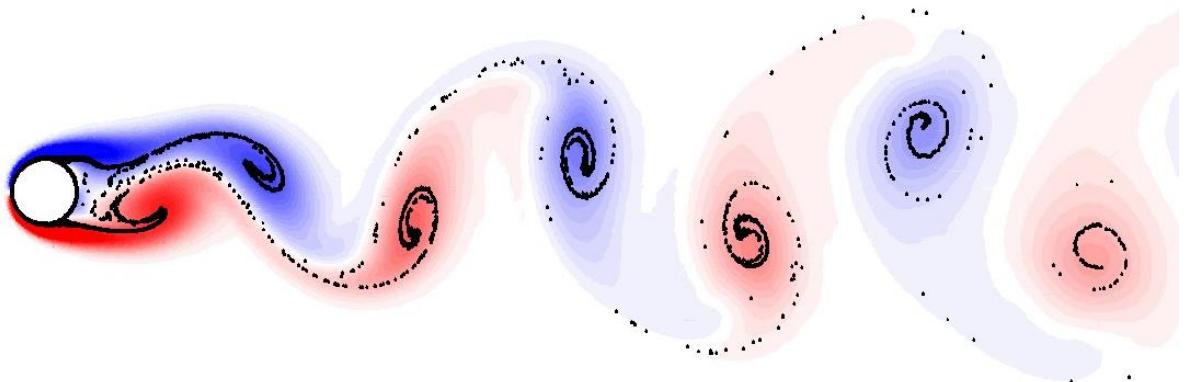


Рис. 14. Вихревая дорожка Кармана. Цветные изолинии завихренности и визуализация частицами «дыма» в режиме автоколебаний при  $Re = 100$

**Задача 5.** Решить задачу Навье-Стокса в уравнениях для функции тока и переноса завихренности с использованием МКЭ на линейных треугольных элементах. Провести моделирование отрывного обтекания затупленного цилиндрического тела (эллипс, прямоугольник, поперечная пластина). Для построения сетки использовать программу «Gridgen», а для визуализации – программу «FEViewer». Создать мультфильм о периодических колебаниях завихренности в дорожке Кармана.

## 5. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЙ БИЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

### 5.1. Сетка четырехугольных элементов

Пусть сетка состоит из четырехугольников, см. рис. 15.

Так же, как и на треугольной сетке, при построении схемы МКЭ на четырехугольной сетке удобно проводить операции дифференцирования и интегрирования на базисном элементе – квадрате, а для вычисления элементных векторов и матриц реальной сетки использовать матрицу преобразования координат.

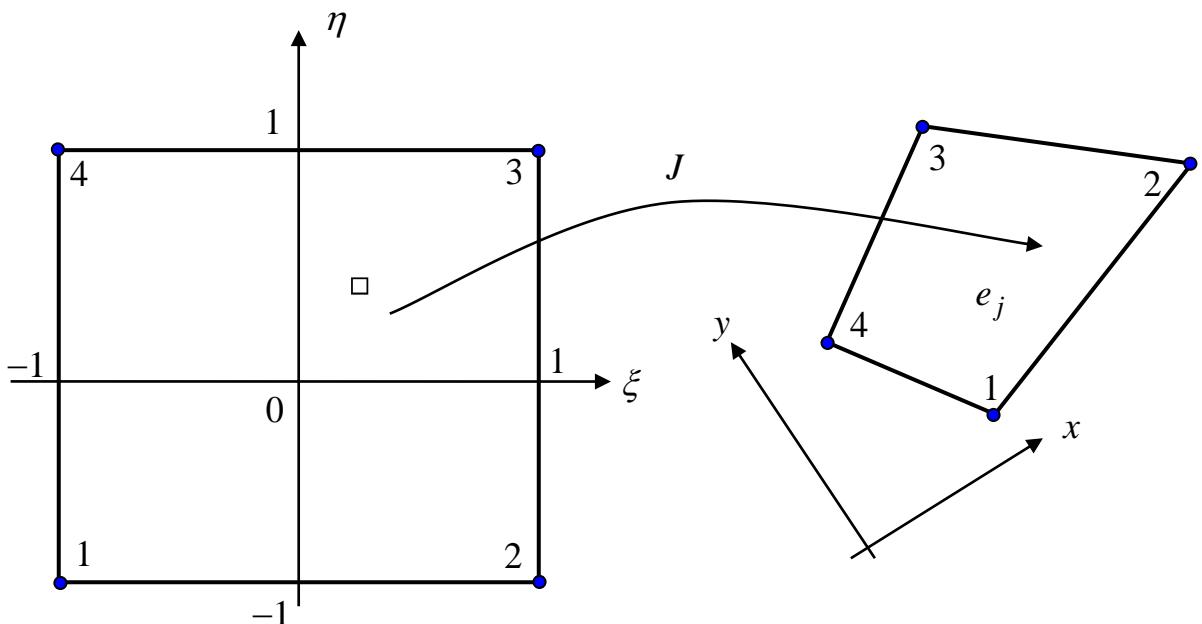


Рис. 15. Базисный квадрат и четырехугольный элемент сетки. Цифры 1,2,3,4 внутри элемента – локальная нумерация узлов

Введем в рассмотрение базисный элемент -- квадрат  $\square = [-1,1] \times [-1,1]$  со стороной длины 2 и локальной системой координат  $\xi, \eta$ . Определим преобразование актуальных координат  $x, y$  внутри четырехугольника  $e_j$  в локальные координаты  $\xi, \eta$ :

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad |J| = j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} \quad (77)$$

## 5.2. Билинейные базисные функции

На базисном квадрате  $\square$  введем базисные функции  $\hat{\phi}_i(\xi, \eta)$ ,  $i = 1..4$ , удовлетворяющие равенству  $\hat{\phi}_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_i^j$ , и выразим через них преобразование координат  $\square \rightarrow e_j$ :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i(\xi, \eta) x_i, \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{\phi}_i(\xi, \eta) y_i \quad (78)$$

Здесь  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1..4$  -- координаты вершин прямоугольника  $e_j$ .

В дальнейшем для упрощения выкладок знак « $\hat{}$ » над функциями, указывающий на принадлежность к базисному квадрату  $\square$  с локальными координатами  $\xi, \eta$ , часто будем опускать.

Функции  $\varphi_i(\xi, \eta)$  удобно строить с помощью линейных интерполянтов Лагранжа

$$L_1(\xi) = 0.5(1 - \xi), \quad L_2(\xi) = 0.5(1 + \xi), \quad (79)$$

которые принимают значения от 0 до 1 при изменении  $\xi$  от -1 до 1. Чтобы выполнить требование  $\varphi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_i^j$ , положим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= L_1(\xi) L_1(\eta), & \varphi_2 &= L_2(\xi) L_1(\eta), \\ \varphi_3 &= L_2(\xi) L_2(\eta), & \varphi_4 &= L_1(\xi) L_2(\eta). \end{aligned} \quad (80)$$

Дифференцирование (градиент  $\nabla_{xy}$ ) произвольной функции  $f(x, y)$  в актуальных координатах  $x, y$  выражается через градиент  $\nabla_{\xi\eta}\hat{f}(\xi, \eta)$  в локальных координатах  $\xi, \eta$  с помощью формулы вида (48):

$$\nabla_{xy} f = \left( J^{-1} \right)^T \nabla_{\xi\eta} \hat{f}, \quad \left( J^{-1} \right)^T = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{21} \\ -j_{12} & j_{11} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Для интегрирования используется формула, аналогичная (49):

$$\int_e f \, dxdy = \int_{\square} \hat{f} |J| \, d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{f} |J| \, d\xi d\eta \quad (82)$$

Принципиальное отличие соотношений (81) и (82) от соответствующих формул для треугольной сетки в том, что на четырехугольных элементах матрица преобразования координат  $J$  зависит от локальных координат  $\xi, \eta$ .

Вычислим элементы матрицы Якоби (77) с помощью формул (78) – (80).

$$\begin{aligned} j_{11} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \quad j_{12} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \quad j_{21} = \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \quad j_{22} = \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} &= L_1(\eta)L'_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} = L_1(\eta)L'_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} = L_2(\eta)L'_2, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} = L_2(\eta)L'_1, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} &= L_1(\xi)L'_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = L_1(\xi)L'_1, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} = L_2(\xi)L'_2, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} = L_2(\xi)L'_2; \\ L'_1 &= -0.5, \quad L'_2 = 0.5. \end{aligned} \quad (83)$$

Теперь можно подсчитать градиент (81) функции  $f$ , предварительно разложив  $\hat{f}$  по базису в  $\square$ , а именно, записав

$$\nabla_{\xi\eta} \hat{f} = \nabla_{\xi\eta} \sum_{i=1}^4 \hat{f}_i \varphi_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{f}_i \nabla_{\xi\eta} \varphi_i(\xi, \eta). \quad (84)$$

Сюда входят градиенты базисных функций  $\nabla_{\xi\eta} \varphi_i(\xi, \eta)$ . Чтобы вычислить их, подставим (79), (80) в (83). Получим

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_1 &= 0.25 [-(1-\eta), -(1-\xi)], \\ \nabla \varphi_2 &= 0.25 [(1-\eta), -(1-\xi)], \\ \nabla \varphi_3 &= 0.25 [(1-\eta), (1-\xi)], \\ \nabla \varphi_4 &= 0.25 [-(1-\eta), (1-\xi)]. \end{aligned} \quad (85)$$

Итак, формулы (84) и (85) определяют операцию дифференцирования на квадратном базисном конечном элементе. А подстановка (85) в (78) и затем в (77) позволяет найти все элементы матрицы Якоби. Например,

$$\begin{aligned}
j_{11} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + x_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + x_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} + x_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 \right\} = \\
&= \frac{1}{4} \left\{ (1-\eta)(x_2 - x_1) + (1+\eta)(x_3 - x_4) \right\}.
\end{aligned} \tag{86}$$

Точно также найдем

$$\begin{aligned}
j_{12} &= \frac{1}{4} \left\{ (1-\xi)(x_2 - x_1) + (1+\xi)(x_3 - x_4) \right\}, \\
j_{21} &= \frac{1}{4} \left\{ (1-\eta)(y_2 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_4) \right\}, \\
j_{22} &= \frac{1}{4} \left\{ (1-\xi)(y_4 - y_1) + (1+\eta)(y_3 - y_2) \right\},
\end{aligned} \tag{87}$$

### 5.3. Элементные векторы и матрицы

**Тестовая задача.** Вычисление элементных векторов и матриц для сетки из прямоугольных элементов, сборку из них системы уравнений МКЭ проиллюстрируем на тестовой задаче Дирихле для уравнения теплопроводности

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla u) + pu = f, \quad x, y \in D; \quad u|_{\Gamma} = u_{\Gamma}. \tag{88}$$

Интегральное тождество для этого уравнения получается, как и прежде, с помощью умножения (88) на пробную функцию  $v(x, y)$  и интегрирования по области  $D$  с «переброской» градиента на  $v$  по теореме Гаусса-Остроградского. Получаем

$$\int_D \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy + \int_D pu v \, dx dy = \int_D f v \, dx dy \tag{89}$$

**Границные условия Дирихле.** В равенстве (89) нет производных по границе  $\Gamma$ , поскольку там задано главное граничное условие, и пробная функция  $v$  равна нулю. Сами граничные условия Дирихле  $u|_{\Gamma} = u_{\Gamma} = 0$  будут учтены позже точно так же, как это делалось ранее для МКЭ на треугольной

сетке: с помощью коррекции полученной матрицы и правой части системы МКЭ  $\mathbf{B}\vec{u} = \vec{F}$ . На диагональ строк  $i$  матрицы  $\mathbf{B}$ , соответствующих номерам граничных узлов сетки, записывается большое число  $C \gg \max_{1 \leq j \leq N} |b_{ij}|$ , а соответствующая компонента вектора правой части заменяется на  $Cu_\Gamma$ .

Покроем область  $D$  сеткой четырехугольных билинейных элементов и на основе интегрального тождества (89) построим схему МКЭ, т.е. СЛАУ. Алгоритм точно такой же, как на треугольной сетке. Для простоты будем считать  $\lambda, p = const$ . Заменив интеграл по области суммой интегралов по элементам и разлагая функции  $u$  и  $v$  по базису каждого элемента, получим следующие результаты.

**Матрица жесткости.** Из первого интеграла в левой части (89) получится матрица жесткости  $\mathbf{A}$  (символически этот переход обозначим стрелкой  $\rightarrow$ ):

$$\begin{aligned} \lambda \int_e \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy &\rightarrow \sum_{j=1}^4 a_{ij} u_j \\ a_{ij} &= \lambda \int |J| \left( J^{-1} \right)^T \nabla \varphi_i \cdot \left( J^{-1} \right)^T \nabla \varphi_j \, d\xi d\eta = \\ &= \lambda \int \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{21} \\ -j_{12} & j_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \varphi_i / \partial \xi \\ \partial \varphi_i / \partial \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{21} \\ -j_{12} & j_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \varphi_j / \partial \xi \\ \partial \varphi_j / \partial \eta \end{pmatrix} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (90)$$

Распишем скалярное произведение под интегралом в последнем равенстве:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{c} j_{22} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} - j_{21} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \\ -j_{12} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + j_{11} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} j_{22} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} - j_{21} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \\ -j_{12} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + j_{11} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \end{array} \right) = \\
& = A_{ij} \left( j_{22}^2 + j_{12}^2 \right) + B_{ij} \left( j_{11}^2 + j_{21}^2 \right) - C_{ij} \left( j_{22} j_{21} + j_{11} j_{12} \right), \quad (91) \\
& A_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \quad B_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \quad C_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

Подставим выражения (91) в определение (90) и получим формулу для коэффициентов матрицы жесткости  $\mathbf{A}^s$  конечного элемента  $e_s$  (индекс  $s$ , как и прежде, часто будем опускать)

$$a_{ij} = \int \frac{\lambda}{|J|} \left\{ A_{ij} \left( j_{22}^2 + j_{12}^2 \right) + B_{ij} \left( j_{11}^2 + j_{21}^2 \right) - C_{ij} \left( j_{22} j_{21} + j_{11} j_{12} \right) \right\} d\xi d\eta \quad (92)$$

**Матрица масс.** Второй интеграл в левой части интегрального тождества (89) порождает элементную матрицу масс  $\mathbf{M}^s$ :

$$\begin{aligned}
& \int_D p u v \, dx dy \rightarrow p \sum_{j=1}^4 m_{ij} u_j; \\
& m_{ij} = \int_{\square} |J| \varphi_i \varphi_j \, d\xi d\eta. \quad (93)
\end{aligned}$$

Из интеграла в правой части интегрального тождества (89) получится такая же матрица масс, если разложить функцию  $f$  по базису:

$$\int_D f v \, dx dy \rightarrow \sum_{j=1}^4 m_{ij} f_j \quad (94)$$

После поэлементной сборки получается глобальная система МКЭ для тестовой задачи (88)

$$\mathbf{B} \vec{u} = (\mathbf{A} + p \mathbf{M}) \vec{u} = \vec{\mathbf{M}} \vec{f} = \vec{F}. \quad (95)$$

Границные условия Дирихле учитываются на уровне коррекции матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора  $\vec{F}$ , как это оговорено выше.

Глобальные вектора и матрицы СЛАУ (95) получаются «суммированием» элементных векторов и матриц. Как и прежде, «суммирование» означает добавление элементного вклада  $b_{ij}, i, j \in [1..4]$ , полученного на конечном элементе  $e^s, s = 1..M$ , к глобальной матрице  $\mathbf{B}$  в позицию, определенную индексами строки  $n_i$  и столбца  $n_j$ ; эти глобальные индексы берутся из строки  $s$  таблицы связности, определяющей сетку МКЭ.

**Численное интегрирование.** Осталось рассмотреть вопрос о вычислении интегралов в выражениях (92) и (93) для коэффициентов матриц жесткости и масс. Точные вычисления, как в случае треугольных элементов, слишком громоздки, поэтому обычно применяют квадратурные формулы численного интегрирования. Известно много таких формул разной точности, причем точность понимается как совпадение приближенного значения интеграла с истинным, если подынтегральное выражение есть полином заданной или меньшей степени. Иногда можно применять простейшую формулу

$$\int_{\square} \hat{f} d\xi d\eta \approx |\square| \frac{\hat{f}(-1, -1) + \hat{f}(1, -1) + \hat{f}(-1, 1) + \hat{f}(1, 1)}{4} = \\ = f(-1, -1) + f(1, -1) + f(-1, 1) + f(1, 1).$$

Здесь  $|\square| = 4$  -- площадь базисного квадрата. Но данная формула, как правило, слишком груба; следует оценить степень полинома в подынтегральном выражении, и выбрать квадратурную формулу, которая точна на полиномах соответствующей степени. Например, коэффициенты матрицы масс (93) суть интегралы от полиномов четвертой степени.

В большинстве случаев достаточно использовать 6-узловую формулу

$$\int_{\square} f d\xi d\eta \approx \sum_{k=1}^6 W_k f(\xi_k, \eta_k) \quad (96)$$

в которой координаты точек интегрирования  $\xi_k, \eta_k$  и веса  $W_k$  представлены в таблице.

K	$\xi_k$	$\eta_k$	$W_k$
1	0	0.934172358962716	0.491365692888926e0/4
2	0	-0.356822089773090	0.128641208488885e1/4
3	0.774596669241483	0.390885162530070	0.761883709085613e0/4
4	-0.774596669241483	0.390885162530070	0.761883709085613e0/4
5	0.774596669241483	-0.852765377881771	0.349227402025498e0/4
6	-0.774596669241483	-0.852765377881771	0.349227402025498e0/4

Для иллюстрации работы МКЭ на сетке билинейных элементов, использования в расчетах матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{M}$  представим на рис. 16 результаты тестового расчета для задачи (88) при

$$p = 0, \lambda = 1, u|_{\Gamma} = U|_{\Gamma},$$

$$U(x, y) = \sin(\omega\pi x) + \cos(\omega 2\pi y),$$

$$f(x, y) = (\omega\pi)^2 [\sin(\omega\pi x) + 4\cos(\omega 2\pi y)], \omega > 0.$$

Здесь  $U$  -- точное решение задачи (88), в чем легко убедиться подстановкой.

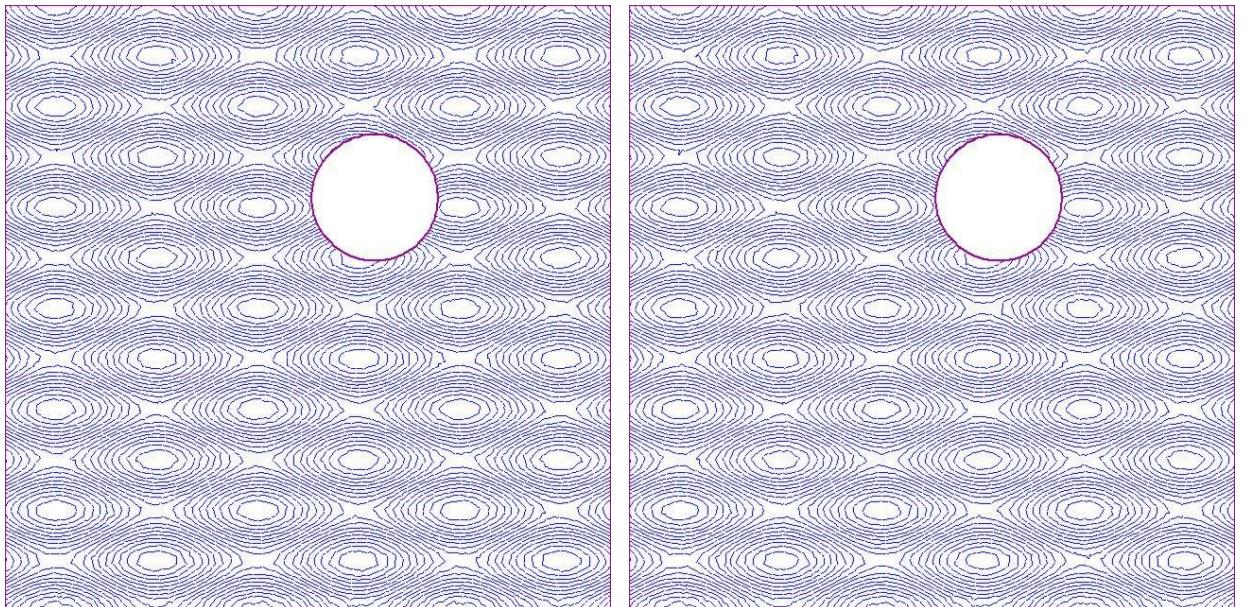


Рис. 16. Численное решение, полученное МКЭ на сетке из 5652 билинейных элементов (слева) в сравнении с точным решением задачи (справа)

**Матрица конвекции.** Отдельно рассмотрим сеточную аппроксимацию на сетке билинейных элементов конвективной производной  $\vec{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\vec{V}T)$ ,  $\vec{V} = (u, w)$ ,  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ .

Согласно формулам (40) после триангуляции области и введения базисных функций  $\varphi_i, i = 1..m$  на каждом конечном элементе вклад систему МКЭ от конвективного члена выражается интегралом

$$\int_e \nabla v \cdot (\vec{V} \vec{T}) dD = \left( \vec{v}, \mathbf{C} \vec{T} \right)_m, \quad \mathbf{C} = \{c_{ps}\}, c_{ps} = \int_e \varphi_s \vec{V} \cdot \nabla \varphi_p dD. \quad (97)$$

Такая форма вклада оправдана, если вектор скорости либо не зависит от времени (не меняется при переходе на новый временной слой), либо в пределах элемента не зависит от координат. В первом случае коэффициенты  $c_{sp}$  вычисляются так, как записаны, один раз. Во втором случае (выше был рассмотрен пример  $\vec{V} = (\partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x)$  на треугольной сетке с линейным базисом для  $\psi$ ) скорость выносится из-под знака интеграла, и коэффициенты матрицы  $\mathbf{C}$  на каждом элементе записываются в виде

$$c_{ps} = \vec{V} \cdot \int_e \varphi_s \nabla \varphi_p dD = u \int_e \varphi_s \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} dD + w \int_e \varphi_s \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} dD, \quad s, p = 1..m$$

где интегралы в правой части достаточно подсчитать один раз.

В более общем случае четырехугольных билинейных элементов ( $m = 4$ ) избавится от интегрирования при каждом пересчете матрицы  $\mathbf{C}$  можно, представив скорость в виде разложения по базису  $\vec{V} = \sum_{k=1}^{m=4} \vec{V}_k \varphi_k$  и записав

$$c_{ps} = \sum_{k=1}^m \vec{V}_k \cdot \int_e \varphi_s \varphi_k \nabla \varphi_p dD \equiv \sum_{k=1}^m \vec{V}_k \cdot \vec{\Phi}_{skp}, \quad (98)$$

$$\vec{\Phi}_{skp} = (\Phi_{skp}^x, \Phi_{skp}^y); \quad \Phi_{skp}^x = \int_e \varphi_s \varphi_k \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} dD, \quad \Phi_{skp}^y = \int_e \varphi_s \varphi_k \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} dD$$

Интегралы в этих формулах – тензоры третьего ранга, симметричные по первым двум индексам, достаточно вычислить для каждого элемента  $e$  один раз. Приведём формулы этих вычислений с использованием базисного квадрата  $\square$ , локальных базисных функций  $\hat{\phi}_i(\xi, \eta)$  и матрицы преобразования координат  $J$ . Согласно формулам (81), (82)

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{skp} &= \int_{\square} |J| \hat{\phi}_s \hat{\phi}_k \left( J^{-1} \right)^T \nabla_{\xi\eta} \hat{\phi}_p d\xi d\eta = \\ &= \int_{\square} \hat{\phi}_s \hat{\phi}_k \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{21} \\ -j_{12} & j_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \hat{\phi}_p / \partial \xi \\ \partial \hat{\phi}_p / \partial \eta \end{pmatrix} d\xi d\eta, \\ \Phi_{skp}^x &= \int_{\square} \hat{\phi}_s \hat{\phi}_k \left( j_{22} \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \xi} - j_{21} \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta, \\ \Phi_{skp}^y &= \int_{\square} \hat{\phi}_s \hat{\phi}_k \left( -j_{12} \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \xi} + j_{11} \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta\end{aligned}\tag{99}$$

Базисные функции  $\hat{\phi}_i(\xi, \eta)$  определены формулами (79), (80), их производные – выражениями (85), а для подсчета элементов матрицы  $J$  следует пользоваться формулами (86), (87). Для вычисления интегралов (99) требуется применять квадратурные формулы, например, (96). Еще раз подчеркнем, что тензоры третьего ранга (99) вычисляются один раз после построения сетки, а в ходе решения задачи на каждом временном слое определяются элементные матрицы конвекции (98)

$$c_{ps} = \sum_{k=1}^m \left( u_k \Phi_{skp}^x + w_k \Phi_{skp}^y \right), \quad p, s = 1..m\tag{100}$$

Здесь  $u_k, w_k$  – узловые значения компонент скорости на конечном элементе.

### **Границные условия III-го рода**

$$(x, y) \subset \Gamma: \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u + \beta$$

при аппроксимации МКЭ на билинейных элементах порождают матрицу  $\Lambda = \{\alpha_{ij}\}, i, j = 1..4$  и соответствующий элементный вектор с компонентами

$$(\overrightarrow{\Lambda u})_i = \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} u_j, i = 1..4. \text{ Коэффициенты матрицы } \Lambda \text{ определяются точно так}$$

же, как для приграничных треугольных элементов, см. рис. 8 и соотношения (38). По аналогии с (60) запишем следующие формулы. Если  $i, k$  -- локальные номера двух вершин четырехугольника  $e$ , образующих граничную сторону  $i - k$  длиной  $\ell$ , то в элементной матрице  $\Lambda$  от нуля отличны 4 коэффициента

$$\alpha_{ii} = \alpha_{kk} = \frac{\ell}{3}, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{\ell}{6}, \quad \ell = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}. \quad (101)$$

При этом в правую часть системы МКЭ добавится элементный вектор  $\vec{\beta}$  длиной  $m=4$  с двумя ненулевыми компонентами  $\beta_i = \beta_k = 0.5\ell\beta$ , см. (41).

## **5.4. Примеры применения МКЭ на билинейных элементах**

### **5.4.1. Вычисление производных от сеточного решения в узлах сетки**

Во многих задачах ВГ интерес представляют не только узловые значения функции, но и ее производные в узлах. Приведем только два важных примера.

1. Уравнения Навье-Стокса в преобразованных переменных, когда решается уравнение Пуассона для функции тока, а поле скорости определяется через её производные. Аналогичная ситуация возникает при расчете потенциальных течений.
2. При моделировании разработки залежей нефти решается уравнение пьезопроводности для давления, а скорость фильтрации вычисляется как величина, пропорциональная градиенту давления.

Непосредственное дифференцирование применимо, если интересуют значения не в узлах, а в центрах элементов, однако следует учитывать, что и в этом случае точность снижается на порядок. Если же интересует все поле

градиента, дифференцирование может давать большие ошибки (градиент сеточного решения терпит разрыв на границе между элементами). В связи с этим рассмотрим следующую процедуру вычисления поля производных в МКЭ на сетке из четырехугольников.

Пусть задана  $u = (u_1, \dots, u_N)$  - сеточная функция со значениями в узлах МКЭ-сетки 4-угольных билинейных элементов. Требуется найти вектор

$$\vec{g} = (g^x, g^y) \approx \nabla u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y) \quad (102)$$

Для решения этой задачи запишем интегральное тождество

$$\int_D \vec{g} v dx dy = \sum_{j=1}^M \int_{e_j} \vec{g} v dx dy = \sum_{j=1}^M \int_{e_j} \nabla u v dx dy$$

Интегралы по элементам вычислим с помощью базисного квадрата в локальных координатах  $\xi, \eta$ . Пользуясь формулами (93), (94), получим

$$\begin{aligned} \int_e \vec{g} v dx dy &\rightarrow \sum_{j=1}^4 m_{ij} \vec{g}_j, \quad m_{ij} = \int_{\square} |J| \varphi_i \varphi_j d\xi d\eta, \\ \int_e \nabla u v dx dy &\rightarrow \sum_{j=1}^4 \vec{F}_{ij} u_j, \\ \vec{F}_{ij} &= \int_{\square} \frac{\varphi_i}{|J|} \begin{pmatrix} j_{22} & -j_{21} \\ -j_{12} & j_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \varphi_j / \partial \xi \\ \partial \varphi_j / \partial \eta \end{pmatrix} d\xi d\eta = (F_{ij}^x, F_{ij}^y), \\ F_{ij}^x &= \int_{\square} \varphi_i \left[ j_{22} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} - j_{21} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta, \\ F_{ij}^y &= \int_{\square} \varphi_i \left[ j_{11} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} - j_{12} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (103)$$

Для вычисления интегралов применяем те же квадратурные формулы вида (96), что и при формировании матриц системы МКЭ. После сборки получаем две СЛАУ:

$$\mathbf{M}\vec{g}^x = \sum_{j=1}^N M_{ij} g_j^x = \sum_{j=1}^N F_{ij}^x u_j = \mathbf{F}^x \vec{u}, \quad (104)$$

$$\mathbf{M}\vec{g}^y = \sum_{j=1}^N M_{ij} g_j^y = \sum_{j=1}^N F_{ij}^y u_j = \mathbf{F}^y \vec{u}$$

где матрицы  $\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$  и  $\mathbf{F}^x = \{F_{ij}^x\}$ ,  $\mathbf{F}^y = \{F_{ij}^y\}$  получены «суммированием» элементных матриц (103).

Решение задач (104) дает искомые производные в узлах МКЭ-сетки. Результаты тестового решения показаны на рис. 12. для функции  $u = \sin 3\pi x + \cos 6\pi y$ ,  $g^x = 3\pi \cos 3\pi x$ ,  $g^y = -6\pi \cos 6\pi y$  в единичном квадрате с двумя вырезами.

Хотя на карте изолиний заметна погрешность численного решения, величина этой погрешности невелика, что наглядно демонстрирует рис. 18 для функции  $g^x$ .

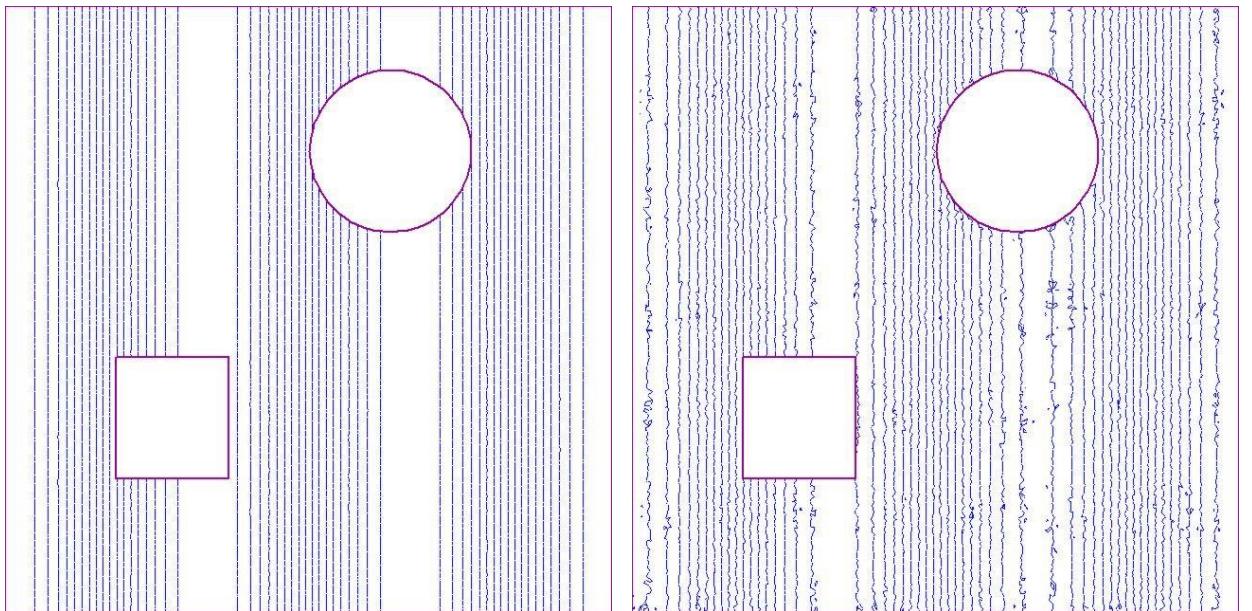


Рис. 17. Производная  $g^x(x, y)$  как решение задачи (99) и точное поле этой величины (слева)

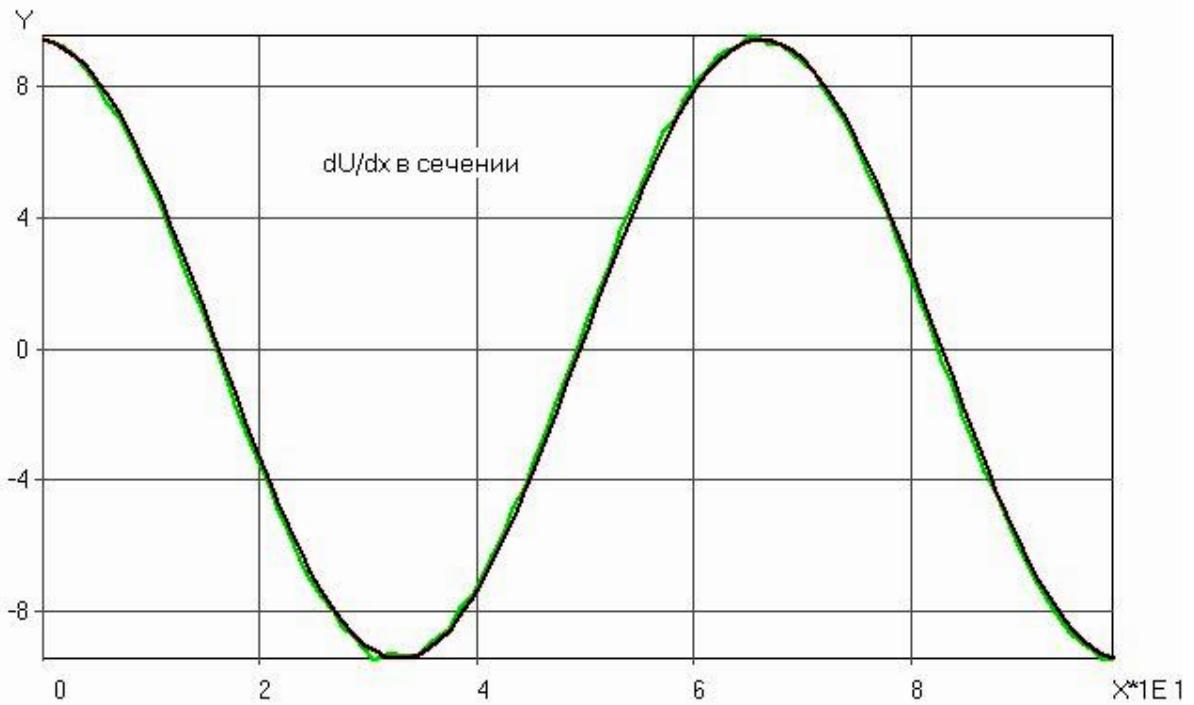


Рис. 18. Производная  $g^x$  в сечении  $y = \text{const}$  как решение задачи (104) и точная функция  $g^x = 3\pi \cos 3\pi x$ .

#### 5.4.2. Задача Навье-Стокса в преобразованных переменных

В параграфе 4.4.3 была рассмотрена постановка двумерной задачи вязкого обтекания цилиндрического тела несжимаемой жидкостью в переменных «функция тока  $\psi$  -- вихрь  $\omega$ ». Был также предложен упрощенный алгоритм решения этой задачи на треугольной МКЭ-сетке с линейными базисными функциями, см. стр. 52. Один из недостатков данного подхода к решению задачи связан с использованием треугольной сетки вблизи обтекаемой поверхности  $\gamma$ . Опыт вычислений показывает, что при этом распределение завихренности  $\omega_\gamma(s)$  по контуру имеет заметные осцилляции, отражающие форму приграничных треугольников. Аналогичные недостатки свойственны и полю скорости в пограничном слое. Поэтому целесообразно использовать МКЭ-сетку, составленную из четырехугольников на границе. Пример гибридной сетки с указанными свойствами для задачи обтекания кругового цилиндра показан на рис. 19. Сетка содержит  $N \approx 20000$  узлов; минимальный шаг сетки в пограничном слое равен 0.03.

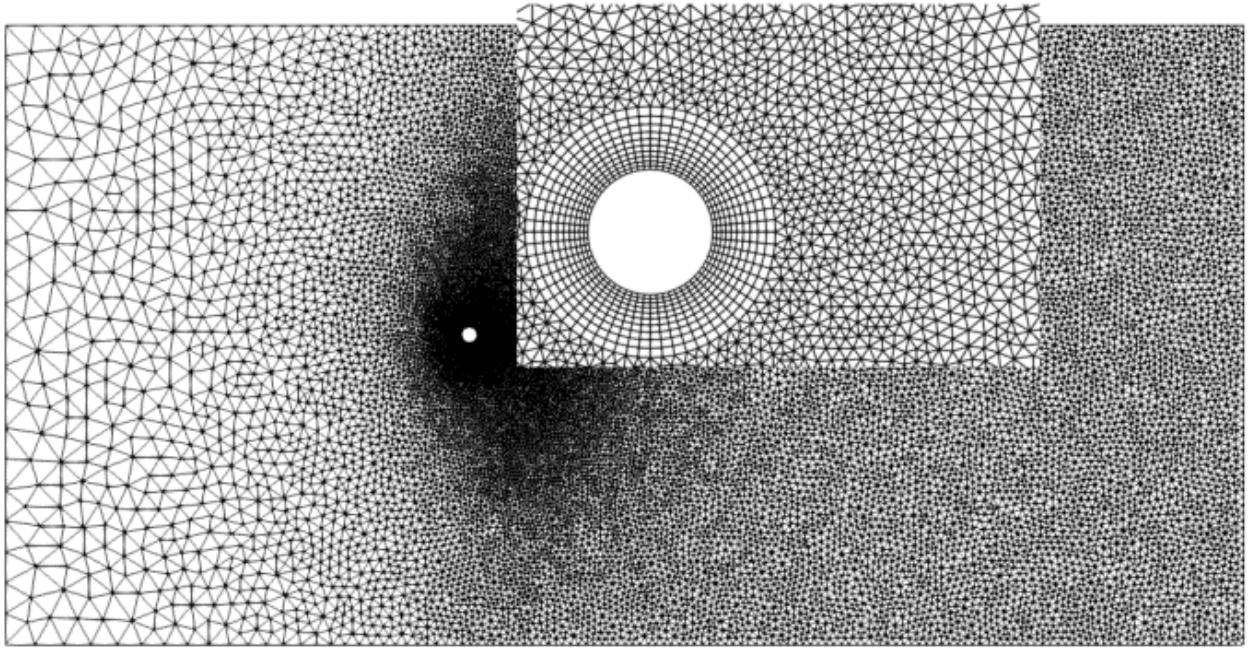


Рис. 19. Гибридная сетка для задачи Навье-Стокса. Четырехугольные билинейные элементы в окрестности обтекаемой поверхности  $\gamma$  и неструктурированная треугольная сетка в основной области

Другим недостатком представленного метода является то, что давление  $p$  исключено из постановки задачи « $\psi - \omega$ ». Это затрудняет вычисление главных аэродинамических характеристик взаимодействия тела с потоком: коэффициентов сопротивления

$$C_x = C_x^p + C_x^f, \\ C_x^p = -2 \int_{\gamma} p(s) \cos(\vec{n}, \vec{x}) ds, \quad C_x^f = \frac{2}{Re} \int_{\gamma} \omega(s) \cos(\vec{s}, \vec{x}) ds \quad (105)$$

и подъёмной силы

$$C_y = C_y^p + C_y^f, \\ C_y^p = -2 \int_{\gamma} p(s) \cos(\vec{n}, \vec{y}) ds, \quad C_y^f = \frac{2}{Re} \int_{\gamma} \omega(s) \cos(\vec{s}, \vec{y}) ds \quad (106)$$

Эти коэффициенты складываются из коэффициентов трения  $C_{x,y}^f$ , вычисляемых по распределению вихря  $\omega_{\gamma}(s)$  по поверхности, и коэффициентов давления  $C_{x,y}^p$ , определяемых по  $p_{\gamma}(s)$ . Множитель 2 в

формулах (105), (106) обусловлен тем, что безразмерные напряжения в модели Навье-Стокса вводится как актуальные напряжения, нормированное на скоростной напор  $\rho u_0^2$  входного потока, а безразмерные коэффициент сопротивления определяются как плотность силы ( $\text{Н}/\text{м}^2$ ), нормированная на величину кинетической энергии  $\rho u_0^2 / 2$ .

В задаче « $\psi - \omega$ » недостающую функцию  $p_\gamma(s)$ , входящую в функционалы (105), (106) можно определить с помощью уравнений Навье-Стокса в т.н. естественных переменных «скорость  $\vec{V} = (u, w)$  -- давление  $p$ »

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta w - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \nabla \cdot \vec{V} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.\end{aligned}\quad (107)$$

Если записать уравнения импульсов (107) вблизи обтекаемой поверхности  $\gamma$  с внешней нормалью  $n$  и касательной  $s$ , на которой задано условие прилипания  $\vec{V} = 0$ , то получим локальные равенства

$$(x, y) \rightarrow \gamma: \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (108)$$

в которых  $u$  -- касательная, а  $w$  -- нормальная компонента скорости. Определение завихренности и уравнение неразрывности в локальных координатах  $s, n$  имеют вид

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial s}; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial n}.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2};$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = -\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

и подставим результат в (108). Получим т.н. уравнения Пирсона

$$\gamma: \quad \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial s}. \quad (109)$$

Они используются для расчета функций  $p$  и  $\omega$  на обтекаемой границе  $\gamma$ .

Для постановки задачи « $u-w-p$ » (107) второе уравнение (109) можно использовать для подсчета распределения завихренности  $\omega(s)$  на контуре  $\gamma$ , а в задаче « $\psi - \omega$ » распределение давления по поверхности определяется с помощью первого уравнения Пирсона:

$$\gamma: \quad p(s) = p_0 - \frac{1}{Re} \int_0^s \frac{\partial \omega}{\partial n} ds, \quad (110)$$

где в качестве нуля можно взять любую точку контура, а константу  $p_0$  положить равной нулю, ибо постоянная не влияет на интегральные показатели  $C_x, C_y$ . Если контур замкнутый, то, совместив начальную точку интегрирования с конечной, из (110) получаем равенство (71) – нелокальное граничное условие, определяющее значение функции тока  $\psi$  на  $\gamma$ . Для вычислений по формуле (110) необходимо заранее подсчитать нормальную производную завихренности на границе. Непосредственное дифференцирование сеточной функции  $\omega$  привнесло бы в схему погрешность, поэтому вычисление производной  $g = \partial \omega / \partial n$  на  $\gamma$  проведём на основе уравнения (72) для завихренности на текущем временном слое. Умножим его на пробную функцию  $v$  и проинтегрируем по области  $D$ , не требуя равенства  $v|_{\gamma} = 0$ . Получим интегральное тождество

$$\int_D \left( v \omega + \frac{\tau}{\text{Re}} \nabla v \cdot \nabla \omega \right) dD - \int_{\gamma} v \frac{\partial \omega}{\partial n} d\zeta = \int_D \left( v \bar{\omega} + \tau \nabla v \cdot \vec{V} \bar{\omega} \right) dD$$

В нем функции  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\vec{V}$  уже вычислены, а искомой является функция  $g = \partial \omega / \partial n|_{\gamma}$ . После триангуляции области и применения стандартных преобразований МКЭ получаем систему алгебраических уравнений вида

$$\boldsymbol{\Lambda} \vec{g} = \left( \mathbf{M} + \frac{\tau}{\text{Re}} \mathbf{A} \right) \vec{\omega} + (\mathbf{M} + \tau \mathbf{C}) \vec{\bar{\omega}}, \quad (111)$$

в которой матрицы масс  $\mathbf{M}$ , жесткости  $\mathbf{A}$ , матрица граничного условия III-го рода  $\boldsymbol{\Lambda}$  и матрица конвекции  $\mathbf{C}$  составлены из вкладов приграничных элементов. Формулы вычисления коэффициентов элементных матриц для четырехугольных билинейных элементов представлены в параграфе 5.3. Решение СЛАУ (111) даёт значения нормальной производной  $g = \partial \omega / \partial n$  в граничных узлах сетки на контуре  $\gamma$  и может использоваться для подсчета давления  $p(s)$  в формуле (110) и, далее, для определения коэффициентов сопротивления и подъёмной силы  $C_{x,y}^p$  (105), (106).

Что касается самого алгоритма численного решения задачи « $\psi - \omega$ » на каждом временном слое, то использование гибридной сетки с включением четырехугольных билинейных элементов не меняет принципиальную вычислительную схему, изложенную на стр. 52. Пункты 1 – 4 этого алгоритма модифицируются с учетом формул параграфа 5.3 для элементных векторов и матриц для билинейных конечных элементов.

Функция тока определяется как решение СЛАУ  $\mathbf{A}\psi = \mathbf{M}\bar{\omega}$ , в котором глобальная матрица жесткости  $\mathbf{A}$  собирается из элементных матриц (91), (92), а матрица масс  $\mathbf{M}$  – из элементных матриц (93). Система уравнений корректируется для учета главных граничных условий  $In, Top, Bot : \psi = y$ ;  $\gamma : \psi = 0.5H$ .

2. Компоненты вектора скорости на каждом билинейном элементе зависят от координат и вычисляются по формулам (81)

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left( J_{21} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - J_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \quad (112)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left( J_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - J_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right).$$

Входящие в эти выражения производные функции  $\psi$  определены через производные базисных функций  $\nabla \psi = \sum_{i=1}^4 \psi_i \nabla \hat{\phi}_i$  (84), а последние вычисляются по формулам (85). Коэффициенты матрицы Якоби  $J$  в (112) определены выражениями (87)

3. Для постановки граничного условия Дирихле для завихренности решается система уравнений  $\mathbf{M}\tilde{\omega} = \mathbf{A}\vec{\psi}$ , и след функции  $\tilde{\omega}$  на границе  $\gamma$  есть искомое распределение  $\omega_\gamma(s)$ . Матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$  в этой системе те же, что в пункте 1, но они не модифицируются условиями Дирихле, с учетом которых был найден вектор  $\vec{\psi}$ .

4. Завихренность  $\omega$  на текущем временном слое определяется системой алгебраических уравнений  $(\mathbf{M} + \tau \text{Re}^{-1} \mathbf{A})\vec{\omega} = (\mathbf{M} + \tau \mathbf{C})\vec{\omega}$ , которая модифицируется для учёта граничных условий I-го рода  $In, Top, Bot : \omega = y; \gamma : \omega = \omega_\gamma$ . Матрицы масс  $\mathbf{M}$  и жесткости  $\mathbf{A}$  те же, что и раньше, а матрица конвекции  $\mathbf{C}$  зависит от скорости  $\vec{V}$  и собирается из элементных вкладов (100), (99), (87)..

Для вычисления элементных вкладов применяется квадратурная формула (96).

При необходимости по найденному решению – паре функций  $\psi, \omega$  -- подсчитываются аэродинамические коэффициенты  $C_x, C_y$  (105), (106). Для этого предварительно решается задача (111) для нормальной производной

$g(s) = \partial\omega/\partial n$  и определяется распределение давления  $p(s)$  по границе тела (110).

Упрощенный алгоритм 1 - 4 позволяет получить достоверное решение лишь в том случае, когда значение функции тока  $\psi_\gamma(t)$  на обтекаемой поверхности  $\gamma$  может быть задано и использоваться как граничное условие  $\psi|_\gamma = \psi_\gamma$  (70) для задачи (69)  $-\Delta\psi = \omega$ . В общем случае (сильная нестационарность, отсутствие симметрии) эта величина подлежит определению на основе нелокального граничного условия (71). Алгоритм решения задачи на текущем временном слое  $t = const$  несколько изменяется.

Искомая константа  $C = \psi_\gamma$  используется в линейном разложении решения

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 C, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1 C \quad (113)$$

где  $\psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1$  -- вспомогательные неизвестные функции. Подстановка этих разложений в линеаризованные уравнения (72) на текущем временном слое приводит к следующим задачам для вспомогательных функций

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_0 &= \bar{\omega}, \quad \psi_0|_\gamma = 0; \quad \psi_0|_{Top,Bot,In} = y; \\ -\Delta\psi_1 &= \bar{\omega}, \quad \psi_1|_\gamma = 1; \quad \psi_1|_{Top,Bot,In} = 0; \end{aligned} \quad (114)$$

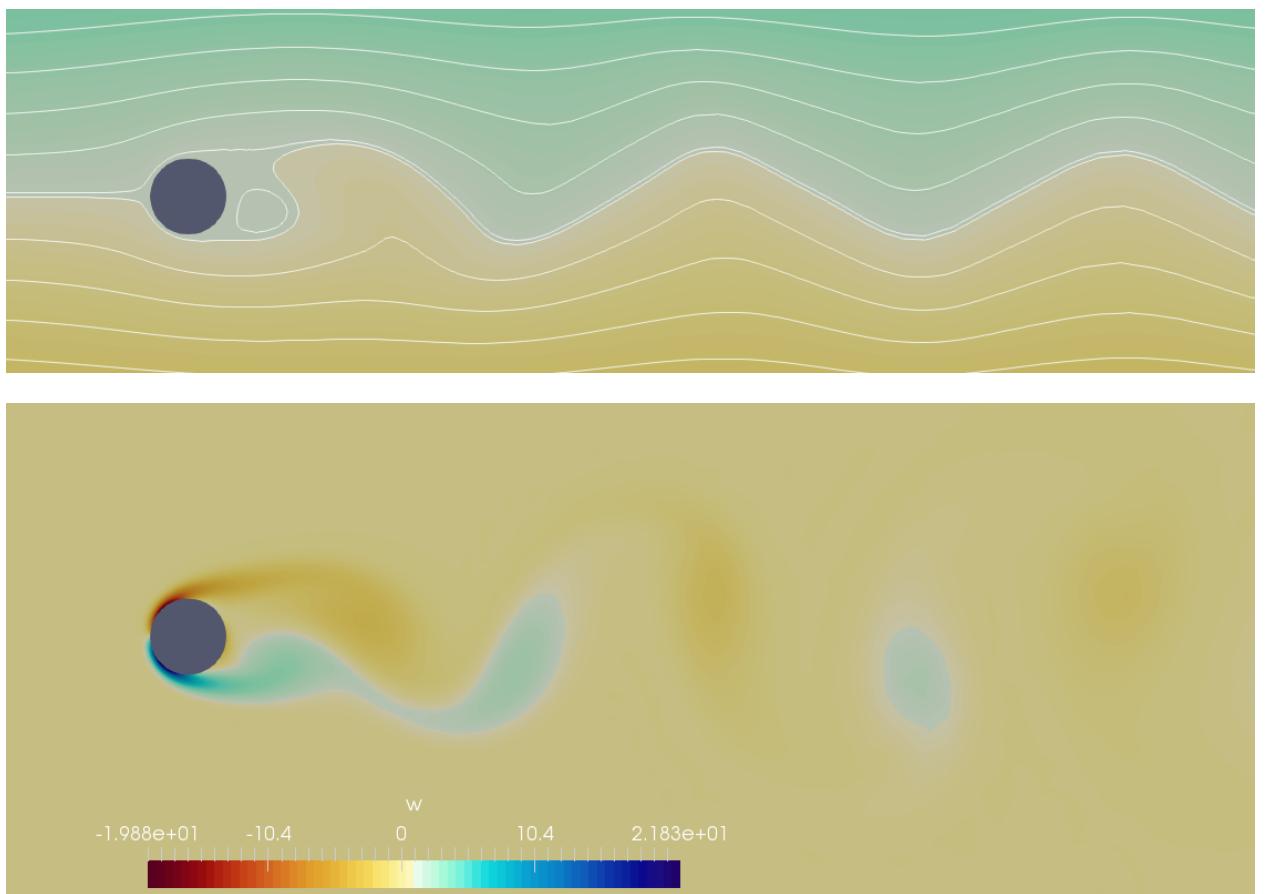
$$\begin{aligned} \omega_0 - \frac{\tau}{Re} \Delta \omega_0 &= \bar{\omega} - \tau \nabla \cdot (\vec{V} \bar{\omega}), \\ \omega_0|_{\Gamma \setminus \gamma} &= \omega|_\Gamma, \quad \gamma : \omega_0 = -\Delta\psi_0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial n} = 0; \\ \omega_1 - \frac{\tau}{Re} \Delta \omega_1 &= 0, \\ \omega_1|_{\Gamma \setminus \gamma} &= 0, \quad \gamma : \omega_1 = -\Delta\psi_1, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (115)$$

Подстановка представления вихря (113) в нелокальное граничное условие (72) приводит к равенству, определяющему искомую константу  $C = \psi_\gamma$  -- значение функции тока на текущем временном слое:

$$I_0 + I_1 C = 0, \quad I_0 = \int_{\gamma} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} ds, \quad I_1 = \int_{\gamma} \frac{\partial \omega_1}{\partial n} ds; \quad C = -\frac{I_1}{I_0}. \quad (116)$$

Сеточные схемы МКЭ для задач (114), (115) и методика вычисления интегралов в (116) вполне аналогичны рассмотренным схемам и методикам упрощенного алгоритма 1 -- 4.

Результат численного решения модельной задачи обтекания кругового цилиндра при  $Re = 100$  по модели « $\psi - \omega$ » на гибридной сетке с четырехугольными конечными элементами вокруг тела (рис. 19) показан на рис. 20 и в целом вполне соответствует результатам расчета функции тока и завихренности на треугольной сетке, представленным в параграфе 4.4.3.



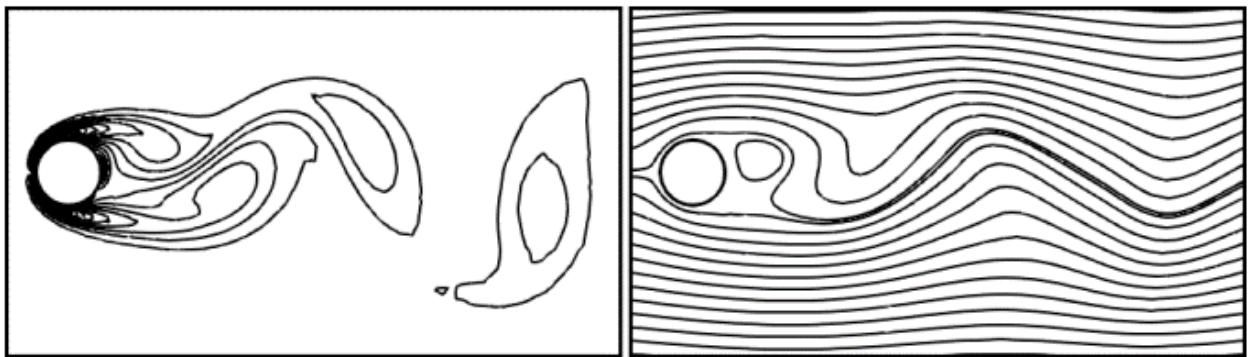


Рис. 20. Мгновенные поля функции тока (справа) и завихренности течения при  $Re = 100$  в режиме установившихся автоколебаний. Расчет на гибридной сетке с билинейными четырехугольными элементами в пограничном слое

Однако дополнительно уточненный алгоритм расчета позволяет определить распределение завихренности и давления по поверхности тела (рис. 21) и на этой основе подсчитать коэффициенты сопротивления и подъемной силы (рис. 22). Полученные значения средних за период установившихся колебаний значений  $C_x \approx 1.33$ ,  $C_y \approx 0$  вполне соответствует данным многочисленных вычислительных и натурных экспериментов по обтеканию кругового цилиндра с числом Рейнольдса  $Re = 100$ . Совпадает с известными данными и безразмерная частота срыва вихрей – число Струхала  $Sh \approx 0.165$ .

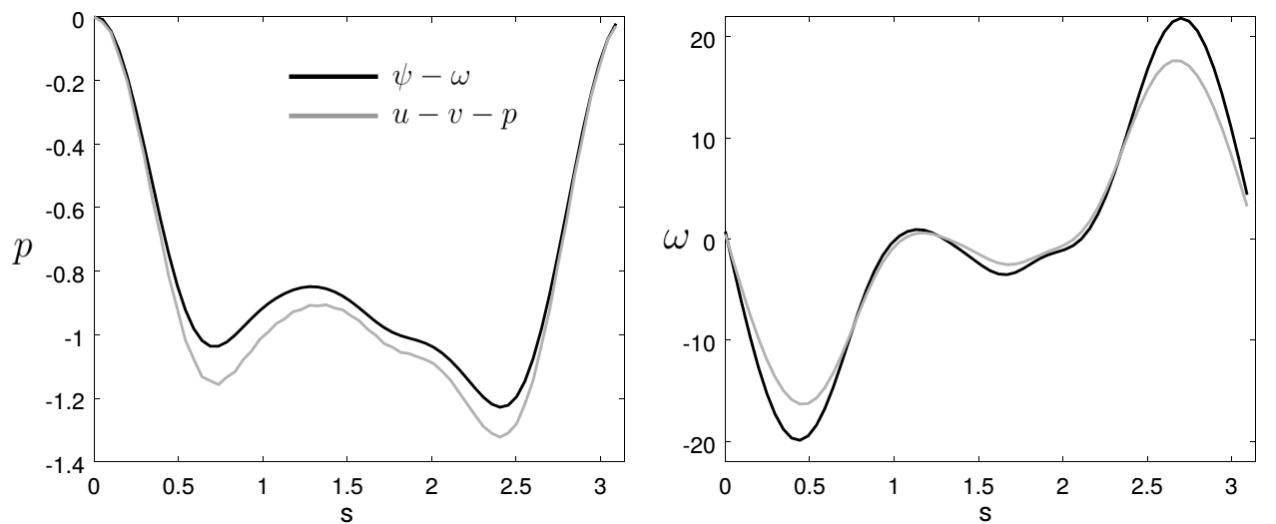


Рис. 2 Распределения  $p(s)$ ,  $\omega(s)$  в режиме автоколебаний при  $Re = 100$  в момент времени, соответствующий минимальному значению  $C_y$ . Сравнение

результатов расчета по моделям Навье-Стокса в естественных и преобразованных переменных.

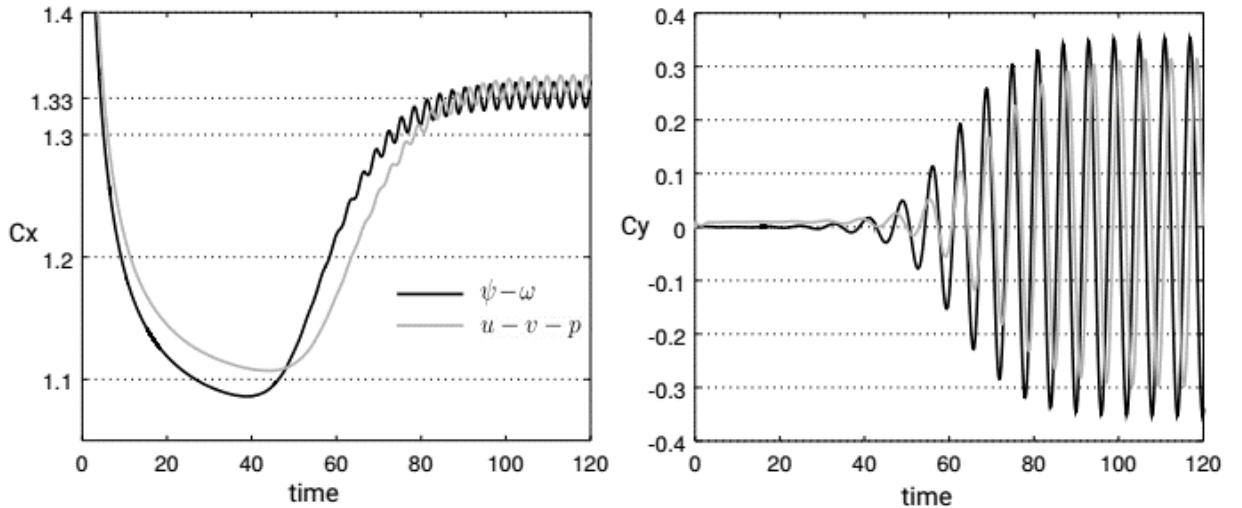


Рис. 22. Установление автоколебаний коэффициентов сопротивления  $C_x$  и подъёмной силы  $C_y$  для обтекания кругового цилиндра при  $Re = 100$ . Сравнение результатов расчета по моделям Навье-Стокса в естественных и преобразованных переменных.

#### 5.4.3. Задача Навье-Стокса в естественных переменных

Постановка задачи « $u - w - p$ » гораздо чаще используется в вычислительной гидродинамике, чем рассмотренная в предыдущем параграфе задача в преобразованных переменных. Главное преимущество данной постановки в том, что она без труда обобщается на трехмерные течения. Численные методы решения этой задачи Навье-Стокса многообразны и продолжают совершенствоваться. Мы рассмотрим классический метод коррекции давления, предложенный Б. Сполдингом и С. Патанкаром (1972) и представляющий основу семейства методов SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, полу-неявный метод для уравнений со связью по давлению*).

За основу возьмем двумерную систему уравнений (107), которую для удобства изложения перепишем в индексной форме, с суммированием по повторяющимся индексам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \tag{117}$$

Зададим состояние покоя  $\bar{u} = 0$  как начальное условие и следующие граничные условия:  $\Gamma_{in,top,bot}: u_1 = 1, u_2 = 0; \gamma: u_1, u_2 = 0$ . На выходной границе поставим конвективные граничные условия для всех искомых функций.

Обозначим через  $\check{u}_i, \check{p}$  -- решение задачи (117) на нижнем временном слое  $t - \tau$ . Предполагаем, что скорость  $\check{u}_i$  удовлетворяет уравнению неразрывности. Будем искать решение нелинейной задачи (117) методом последовательных приближений. Пусть  $n = 0, 1, 2, \dots$  -- номер итерации,  $u_i^n, p^n$  -- приближение к решению на текущем временном слое. Итерации  $u_i^{n+1}, p^{n+1}$  строятся по следующей схеме:

$$u_i^{n+1} = u_i^* + u'_i; \quad p^{n+1} = p^n + p', \tag{118}$$

где  $u_i^*$  -- промежуточное значение скорости, а  $u'_i$  и  $p'$  -- поправки (коррекции) скорости и давления. Особенностью метода является то, что уравнение неразрывности непосредственно не используется в расчетах, а вместо этого требуется, чтобы все приближения скорости  $u_i^n$  удовлетворяли этому уравнению, а промежуточные функции  $u_i^*$  и поправки  $u'_i$  -- не обязательно. Подставив (118) во второе уравнение (117), получим

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \tag{119}$$

Для уравнений импульса записывается итерационный процесс на основе полуодискретизированной по времени двухслойной системы уравнений

$$\frac{u_i^{n+1} - \bar{u}_i}{\tau} + u_j^n \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; \quad (120)$$

Поскольку предполагается сходимость итераций к решению задачи на текущем временном слое, когда  $u_i^n, u_i^* \rightarrow u_i$ ;  $p^n \rightarrow p$ ,  $u_i' \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то уравнения (120) являются согласованными. Если в этих уравнениях заменить  $u_i^{n+1}$  и  $p^{n+1}$  их представлением (118), получим равенство

$$\frac{u_i^* + u_i' - \bar{u}_i}{\tau} + u_j^n \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \left( \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right),$$

которое можно расщепить на уравнение для промежуточной скорости

$$\frac{u_i^* - \bar{u}_i}{\tau} + u_j^n \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_i}, \quad (121)$$

и уравнение для поправок

$$\frac{u_i'}{\tau} = - \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \quad (122)$$

Применив к этому уравнению оператор дивергенции  $\partial / \partial x_i$  и учитывая (119), получим уравнение Пуассона для коррекции давления

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \text{ или } \Delta p' = \frac{1}{\tau} \nabla \cdot u_i^* \quad (123)$$

Итак, реализация итерационного процесса перехода с нижнего на текущий временной слой сводится к следующему.

1. Задаётся начальное приближение  $u_i^0 = \bar{u}_i$ ,  $p^0 = \bar{p}$ .

Для приближений с номерами  $n = 0, 1, 2, \dots$

2. Решаются уравнения (121) для промежуточных функций скорости  $u_i^*$ , при этом используются граничные условия исходной задачи.

3. Решается уравнение Пуассона (123) для коррекции давления  $p'$  с граничными условиями  $p' = 0$  на выходной границе *Out* и  $\partial p / \partial n = 0$  на других частях  $\Gamma$ .
4. С помощью формулы (122) подсчитываются поправки скорости  $u'_i$ .
5. Определения (118) используются для нахождения нового приближения.

Пункты 2 – 5 повторяются до сходимости.

Что касается построения сеточных схем МКЭ для отдельных задач алгоритма 2 – 5, то они не содержат каких-то новых проблем в сравнении с теми, которые мы подробно рассмотрели при моделировании вязкого обтекания тела в рамках модели « $\psi - \omega$ ». Так, уравнения импульсов (121) в пункте 2 порождают СЛАУ

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{M} + \frac{\tau}{\text{Re}} \mathbf{A} - \tau \mathbf{C} \right) u^* &= \mathbf{M}\bar{u} - \tau \mathbf{D}_x p^n, \\ \left( \mathbf{M} + \frac{\tau}{\text{Re}} \mathbf{A} - \tau \mathbf{C} \right) w^* &= \mathbf{M}\bar{w} - \tau \mathbf{D}_y p^n \end{aligned}$$

В которых  $\mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{C}$  -- матрицы масс, жёсткости и конвекции, а матрицы  $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y$  порождены операторами дифференцирования по координатам. При записи элементных матриц для них следует использовать формулу (81).

Эти же матрицы используются в пункте 3 при решении задачи Пуассона для коррекции давления. Получается СЛАУ

$$\mathbf{A}p' = -\frac{1}{\tau} \left( \mathbf{D}_x u^* + \mathbf{D}_y w^* \right)$$

В пункте 4 при подсчете поправок скоростей также используются эти матрицы:

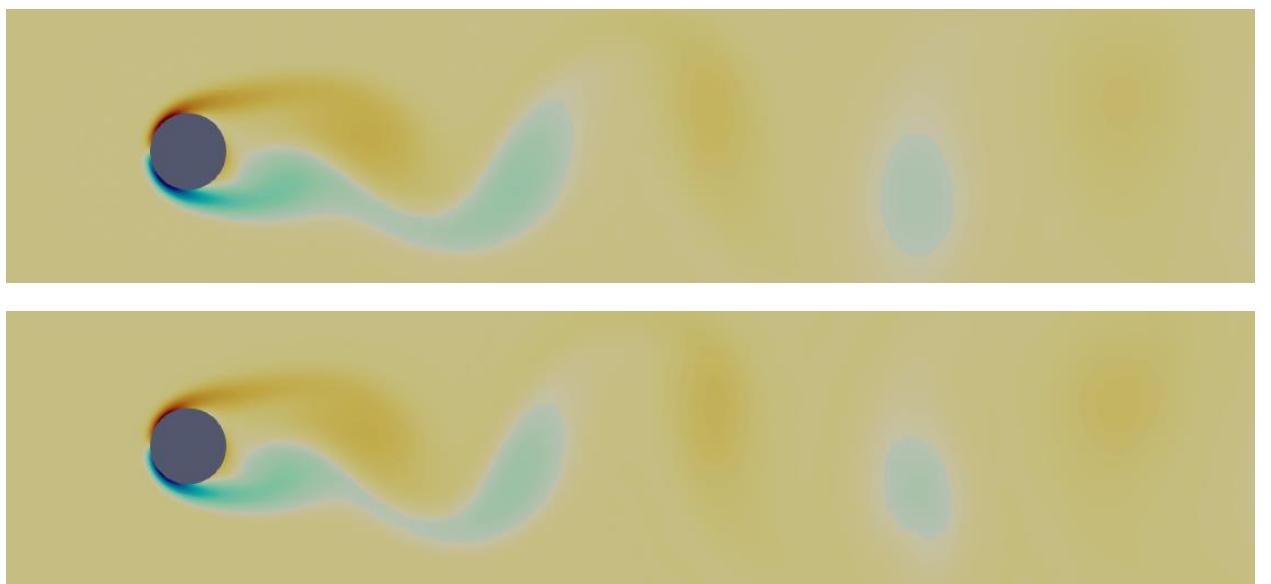
$$\mathbf{M}u' = -\tau \mathbf{D}_x p', \quad \mathbf{M}w' = -\tau \mathbf{D}_y p'$$

**Задача 6.** Выписать формулы для элементных матриц  $\mathbf{D}_x, \mathbf{D}_y$  на треугольном линейном элементе и четырехугольном билинейном элементе

Опыт расчетов по представленному алгоритму коррекции давления показал, что для принятых параметров задачи Навье-Стокса и выбранной сетки сходимость итерационного процесса на каждом временном слое достигается в среднем за 13 итераций. В качестве критерия сходимости выбрано условие

$$\max(\|u'\|, \|w'\|) < \varepsilon = 10^{-6}, \|u\| = \max_{1 \leq k \leq N} |u_k|.$$

Некоторые результаты численного моделирования отрывного обтекания кругового цилиндра при  $Re = 100$  по модели Навье-Стокса в естественных переменных приведены на рис. 23 в виде полей продольной и поперечной компонент скорости. Наблюдается вполне удовлетворительное совпадение функций  $u(x, y)$ ,  $w(x, y)$  в фиксированный момент  $t$  установившихся автоколебаний, рассчитанных по моделям « $u - w - p$ » и « $\psi - \omega$ ». Распределения давления и завихренности по контуру обтекаемого тела и значения аэродинамических коэффициентов приведены на рис. 21, 22. Поле давления показано на рис. 24.



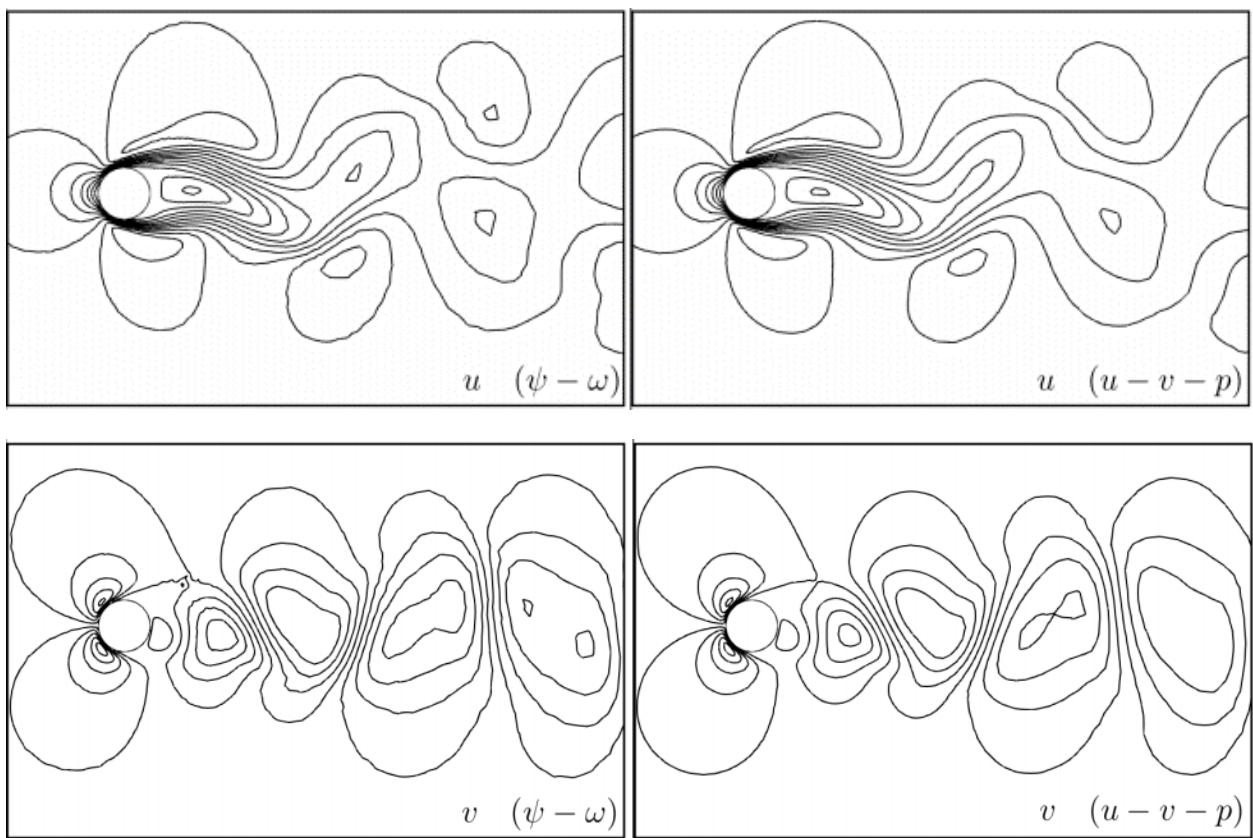


Рис. 23. Мгновенные поля продольной (вверху) и поперечной компонент вектора скорости, рассчитанные по моделям в естественных (справа) и преобразованных переменных

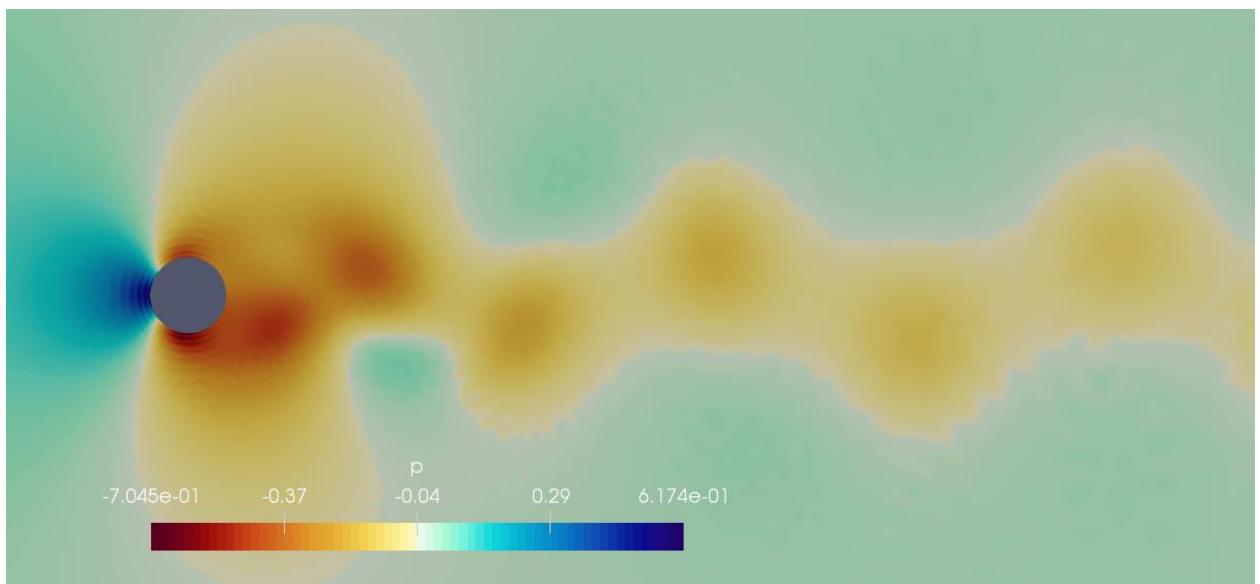


Рис. 24. Мгновенное поле давления при обтекании кругового цилиндра, рассчитанное по модели Навье-Стокса в естественных переменных при  $\text{Re} = 100$

## 6. ТРЕУГОЛЬНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В некоторых задачах вычислительной гидродинамики и теплопереноса целесообразно использовать конечные элементы с базисными функциями более высокого порядка, линейные и билинейные. В частности, если коэффициенты определяющего дифференциального уравнения, его правая часть выражены производными сеточных функций порядка выше первого, то их просто невозможно представить на сетке элементов с линейным базисом. Но даже в более простых ситуациях использование крупной сетки МКЭ с элементами высокого порядка может оказаться выгоднее по вычислительным затратам, чем расчеты на мелкой сетке линейных элементов.

Шестиузловой треугольный элемент  $e$  с базисными функциями второй степени геометрически легко получить из обычного треугольника, добавляя по одному узлу на середину каждой стороны. (рис. 25).

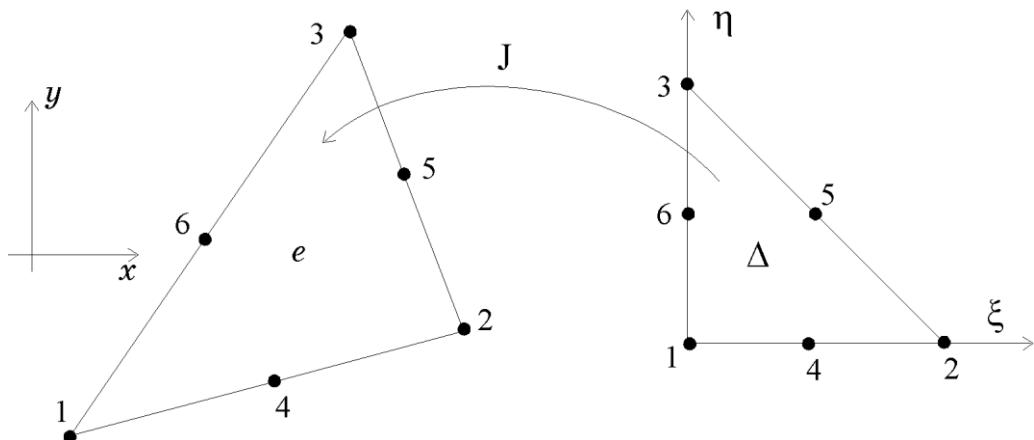


Рис. 25. Шестиузловой квадратичный треугольный элемент

Как и ранее, будем использовать базисный канонический треугольник  $\Delta$  с единичными катетами и отображение  $J : \Delta \rightarrow e$ . Для удобства чтения перепишем здесь заново формулы (45) – (47) этого отображения.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

Обратное преобразование, очевидно, задается формулой

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}, \quad (125)$$

где якобиан преобразования равен

$$|J|^j = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 2 \operatorname{mes} e^j. \quad (126)$$

*Линейные* базисные функции на  $\Delta$  имеют вид

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi, \eta) = \xi, \quad L_3(\xi, \eta) = \eta \quad (127)$$

и используются для построения *квадратичных* базисных функций на  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= L_1(2L_1 - 1), & \varphi_2 &= L_2(2L_2 - 1), & \varphi_3 &= L_3(2L_3 - 1), \\ \varphi_4 &= 4L_1L_2, & \varphi_5 &= 4L_2L_3, & \varphi_6 &= 4L_1L_3. \end{aligned} \quad (128)$$

Произвольная функция  $f(\xi, \eta)$  аппроксимируется на квадратичном элементе  $\Delta$  с помощью шести узловых значений и базисных функций элемента:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \varphi_i(\xi, \eta) f_i \equiv (\vec{\varphi}, \vec{f})_6. \quad (129)$$

Связь операций дифференцирования и интегрирования в реальных координатах  $x, y$  и локальных координатах  $\xi, \eta$  базисного треугольника определена формулами:

$$\int_e f dx dy = |J| \int_\Delta f d\xi d\eta, \quad (130)$$

$$\nabla_{xy} f = \left( J^{-1} \right)^T \nabla_{\xi\eta} f. \quad (131)$$

Подставив в правую часть (131) разложение (129), получим

$$\nabla_{\xi\eta} f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial \xi \\ \partial f / \partial \eta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, f \right)_6, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, f \right)_6 \quad (132)$$

В формулы (132) входят производные от базисных функций (128), которые удобно вычислять через линейные базисные функции (127):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial L_i}{\partial \xi} (4L_i - 1), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial L_i}{\partial \eta} (4L_i - 1), \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} = 4 \left( \frac{\partial L_1}{\partial \xi} L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} L_1 \right), \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} = 4 \left( \frac{\partial L_1}{\partial \eta} L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} L_1 \right).$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi} = 4 \left( \frac{\partial L_3}{\partial \xi} L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} L_3 \right), \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial \eta} = 4 \left( \frac{\partial L_3}{\partial \eta} L_2 + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} L_3 \right).$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi} = 4 \left( \frac{\partial L_1}{\partial \xi} L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial \xi} L_1 \right), \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial \eta} = 4 \left( \frac{\partial L_1}{\partial \eta} L_3 + \frac{\partial L_3}{\partial \eta} L_1 \right).$$

Продифференцируем (127) и подставим результат в записанные выше формулы. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} &= 1 - 4L_1, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} &= 1 - 4L_1, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} &= 4L_2 - 1, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} &= 4L_3 - 1, \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} &= 4(L_1 - L_2), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} &= -4L_2, \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi} &= 4L_3, & \frac{\partial \varphi_5}{\partial \eta} &= 4L_2, \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi} &= -4L_3, & \frac{\partial \varphi_6}{\partial \eta} &= 4(L_1 - L_3). \end{aligned} \tag{133}$$

Эти выражения для производных можно подставить в скалярные произведения формул (132) и вычислить градиент  $\nabla_{\xi\eta} f$ . Затем результат следует подставить в формулу (131) и, пользуясь определением обратной транспонированной матрицы  $(J^{-1})^T$ , найти производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{|J|} \left\{ J_{22} \frac{\partial f}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{|J|} \left\{ -J_{12} \frac{\partial f}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}.\end{aligned}\quad (134)$$

Выписанные выше формулы будут использованы при построении конечноэлементной схемы для тестовой задачи.

## 6.1. Элементные векторы и матрицы

Удобно строить элементные вклады в систему МКЭ с использованием квадратичных треугольников на примере тестовой задачи. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения Пуассона.

$$\begin{aligned}-\Delta u + qu &= f, \quad (x, y) \in D, \\ \Gamma: \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= -\alpha u + \beta, \\ q &= \text{const} > 0, \quad \alpha \geq 0.\end{aligned}\quad (135)$$

Умножая это уравнение на пробную функцию  $v(x, y)$  и интегрируя по области  $D$  с применением теоремы Гаусса-Остроградского и учетом граничных условий, получаем интегральное тождество

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v dx dy + q \int_D uv dx dy + \int_{\Gamma} \alpha u v ds = \int_{\Gamma} \beta v ds + \int_D fv dx dy. \quad (136)$$

Далее, после триангуляции области все интегралы заменяем на сумму интегралов по элементам  $e_j$ ,  $j = 1..M$ . При вычислении каждого интеграла по  $e_j$  переходим к координатам  $\xi, \eta$  и интегрируем по базисному треугольнику  $\Delta$ . Рассмотрим элементные вклады от каждого интеграла.

Первый интеграл в левой части тождества (136) вычислим с учетом формул (134):

$$I_1 = \int_e \nabla_{xy} u \cdot \nabla_{xy} v dx dy = \int_{\Delta} \frac{1}{|J|} \left( J_{22} \frac{\partial u}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left( J_{22} \frac{\partial v}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{|J|} \left( -J_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left( -J_{12} \frac{\partial v}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

Подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$A \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + B \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + C \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

где

$$A = \frac{J_{22}^2 + J_{12}^2}{|J|}, B = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{|J|}, C = \frac{-J_{22}J_{21} - J_{12}J_{11}}{|J|}. \quad (137)$$

Заменяя функции  $u, v$  разложением по базису (129), интеграл  $I_1$  можно представить в виде скалярного произведения

$$I_1 = (\vec{v}, \vec{\mathbf{A}u})_6, \quad (\vec{\mathbf{A}u})_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik} u_k, \quad i = 1..6; \\ a_{ik} = \int_{\Delta} \left\{ A \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + B \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + C \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta. \quad (138)$$

Элементная матрица жесткости  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ , очевидно, симметрична,  $a_{ik} = a_{ki}$ . Кроме того,  $a_{15} = a_{26} = a_{34} = 0$ .

Перейдем к вычислению коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$ . Будем пользоваться известной формулой

$$\int_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c d\xi d\eta = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!}, \quad (139)$$

где  $a, b, c$  -- показатели степени. В частности, для константы, линейных и квадратичных форм имеем

$$\int_{\Delta} d\xi d\eta = \frac{1}{2}, \quad \int_{\Delta} L_i d\xi d\eta = \frac{1}{6}, \\ \int_{\Delta} L_i^2 d\xi d\eta = \frac{1}{12}, \quad \int_{\Delta} L_i L_j d\xi d\eta = \frac{1}{24}, i \neq j. \quad (140)$$

Коэффициент  $a_{11}$  вычисляется так. Подынтегральное выражение в (138) при  $i = 1, k = 1$  и с учетом формул (133) будет равно

$$A(1-4L_1)^2 + B(1-4L_1)^2 + 2C(1-4L_1)^2 = (1-4L_1)^2(A+B+2C).$$

Интегрируя по приведенным выше формулам (140), получим

$$\int_{\Delta} (1-8L_1 + 16L_1^2) d\xi d\eta = \frac{1}{2} - 8 \frac{1}{6} + 16 \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$a_{11} = \frac{1}{2}(A+B+2C). \quad (141)$$

Аналогично вычисляются другие вклады в коэффициенты элементной матрицы жесткости от интеграла  $I_1$ . Ниже приводятся значения коэффициентов матрицы вкладов, умноженные на 6, т.е.  $6\{a_{ik}\} =$

$$6\{a_{ik}\} = \begin{pmatrix} 3(A+B+2C) & A+C & B+C & -4(A+C) & 0 & -4(B+C) \\ A+C & 3A & -C & -4(A+C) & 4C & 0 \\ B+C & -C & 3B & 0 & 4C & -4(B+C) \\ -4(A+C) & -4(A+C) & 0 & 8(A+B+C) & -8(B+C) & 8C \\ 0 & 4C & 4C & -8(B+C) & 8(A+B+C) & -8(A+C) \\ -4(B+C) & 0 & -4(B+C) & 8C & -8(A+C) & 8(A+B+C) \end{pmatrix} \quad (142)$$

Элементный вклад от второго интеграла в уравнении (136) выражается следующим образом

$$I_2 = q \int_e uv dx dy = q |J| \int_{\Delta} uv d\xi d\eta = q |J| (\vec{v}, \overrightarrow{\mathbf{M}u})_6,$$

он определяются коэффициентами симметричной матрицы масс  $\mathbf{M} = \{m_{ik}\}$ ,  $i, k = 1..6$

$$m_{ik} = q |J| \int_{\Delta} \varphi_i \varphi_k d\xi d\eta. \quad (143)$$

Последние легко находятся интегрированием по уже применявшейся формуле (139), с учетом симметрии и после подстановки в формулу (143) выражений квадратичных базисных функций  $\varphi_k$  через линейные базисные функции. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q|J|}m_{12} &= \int_{\Delta} (2L_1^2 - L_1)(2L_2^2 - L_2) d\xi d\eta = \\ &= 4 \int_{\Delta} L_1^2 L_2^2 d\xi d\eta - 4 \int_{\Delta} L_1 L_2^2 d\xi d\eta + \int_{\Delta} L_1 L_2 d\xi d\eta = \\ &= \frac{4 \cdot 2! 2!}{6!} - \frac{4 \cdot 2!}{5!} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{360} \end{aligned}$$

причем  $m_{12} = m_{13} = m_{23}$ . Результаты вычисления коэффициентов показаны ниже.

$$\{m_{ik}\} = \frac{q|J|}{360} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \quad (144)$$

Очевидно, такая же матрица определяет вклад последнего интеграла в правой части интегрального тождества (136) в вектор сил:

$$\begin{aligned} I_f &= \int_e f v dx dy = |J| \int_{\Delta} f v d\xi d\eta = (\vec{v}, \overrightarrow{\mathbf{F}f})_6, \\ \overrightarrow{\mathbf{F}f} &= \sum_{k=1}^6 F_{ik} f_k, \quad F_{ik} = \frac{1}{q} m_{ik}. \end{aligned} \quad (145)$$

Перейдем теперь к определению вкладов от интегралов по границе. Здесь удобно каждую граничную сторону треугольника отобразить в отрезок  $s \in [0, 1]$ , на котором ввести три базисные функции подобно тому, как это было для внутренних элементов.

Пусть узлам 1, 2 и 3 соответствуют координаты  $s = 0$ ,  $s = 1$  и  $s = 1/2$  (см. рис. 26). Тогда линейный локальный базис определяется как

$$L_1(s) = 1 - s, L_2(s) = s,$$

а квадратичные базисные функции строятся по аналогии с (128):

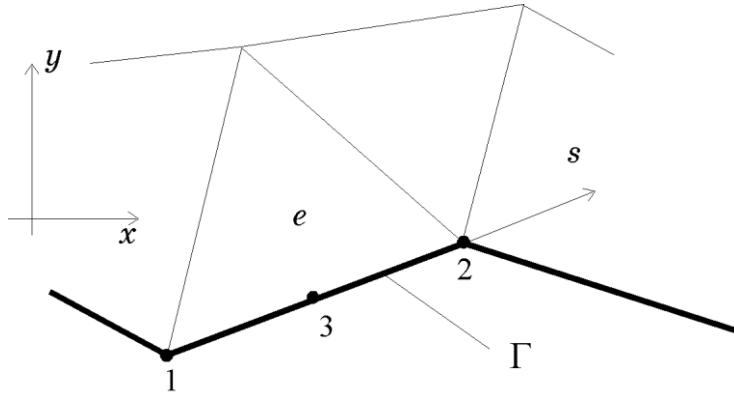


Рис. 26. Локальная нумерация узлов квадратичного элемента на границе

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= L_1(2L_1 - 1) = (1 - s)(1 - 2s), \\ \varphi_2 &= L_2(2L_2 - 1) = s(2s - 1), \\ \varphi_3 &= 4L_1L_2 = 4s(1 - s).\end{aligned}\tag{146}$$

При вычислении вкладов от интегралов по границе необходимо считать интегралы вида

$$I_3 = \int_{\Gamma_e} \alpha u v ds = |l| \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^3 u_k \varphi_k \sum_{j=1}^3 \alpha_j \varphi_j \sum_{i=1}^3 v_i \varphi_i \right) ds.$$

Здесь  $|l|$  – длина граничной стороны треугольника; предполагается существенная зависимость коэффициента теплообмена  $\alpha$  от  $s$  в пределах стороны элемента. Очевидно, интеграл  $I_3$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}I_3 &= (\vec{v}, \vec{\Lambda}u)_3, \quad \left(\vec{\Lambda}u\right)_i = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{ik} u_k, \\ \Lambda_{ik} &= |l| \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ijk}^3 \alpha_j, \quad \Lambda_{ijk}^3 = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \varphi_k ds.\end{aligned}\tag{147}$$

Коэффициенты  $\Lambda_{ik} = \Lambda_{ki}, i, k = 1..3$  следует добавить в матрицу элемента наряду с полученными ранее коэффициентами  $a_{ik}, m_{ik}, i, k = 1..6$ , однако надо помнить о том, что локальная нумерация узлов для внутренних и граничных узлов разная. В конечном итоге каждому локальному номеру узла в каждом элементе соответствует глобальный номер узла сетки, и именно глобальный номер определяет позицию (строку и столбец) глобальной матрицы жесткости, куда следует добавить элементный вклад.

Значения коэффициентов  $\Lambda_{ijk}^3$  получаются непосредственным интегрированием тройных произведений базисных функций (147). В силу симметрии уникальными являются только шесть из них:

$$\begin{aligned}\Lambda_{111}^3 &= \int_0^1 \varphi_1^3 ds, & \Lambda_{112}^3 &= \int_0^1 \varphi_1^2 \varphi_2 ds, & \Lambda_{113}^3 &= \int_0^1 \varphi_1^2 \varphi_3 ds, \\ \Lambda_{123}^3 &= \int_0^1 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 ds, & \Lambda_{133}^3 &= \int_0^1 \varphi_1 \varphi_3^2 ds, & \Lambda_{333}^3 &= \int_0^1 \varphi_3^3 ds.\end{aligned}$$

Численное интегрирование дает значения

$$\begin{aligned}\Lambda_{111}^3 &= 0.0928579, & \Lambda_{112}^3 &= -0.0071428, & \Lambda_{113}^3 &= 0.0476187, \\ \Lambda_{123}^3 &= -0.0190476, & \Lambda_{133}^3 &= 0.0380952, & \Lambda_{333}^3 &= 0.4571429.\end{aligned}\tag{148}$$

Аналогично можно учесть вклад от интеграла в правой части по границе в вектор сил:

$$I_4 = |l| \int_0^1 \sum_{i=1}^3 v_i \varphi_i \sum_{j=1}^3 \beta_j \varphi_j ds = (\vec{v}, \vec{\mathbf{B}} \vec{\beta})_3, \mathbf{B} = \{b_{ij}\}, b_{ij} = |l| \int_0^1 \varphi_i \varphi_j ds.$$

Подставив сюда выражения для базисных функций (147) и интегрируя, получим

$$\mathbf{B} = \frac{|l|}{30} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}. \tag{149}$$

Понятно, что индексация  $3 \times 3$  матриц (148), (149) дана в локальной нумерации, связанной с граничной стороной треугольника, рис. 26; в каждом конкретном случае они должны быть расширены нулями до размерности  $6 \times 6$ .

Сборка глобальной системы алгебраических уравнений из локальных элементных вкладов проводится так же, как это описывалось выше для конечных элементов других типов.

## 6.2. Применение в модели Навье-Стокса

Плоская задача Навье – Стокса в переменных «функция тока -- вихрь» рассматривалась в параграфах **4.4.3** для линейных треугольных элементов и **5.4.2** для билинейных четырехугольных элементов. Отличительной чертой модели « $\psi - \omega$ » является то, что из её определяющих уравнений исключено давление  $p$ . Однако специальное уравнение для давления выводится из уравнений Навье - Стокса в естественных переменных, и оно имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta p = \phi(u, w) &= 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad x, y \subset D; \\ \gamma: \quad \frac{\partial p}{\partial n} &= \beta = \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial s}. \end{aligned} \quad (150)$$

Это уравнение Пуассона с граничным условием Пирсона на обтекаемом контуре, которое математически можно классифицировать как неоднородное условие Неймана, а при более общем взгляде – как граничное условие III-го рода при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = Re^{-1} \partial \omega / \partial s$ . Тогда задача (150) для давления в значительной мере похожа на третью краевую задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе.

Отличие состоит в том, что задача для давления вырожденная, её решение определено с точностью до произвольной постоянной. Поэтому при решении этой задачи используют два приёма. Первый состоит в том, что на части границы, обычно во входном сечении, задают граничное условие

Дирихле, например,  $p = 0$ . Другой приём состоит в том, чтобы из всех возможных решений выбрать функцию с минимальной нормой. Такое решение называется нормальным. Если проинтегрировать задачу (150) по области  $D$ , то получим условие разрешимости в виде

$$-\int_{\gamma} \beta ds = \int_D \phi dx dy \quad (151)$$

Понятно, что любое возмущение данных  $\beta, \phi$  может нарушить условие (151), и задача станет неразрешимой. Поэтому вместо исходной задачи (150) рассматривают альтернативную постановку

$$\begin{aligned} -\Delta p = f &= \phi - \langle \phi \rangle - \frac{|\gamma|}{|D|} \langle \beta \rangle; \\ \gamma: \frac{\partial p}{\partial n} &= \beta, \end{aligned} \quad (152)$$

где  $|D|$  -- мера (площадь в двумерном случае) области  $D$ ;  $|\gamma|$  -- длина контура  $\gamma$ , а средние определены обычными формулами

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{|D|} \int_D \phi dx dy, \quad \langle \beta \rangle = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} \beta ds. \quad (153)$$

Легко проверить, что задача (152) всегда разрешима. Известно, что при её численном решении методами последовательных приближений многие итерационные методы сходятся к нормальному решению задачи.

Перейдем описанию алгоритма расчета давления в задаче « $\psi - \omega$ » с использованием сетки квадратичных элементов. Ясно, что на сетке линейных элементов функция тока  $\psi$  линейна, скорости  $u, w$ , как производные  $\psi$ , постоянны в пределах конечного элемента, и вычисление производных от скоростей, определяющих правую часть  $\phi$  задачи (152), невозможно. В этих условиях предлагается следующий подход к решению задачи.

- Решается задача Навье-Стокса для  $\psi - \omega$  на линейных элементах до момента времени  $t$ , когда нужно посчитать давление  $p$ .

- Решение для вихря  $\omega$  и начальное приближение для функции тока  $\psi$  восполняется на сетке шестиузловых треугольников с помощью линейной интерполяции по сторонам треугольников.

- Задача  $-\Delta\psi = \omega$  для функции тока решается заново на квадратичных элементах один раз с помощью итерационного метода, в результате определяются значения  $\psi$  в узлах. Поскольку начальное приближение для  $\psi$ , полученное восполнением решения на линейных элементах, очень близко к искомому, можно ожидать, что квадратичное решение  $\psi$  будет найдено за малое количество итераций.

- Полученное решение дважды дифференцируется, чтобы получить правую часть  $\phi$  уравнения (152) для давления  $p$ . При этом значения вторых производных будут постоянными в пределах элемента, их следует отнести к центрам элементов. Поэтому при решении задачи для давления сборка правой части, а точнее вклад в вектор сил от правой части будет немного отличаться от того, как это было описано ранее для функции, заданной в узлах сетки.

- Задача для давления решается на сетке квадратичных элементов один раз, в результате получается функция  $p$  в узлах сетки.

Рассмотрим подробнее процедуру сборки правой части для задачи (152) на сетке квадратичных элементов.

Вместо элементной матрицы  $\{F_{ik}\}$ , (145), следует определить вклады от интеграла

$$\phi |J| \int_{\Delta} v d\xi d\eta = \phi |J| (\vec{v}, \vec{z})_6, \{z_i\} = \left\{ \int_{\Delta} \varphi_i d\xi d\eta \right\} = \frac{1}{6} (0, 0, 0, 1, 1, 1);$$

где  $\phi$  -- число, которое надо вычислить,

$$\phi = 2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (154)$$

Выражая производные по  $x, y$  через производные по  $\xi, \eta$  с помощью формул (134), для произвольной функции  $f$  имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{|J|^2} \left\{ J_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ J_{22} \frac{\partial f}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] - J_{21} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ J_{22} \frac{\partial f}{\partial \xi} - J_{21} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right] \right\} = \\ &= A_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + B_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + C_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

где

$$A_{xx} = \frac{J_{22}^2}{|J|^2}, B_{xx} = -2 \frac{J_{22} J_{21}}{|J|^2}, C_{xx} = \frac{J_{21}^2}{|J|^2}. \quad (155)$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = A_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + B_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + C_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

где

$$A_{xy} = -\frac{J_{22} J_{12}}{|J|^2}, B_{xy} = \frac{J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21}}{|J|^2}, C_{xy} = -\frac{J_{11} J_{21}}{|J|^2}, \quad (156)$$

и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = A_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + B_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + C_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

где

$$A_{yy} = \frac{J_{12}^2}{|J|^2}, B_{yy} = -2 \frac{J_{11} J_{12}}{|J|^2}, C_{yy} = \frac{J_{11}^2}{|J|^2}. \quad (157)$$

Для вычисления производных по координатам  $\xi, \eta$  воспользуемся определением базисных функций (127), полученными ранее формулами (133) и (134). Непосредственным дифференцированием получаем

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \eta} = 4, \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} = 4;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} = 0; \\
& \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2} = 4; \\
& \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial \xi^2} = -8, \quad \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial \xi \partial \eta} = -4, \quad \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial \eta^2} = 0; \\
& \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial \xi \partial \eta} = 4, \quad \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial \eta^2} = 0; \\
& \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial \xi \partial \eta} = -4, \quad \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial \eta^2} = -8.
\end{aligned} \tag{158}$$

Подставляя в соотношения (155) -- (157) вместо  $f$  разложение  $\psi$  по базисным функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$  и пользуясь формулами (158), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial q} = 4[A_{pq}(\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_4) + B_{pq}(\psi_1 - \psi_4 + \psi_5 - \psi_6) + \\
& + C_{pq}(\psi_1 + \psi_3 - 2\psi_6)], \quad p, q \in \{x, y\}
\end{aligned} \tag{159}$$

Итак, при поэлементной сборке правой части для задачи о давлении необходимо для каждого элемента вычислять коэффициенты  $A_{pq}, B_{pq}, C_{pq}$ ,  $p, q \in \{x, y\}$  по формулам (155) -- (157), (158), затем определять вторые производные от функции тока по координатам  $x, y$  по формулам (159) и подставлять результат в (154). Затем число  $\phi$  надо умножить на  $|J|/6$  и добавить эту величину к компонентам  $n4, n5, n6$  вектора сил.

В качестве результата работы метода расчета давления для модельной задачи обтекания кругового цилиндра при  $Re = 100$  на рис. 27 показаны «уточненные» линии тока, посчитанные на сетке квадратичных элементов.

Поле давления показано на рис. 28. Максимальные значения оттенены желтым цветом, а минимальные – синим.

Результаты приведены на момент установления периодических колебаний.

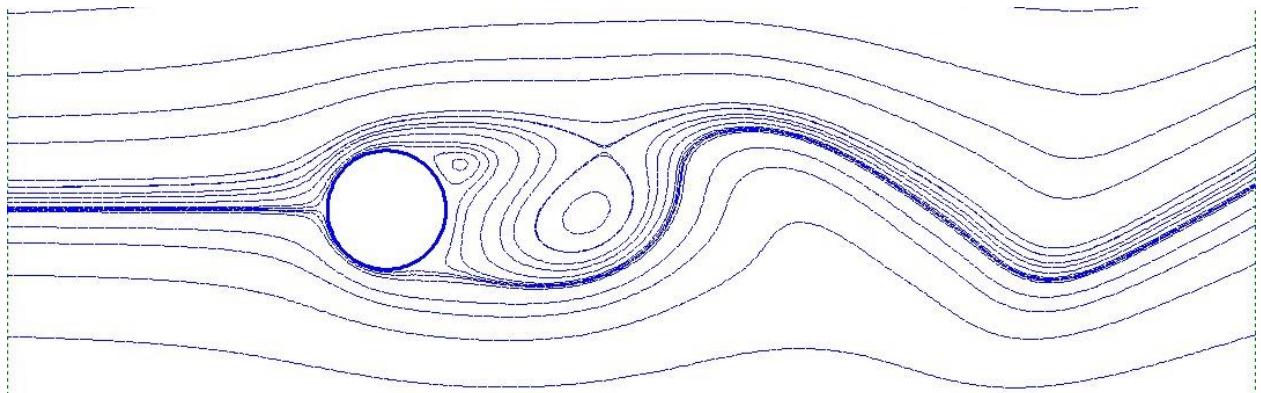


Рис. 27. Линии тока в окрестности обтекаемого цилиндра на сетке треугольных элементов с квадратичными базисными функциями

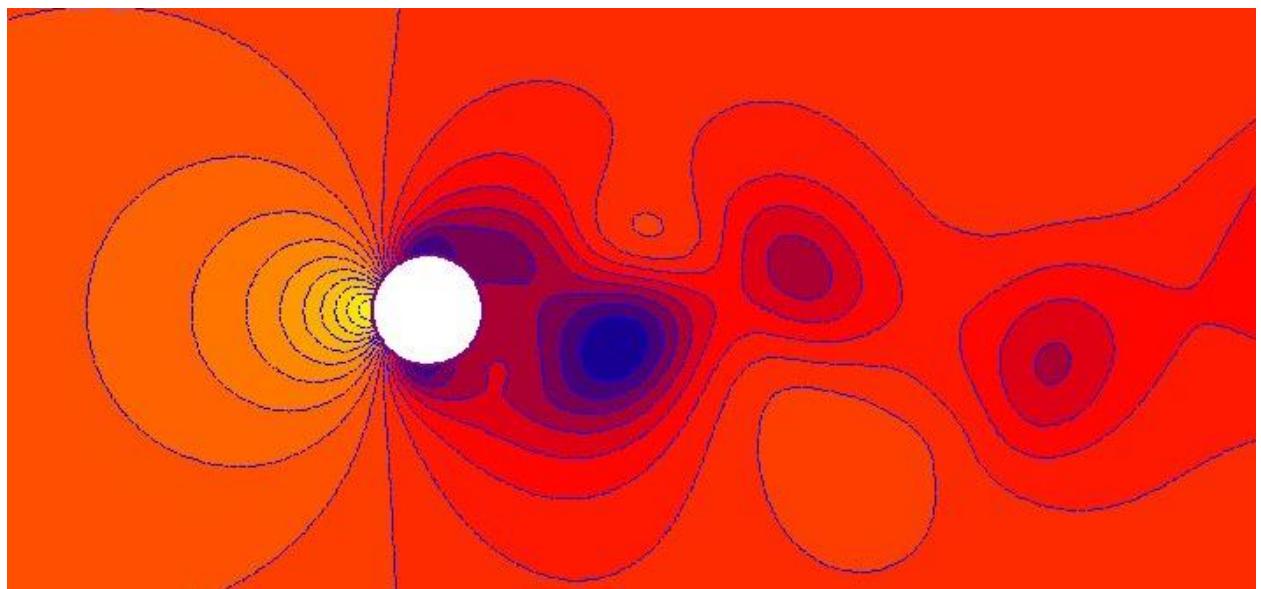


Рис. 28. Поле давления в окрестности обтекаемого цилиндра на сетке треугольных элементов с квадратичными базисными функциями

Более наглядно это же поле давление выглядит на рис. 29, где приведена объемная поверхность, высота которой в каждой точке равна давлению. На рисунке хорошо видны максимум давления в лобовой части цилиндра и локальные минимумы в центрах вращения жидкости в вихревой дорожке Кармана за телом.

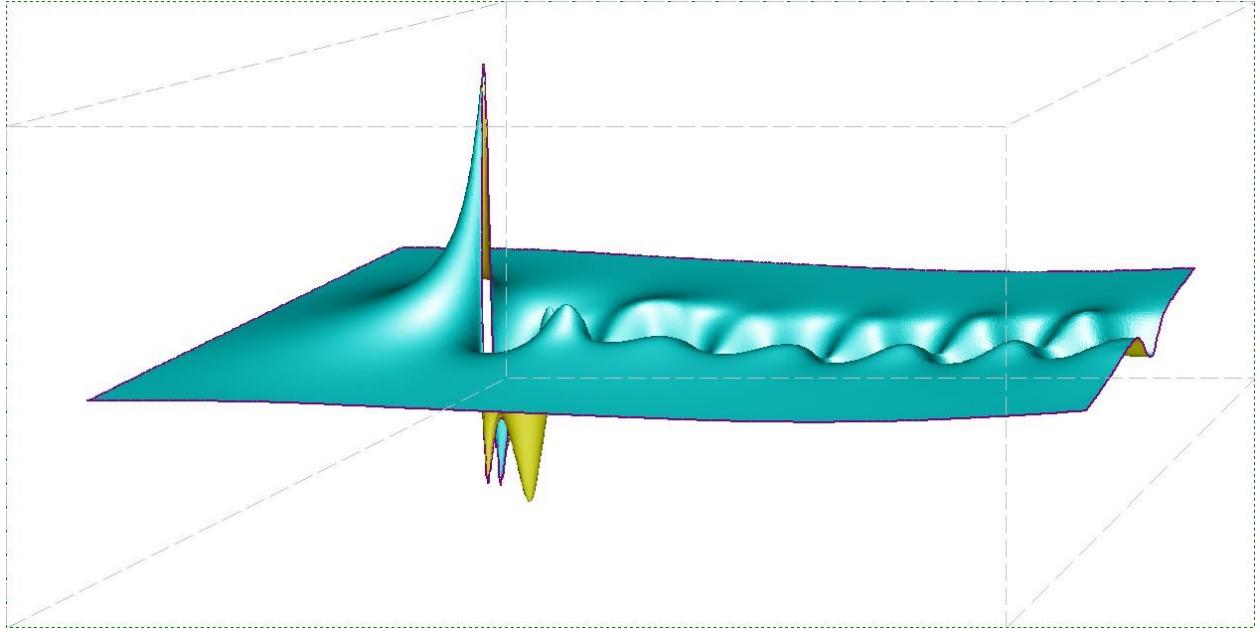


Рис. 29. Поле давления виде 2.5D поверхности.

В заключение параграфа укажем ещё один способ расчета давления в модели « $\psi - \omega$ », не требующий вычисления вторых производных. Вводится новая искомая функция -- переменная Бернулли  $B = p + V^2 / 2$ . Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta B = \nabla \omega \cdot \nabla \psi - \omega^2 \quad (160)$$

с правой частью, выраженной только первыми производными от решения задачи. Это снижает требование на обязательное использование конечных элементов второго и высшего порядка. Границные условия для переменной Бернулли вполне согласуются с условиями Пирсона:

$$x, y \in \gamma_i : \frac{\partial B}{\partial n} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial s}. \quad (161)$$

После того, как задача (160), (161) решена, дифференцированием функции тока  $\psi$  вычисляется поле скорости и его квадрат  $V^2 = u^2 + v^2$  и восстанавливается давление  $p = B - V^2 / 2$ .

Опыт расчетов давления по уравнению с переменной Бернулли показал его преимущество в точности и простоте перед классической моделью (150). Отдельные результаты приведены на рис. 30.

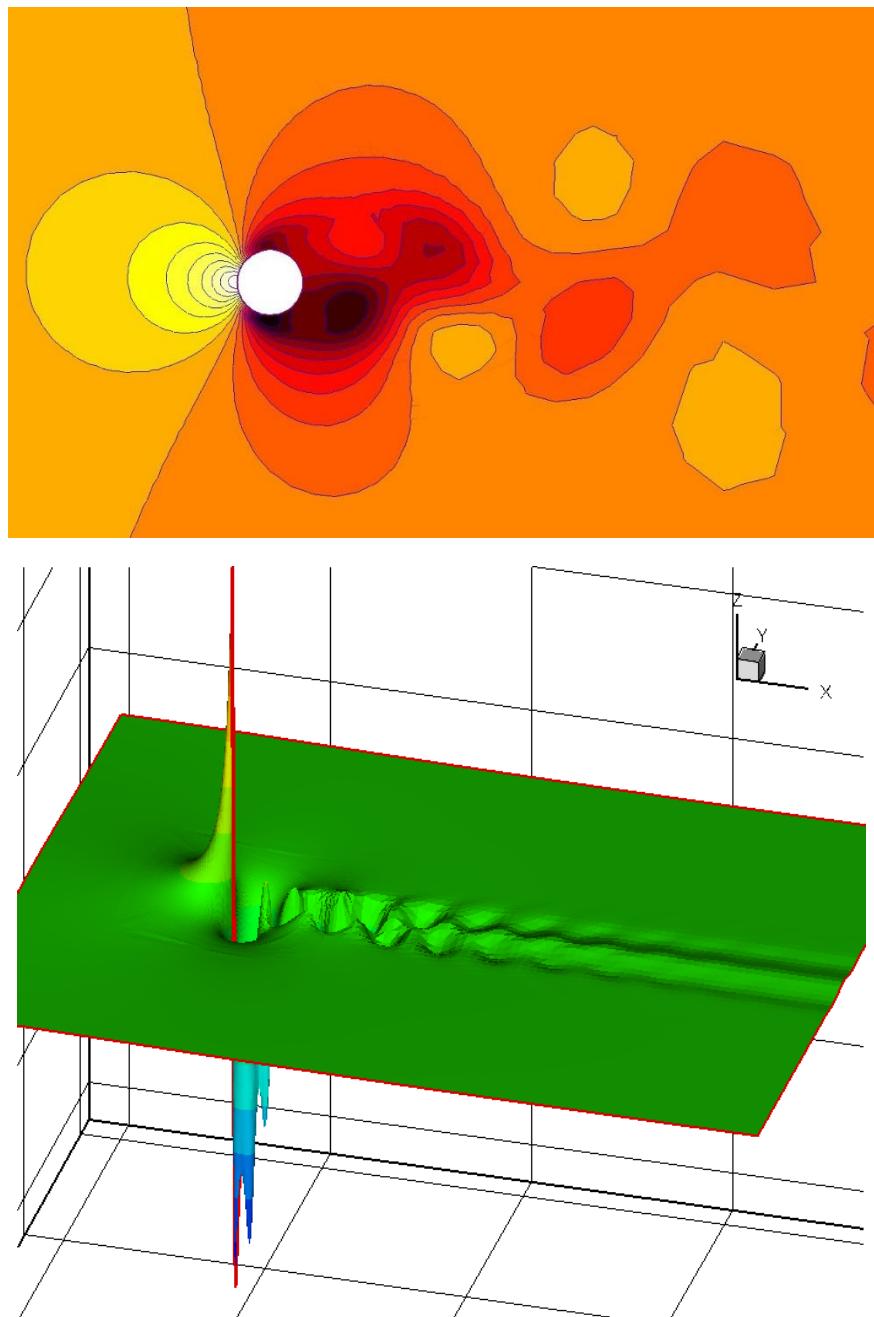


Рис. 30. Поле давления в виде карты изобар (вверху) и 2.5D формы в задаче обтекания кругового цилиндра при  $Re=100$ .

## 7. ТРЕУГОЛЬНЫЙ КУБИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Изложение этой главы построим так, чтобы её в значительной мере можно было бы читать независимо от предыдущих глав про квадратичные и линейные элементы.

### 7.1. Базисные функции третьего порядка

Десятиузловой кубический треугольный элемент  $\Delta$  получается из обычного треугольника добавлением по два узла на середину каждой стороны и еще один узел на пересечении линий  $\xi = 1/3, \eta = 1/3$ , как это показано на рис. 31. Нумерация узлов фиксирована.

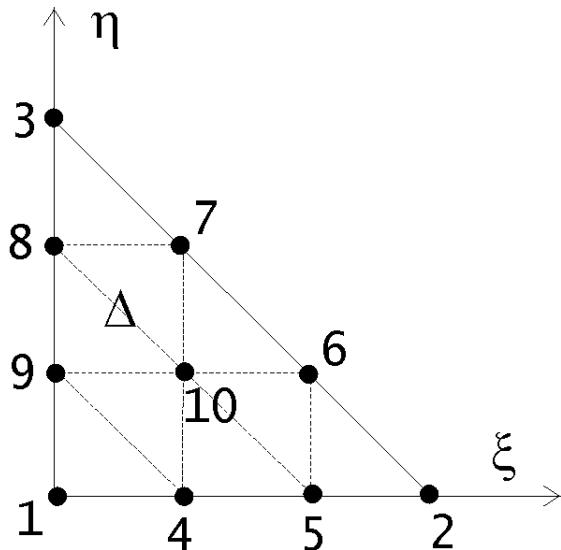


Рис. 31: Десятиузловой кубический треугольный элемент

Как и ранее в данном пособии, будем использовать базисный канонический треугольник  $\Delta$  с единичными катетами и отображение  $J : \Delta \rightarrow e$  ( $e$  – произвольный треугольник в координатах  $x, y$ ). Приведём здесь формулы преобразования координат (124) – (126):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad (163)$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix}, \quad (163)$$

$$|J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 2 \operatorname{mes} e. \quad (164)$$

Узлы треугольника условно разделим на *основные* ( $n_1, n_2, n_3$ ), *дополнительные* ( $n_4, \dots, n_9$ ) и *центральный* узел  $n_{10}$ . Для легкого построения базисных функций нам понадобятся линии, проходящие через дополнительные узлы и параллельные сторонам треугольника  $\Delta$  (на рис. 31 они показаны пунктиром). Введем линейные функции  $L_{ij}(\xi, \eta)$ , обращающиеся в ноль линиях, соединяющих узлы  $i$  и  $j$ :

$$\begin{aligned} L_{12} &= \eta, & L_{13} &= \xi, & L_{23} &= 1 - \xi - \eta, \\ L_{58} &= 2/3 - \xi - \eta, & L_{49} &= 1/3 - \xi - \eta, & L_{78} &= 2/3 - \eta, \\ L_{69} &= 1/3 - \eta, & L_{47} &= 1/3 - \xi, & L_{56} &= 2/3 - \xi. \end{aligned} \quad (165)$$

Образуя тройные произведения линейных функций (165), построим 10 кубических полиномов  $\varphi_1 \dots \varphi_{10}$ , таких, что  $\varphi_k(n_l) = \delta_k^l$  (символ Кронекера):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 L_{49} L_{58} L_{23}, & \varphi_2 &= a_2 L_{56} L_{47} L_{13}, & \varphi_3 &= a_3 L_{78} L_{69} L_{12}, \\ \varphi_4 &= a_4 L_{13} L_{23} L_{58}, & \varphi_5 &= a_5 L_{13} L_{23} L_{47}, & \varphi_6 &= a_6 L_{12} L_{13} L_{47}, \\ \varphi_7 &= a_7 L_{12} L_{13} L_{69}, & \varphi_8 &= a_8 L_{12} L_{23} L_{69}, & \varphi_9 &= a_9 L_{12} L_{23} L_{13}, \\ \varphi_{10} &= a_{10} L_{12} L_{23} L_{13}. \end{aligned} \quad (166)$$

Нормировочные коэффициенты  $a_i$  определяются из условия  $\varphi_i(n_i) = 1$ .

Например,

$$\varphi_1(n_1) = \varphi_1(0, 0) = a_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9},$$

следовательно,  $a_1 = 9/2$ . Аналогично находим  $a_2 = a_3 = 9/2$ ,  $a_4 = a_9 = 27/2$ ,  $a_5 \dots a_8 = -27/2$ ,  $a_{10} = 27$ .

Нетрудно видеть, что среди линейных функций (165) только три являются независимыми – это линейные базисные функции треугольника  $\Delta$

$$L_1 = L_{23} = 1 - \xi - \eta, \quad L_2 = L_{13} = \xi, \quad L_3 = L_{12} = \eta, \quad (167)$$

а остальные выражаются через них. Например,  $L_{58} = L_1 - 1/3$ . Таким образом, построенные нами кубичные полиномы – базисные функции (166) – выражаются через произведения линейных базисных функций.

После несложных вычислений для кубичных базисных функций, равных единице в основных узлах, получим

$$\varphi_i = \frac{9}{2}(L_i^3 - L_i^2) + L_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (168)$$

Базисные функции, относящиеся к дополнительным узлам 4..9, можно выписать с помощью универсальной формулы

$$\varphi_k = \phi(L_i, L_j), \quad \phi(L_i, L_j) = \frac{27}{2}L_i^2L_j - \frac{9}{2}L_iL_j, \quad k = 4\dots9; \quad (169)$$

Здесь  $i - j$  -- это сторона треугольника, на которой лежит дополнительный узел  $k$ , причем первым ( $i$ ) указывается основной узел, ближайший к  $k$ . Рассматривая рисунок 31 и принятой нумерацией узлов, можем записать

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= \phi(L_1, L_2), & \varphi_5 &= \phi(L_2, L_1), & \varphi_6 &= \phi(L_2, L_3), \\ \varphi_7 &= \phi(L_3, L_2), & \varphi_8 &= \phi(L_3, L_1), & \varphi_9 &= \phi(L_1, L_3). \end{aligned} \quad (170)$$

Базисная функция, соответствующая центральному узлу, имеет вид

$$\varphi_{10} = 27L_1L_2L_3. \quad (171)$$

Произвольная функция  $f(\xi, \eta)$  аппроксимируется на кубическом элементе  $\Delta$  с помощью десяти узловых значений и базисных функций элемента:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{10} \varphi_i(\xi, \eta) f_i \equiv (\vec{\varphi}, \vec{f})_{10}. \quad (172)$$

## 7.2. Интегрирование и дифференцирование

Рассмотрим операции интегрирования и дифференцирования функций на кубическом элементе.

**Интегрирование.** Поскольку разложение (172) по кубическим базисным функциям в конечном итоге выражается через произведения линейных базисных функций (168) – (171), нам понадобятся элементарные интегралы

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} d\xi d\eta &= \frac{1}{2}; & \int_{\Delta} L_i d\xi d\eta &= \frac{1}{6}; & \int_{\Delta} L_i^2 d\xi d\eta &= \frac{1}{12}; \\ \int_{\Delta} L_i L_j d\xi d\eta &= \frac{1}{24}, i \neq j; & \int_{\Delta} L_i^3 d\xi d\eta &= \frac{1}{20}; \\ \int_{\Delta} L_i^2 L_j d\xi d\eta &= \frac{1}{60}, i \neq j; & \int_{\Delta} L_i L_j L_k d\xi d\eta &= \frac{1}{120}, i \neq j \neq k; \end{aligned} \quad (173)$$

Значения интегралов были получены с помощью формулы (139)

$$\int_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c d\xi d\eta = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!}.$$

Вычисление интеграла произвольной функции  $f$  на элементе  $\Delta$  с учетом разложения (172) сводится к интегрированию кубических базисных функций:

$$\int_{\Delta} f d\xi d\eta = (\vec{f}, \vec{\Phi})_{10}, \quad \vec{\Phi} = \{\Phi_i\}, \quad \Phi_i = \int_{\Delta} \phi_i d\xi d\eta, \quad i = 1..10. \quad (174)$$

Используя определения базисных функций (168) – (170) и элементарные интегралы (173), найдем

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{240} (4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 54). \quad (175)$$

**Дифференцирование.** Вычисление производных произвольной функции  $f$  на десятиузловом треугольнике также сводится к дифференцированию кубических базисных функций. Нас будут интересовать производные первого и второго порядка.

Производные первого порядка определяются как

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \xi}, \vec{f} \right)_{10}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \eta}, \vec{f} \right)_{10} \quad (176)$$

Для сокращения записи удобно ввести и подсчитать градиенты базисных функций  $\nabla \varphi_i = (\partial \varphi_i / \partial \xi, \partial \varphi_i / \partial \eta)$ . Непосредственно из формул (168) для основных узлов получим

$$\nabla \varphi_i = \nabla L_i \left( \frac{27}{2} L_i^2 - 9 L_i + 1 \right), \quad i = 1..3. \quad (177)$$

А из формул для дополнительных узлов (169), (170) найдем

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_k(L_i, L_j) &= \nabla L_i \frac{\partial \phi}{\partial L_i} + \nabla L_j \frac{\partial \phi}{\partial L_j}, \quad k = 4..9; \\ \frac{\partial \phi}{\partial L_i} &= 27 L_i L_j - \frac{9}{2} L_j, \quad \frac{\partial \phi}{\partial L_j} = \frac{27}{2} L_i^2 - \frac{9}{2} L_i. \end{aligned} \quad (178)$$

Наконец, для центрального узла будем иметь

$$\nabla \varphi_{10} = 27(L_1 L_2 \cdot \nabla L_3 + L_1 L_3 \cdot \nabla L_2 + L_2 L_3 \cdot \nabla L_1). \quad (179)$$

В формулы (177) -- (179) входят градиенты линейных базисных функций

$$\nabla L_1 = (-1, -1), \quad \nabla L_2 = (1, 0), \quad \nabla L_3 = (0, 1). \quad (180)$$

Сложнее обстоит дело с производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Для основных базисных функций  $\varphi_i, i = 1..3$  из (177) непосредственным дифференцированием получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} &= \left( \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \right)^2 (27 L_i - 9), \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} = \left( \frac{\partial L_i}{\partial \eta} \right)^2 (27 L_i - 9), \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial \eta} (27 L_i - 9). \end{aligned} \quad (181)$$

Продифференцируем соотношения (178) по  $\xi$ . Будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2}(L_i, L_j) &= \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i^2} \frac{\partial L_i}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i \partial L_j} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \right) + \\
&+ \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_j^2} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i \partial L_j} \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \right) = \\
&= \left( \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i^2} + \left( \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_j^2} + 2 \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i \partial L_j}.
\end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i^2} = 27L_j, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_j^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i \partial L_j} = 27L_i - \frac{9}{2},$$

поэтому окончательно для дополнительных базисных функций  $\varphi_k, k = 4..9$  можно записать

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \xi^2}(L_i, L_j) = \left( \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \right)^2 \cdot 27L_j + \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \cdot (54L_i - 9). \quad (182)$$

Аналогично выписываются производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \eta^2}(L_i, L_j) &= \left( \frac{\partial L_i}{\partial \eta} \right)^2 \cdot 27L_j + \frac{\partial L_i}{\partial \eta} \frac{\partial L_j}{\partial \eta} \cdot (54L_i - 9), \\
\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \eta \partial \eta}(L_i, L_j) &= \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial \eta} \cdot 27L_j + \left( \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_j}{\partial \eta} + \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial \eta} \right) \left( 27L_i - \frac{9}{2} \right).
\end{aligned} \quad (183)$$

Наконец, определим вторые производные центральной базисной функции, дифференцируя выражение (179).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \xi^2} &= 27 \left\{ \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \left( L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \left( L_1 \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \right) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \left( L_2 \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + L_3 \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \right) \right\} = 54 \left\{ L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \right\}.
\end{aligned} \quad (184)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \eta^2} = 27 \left\{ \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \left( L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \eta} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \left( L_1 \frac{\partial L_3}{\partial \eta} + L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \right) \right. \quad (185)$$

$$\left. + \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \left( L_2 \frac{\partial L_3}{\partial \eta} + L_3 \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \right) \right\} = 54 \left\{ L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} + L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \eta} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial \xi \partial \eta} = 27 \left\{ L_1 \left( \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} + \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \right) + L_2 \left( \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial L_3}{\partial \eta} \right) + \right. \quad (186)$$

$$\left. + L_3 \left( \frac{\partial L_2}{\partial \xi} \frac{\partial L_1}{\partial \eta} + \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \frac{\partial L_2}{\partial \eta} \right) \right\}.$$

Производные от базисных кубичных базисных функций  $\varphi_k, k = 1..10$ , представленные формулами (177) – (179), (181) – (186), записаны в общем виде и выглядят громоздко. Их можно упростить, используя определение (167) и формулы (168) – (171), (180). После несложных, хотя и длинных, преобразований получаются результаты, сведенные в таблицы 1 и 2.

Таблица 1. Первые производные кубичных базисных функций

$i$	$\partial \varphi_i / \partial \xi$	$\partial \varphi_i / \partial \eta$
1	$-13.5L_1^2 + 9L_1 - 1$	$-13.5L_1^2 + 9L_1 - 1$
2	$13.5L_2^2 - 9L_2 + 1$	0
3	0	$13.5L_3^2 - 9L_3 + 1$
4	$4.5(3L_1^2 - 6L_1L_2 + L_2 - L_1)$	$-4.5(6L_1L_2 - L_2)$
5	$4.5(-3L_2^2 + 6L_1L_2 + L_2 - L_1)$	$-4.5(3L_2^2 - L_2)$
6	$4.5(6L_2L_3 - L_3)$	$4.5(3L_2^2 - L_2)$
7	$4.5(3L_3^2 - L_3)$	$4.5(6L_2L_3 - L_2)$

8	$-4.5(3L_3^2 - L_3)$	$4.5(-3L_3^2 + 6L_1L_3 + L_3 - L_1)$
9	$-4.5(6L_1L_3 - L_3)$	$4.5(3L_1^2 - 6L_1L_3 + L_3 - L_1)$
10	$27(L_1L_3 - L_2L_3)$	$27(L_1L_2 - L_2L_3)$

Таблица 2. Вторые производные кубичных базисных функций

$i$	$\partial^2\varphi_i / \partial\xi^2$	$\partial^2\varphi_i / \partial\eta^2$	$\partial^2\varphi_i / \partial\xi\partial\eta$
1	$9(3L_1 - 1)$	$9(3L_1 - 1)$	$9(3L_1 - 1)$
2	$9(3L_2 - 1)$	0	0
3	0	$9(3L_3 - 1)$	0
4	$9(3L_2 - 6L_1 + 1)$	$27L_2$	$4.5(6L_2 - 6L_1 + 1)$
5	$9(3L_1 - 6L_2 + 1)$	0	$-27L_2 + 4.5$
6	$27L_3$	0	$27L_2 - 4.5$
7	0	$27L_2$	$27L_3 - 4.5$
8	0	$9(3L_1 - 6L_3 + 1)$	$-27L_3 + 4.5$
9	$27L_3$	$9(3L_3 - 6L_1 + 1)$	$4.5(6L_3 - 6L_1 + 1)$
10	$-54L_3$	$-54L_2$	$27(L_1 - L_2 - L_3)$

### 7.3. Элементные векторы и матрицы

Имея в распоряжении производные базисных функций и формулы интегрирования на сеточном элементе, не составляет труда вычислить любые элементные векторы и матрицы, из которых затем проводится сборка

глобальной системы уравнений МКЭ. В данном параграфе мы ограничимся вычислением элементных матриц масс  $\mathbf{M}$  и жесткости  $\mathbf{A}$ . С помощью матрицы  $\mathbf{M}$ , как мы видели ранее, определяется элементный вектор сил  $\vec{F} = \overrightarrow{\mathbf{M}f}$ , где  $f$  -- вектор значений правой части в узлах элемента.

Коэффициенты матрицы жесткости  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}, i,k = 1..10$  вычисляются по универсальным формулам (137), (138), которые были выведены еще для квадратичного элемента:

$$a_{ik} = \int_{\Delta} \left\{ A \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} + B \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + C \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi d\eta, \quad (187)$$

$$A = \frac{J_{22}^2 + J_{12}^2}{|J|}, \quad B = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{|J|}, \quad C = -\frac{J_{22}J_{21} + J_{12}J_{11}}{|J|}.$$

Матрица масс  $\mathbf{M} = \{m_{ik}\}, i,k = 1..10$  конечного элемента определяется интегралами от произведения базисных функций (143):

$$m_{ik} = |J| \int_{\Delta} \varphi_i \varphi_k d\xi d\eta \quad (188)$$

В отличие от расчетных методик для квадратичного конечного элемента, формулы (187), (188) для базисных функций третьей степени не доводятся до численных значений аналитически; применяются квадратурные формулы численного интегрирования. Ниже мы приводим одну такую формулу Р5, точную для полиномов степени не выше пятой. Для базисного треугольника  $\Delta$  задается набор значений (сохраняя авторскую нотацию)

$$\begin{aligned} \sqrt{15} &= 3.8729833462; \\ b51 &= (6.0 - \sqrt{15}) / 21.0; \quad b52 = b51; \quad b53 = 1 - b51 - b52; \\ c513 &= (155.0 - \sqrt{15}) / 2400; \quad b54 = (6.0 + \sqrt{15}) / 21; \\ b55 &= b54; \quad b56 = 1 - b55 - b54; \quad c546 = (155.0 + \sqrt{15}) / 2400; \\ b57 &= 0.3333333333333; \quad c57 = 9.0 / 80.0; \end{aligned}$$

Через эти значения определяются координаты точек интегрирования  $(\xi, \eta)_i$ ,  $i = 1..7$  и веса интегрирования  $c_i$ :

Таблица 3. Точки и веса интегрирования квадратурной формулы Р5

$i$	$\xi$	$\eta$	$c$
1	b51	b52	c513
2	b51	b53	c513
3	b53	b52	c513
4	b54	b55	c546
5	b54	b56	c546
6	b55	b55	c546
7	b57	b57	c57

Интеграла от функции  $f(\xi, \eta)$  по треугольнику  $\Delta$  согласно квадратурной формуле Р5 равен

$$\int_{\Delta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^7 c_i f(\xi_i, \eta_i).$$

#### 7.4. Решение тестовой задачи Пуассона

В качестве иллюстрации применения треугольных сеток с базисными функциями третьей степени получим решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x, y), \quad u|_{\Gamma} = U, \\ U(x, y) &= \sin(\omega\pi x) + \cos(2\omega\pi y), \\ f(x, y) &= (\omega\pi)^2 [\sin(\omega\pi x) + 4\cos(2\omega\pi y)]. \end{aligned} \tag{189}$$

Нетрудно убедиться, что точное решение тестовой задачи (189) – это  $u = U$ . Задача решалась в круговой области с вырезанным прямоугольником и имеет вид, показанный на рис. 32, справа.

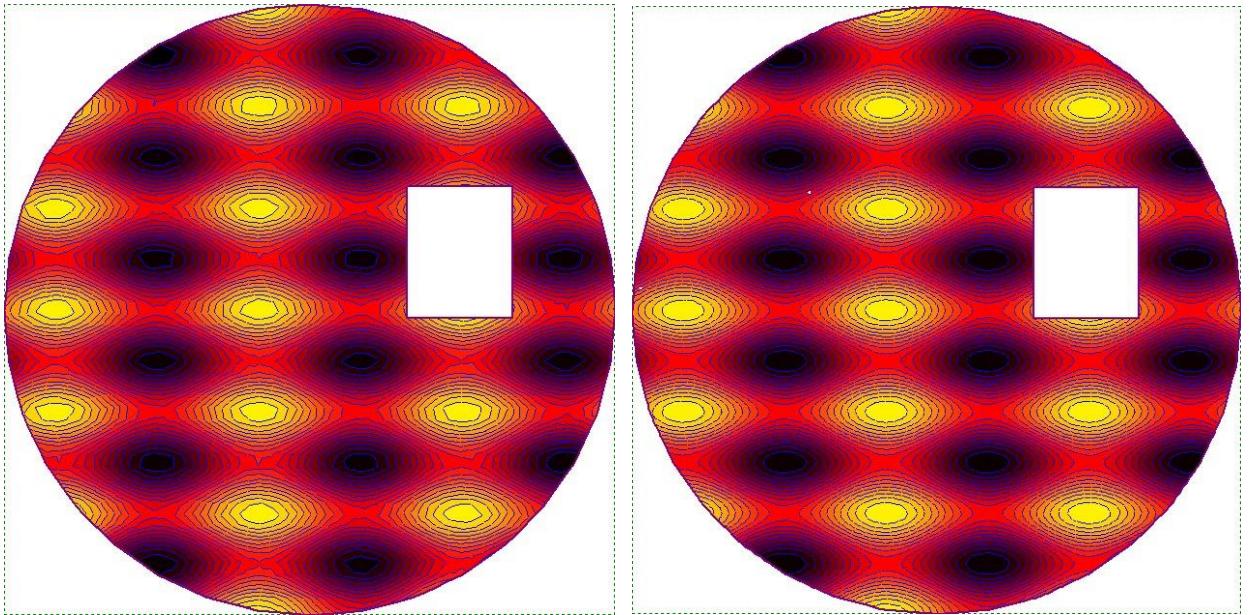


Рис. 32. Решение тестовой задачи Пуассона на сетке треугольной сетке с линейными (слева) и кубическими базисными функциями

Численное решение задачи строилось двумя способами. Вначале генерировалась грубая сетка линейных треугольных элементов с числом узлов  $N \approx 2000$ . Решение  $u$ , полученное на этой сетке показано на рисунке слева и имеет даже визуально заметные погрешности. Максимальная норма ошибки  $\|U - u\|$  составила 0.101. Затем эта триангуляция области использовалась для построения МКЭ-сетки с кубическими базисными функциями. Решение задачи на этой сетке изображено справа и отличается от точного не более, чем на 0.00024.

## 8. ТРЕХМЕРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### 8.1. Сеточные схемы МКЭ для трехмерных задач

Подавляющее большинство задач современной вычислительной гидродинамики и теплопереноса являются трехмерными и описывают сопряженные неизотермические течения в областях сложной геометрии. Такие течения представлены математическими моделями, основу которых составляют нелинейные уравнения Навье – Стокса и энергии. Метод конечных элементов выступает как мощное средство решения столь сложных задач. Отдельной важной проблемой решения трехмерных уравнений ВГ является построение сетки. Во всех популярных коммерческих пакетах программ CFD, использующих МКЭ, таких как MSC.Marc, STAR.CD и других, есть генератор сеток. Принципы построения трехмерных сеток, типы конечных элементов и отдельные примеры триангуляции сложных областей представлены в Части 1 настоящего учебного пособия. При построении сеточных схем МКЭ важно, что трехмерная МКЭ-сетка, так же, как и сетка для плоских задач, представлена двумя таблицами: таблицей узлов (с указанием их координат  $x, y, z$ ) и таблицей связности, в которой для каждого конечного элемента указано, какие узлы и как образуют данный элемент.

Алгоритм построения схемы МКЭ на трехмерной сетке в принципе тот же, что и рассмотренный ранее для плоских сеток. Для каждого конечного элемента определенного типа вводится базисный канонический элемент  $\hat{e}$  в локальных координатах  $\xi, \eta, \zeta$ , на нем определяются базисные функции  $\hat{\phi}_i, i = 1..m$ , удовлетворяющие равенству  $\hat{\phi}_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_i^j$ , где  $\xi_j, \eta_j, \zeta_j$  -- координаты узлов канонического элемента, а  $m$  -- их число. С помощью базисных функций по аналогии с (78) записывается отображение базисного элемента  $\hat{e}$  на реальный конечный элемент  $e$  в координатах  $x, y, z$

$$\begin{aligned}
x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) x^i, \\
y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) y^i, \\
z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^m \hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta) z^i.
\end{aligned} \tag{190}$$

Здесь  $(x^i, y^i, z^i)$ ,  $i = 1..m$  -- координаты вершин конечного элемента  $e_j$ .

Формулы (190) задают матрицу Якоби  $J = \{J_{ik}\}$ ,  $i, k = 1..3$  преобразования координат.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{191}$$

Ее коэффициенты вычисляются непосредственным дифференцированием формул (190) и выражаются через производные базисных функций  $\hat{\phi}_i(\xi, \eta, \zeta)$ . В индексной форме, где

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta,$$

можно записать

$$J_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \sum_{p=1}^m \frac{\partial \hat{\phi}_p}{\partial \xi_k} x^p, \quad i, k = 1..3 \tag{192}$$

Значения производных от базисных функций определяют их градиенты

$$\nabla_{\xi\eta\zeta} \hat{\phi}_i = (\partial \hat{\phi}_i / \partial \xi, \partial \hat{\phi}_i / \partial \eta, \partial \hat{\phi}_i / \partial \zeta), \quad i = 1..m$$

и позволяют подсчитать градиент произвольной функции  $\hat{f}$ , предварительно разложив её по базису в  $\hat{e}$ :

$$\nabla_{\xi\eta\zeta} \hat{f} = \nabla_{\xi\eta\zeta} \sum_{i=1}^m \hat{f}_i \phi_i(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^m \hat{f}_i \nabla_{\xi\eta\zeta} \phi_i(\xi, \eta, \zeta) \tag{193}$$

Формулы дифференцирования и интегрирования произвольной функции  $f$  в координатах  $x, y, z$  через соответствующие операции в локальных координатах универсальны и имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla_{xyz} f &= \left( J^{-1} \right)^T \nabla_{\xi\eta\zeta} \hat{f}, \\ \int_e f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\hat{e}} \hat{f}(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta\end{aligned}\tag{194}$$

Выписанные формулы позволяют вычислить коэффициенты элементных векторов матриц и собрать из них систему уравнений МКЭ. Например, матрица жесткости  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}, i, k = 1..m$ , порождаемая оператором Лапласа, имеет коэффициенты

$$a_{ik} = \int_e \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_k dx dy dz = \int_{\hat{e}} |J| \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_i \cdot \left( J^{-1} \right)^T \nabla \hat{\varphi}_k d\xi d\eta d\zeta$$

а элементная матрица масс  $\mathbf{M}$  состоит из коэффициентов

$$m_{ik} = \int_e \varphi_i \varphi_k dx dy dz = \int_{\hat{e}} |J| \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_k d\xi d\eta d\zeta.$$

Для вычисления этих коэффициентов необходимо применять квадратурные формулы, что предполагает вычисление подынтегральных выражений в точках интегрирования. Для этого следует вначале вычислить якобиан  $|J|$  матрицы (191), подсчитать обратную к ней матрицу, транспонировать, умножить на предварительно вычисленные градиенты базисных функций. Эти вычисления требуют значительных ресурсов, но, как видно из самих формул, определяются только сеткой и не зависят от конкретной решаемой задачи. Поэтому они проводятся один раз, и результаты хранятся в виде матриц для каждого конечного элемента.

## 8.2. Полилинейные трехмерные элементы

В этом параграфе мы приведем пример двух часто используемых в расчетах трехмерных конечных элементов с полилинейными (в нашем случае *трилинейными*) базисными функциями.

На рис. 34 показан восьмиугольный конечный элемент (*октагон*)  $e$  в физических координатах и канонический элемент  $\hat{e}$  -- единичный куб в локальных координатах.

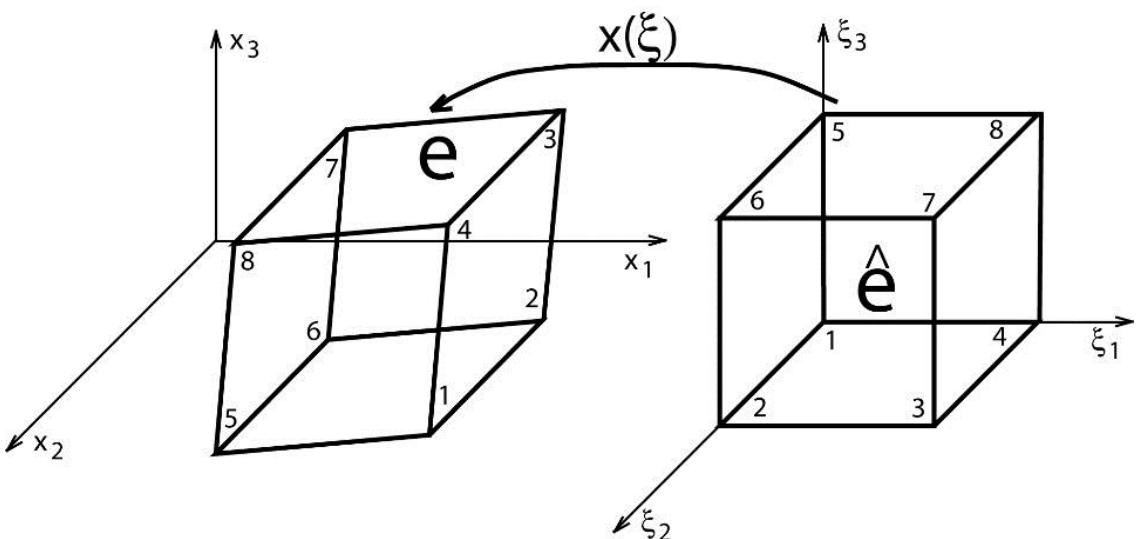


Рис. 34. Октаэдральный конечный элемент

Полилинейные базисные функции для  $\hat{e}$  нетрудно сконструировать из линейных функций, учитывая показанную на рисунке локальную нумерацию узлов:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1 &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_2 &= \xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_3 &= (1 - \xi_1)\xi_2(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_4 &= \xi_1\xi_2(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_5 &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\xi_3, \\ \hat{\varphi}_6 &= \xi_1(1 - \xi_2)\xi_3, \\ \hat{\varphi}_7 &= (1 - \xi_1)\xi_2\xi_3, \\ \hat{\varphi}_8 &= \xi_1\xi_2\xi_3.\end{aligned}$$

Шестиугольный конечный элемент (гексагон) выглядит «половиной» октагона: для  $\hat{e}$  надо отсечь плоскостью 3-4-5-6 верхнюю половину. Полилинейные базисные функции имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1 &= (1 - \xi_1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_2 &= \xi_1(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_3 &= \xi_2(1 - \xi_3), \\ \hat{\varphi}_4 &= (1 - \xi_1 - \xi_2)\xi_3, \\ \hat{\varphi}_5 &= \xi_1\xi_3, \\ \hat{\varphi}_6 &= \xi_2\xi_3.\end{aligned}$$

### 8.3. Примеры расчета на трехмерных элементах

Для иллюстрации применения МКЭ для решения трехмерных задач приведем результаты моделирования электронно-лучевой сварки объемных металлических конструкций. Применяется сетка из полилинейных элементов, рассмотренных выше.

Температурное поле описывается нелинейным уравнением теплопроводности

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k(T) \operatorname{grad} T) = Q(x, y, z, t, v), \quad (195)$$

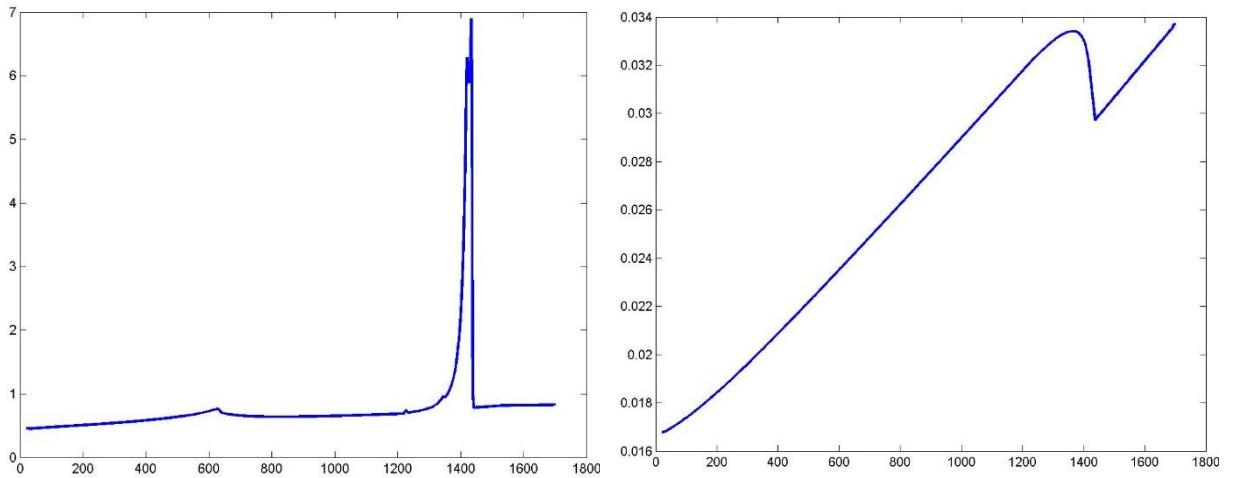


Рис. 35. Теплоёмкость  $C$  (слева) и теплопроводность  $k$  металла

Зависимости от температуры  $T$  теплоёмкости  $c$  и теплопроводности  $k$  заданы таблично, причем функция  $c(T)$  имеет резкий максимум в точке плавления металла, а  $k(T)$  в ее окрестности немонотонна (рис. 35). Лучевой нагреватель представлен движущимся по заданному закону тепловым источником  $Q$ , распределенным по линии определенной глубины от поверхности тела.

Метод решения задачи состоит в следующем. Для линеаризации дифференциальных операторов вводятся монотонно возрастающие функции энталпии

$$H(T) = \rho \int_{T_{\min}}^T c(\xi) d\xi$$

и температуры Кирхгофа

$$K(T) = \int_{T_{\min}}^T k(\xi) d\xi.$$

После этого уравнение (195) становится линейным по  $H$  и  $K$

$$\frac{\partial H(T)}{\partial t} - \Delta K(T) = Q. \quad (196)$$

Неявная полудискретизация уравнения по времени с шагом  $\tau$  приводит к схеме

$$\frac{H(T, t) - H(T, t - \tau)}{\tau} + \Delta K(T, t) = Q.$$

Конечноэлементная аппроксимация этого уравнения порождает систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{M} \frac{H - \check{H}}{\tau} + \mathbf{A} K = Q,$$

в которую входят матрицы масс и жесткости. Опустим описание метода решения этой системы и приведем некоторые результаты численного моделирования.

На рис. 36 изображен фрагмент металлической конструкции «тавр», свариваемой из двух брусков, с нанесенной сеткой трехмерных конечных элементов (построена генератором сеток MSC.Mentat).

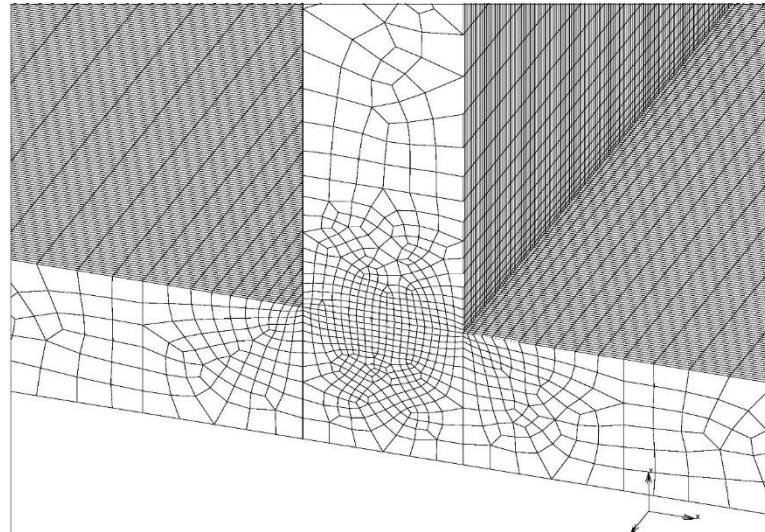


Рис. 36. Сетка на конструкции «тавр»

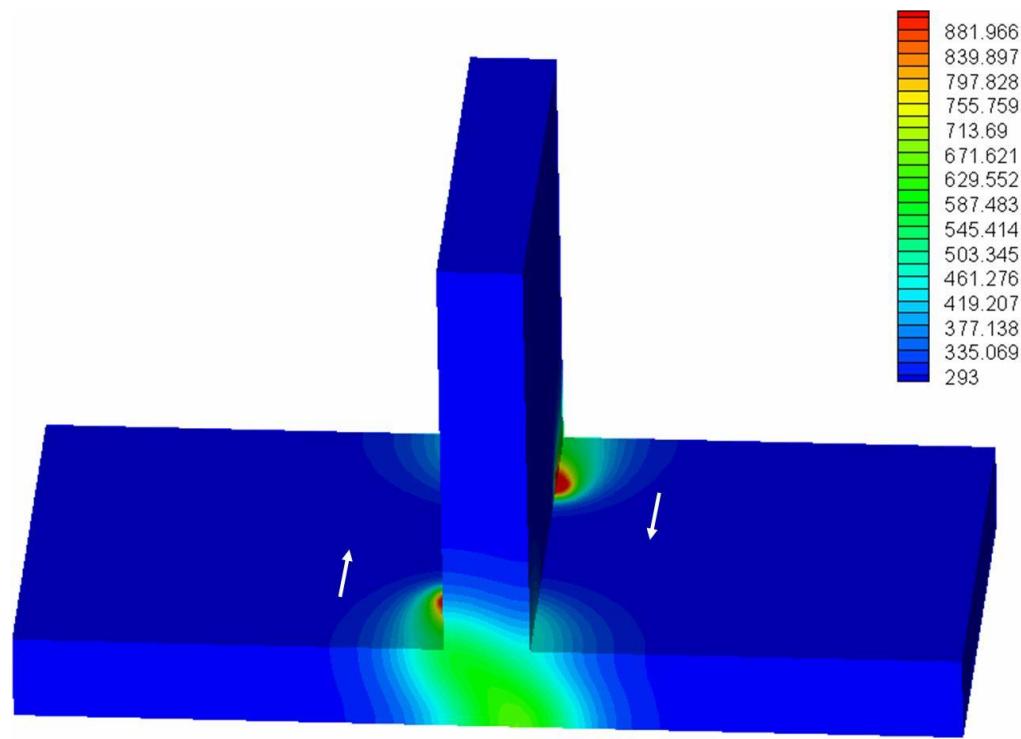


Рис. 37. Температурное поле при сварке «тавра» двумя лучами

Электронно-лучевая сварка тавра проводится двумя источниками, движущимися в противоположных направлениях по линиям, наклоненным по 45 градусов к плоскости контакта пластин. Температурное поле и направления сварки показаны на рис. 37. Красным выделена сварочная ванна расплавленного металла.

Другой, более сложный пример моделирования высокоскоростной электронно-лучевой сварки цилиндрических секций представлен на рис. 38.

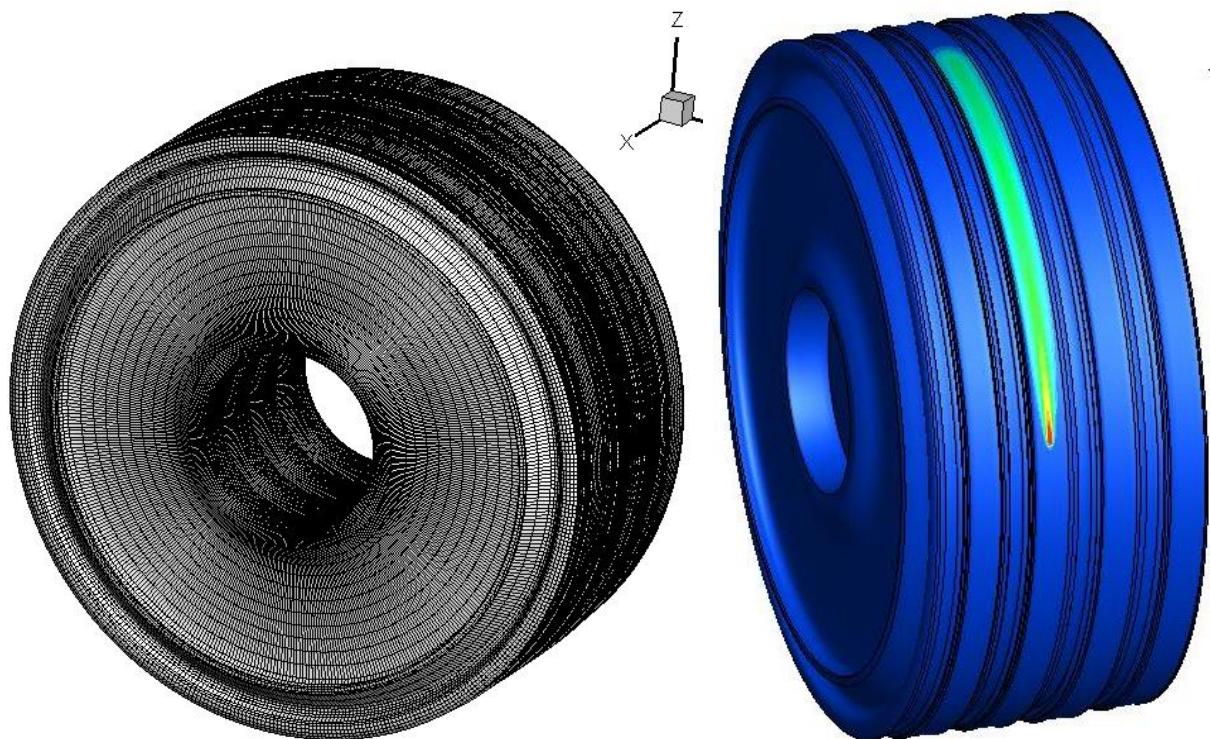


Рис. 38. МКЭ-сетка (слева) и температурное поле при высокоскоростной электронно-лучевой сварке. Красным выделена ванна расплава.

## **Заключение**

Учебное пособие представляет собой вторую часть курса «Вычислительная гидродинамика». Оно публикуется в электронном виде, что дает известные преимущества перед бумажным изданием в части цветных иллюстраций и оперативности. Планируются к такой же публикации еще две книги в виде учебных пособий:

- Вычислительная гидродинамика. Часть 3. Сеточные схемы метода конечных объёмов.
- Вычислительная гидродинамика. Часть 4. Методы решения сеточных уравнений.

Автор благодарен профессору Р.З. Даутову за многократные полезные беседы и консультации по разнообразным аспектам метода конечных элементов.

Составитель благодарен своим ученикам и коллегам Р.Ф. Кадырову, Е.И. Калинину, И.В. Моренко, чьи результаты численного моделирования использованы в данном учебном пособии в качестве иллюстраций.

Особых слов благодарности заслуживает рецензент пособия – профессор А.В. Лапин, благодаря критическим замечаниям которого были исправлены некоторые неточности изложения материала.

## **Литература**

1. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1,2. М.: Мир, 1998.
2. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1989.
3. *Митчел Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1981.
4. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
5. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
6. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
7. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л.: ЛГУ, 1977.
8. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Введение в теорию метода конечных элементов. Издание 2-е., испр. Казань: КГУ, 2011. - 239 с.
9. *Chung T. J.* Computational fluid dynamics. Cambridge University Press. 2002. 1012 р.

## **Дополнительная литература**

10. *Даутов Р.З.* Программирование МКЭ в MATLAB Учебное пособие. Казань: Казанский гос. университет, 2010. - 71 с.
11. *Мазо А.Б.* Основы теории и методы расчета теплопередачи. Учебное пособие. Казань: Изд-во КГУ. 2013. 146 с.
12. *Мазо А.Б.* Вычислительная гидродинамика. Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Учебное пособие. Казань: КФУ. 2018. 186 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	5
1. Метод Галёркина .....	6
1.1. Пример применения метода .....	8
<b>Задача 1.</b> .....	10
1.2. Пирамидальные базисные функции.....	10
2. Слабая форма постановки краевых задач.....	11
2.1. Базисные функции с конечным носителем .....	13
<b>Задача 2.</b> .....	16
2.2. О граничных условиях и классе пробных функций.....	16
3. Сеточные аппроксимации МКЭ .....	19
3.1. Постановка задачи .....	19
3.2. Сетка МКЭ .....	23
3.3. Элементные вектора и матрицы .....	28
3.4. Расширенные и глобальные вектора и матрицы. Сборка системы уравнений МКЭ.....	32
4. Треугольный линейный конечный элемент .....	37
4.1. Дифференцирование и интегрирование .....	38
4.2. Линейные базисные функции .....	38
4.3. Элементные векторы и матрицы .....	41
4.4. Примеры применения МКЭ на линейных элементах .....	45
4.4.1. Потенциальное обтекание тела .....	45
4.4.2. Моделирование лазерной термообработки .....	49
<b>Задача 4.</b> .....	51
4.4.3. Задача Навье-Стокса в преобразованных переменных ..	51
<b>Задача 5.</b> .....	57
5. Четырехугольный билинейный элемент .....	58
5.1. Сетка четырехугольных элементов.....	58
5.2. Билинейные базисные функции .....	59
5.3. Элементные векторы и матрицы .....	61
5.4. Примеры применения МКЭ на билинейных элементах .....	68
5.4.1. Вычисление производных от сеточного решения .....	68
5.4.2. Задача Навье-Стокса в преобразованных переменных.....	71
5.4.3. Задача Навье-Стокса в естественных переменных .....	80
<b>Задача 6.</b> .....	83

6. Треугольный квадратичный элемент .....	86
6.1. Элементные векторы и матрицы .....	89
6.2. Применение в модели Навье-Стокса .....	95
7. Треугольный кубический элемент .....	103
7.1. Базисные функции третьего порядка .....	103
7.2. Интегрирование и дифференцирование .....	105
7.3. Элементные векторы и матрицы .....	110
7.4. Решение тестовой задачи Пуассона .....	112
8. О трехмерных конечных элементах .....	114
7.1. Сеточные схемы МКЭ для трехмерных задач .....	114
7.2. Полилинейные трехмерные элементы .....	117
7.3. Примеры расчета на трехмерных элементах .....	118
Заключение .....	122
Литература .....	123