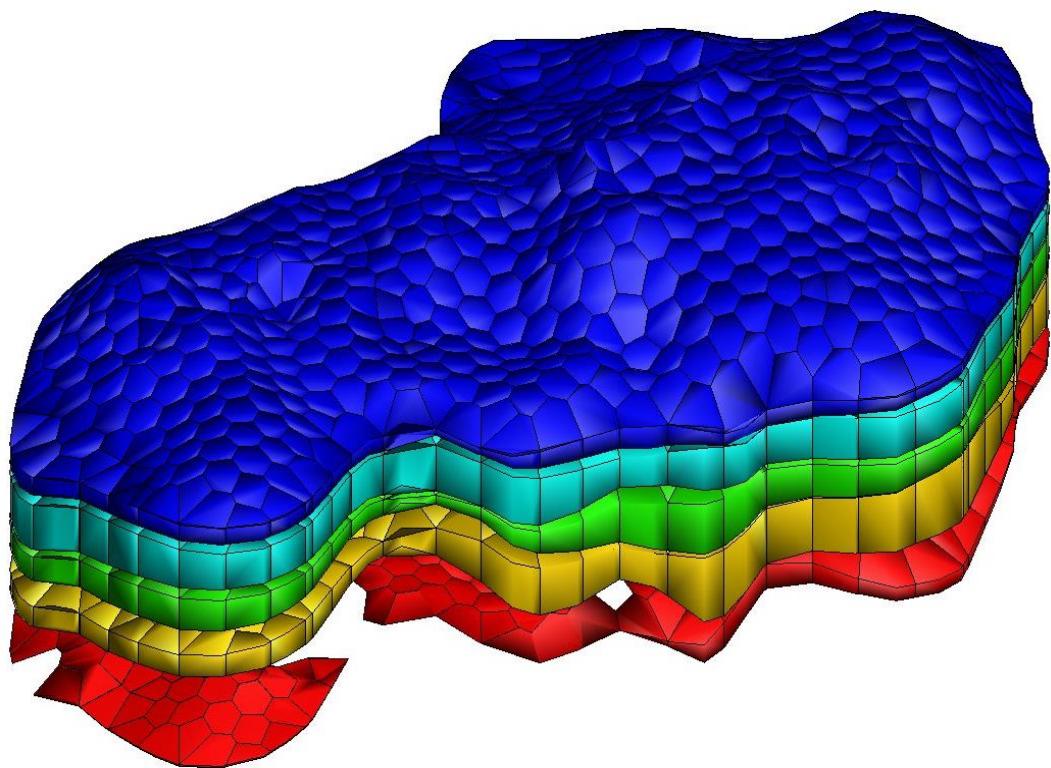


А.Б. Мазо

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы

Учебное пособие



Казань – 2018

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Институт математики и механики имени Н.И. Лобачевского

Кафедра аэрогидромеханики

А.Б. Мазо

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы

Учебное пособие

Казань - 2018

УДК 532.5+519.6

Публикуется по рекомендации Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Протокол № 1 от 24 октября 2018 года

Принято на заседании кафедры аэрогидромеханики
Протокол № 2 от 28 сентября 2018 года

Научный редактор
доктор физико-математических наук
профессор Д. В. Маклаков

Рецензент
доктор физико-математических наук
профессор А. В. Лапин

Мазо А.Б.

Вычислительная гидродинамика. Часть 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Учебное пособие / А.Б. Мазо - Казань: Казан. ун-т, 2018. - 165 с.

Учебное пособие основано на курсе лекций и лабораторных занятий для студентов старших курсов и магистров Института математики и механики КФУ. В нём представлены базовые подходы и основные этапы решения задач вычислительной гидродинамики (ВГ). Дан обзор уравнений и математических моделей ВГ, обсуждаются методы и алгоритмы построения сеток; на примерах метода конечных разностей демонстрируются подходы к построению сеточных аппроксимаций для типичных задач ВГ, обсуждаются их достоинства и недостатки.

Большое внимание в учебном пособии удалено примерам счета; по каждой теме студенту предлагаются задания для вычислительной практики.

Пособие может быть полезно также аспирантам, научным работникам и инженерам соответствующих специальностей.

© Мазо А.Б., 2018

© Казанский университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Предмет и задачи вычислительной гидродинамики

Предмет вычислительной гидродинамики (ВГ) – решение сложных краевых задач механики жидкости и теплообмена с использованием методов вычислительной математики и компьютерного моделирования.

В качестве примеров применения ВГ приведем задачи из следующих областей:

- Внутренние течения, т.е. течения жидкости в каналах. Например, течение жидкости по каналам и трубам. Внутренние течения встречаются в самых различных областях: теплообменные аппараты, нефтепроводы, системы отопления, водоснабжения. В большинстве случаев интерес представляют поля скорости, давления и температуры жидкости. Внутренние течения в теплообменных аппаратах часто осложняются фазовыми превращениями, такими как испарение и конденсация, плавление и кристаллизация.

- Внешние течения, т.е. обтекание потоком жидкости тел и их систем. Напомним, что задачи обтекания тел возникли в гидромеханике при *обращении движения*: реально тело движется в неподвижной жидкости, но гораздо удобнее изучать поток жидкости, набегающий на неподвижное тело. Примеры внешних течений: плавание судов, обтекание крыловых профилей самолетов, ракет, снарядов и т.п. Требуется определить поля скорости, давления и температуры в жидкости; по ним рассчитываются, силы и моменты, действующие на обтекаемое тело, включая коэффициенты гидродинамического сопротивления и подъемной силы. В высокоскоростных неизотермических потоках важной задачей является расчет теплообмена между потоком и поверхностью тела.

- Фильтрационные течения, т.е. течения жидкости и газа в пористой среде. Это, например, задачи расчета процессов фильтрации нефти при разработке нефтяных месторождений методом вытеснения нефти водой. В этом случае

практический интерес представляют поля давления, скорости фильтрации (линии тока), а также функции водо- и нефтенасыщенности, показывающие динамику обводнения залежи и запасов нефти в пласте. В ряде случаев рассматривают неизотермическую фильтрацию (вязкость нефти существенно зависит от температуры), а также многокомпонентную фильтрацию, когда в пласт закачиваются примеси (полимеры, гель) с целью изменить фильтрационные потоки.

В данном курсе мы ограничимся рассмотрением задач течения несжимаемой жидкости, оставляя за его рамками широкий и практически важный класс сжимаемых течений, включая ударные волны; методы решения соответствующих задач изучаются в специальном курсе «Численные методы газовой динамики».

Таким образом, типичные задачи ВГ основаны на математических *моделях механики сплошной среды*, в частности, на моделях

- вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса и уравнения Рейнольдса для описания турбулентных течений);
- конвективного теплообмена с фазовыми превращениями (уравнение энергии, энталпии, теплопроводности, задачи типа Стефана);
- подземной гидромеханики (уравнения многофазной многокомпонентной фильтрации).

В отличие от классической гидродинамики, модели которой как правило основаны на тех или иных упрощающих предположениях (идеальная жидкость, безотрывное обтекание, струйные схемы течения, линейные плоские постановки в канонических областях), в ВГ задачи ставятся и решаются, как правило, в более общем виде (многомерные, нелинейные задачи сопряженного тепломассообмена в сложных областях). Поэтому точные решения таких сложных задач можно отыскать в исключительных случаях, и нормой для ВГ является использование методов *вычислительной математики* и *компьютерного моделирования*. Последнее обеспечивает не только численное

решение математических задач, но и построение сеточных моделей объектов и графическое представление результатов (визуализация результатов численного моделирования).

Во всем мире ВГ в последнее время развивается бурными темпами и обозначается как CFD (Computational Fluid Dynamics). Создаются универсальные коммерческие пакеты программ CFD, которые предназначены для промышленной эксплуатации на заводах и КБ самого различного профиля – от производств аэрокосмической и автомобильной техники (FLUENT, Open FOAM, STAR-CD, PHOENICS и др.) до нефтяных компаний (пакеты фирм ROXAR, Schlumberger, STARS и др.).

Стиль и методы исследований в ВГ и в классической гидродинамике

В классической гидродинамике, как правило, изучают упрощенные постановки задач, которые допускают получение решений в аналитической форме (по крайней мере, аналитические результаты составляют значительную часть исследований). Обычно рассматриваются двумерные (плоские) задачи, активно используются методы конформных отображений и теории функций комплексного переменного. Анализ полученных формул, проведение по ним вычислений позволяет составить представление о гидродинамических полях и получить решение задачи.

В вычислительной гидродинамике основной целью является построение, в конечном итоге, численной модели изучаемого процесса. Эта модель позволяет имитировать (симулировать) течение жидкости на компьютере при различных исходных данных и таким образом проводить исследование.

Проиллюстрируем отмеченное различие ВГ от традиционной гидродинамики на следующей простой задаче.

Задача 1. Стрельба из пушки.

Пушка расположена в точке $(x_0 = 0, z_0 > 0)$, в момент времени $t = 0$ она стреляет ядром – шаром калибра $d = 2r$ и массой m - под углом вылета $\alpha > 0$ к горизонту с начальной скоростью $\vec{V}_0 = (u_0 = v_0 \cos \alpha, w_0 = v_0 \sin \alpha)$, см. рис. 1.

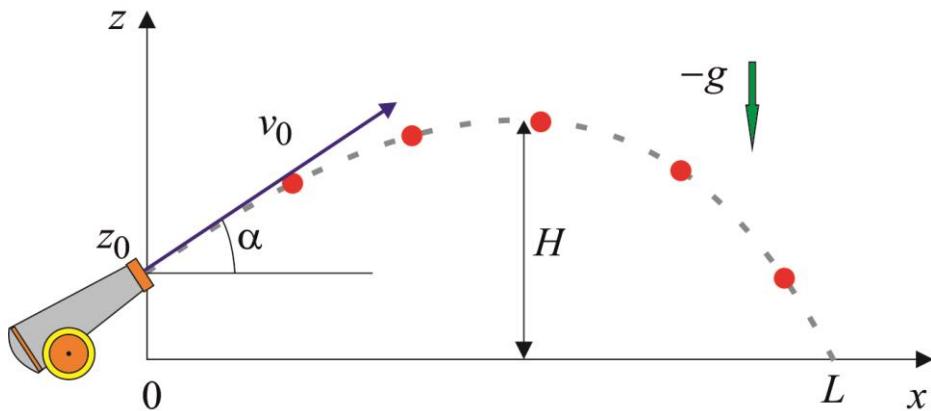


Рис. 0.1. К постановке задачи о стрельбе из пушки

В полете при $t > 0$ ядро движется по инерции в гравитационном силовом поле $\vec{G} = (0, -mg)$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, а также, вообще говоря, испытывает сопротивление среды \vec{F} . Можно рассмотреть идеализированную среду без сопротивления, когда $\vec{F} \equiv 0$. Более реалистичной представляется ситуация, когда сила сопротивления направлена против вектора скорости ядра $\vec{V} = (u, w)$, а её величина пропорциональна $V^2 = u^2 + w^2$. В этом случае

$$\vec{F} = -\xi \rho \frac{\vec{V} |\vec{V}|}{2} S; \quad \rho = \frac{m}{Vol}; \quad Vol = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3; \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \quad (0.1)$$

Здесь ξ - безразмерный коэффициент гидравлического сопротивления шара; S - площадь поперечного сечения ядра; Vol - его объем; ρ - плотность ядра. Подставив параметры ядра в формулу (0.1), получим формулу для силы сопротивления

$$\vec{F} = -\xi m \frac{3}{4} \frac{\vec{V} |\vec{V}|}{d} \quad (0.2)$$

Требуется рассчитать траекторию полета ядра – координаты $x(t), z(t)$, скорость полета в каждой точке $\vec{V}(t) = (u, w) \equiv (\dot{x}, \dot{z})$, а также время T , дальность L и максимальную высоту H полета ядра при различных параметрах стрельбы z_0, v_0 и α .

Математическая модель полета основана на втором законе Ньютона

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{\vec{G} + \vec{F}}{m}, \quad \vec{x} = (x, z), \quad (0.3)$$

который представлен системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно координат летящего ядра. Уравнения (0.3) следует дополнить начальными условиями

$$t = 0: \quad x = x_0, z = z_0; \quad u = \frac{dx}{dt} = u_0 = v_0 \cos \alpha, \quad w = \frac{dz}{dt} = w_0 = v_0 \sin \alpha; \quad (0.4)$$

Аналитическое решение задачи получим для среды без сопротивления. Из (0.3), (0.4) при $F = 0$ получаем две отдельных задачи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = 0, \quad t > 0; \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = u_0. \quad (0.5)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = -g, \quad t > 0; \quad z(0) = z_0, \quad \frac{dz}{dt}(0) = w_0. \quad (0.6)$$

Решение этих задач получается интегрированием и имеет вид

$$u(t) = u_0, \quad x(t) = x_0 + u_0 t, \quad t \geq 0 \quad (0.7)$$

$$w(t) = w_0 - gt, \quad z(t) = z_0 + w_0 t - g \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0. \quad (0.8)$$

Формулы (0.8) для вертикальных составляющих показывают, что вначале ядро, замедляясь, летит вверх ($w > 0$), в момент $t_H = w_0 / g$ подъем прекращается и начинается спуск. При этом максимальная высота ядра равна

$$t_H = \frac{w_0}{g}, \quad H = z(t_H) = z_0 + \frac{w_0^2}{2g}. \quad (0.9)$$

Приравняв $z(t)$ к нулю, получим квадратное уравнение

$$t^2 - \frac{2w_0}{g}t - \frac{2z_0}{g} = 0,$$

определяющее момент падения ядра на землю:

$$T = \frac{w_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2z_0 g}{w_0^2}} \right). \quad (0.10)$$

При этом дальность стрельбы определяется формулой (0.7):

$$L = x(T) = x_0 + \frac{u_0 w_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2z_0 g}{w_0^2}} \right). \quad (0.11)$$

Это выражение зависит от угла вылета α , входящего в начальные скорости согласно определениям (0.4). Уравнение $dL/d\alpha = 0$ определяет угол стрельбы максимальной дальности. Самый простой случай такого уравнения получается при стрельбе без «постамента», когда $z_0 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left(x_0 + \frac{2u_0 w_0}{g} \right) = \frac{2v_0^2}{g} \frac{d}{d\alpha} (\sin \alpha \cos \alpha) = 0, \\ \frac{d}{d\alpha} (\sin 2\alpha) &= 0, \quad \cos 2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Итак, аналитическое решение задачи для среды без сопротивления получено, однако если принять закон трения (0.2), задача становится нелинейной, и данный подход не приведет к успеху.

Численное решение общей задачи не вызывает трудностей и позволяет симулировать стрельбу при любых начальных данных. Вначале оценим время T полета ядра по формуле (0.10) и разобьём его на малые интервалы длительностью $\tau = T/M$. Построим равномерную сетку по времени с шагом τ ; узлы этой сетки определяются равенством $t_j = j\tau$, $j = 0..M$. С помощью индекса j определим искомые значения координат летящего ядра и скоростей в узлах сетки: $x_j = x(t_j)$, $z_j = z(t_j)$, $u_j = u(t_j)$, $w_j = w(t_j)$.

Перепишем постановку задачи (0.3), (0.4) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{F_x}{m} = -\xi \frac{3}{4} \frac{u|\vec{V}|}{d}, \quad u(0) = u_0; \quad \frac{dw}{dt} = \frac{F_z}{m} = -g - \xi \frac{3}{4} \frac{w|\vec{V}|}{d}, \quad w(0) = w_0. \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad x(0) = x_0; \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad z(0) = z_0. \end{aligned} \quad (0.13)$$

Далее, пользуясь определением производной, запишем аппроксимации (приближения) первых производных, входящих в уравнения (0.13):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t_j) &\approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\tau}, \quad \frac{dw}{dt}(t_j) \approx \frac{w_{j+1} - w_j}{\tau}. \\ \frac{dx}{dt}(t_j) &\approx \frac{x_{j+1} - x_j}{\tau}, \quad x(0) = x_0; \quad \frac{dz}{dt}(t_j) \approx \frac{z_{j+1} - z_j}{\tau}. \end{aligned}$$

Точность данных аппроксимаций мы оценим позже, при изучении метода конечных разностей. А сейчас подставим эти формулы вместо производных в уравнения (0.13), заменим функции в правой части соответствующими узловыми значениями и получим явную сеточную схему, решение которой находится по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} u_0 &= v_0 \cos \alpha, \quad w_0 = v_0 \sin \alpha; \quad |\vec{V}_j| = \sqrt{u_j^2 + w_j^2}; \\ u_{j+1} &= u_j - \tau \xi \frac{3}{4} \frac{u_j |\vec{V}_j|}{d}, \quad w_{j+1} = w_j - \tau \left(g + \xi \frac{3}{4} \frac{w_j |\vec{V}_j|}{d} \right), \quad j = 0..M-1; \\ x_0 &= 0, \quad z_0 = z(0); \quad x_{j+1} = x_j + \tau u_j, \quad z_{j+1} = z_j + \tau w_j, \quad j = 0..M-1. \end{aligned} \quad (0.14)$$

Расчетные формулы (0.14) дают возможность определять траектории полета и скорость ядра при входных заданных параметрах v_0, α, d, ξ . Такие показатели решения, как высота, дальность, время, оптимальный угол стрельбы определяются в ходе вычислительного эксперимента – многовариантных расчетов при варьировании исходных данных.

Задание 1. Просчитать Задачу 1 про стрельбу из пушки по аналитическим формулам и по сеточной схеме (0.14). Сравнить результаты между собой при отсутствии сопротивления ($\xi = 0$). Оценить влияние сопротивления среды на решение задачи.

ВГ и экспериментальные исследования

Применение средств ВГ при проектировании процессов и аппаратов имеет ряд очевидных преимуществ перед экспериментальными методами, такими как испытания в аэродинамических трубах, бассейнах, лотках, а также натурных экспериментах на скважинах. Вот главные из них.

- Снижение сроков и цены проведения испытаний. Отпадает необходимость в создании дорогостоящих натурных (лабораторных) моделей, энергетические и людские ресурсы экономятся. Подготовка специалистов может быть поставлена на регулярную основу.
- Повышение информативности. Многие поля скорости, давления и температуры просто не могут быть получены в эксперименте (высокие температуры, невозможность установки датчиков, сверхмалые или большие пространственные и временные масштабы). Разнообразные внешние условия и режимы протекания процесса легко моделируются средствами ВГ с помощью задания граничных условий, но не могут быть реализованы в эксперименте.
- Совершенствование математических моделей и методик. В процессе вычислительного эксперимента подбираются параметры модели, уточняются функциональные связи, создаются новые теории. Например, создание большинства полуэмпирических моделей турбулентности невозможно представить без средств ВГ.

Однако далеко не все так однозначно. Любые модели и методы ВГ имеют параметры и допущения; имеется погрешность сеточных аппроксимаций и численных решений задач математической модели. Поэтому их адекватность реальным процессам в принципе невозможна без лабораторных или натурных

экспериментов. Процедура подбора параметров называется *адаптацией* или *калибровкой* модели, и этот процесс занимает значительное место в процессе проектирования с применением средств ВГ. Даже сейчас, когда большинство элементов создаваемой конструкции проектируется на основе математического моделирования, окончательный вариант, как правило, проходит и натурные испытания в аэродинамической трубе или бассейне.

Этапы решения задач ВГ

Решение конкретной задачи средствами ВГ состоит из следующих этапов.

1. Анализ физического (механического) содержания задачи, исходных данных, степени их достоверности и интервалов возможного изменения. Формальное описание структуры выходных данных, включая графики, таблицы, рисунки и мультфильмы.
2. Выбор или создание математической модели процесса. Обычно это система дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих скорости $\vec{u} = (u, v, w)$, давления p , температуры T как функции координат \vec{x} и времени t , а также начальные и граничные условия к ним. Определение области расчета.
3. Построение сеточной модели области, задание материальных свойств среды и граничных условий на отдельных участках границы. Сетки в принципе зависят от метода решения задачи, но в каждом случае они должны учитывать ожидаемое поведение решения и сгущаться в областях высоких градиентов. Построение сетки – сложная и ответственная задача; надлежащий выбор сетки во многом определяет качество численного решения. Для построения сеток часто используют автоматические генераторы сеток. Как мы увидим позже, нумерация узлов сетки порождает структуру матриц систем алгебраических уравнений. В свою очередь, от структуры матрицы зависит скорость решения системы (например, прямые методы решения работают быстрее и требуют меньше памяти, когда

матрица имеет ленточную структуру, т.е. ее ненулевые элементы расположены вблизи главной диагонали). Поэтому применяются алгоритмы «оптимальной» перенумерации узлов.

4. Дискретизация. Дифференциальные уравнения и граничные условия заменяются сеточными аналогами. Это делается методом конечных разностей, конечных элементов или конечных объемов. В результате получается система алгебраических уравнений для узловых значений. Поскольку обычно сетка содержит много узлов (порядка $10^5 - 10^6$), то и система содержит столько же уравнений. Обычно нелинейные дифференциальные уравнения порождают и нелинейные алгебраические уравнения. Поэтому применяют линеаризацию (например, методом Ньютона или с помощью другого итерационного процесса) либо на дифференциальном, либо на алгебраическом уровне. В любом случае получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
5. Решение СЛАУ проводится либо прямым методом (типа метода исключения Гаусса, разложения Холецкого на произведение треугольных матриц), либо итерационным методом (сопряженных градиентов, релаксации, многосеточным). Применяются алгоритмы параллельных вычислений при работе на многопроцессорной технике.
6. Тестирование численной модели на точных решениях задачи, которые известны в некоторых частных случаях, либо на специально подобранных тестовых данных. Эти данные могут быть результатами расчетов по другим программам и алгоритмам (например, посчитаны с помощью коммерческих пакетов CFD), либо взяты из эксперимента. В некоторых случаях тестовых данных нет, тогда метод численного решения тестируется с помощью серии расчетов на последовательно сгущающихся сетках. Процесс сгущения заканчивается, когда результат перестает заметно зависеть от шага сетки. Этот шаг делается всегда с целью определить, насколько мелкую сетку надо брать, чтобы точность расчетов была приемлемой.

7. Проведение компьютерного моделирования и расчет термогидродинамических полей, а также функционалов от решения (например, вычисление коэффициента сопротивления).
8. Визуализация результатов моделирования. Анализ полученных результатов и формулировка научных либо технологических выводов.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Сведения из математики и механики

Не претендуя на полноту и строгость определений (они должны быть знакомы из соответствующих курсов), приведем в данном разделе описания основных объектов и операций над ними, которые будут активно использоваться в дальнейших выкладках.

Скалярная величина x может принимать вещественные значения.

Вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots)$ – это объект, компоненты которого v_i суть скаляры, представляющие собой проекции вектора на координатные оси x_i . Помимо тривиальных операций сложения и умножения на скаляр, укажем *скалярное произведение* векторов, которое определяется как скаляр $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам: $a_i b_i = \sum_i a_i b_i$).

Функция $y = f(x_1, \dots)$ принимает вещественное значение y в зависимости от значений скалярных аргументов x_i .

Функционал $y = F(f)$ принимает вещественное значение, действуя на функцию. Примеры:

$$y = \|f\|_C = \max_{a < x < b} |f(x)|; \quad y = \langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Оператор может действовать на функцию или вектор, результатом может быть функция или вектор. Например, оператор дифференцирования $\partial / \partial x$, применённый к функции $f(x)$, дает новую функцию $g(x) = \partial f / \partial x$;

- оператор дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial v_i / \partial x_i$$

применяется к вектору \vec{v} , в результате получается функция $\operatorname{div} \vec{v}$;

- оператор градиента

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right)$$

применяется к функции $f(x_i)$, в результате получается вектор-функция с компонентами $\partial f / \partial x_i$; Оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right)$ (оператор набла) называют оператором Гамильтона.

- если оператор A есть матрица элементами a_{ij} , то его действие на вектор \vec{v} порождает новый вектор

$$\vec{u} = A\vec{v}, \quad u_i = a_{ij}v_j$$

Тензор в механике представляют как объект σ с элементами σ_{ij} , каждый из которых характеризует действие σ в направлении оси x_j на виртуальную площадку в жидкости, нормаль к которой параллельна оси x_i . Рангом тензора называется максимальное значение индексов. Например, для тензора напряжений третьего ранга компонента $\sigma_{12} = \sigma_{xy}$ означает напряжение, приложенное к площадке, ортогональной оси x , в направлении оси y , т.е. касательное напряжение. С математической точки зрения тензор третьего ранга – это квадратная матрица 3×3 .

Точки зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды. У Эйлера наблюдатель (система координат) неподвижен в мировом пространстве и следит, как меняется свойство $f(x, t)$ в фиксированной точке x среды со временем t . При выводе уравнений используется эйлеров неподвижный контрольный объем V_E , сквозь который протекает деформируемая среда. У Лагранжа система координат вмороожена в движущуюся среду, координаты материальных точек не меняются со временем, наблюдатель «едет» вместе с материальной точкой среды и наблюдает, как меняется ее свойство $f(t)$. Если в

начальный момент $t = 0$ выделить лагранжев контольный объем V_L , то при $t > 0$ он будет деформироваться вместе со средой, хотя в лагранжевых координатах это объем, состоящий из одних и тех же материальных точек, останется неподвижным. Справедлива формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} f dV = \int_{V_E} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f v_n dS \quad (1.1)$$

где S – поверхность, ограничивающая объем V_E , а v_n – нормальная к S компонента скорости среды. Слева в формуле (1.1) записано изменение свойства f , содержащегося в материальном подвижном объеме V_L . Справа первый член выражает изменение свойства f в неподвижном объеме V_E , (вначале V_L совпадает с V_E , рассматриваются малые смещения), а второй член – это поток свойства f по нормали через поверхность S , ограничивающую V_E .

Теорема Гаусса - Остроградского устанавливает связь между потоком вектора через замкнутую поверхность и его дивергенцией в объеме Эйлера:

$$\int_S v_n dS = \int_{V_E} \operatorname{div} \vec{v} dV \equiv \int_{V_E} \nabla \cdot \vec{v} dV. \quad (1.2)$$

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы) следует непосредственно из (1.1) и (1.2), если учесть, что

$$m = \int_{V_L} \rho dV, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = 0 = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = \int_{V_E} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) dV$$

откуда в силу произвольности объема следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

Для несжимаемой жидкости, когда $\rho = const$, из (1.3) получаем уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.4)$$

Субстанциональная производная (полная производная) произвольной функции $f(x, t)$ определяется как сумма частной и конвективной производных

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla f) \quad (1.5)$$

и учитывает изменение функции за счет движения сплошной среды.

1.2. Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Эти уравнения предназначены для расчета полей скорости и давления в движущейся вязкой жидкости. В основе уравнений движения лежит второй закон Ньютона, который для гидродинамики формулируется в виде уравнений баланса импульса. Удельный импульс, или количество движения единицы объема – это величина $\rho \vec{u}$, $\frac{\kappa^2}{m^2 c}$, а импульс материального объема и скорость его изменения равны

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \int_{V_L} \rho \vec{u} dV, \frac{\kappa^2 \cdot M}{c}; \\ \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} \rho \vec{u} dV = \int_{V_E} \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{u} u_n dS, \frac{\kappa^2 \cdot M}{c^2} = h \text{ (Ньютон).} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь S – поверхность, ограничивающая объем V_E , а \vec{n} – внешняя к ней нормаль.

Закон сохранения импульса гласит: скорость изменения импульса материального объема жидкости определяется массовыми и поверхностными силами:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} = \int_{V_L} \rho \vec{g} dV + \int_S \vec{P}_n dS, h. \quad (1.7)$$

Под массовой силой, представленной первым интегралом в правой части уравнения (1.7), можно понимать, например, силу тяжести, для которой $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$. Вектор поверхностного напряжения \vec{P}_n приложен

к точке - центру элементарной площадки dS с локальной нормалью \vec{n} . Через эту точку можно провести три взаимно ортогональных площадки, нормали которых совпадают с направлениями декартовой системы координат – осями x_1, x_2, x_3 . На каждую из этих площадок действует вектор напряжений \vec{p}_i , $i = 1..3$, и главный вектор \vec{P}_n можно представить в виде разложения

$$\vec{P}_n = \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i n_i, \quad n_i = \cos(\vec{n}, x_i).$$

Подставив это равенство во второй интеграл (1.7) и применив теорему Гаусса-Остроградского (1.2), получим

$$\int_S \vec{P}_n dS = \int_{V_E} \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial x_i} dV = \int_{V_E} \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{p}_3}{\partial x_3} dV \quad (1.8)$$

В свою очередь, каждый вектор \vec{p}_i можно разложить по базисным векторам $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{i}, \vec{\varepsilon}_2 = \vec{j}, \vec{\varepsilon}_3 = \vec{k}$: $\vec{p}_i = p_{ij} \vec{\varepsilon}_j = p_{i1} \vec{i} + p_{i2} \vec{j} + p_{i3} \vec{k}$. В результате подынтегральное выражение в (1.8) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{p}_3}{\partial x_3} = \\ & = \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \right) \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где коэффициенты разложения p_{ij} образуют тензор полных напряжений \mathbf{P} . Нормальные компоненты p_{ii} этого тензора включают в себя и давление p , а касательные $p_{ij}, i \neq j$ совпадают с ранее введенными напряжениями σ_{ij} .

Используя символ Кронекера, можно представить

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

и записать (1.8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{p}_3}{\partial x_3} &= \\ = \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{1\beta}}{\partial x_\beta} \right) \vec{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{2\beta}}{\partial x_\beta} \right) \vec{j} + \left(-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{3\beta}}{\partial x_\beta} \right) \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставим это выражение в правую часть (1.8), а затем в (1.7). Для i -й компоненты будем иметь

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \int_{V_E} \left(\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV, \quad i = 1..3 \quad (1.11)$$

Чтобы получить уравнение импульсов, осталось преобразовать поверхностный интеграл в выражении (1.6) в объемный с помощью теоремы о дивергенции (1.2):

$$\int_S \rho \vec{u} u_n dS = \int_{V_E} \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) dV = \int_{V_E} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \vec{u}) dV.$$

В результате скорость изменения i -й компоненты импульса будет представлена объемным интегралом:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \int_{V_E} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} dV, \quad i = 1..3. \quad (1.12)$$

Приравняв (1.11) к (1.12) и приняв во внимание произвольность контрольного объема, получим систему трех уравнений движения в напряжениях:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

Эта система называется *уравнениями Навье*. Она дополняется уравнением неразрывности (1.3) для сжимаемой, либо уравнением (1.4) для несжимаемой жидкости. Очевидно, система уравнений Навье не замкнута, поскольку внутренние напряжения σ_{ij} не определены.

Для замыкания используют закон трения Стокса

$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (1.14)$$

в котором e_{ij} , $1/c$ - компоненты тензора скоростей деформации, а μ , Па · с - динамическая вязкость жидкости. Для сжимаемой теплопроводной жидкости следует записать уравнение состояния, которое для идеального газа имеет вид

$$p = \rho R T. \quad (1.15)$$

Здесь T , К – абсолютная температура; R , Па · м³ / (кг · К) – газовая постоянная. Последнее замыкающее уравнение для температуры будет записано позже. А пока представим альтернативные формы записи уравнений движения. Левая часть уравнений (1.13) с учетом уравнения неразрывности (1.3) и определения субстанциональной производной (1.5) преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + u_j \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{du_i}{dt}.$$

Градиенты напряжений в правой части уравнений (1.13) после подстановки (1.14) для жидкости с постоянными свойствами (плотностью ρ и вязкостью μ) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \Delta u_i,$$

где Δ - оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \operatorname{div grad} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Принимая эти результаты, из (1.13) после деления на ρ получим *уравнения Навье-Стокса* для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + g_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Здесь $\nu = \mu / \rho$, м²/с - кинематическая вязкость жидкости.

В заключение заметим, что уравнения Навье – это точные уравнения, выражающие баланс импульса, а закон Стокса следует рассматривать как эмпирический закон - результат наблюдений и экспериментов.

1.3. Уравнение энергии (теплопроводности, энталпии)

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда диссипация энергии в тепло из-за внутреннего трения отсутствует. Пусть, кроме того, удельная массовая энталпия (теплосодержание) h , Дж/кг определяется как cT , где c , Дж/(кг·К) – постоянная теплоемкость. Выделим, как и раньше, контрольный лагранжев объем V_L и рассмотрим закон сохранения его полной энталпии

$$H = \int_V \rho h dV = \int_V \rho c T dV, \text{ Дж}$$

Если \bar{q} , Вт/м² – плотность теплового потока, а f , Вт/м³ – удельная мощность внутренних источников тепла, то *баланс энергии* выразится уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_{V_E} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dV + \int_S \rho h v_n dS = - \int_S q_n dS + \int_{V_E} f dV, \text{ Вт.}$$

Знак минус в правой части появился потому, что положительным, т.е. направленным на повышение энергии объема, считается поток тепла внутрь, т.е. противоположно внешней нормали n . Используя теорему Гаусса-Остроградского (1.2), преобразуем поверхностные интегралы в объемные,

$$\int_S \rho h v_n dS = \int_{V_E} \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) dV; \quad \int_S q_n dS + \int_{V_E} \nabla \cdot \vec{q} dV$$

и, учитывая произвольность контрольного объема V_E , запишем уравнение энталпии

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{q} + f, \quad h = cT. \quad (1.17)$$

Для определения плотности теплового потока \vec{q} , Вт/м² привлечем линейный закон теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T, \quad (1.18)$$

в котором λ , Вт/(м·К) – коэффициент теплопроводности среды. Как и для уравнения импульсов, уравнение неразрывности (1.3) позволяет записать левую часть уравнения (1.17) в виде субстанциональной производной (1.5) удельной энталпии $h = cT$:

$$\rho \left\{ \frac{\partial(cT)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) cT \right\} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f \quad (1.19)$$

Если теплофизические свойства среды постоянны ($\rho, c, \lambda = \text{const}$), то из (1.149) получаем уравнение конвективного теплопереноса

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = a \Delta T + \phi \quad (1.20)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$, м²/с – температуропроводность, $\phi = f / (c\rho)$, К/с.

Уравнение (1.20) вместе с тремя уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности (1.16) образуют замкнутую систему уравнений для математического описания нестационарных трехмерных течений и тепловых полей вязкой жидкости с постоянными свойствами. Эта система получена с использованием двух упрощенных линейных законов: вязкого трения Стокса (1.14) и молекулярной теплопроводности Фурье (1.18). История

математического моделирования показывает, что эти законы имеют достаточно широкую область применения в практически важных задачах.

1.4. Начальные и граничные условия. Постановка задач ВГ

На основе общих уравнений Навье-Стокса (1.6) и конвективной теплопроводности (1.20) можно сформулировать конкретную краевую задачу гидродинамики, определив область расчета D с границей Γ и задав соответствующие этой задаче начальные и граничные условия. Проиллюстрируем основные виды краевых условий на типичной для ВГ двумерной (плоской) задаче течения вязкой теплопроводной жидкости в канале с внутренними препятствиями, см. рис. 1.1.

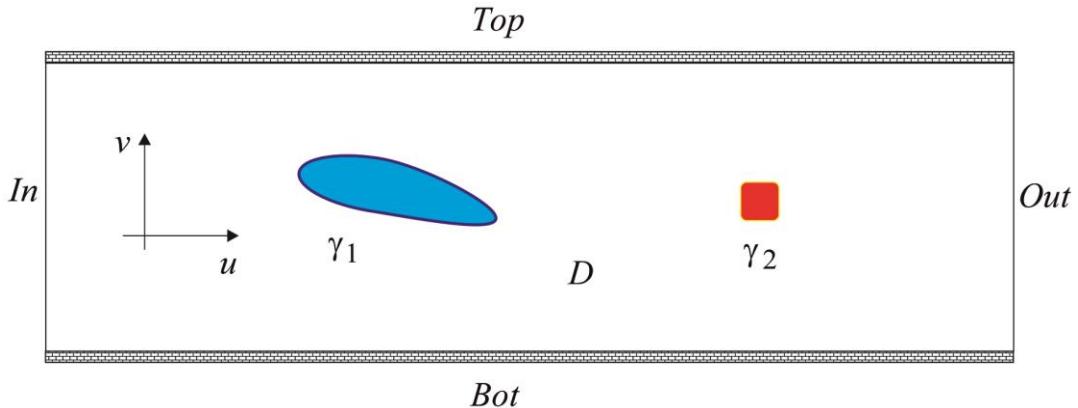


Рис. 1.1. Область расчета течения и теплообмена жидкости в канале с внутренними препятствиями

Уравнения импульса и неразрывности (1.16) и уравнение энергии (1.20) в двумерном случае имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \Delta u + g_x; \quad (1.21)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \Delta v + g_y; \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.23)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \Delta T + \phi \quad (1.24)$$

В рассматриваемой задаче массовые силы и источники тепла не существенны, $g_x = g_y = 0$, $\phi = 0$.

Граница Γ области D многосвязна и состоит из твердых стенок канала *Bot* и *Top*, поверхностей внутренних тел γ_1, γ_2 и «жидких» границ: входного сечения канала *In* и выходного - *Out*. Жидкость втекает в канал через левую границу *In* со скоростью $\vec{V}_0 = (u_0, 0)$, при температуре T_0 и давлении p_0 . Стенки канала теплоизолированы; поверхность препятствия γ_1 имеет температуру $T_1 < T_0$, а тело с поверхностью γ_2 испускает в омывающую жидкость тепловой поток плотности q . Жидкость свободно вытекает через правое сечение канала *Out*. Соответствующие граничные условия записываются следующим образом.

$$In: T = T_0; u = u_0(y), v = 0; p = p_0 \text{ в одной точке границы.} \quad (1.25)$$

$$Top, Bot: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0; u = 0, v = 0. \quad (1.26)$$

$$\gamma_1: T = T_1; u_n = 0, u_\tau = 0. \quad (1.27)$$

$$\gamma_2: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -q; u_n = 0, u_\tau = 0. \quad (1.28)$$

$$Out: \frac{dT}{dn} = 0; \frac{du}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0. \quad (1.29)$$

Заметим, что на твердых стенках ставится граничное условие прилипания $\vec{V} = 0$, которое выражается двумя скалярными равенствами: $u_n = 0, u_\tau = 0$, где n - внешняя нормаль к границе, τ - касательная. Первое равенство выражает непроницаемость стенки для жидкости, а второе – отсутствие скольжения.

На границах *In* и γ_1 задана температура жидкости, такое граничное условие называется граничным условием I-го рода или условием Дирихле. Выражения (1.26), (1.28) задают плотность теплового потока на границе и называются граничными условиями II-го рода или условиями Неймана. При

этом однородное условие (1.26) моделирует теплоизоляцию стенок канала *Top*, *Bot*. На выходной границе *Out* записаны так называемые конвективные граничные условия (1.29), которые моделируют свободное от напряжений и внешних воздействий вытекание жидкости из канала. Например, условие $du/dt = 0$ можно представить в развернутом виде

$$Out: \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + g_x = 0,$$

где второе равенство, являющееся следствием первого конвективного граничного условия, явно выражает отсутствие сил давления, вязкости и гравитации на границе *Out*.

Наряду с рассмотренными граничными условиями I-го и II-го родов для температуры часто используют граничное условие III-го рода, описывающего теплообмен жидкости со стенкой γ по закону Ньютона-Рихмана:

$$\gamma: \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha(T - T_\gamma). \quad (1.30)$$

Здесь α , $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ - коэффициент теплообмена, T_γ - температура стенки.

Примечательно, что в условии (1.30) $T|_\gamma \neq T_\gamma$, такое приближение означает, что под $T|_\gamma$ понимается температура жидкости за пределами пограничного слоя у стенки.

1.5. Безразмерные переменные и критерии подобия

Для сокращения количества параметров задачи, выявления главных и второстепенных членов уравнений, упрощения выкладок уравнения и краевые условия математических моделей ВГ обычно формулируют в безразмерном виде. Покажем, как проводится переход к безразмерным переменным на примере задачи (1.21) – (1.24), (1.25) – (1.29), (1.30), поставленной в параграфе 1.4.

Определим характерные масштабы величин, содержащиеся непосредственно в постановке и в граничных условиях задачи. Это линейный размер l обтекаемого тела γ_1 (см. рис. 1.1), средняя скорость входного потока u^0 , время $t_0 = l/u^0$, скоростной напор $p^0 = \rho(u^0)^2$, тепловой напор $T_1 - T_0$.

Введем безразмерные переменные, которые будем помечать чертой сверху:

$$\bar{x}, \bar{y} = \frac{x, y}{l}, \quad t = \frac{tu^0}{l}, \quad \bar{\vec{V}} = \frac{\vec{V}}{u^0}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_0}{p^0}; \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad (1.31)$$

Подставив (1.31) в уравнения Навье-Стокса (1.21), (1.22) и неразрывности (1.23), после несложных преобразований получим систему безразмерных уравнений

$$\overline{\frac{du}{dt}} = \overline{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}} = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} + \frac{1}{\text{Re}} \overline{\Delta u} + \overline{g_x}; \quad (1.32)$$

$$\overline{\frac{dv}{dt}} = \overline{\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}} = -\overline{\frac{\partial p}{\partial y}} + \frac{1}{\text{Re}} \overline{\Delta v} + \overline{g_y}; \quad (1.33)$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}} = 0. \quad (1.35)$$

$$\overline{\frac{dT}{dt}} = \overline{\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}} = \frac{1}{\text{Pe}} \overline{\Delta T} + \overline{f} \quad (1.36)$$

где

$$\text{Re} = \frac{u^0 l}{v}, \quad \text{Pe} = \frac{u^0 l}{a} = \text{Re Pr}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (1.37)$$

Безразмерные комплексы Re , Pe , Pr называются *числами Рейнольдса, Пекле и Прандтля* и являются основными критериями подобия в задачах термогидродинамики вязкой жидкости.

В дальнейшем для упрощения записи черту над безразмерными величинами будем опускать, если это не приводит к путанице.

Границные условия (1.25) – (1.30) в безразмерных переменных (1.31) имеют вид

$$In: T = 1; u = u_0(y) \sim 1; v = 0; p = 0. \quad (1.38)$$

$$Top, Bot: \frac{\partial T}{\partial n} = 0; u = 0, v = 0. \quad (1.39)$$

$$\gamma_1: T = 1; u_n = 0, u_\tau = 0. \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2: -\frac{\partial T}{\partial n} &= \frac{q l}{\lambda(T_1 - T_0)} = St Pe, St = \frac{q}{c\rho u^0(T_1 - T_0)}; \\ u_n &= 0, u_\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$Out: \frac{dT}{dn} = 0; \frac{du}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0. \quad (1.42)$$

В правой части условия Неймана (1.41) стоит число Стантона St – критерий подобия, равный отношению теплового потока от стенки к конвективному теплопереносу.

Границное условие III рода (1.30) на поверхности γ , нагретой до температуры T_1 , в безразмерных переменных имеет вид

$$\gamma: \frac{\partial T}{\partial n} = -Nu(T - 1). \quad (1.43)$$

В правой части условия (1.43) стоит безразмерный коэффициент теплообмена – число Нуссельта.

1.6. Упрощенные модели ВГ

Универсальные уравнения импульсов, неразрывности и теплопереноса (1.16), (1.20) и построенные на их основе математические модели требуют при их численной реализации значительных вычислительных ресурсов. В ряде практически важных случаев целесообразно использовать разумные упрощения общих моделей; некоторые из них излагаются в данном разделе.

1.6.1. Двумерные уравнения Навье-Стокса в преобразованных переменных

В плоской модели (1.32) – (1.35) искомыми являются т.н. *естественные переменные* – три функции u, v, p . Оказывается, задачу можно несколько упростить, если ввести т.н. *преобразованные переменные*: функцию тока ψ , через которую выражаются компоненты скорости

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.44)$$

и завихренность ω

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.45)$$

Если подставить выражение (1.44) в уравнение неразрывности, получим тождество, а определение (1.45) с учетом равенств (1.44) превращается в уравнение Пуассона для функции тока:

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\Delta \psi. \quad (1.46)$$

Уравнение для функции ω получается так: первое уравнение импульсов (1.32) дифференцируем по y , а второе (1.33) дифференцируем по x и вычитаем первое из второго. Получаем уравнение переноса завихренности

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \Delta \omega. \quad (1.47)$$

Давление исключено из постановки задачи, которая свелась к системе двух уравнений для преобразованных переменных – функции тока и вихря. После того, как задача (1.46), (1.47) для ψ и ω решена, и по формулам (1.44) найдены скорости u и v , при необходимости в любой фиксированный момент t можно подсчитать и давление p , решив дополнительное уравнение Пуассона

$$-\Delta p = \phi(u, v) = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Это уравнение получают из системы Навье-Стокса в естественных переменных так: уравнение (1.32) дифференцируют по x , уравнение (1.33) дифференцируют по y и складывают.

Границные условия для модели Навье-Стокса в преобразованных переменных. Поясним формулировку граничных условий на модельной задаче, рассмотренной в параграфе 1.4. Условия прилипания (1.27), (1.28) на твёрдых стенках ставятся для нормальной и касательной компонент скорости: $u_n = 0$, $u_\tau = 0$. Определения (1.44) и (1.45) можно переписать вблизи границы γ в этих терминах:

$$\gamma: u_\tau = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad u_n = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0. \quad (1.48)$$

$$\gamma: \omega = -\frac{\partial u_\tau}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\frac{\partial u_\tau}{\partial n}. \quad (1.49)$$

Интегрируя второе условие (1.48) по границе, получаем $\psi = \text{const}$, т.е. значение функции тока на каждой твердой стенке постоянно, но различно для разных стенок. Поскольку функция ψ определена с точностью до произвольной постоянной, положим $\psi = 0$ на нижней стенке канала *Bot*.

Заданную на входном сечении канала эпюру скорости (1.25) можно выразить граничным условием $\partial \psi / \partial \tau = \partial \psi / \partial y = u_0(y)$, из которого с учетом определений (1.48), (1.49) следует граничное условие

$$In: \psi(y) = \int_0^y u_0(\eta) d\eta; \quad \omega(y) = -\frac{du_0}{dy} \quad (1.50)$$

Если положить в первом равенстве $y = H$ (это высота канала, соответствует верхней стенке *Top*), получим значение функции тока $\psi(H)$, равное расходу Q жидкости в канале.

$$Top: \psi = Q; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (1.51)$$

Однородное условие Неймана в (1.51) – это первое из условий (1.48), оно выражает отсутствие проскальзывания жидкости на стенке).

На выходной границе ставятся конвективные граничные условия не только для вихря, но и для функции тока:

$$Out : \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (1.52)$$

Итак, граничные условия на всех участках границы сформулированы, причем на твердых стенках два граничных условия ставятся для функции тока. Одно из них – условие Неймана – запрещает скольжение, а из запрета протекания жидкости следует граничное условие $\psi = \psi_i = \text{const}$ на участках связности границы. Значения «констант» $\psi = 0$ и $\psi = Q$ заданы только на стенах канала *Bot* и *Top*, а ψ_i на обтекаемых поверхностях γ_i подлежат определению.

Для этого запишем уравнение импульса (1.32) вблизи границы γ с учетом условия прилипания. Будем иметь

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial n^2} + g_\tau;$$

Заменив в этом равенстве согласно (1.49) $\partial u_\tau / \partial n$ на $-\omega$, получим так называемое граничное условие Пирсона

$$\gamma : \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial n} + g_\tau, \quad (1.53)$$

которое, в частности, позволяет определить распределение давления по контуру γ с помощью криволинейного интеграла:

$$\gamma : p(s) = p(s_0) - \frac{1}{Re} \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} + g_\tau \right) d\tau \quad (1.54)$$

где s_0 – произвольная «начальная» точка контура, а s – любая другая его точка. Если контур γ – замкнутый, то в (1.54) можно взять конечную точку

интегрирования совпадающей с начальной, т.е. интегрировать по всей границе γ . Интеграл по замкнутому контуру от g_τ при постоянном векторе \vec{g} равен нулю, а в силу непрерывности давления первые два члена уравнения (1.54) сокращаются. Оставшееся выражение на каждом контуре

$$\int_{\gamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} d\gamma = 0 \quad (1.55)$$

будем трактовать как нелокальное (интегральное) граничное условие для определения значений ψ_i функции тока на твердых стенках γ_i .

1.6.2. Ползучие и невязкие течения. Уравнения Стокса и Эйлера

Ползучие течения - это медленные течения, когда все гидродинамические характеристики определяются вязкими напряжениями, а инерционные эффекты пренебрежимо малы. Например, движение мелких частиц в суспензии, течение ледников, течение в тонких слоях смазки в технических устройствах и др. Ползучие течения описываются специальными уравнениями, которые выводятся из общих уравнений Навье – Стокса.

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{ускорение (инерция)}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\text{градиент давления}} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}, \quad (1.56)$$

вязкие напряжения *массовые силы*

где левая часть – это ускорение, первые два члена в правой части выражают внутренние напряжения в жидкости, а последний – массовые силы. Для ползучих течений ускорениями пренебрегают. Это означает, что силы давления и массовые силы уравновешиваются силами вязкости, и из (1.56) для несжимаемой жидкости получаем систему уравнений Стокса

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \vec{g}. \quad (1.57)$$

Если вести безразмерные переменные

$$\overline{x, y, z} = \frac{x, y, z}{h}; \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho g h}; \quad \overline{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{u^0}, \quad u^0 = \frac{gh^2}{\nu}; \quad \overline{\vec{g}} = \frac{\vec{g}}{g}, \quad (1.58)$$

где h - заданный линейный размер, g - характерное ускорение массовых сил, то из (1.57) получим безразмерную модель ползучего течения (черту сверху опускаем)

$$\nabla p = \Delta \vec{u} + \vec{g}. \quad (1.59)$$

Используя масштабы (1.58), легко оценить число Рейнольдса для ползучих течений, которое быстро убывает с ростом вязкости и уменьшением линейного размера:

$$Re = \frac{gh^3}{\nu^2}.$$

Давление в ползущих течениях обычно является гармонической функцией (т.е. функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа). В самом деле, применим оператор дивергенции к векторному уравнению (1.59). Учитывая уравнение неразрывности, получим

$$\Delta p = \nabla \vec{g}.$$

Если $\nabla \vec{g} = 0$, то есть массовые силы *соленоидальны*, то $\Delta p = 0$. Простым примером соленоидальной массовой силы является сила тяжести $=(0,0,-1)$.

Невязкие течения – это высокоскоростные течения, в которых инерция (ускорение) превалирует над вязкостью. Формально математическую модель течения невязкой (идеальной) жидкости можно получить из уравнений Навье-Стокса (1.16), положив $\nu = 0$. В результате получаются уравнения Эйлера

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.60)$$

1.6.3. Динамический пограничный слой

При обтекании тел потоком вязкой жидкости происходит ее торможение на твердых стенках (прилипание), и благодаря вязкости это торможение, ослабевая, распространяется от стенки вглубь потока на некоторое расстояние δ , за пределами которого жидкость движется без значительных деформаций, и вязкие силы там не играют значительной роли. Таким образом, эффект вязкости

проявляется в сравнительно тонком слое, который называется динамическим пограничным слоем. Для простоты рассмотрим продольное обтекание плоской стенки (рис. 1.2) однородным потоком со скоростью u_e .

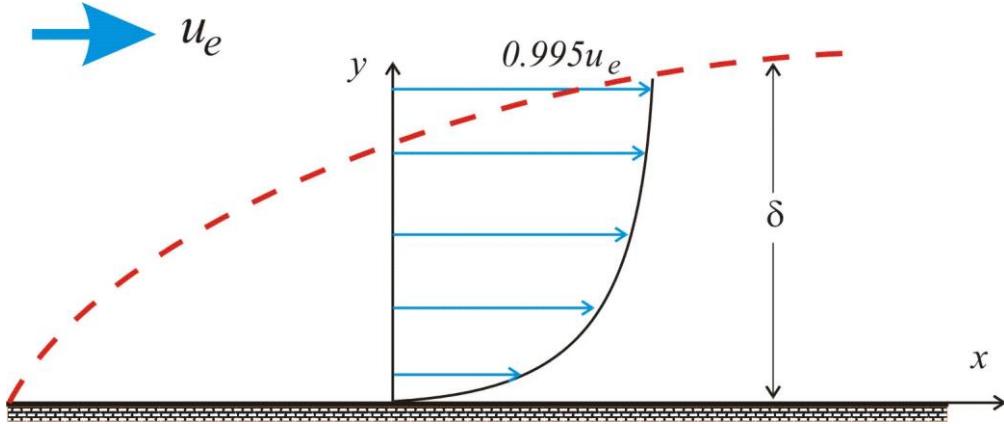


Рис. 1.2. Ламинарный пограничный слой
при продольном обтекании плоской пластины

Выведем уравнения стационарного пограничного слоя из двумерных уравнений Навье-Стокса (1.16). Массовые силы для простоты отбросим.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Введем масштабы: длины l – в продольном направлении, δ – в поперечном; продольной скорости – u^0 , поперечной скорости – v^0 ; давления – p^0 . Среди этих масштабов u^0 выбираем как среднюю скорость внешнего течения u^e , l ассоциируем с продольной координатой x , а значения p^0 , v^0 , δ пока не известны. Перепишем систему (1.61) в безразмерных переменных

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \bar{u} = \frac{u}{u^0}, \bar{v} = \frac{v}{v^0}, \bar{p} = \frac{p}{p^0}. \quad (1.62)$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{u^0}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{v^0}{\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0,$$

откуда находим масштаб поперечной скорости

$$v^0 = \varepsilon u^0, \quad \varepsilon = \delta / l. \quad (1.63)$$

С учетом этого соотношения преобразуем уравнение импульса в направлении x .

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2}{l} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\varepsilon u_0^2}{\delta} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \\ = - \frac{p^0}{\rho l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu u_0}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\nu u_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}. \end{aligned}$$

Разделим это уравнение на u_0^2 / l и обозначим через Re безразмерный комплекс $u^0 l / \nu$. Будем иметь

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{p_0}{\rho u_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right). \quad (1.64)$$

Выбор масштаба давления $p^0 = \rho u_0^2$ теперь очевиден, причем он вполне согласуется с давлением вне пограничного слоя, где течение свободно от вязких напряжений и описывается *уравнением Бернулли*

$$p + \rho u_e^2 / 2 = \text{const}, \quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (1.65)$$

В пограничном слое инерция потока компенсируется сдвиговыми вязкими напряжениями. Это означает, что в уравнении (1.64) следует положить коэффициент при $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2$ равным единице¹:

¹ Формально математически данное утверждение можно сформулировать так: выберем свободный масштаб δ так, чтобы коэффициент при $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2$ стал равным единице.

$$\frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{или } \delta(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu l}{u_e}} \quad (1.66)$$

Соотношение (1.66) показывает, что при больших числах Рейнольдса пограничный слой является тонким, $\varepsilon \ll 1$, причем его толщина растет как квадратный корень от расстояния в продольном направлении (масштаб l можно заменить на x), и тем больше, чем выше вязкость жидкости и ниже ее скорость.

Итак, с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$ x -уравнение движения в пограничном слое получается из (1.64), (1.66) в виде

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (1.67)$$

Преобразуем теперь к безразмерному виду второе уравнение импульсов (1.61), используя только что определенные масштабы и безразмерные комплексы.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon u_0^2}{l} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\varepsilon^2 u_0^2}{\delta} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \\ = - \frac{u_0^2}{\delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\nu \varepsilon u_0}{l^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\nu \varepsilon u_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}. \end{aligned}$$

Поделим это уравнение на u_0^2 / δ . После простых преобразований будем иметь

$$\varepsilon^2 \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right).$$

Таким образом, из второго уравнения движения следует, что с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ давление поперек пограничного слоя не меняется,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (1.68)$$

и равно давлению во внешнем потоке, где работает уравнение Бернулли (1.65). Это позволяет исключить давление из рассмотрения и записать уравнения плоского пограничного слоя

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}}; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

в которых только две неизвестных: компоненты скорости \bar{u} и \bar{v} , а скорость внешнего потока \bar{u}_e задана.

1.6.4. Тепловой пограничный слой

Уравнение теплового пограничного слоя получается из уравнения энергии (1.24)

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.70)$$

аналогично тому, как это было сделано для первого уравнения импульсов. Вместо толщины динамического пограничного слоя δ мы определяем толщину теплового пограничного слоя δ_T . Будем изучать то же обтекание пластины, но добавим условие, что внешний поток имеет температуру T_e , а стенка – температуру $T_w < T_e$. Безразмерные пространственные координаты вводятся так же, как в (1.62), а безразмерная температура определяется формулой

$$\bar{T} = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}.$$

Уравнение (1.70) преобразуется к виду

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\varepsilon_T^2 \text{Pe}} \left(\varepsilon_T^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right), \quad (1.71)$$

откуда по аналогии с (1.66), (1.67) получаем

$$\frac{1}{\text{Pe} \varepsilon_T^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon_T = \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \text{или } \delta_T(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Pe}}} = \sqrt{\frac{al}{u_0}} \quad (1.72)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (1.73)$$

Здесь используются безразмерные комплексы $\varepsilon_T = \delta_T / l$ и число Пекле $\text{Pe} = u_0 l / a$. Сравнивая формулы (1.66) и (1.72), легко сопоставить толщины динамического и теплового пограничного слоев:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} = \sqrt{\text{Pr}}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Число Прандтля Pr является теплофизическими свойством жидкости; в общем случае оно зависит от температуры. Видно, что при $\text{Pr} = 1$ и нулевом градиенте давления безразмерные уравнения для продольной скорости (1.69) и температуры (1.73) совпадают, а, значит, при аналогичных граничных условиях совпадают и их решения – эпюры скорости и профили температуры.

1.7. Моделирование турбулентных течений

Подробное изучение методов математического моделирования и расчета турбулентных течений выходит за рамки настоящего учебного пособия; этому посвящен специальный курс лекций для магистрантов-механиков, издано учебное пособие. Поэтому в данном параграфе мы ограничимся формулировкой осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) для несжимаемой жидкости и упомянем наиболее популярные способы их замыкания.

1.7.1. Уравнения Рейнольдса

Турбулентные течения, как и ламинарные, описываются рассмотренными выше уравнениями Навье-Стокса и энергии. Основанный на численном решении этих уравнений метод расчета турбулентных потоков называется прямым численным моделированием (DNS). К сожалению, применение DNS

ограничено, поскольку структура турбулентного потока содержит пульсирующие нестационарные вихри разных размеров и частот, причем с ростом числа Рейнольдса пространственно-временные масштабы мелких вихрей уменьшаются. Для их разрешения в подходе DNS требуется мелкая расчетная сетка, что влечет резкое увеличение вычислительных затрат. На практике редко применяют прямое численное моделирование при $Re > 10^4$, да и то преимущественно в научных задачах.

В инженерных расчетах турбулентных течений наибольшей популярностью пользуется подход RANS, основанный на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса для средних полей скорости, давления и температуры, которые представляют наибольший практический интерес. При этом пульсации перечисленных параметров в турбулентном потоке создают дополнительные напряжения и тепловые потоки.

Осредненные уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) + g_i, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

и называются уравнениями Рейнольдса. Здесь $\sigma_{ij} = \mu e_{ij}$ - тензор вязких напряжений осредненного течения, выраженный по закону Стокса через скорости деформаций $e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$, а τ_{ij} - симметричный тензор турбулентных напряжений, порожденный пульсациями скорости.

Очевидно, модель (1.74) не замкнута, и требуется дополнительно 6 дополнительных уравнений для компонент симметричного тензора τ_{ij} . Простейший способ замыкания уравнений Рейнольдса состоит в том, чтобы выразить τ_{ij} через характеристики осредненного течения, например

$$\tau_{ij} = \mu_T e_{ij}. \quad (1.75)$$

Здесь коэффициент μ_T (либо $\nu_T = \mu_T / \rho$) называется турбулентной вязкостью, который, в отличие от молекулярной вязкости μ , не является свойством жидкости, а зависит от особенностей турбулентного течения. Определение турбулентной вязкости ν_T через средние характеристики потока составляет предмет т.н. полуэмпирических моделей турбулентности. Формулу (1.75) и закон Стокса подставим в уравнения (1.74) и после элементарных преобразований получаем уравнения Рейнольдса в окончательном виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + g; \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0;$$
(1.76)

где осталось определить одну скалярную функцию – кинематическую турбулентную вязкость ν_T .

Простейшим способом замыкания уравнений (1.76) является алгебраическая модель пути смешения Прандтля, в которой турбулентная вязкость вычисляется по формуле $\nu_T = l^2 |e|$, $|e| = \sqrt{e_{ij} e_{ij}}$, где $l = \kappa y$ – длина пути смешения, $\kappa \approx 0.4$ – постоянная Кармана, y – расстояние до стенки. Данная модель турбулентности применяется для внутренних течений.

Более широкую область применения имеют дифференциальные модели турбулентности, среди которых упомянем ставшие классическими изотропные двухпараметрические модели $k - \varepsilon$ и $k - \omega$. В первой из них k – кинетическая энергия пульсаций скорости, а ε – скорость её диссипации. Для каждой из этих функций выводится дифференциальное уравнение эволюционного типа, а искомая вихревая вязкость выражается через них по формуле $\nu_T = c_\mu k^2 / \varepsilon$, $c_\mu = 0.09$. Схоже устроена и модель $k - \omega$, в которой ω – частота, на которой происходит диссипация вихревой энергии. Турбулентная вязкость вычисляется через параметры модели турбулентности как $\nu_T = \alpha^* k / \omega$, где безразмерный

параметр α^* демпфирует турбулентность вблизи твердых стенок в низкорейнольдсовых течениях.

1.7.2. Осредненные уравнения конвективного теплопереноса

Разложение актуальных величин скорости и температуры на средние и пульсации с последующим осреднением уравнения конвективной теплопроводности (1.19) приводит к следующему уравнению для среднего поля температуры:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-q_i - q_i^T \right) + f \quad (1.77)$$

Здесь $\vec{q} = -\lambda \nabla T$ - вектор осредненного потока тепла, выраженный через градиент средней температуры с помощью закона Фурье, а компоненты вектора q_i^T образуют дополнительный турбулентный поток тепла, обусловленный корреляцией турбулентных пульсаций температуры и скорости.

По аналогии с уравнениями Рейнольдса для замыкания уравнения (1.77) вводят турбулентную теплопроводность и выражают пульсационный тепловой поток через градиент среднего температурного поля: $\vec{q}^T = -\lambda_T \nabla T$. Подставив это выражение в уравнение (1.77) и поделив на $c\rho$, получим осредненное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(a + a_T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \phi. \quad (1.78)$$

где a_T – турбулентная температуропроводность. Так же, как турбулентная вязкость ν_T , этот параметр не имеет какого-либо физического смысла. Однако эксперименты и опыт инженерных расчетов показывают, что во многих течениях удобно использовать турбулентное число Прандля

$$\text{Pr}_T = \frac{\nu_T}{a_T}, \quad (1.79)$$

которое выражает известную для ламинарных течений аналогию процессов вязкости и теплопроводности. В простейших сдвиговых вихревых течениях значение Pr_T близко к единице ($0.5 \div 0.9$), в сложных течениях его значение

зависит от геометрии; на практике для турбулентного числа Прандля применяют эмпирические соотношения. В любом случае, подстановка (1.79) в уравнение (1.78) несколько упрощает задачу: неизвестной остается лишь кинематическая турбулентная вязкость ν_T , для которой строятся приемлемые модели турбулентности.

1.8. Модель напорной двухфазной фильтрации

Теория фильтрации - раздел гидродинамики, посвященный исследованию движения жидкостей через пористые среды, то есть тела, пронизанные системой сообщающихся между собой пустот (пор). Пористыми являются многие природные тела: грунты, горные породы, древесина, кожа, кость, мягкие ткани животных, а также искусственные материалы: строительные (бетон, кирпич), пищевые (хлеб), искусственная кожа, керамика, металлические детали, полученные методом порошковой металлургии, и т.д. Пористой является почва, верхний слой грунта, служащий основой земледелия. Даже это простое перечисление показывает ту огромную роль, которую играют пористые среды в жизни людей. Характерная особенность всех этих материалов - способность накапливать в себе жидкость и позволять ей двигаться под действием внешних сил.

Приложения теории фильтрации.

- Движение жидкостей через пористые биоматериалы в живых организмах, обмен жидкостью в клетках и тканях, движение соков в деревьях и злаках и другие.
- Движение влаги в почве; ирригации; охрана грунтовых вод от загрязнения отходами производства, удобрениями и пр.
- Добыча нефти и газа из глубоко залегающих подземных пластов.

1.8.1. Основные понятия, определения и уравнения гидродинамики нефтяного пласта

В данном разделе мы представим уравнения двухфазной фильтрации, описывающих движение флюида в нефтяном пласте при заводнении и добыче через систему скважин.

Примем следующие допущения.

- 1) нефть и вода несжимаемы, а пористая матрица (скелет) линейно сжимаема;
- 2) сила гравитации мала по сравнению с градиентами давления при напорной фильтрации;
- 3) капиллярными эффектами можно пренебречь.

Пласт представляет собой пористую среду, т.е. грунт с системой разветвленных мелких капилляров. Важнейшей количественной характеристикой пористых тел является их пористость m , определяемая как доля объема тела, приходящаяся на поры, или объем пор в единице объема материала. Поры образуют поровое пространство - сложную разветвленную и нерегулярную сеть пор. Некоторое представление о структуре порового пространства дает рис. 1.3, где схематически показан срез пористого материала (зеленым цветом закрашены срезы зерен, белым - порового пространства).



Рис. 1.3. Срез пористой среды

Пористость большинства материалов находится в пределах 0.1 – 0.4. Взяв для оценки типичное для многих горных пород значение $m = 0.25$, находим, что в 1 м³ породы объем пор $\sim 0,25 \text{ м}^3 = 250 \text{ л}$. Когда речь идет о породах - коллекторах нефти и газа или пластах, насыщенных пресной водой в пустынных районах, пористость является главным параметром, поскольку она определяет запасы месторождения, то есть количество жидкости в данном пласте. Пористость - безразмерная величина, она не зависит от размера частиц, составляющих пористую среду. Пористость слоя песчинок, слоя горошин и слоя пушечных ядер одинакова.

Для большинства приложений важна пропускная способность (проницаемость k) пористой среды, то есть характеристика того, насколько легко может двигаться в ней жидкость. При одной и той же пористости проницаемость различных сред может оказаться совершенно разной. Её определение связано с основным законом движения жидкости в пористой среде, называемом законом Анри Дарси (1856). Схема опыта Дарси показана на рис. 1.4.

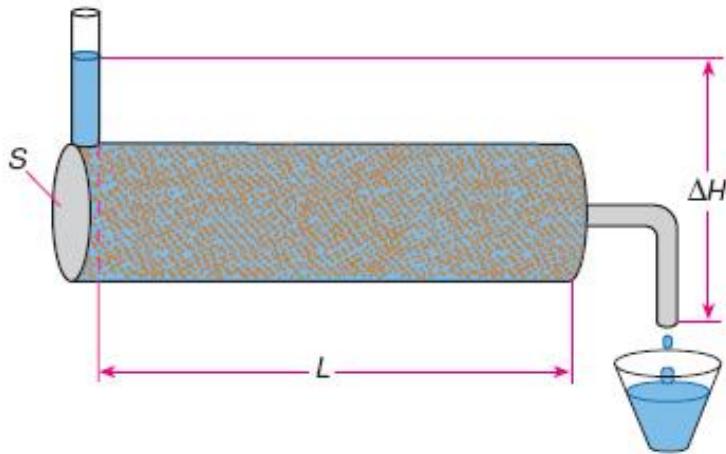


Рис. 1.4. Опыт А. Дарси по определению скорости фильтрации (1856 г.)

Он брал трубу с песком, фиксировал градиент давления $\nabla p = dp / dx = \rho g \Delta H / L$, измерял расход воды Q и вычислял скорость фильтрации $u = Q / S$. Оказалось, что $u = -(k / \mu) \nabla p$, где μ - динамическая вязкость флюида. Размерность проницаемости – м^2 , или Дарси = 10^{-12} м^2 . Часто k называют абсолютной проницаемостью пористой среды, подчеркивая тем самым, что она не зависит от того, какой флюид фильтруется (вода, нефть, воздух и т. д.).

Перейдем к формальным определениям.

1.8.2. Уравнения двухфазной фильтрации

Если вокруг точки x, y, z выделить контрольный объем V , то в нем можно подсчитать объем порового пространства V_p . *Пористость* – это отношение объема пор к полному объему среды:

$$m(x, y, z) = V_p / V, \quad V \rightarrow 0.$$

В дальнейшем будем считать, что фазы фильтрующейся жидкости (нефть и вода) несжимаемы, т.е. их плотности $\rho_w, \rho_o = \text{const}$, а пористость скелета линейно зависит от давления,

$$m = m_0 [1 + \beta_* (p - p_0)], \quad \frac{\partial m}{\partial t} = m_0 \beta_* \frac{\partial p}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.80)$$

Коэффициент β_* , Па⁻¹, называется сжимаемостью, а β - упругоёмкостью пористого коллектора.

Весь объем пор заполнен жидкостью (*флюидом*), которая представляет собой композицию воды и нефти. Отношение объема V_O (oil), занятого нефтью, к поровому объему V_p называется *нефтенасыщенностью*

$$s_O(x, y, z, t) = V_O / V_p,$$

а величина, равная отношению объема V_w (water), занятого водой, к поровому объему V_p , называется *водонасыщенностью* s_w . Очевидно, $s_w = 1 - s_O$. В дальнейшем будем оперировать с водонасыщенностью и обозначать ее просто s , а нефтенасыщенность – это $1 - s$. В конечном объеме нефтяного пласта в момент t объемы нефти и воды (запасы) определяются формулами

$$V_O = \int_V m(1-s) dx dy dz, \quad V_w = \int_V m s dx dy dz.$$

Скорость фильтрации флюида \vec{v} не совпадает с истинными микромасштабными скоростями жидкости в порах, а определяется как средний удельный (на 1 кв. м сечения) расход за единицу времени. Согласно *закону Дарси* скорости фильтрации фаз определяются соотношениями

$$\vec{v}_O = -\frac{kk_O}{\mu_O} \operatorname{grad} p, \quad \vec{v}_w = -\frac{kk_w}{\mu_w} \operatorname{grad} p, \quad (1.81)$$

где p – давление, k – *абсолютная проницаемость* пористого коллектора, а безразмерные функции $k_O(s)$, $k_w(s)$ называются *относительными фазовыми проницаемостями* (ОФП); μ_O и μ_w – вязкости нефти и воды.

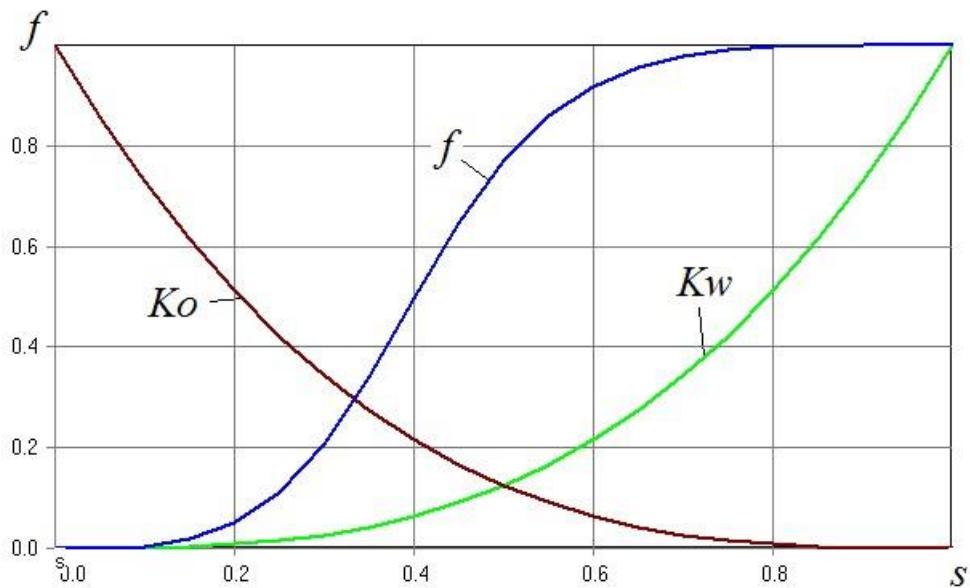


Рис. 1.5. Относительные фазовые проницаемости и функция Баклея-Леверетта (доля воды в суммарном потоке)

На рис. 1.5 приведены типичные графики относительных фазовых проницаемостей. Можно видеть предельные (критические, остаточные) значения подвижности фаз $s_* \sim 0.1$, $s^* \sim 0.9$. Природа их такова. Если насыщенность несмачивающей фазы (нефть) меньше критического значения, эта фаза должна распасться на отдельные капли, которые заперты капиллярными силами и не способны двигаться под действием перепадов давления. Происходит защемление некоторого количества остаточной нефти в пласте при вытеснении ее водой. При насыщенности выше критической поровые каналы, занятые данной фазой, образуют связную сеть, в которой под действием градиента давления происходит течение. При этом течение их происходит по своей части порового пространства так, как если бы вторая фаза затвердела. Для каждой из фаз справедлив закон Дарси, но проницаемость уменьшается, так как часть порового пространства занята другой фазой. Отношение эффективной проницаемости к абсолютной (однофазной) проницаемости данной среды носит название относительной фазовой

проницаемости для данной фазы. В расчетах ОФП часто аппроксимируют степенными функциями:

$$k_w(\bar{s}) = \bar{s}^n, \quad k_O(\bar{s}) = (1 - \bar{s})^n, \quad \bar{s} = \frac{s - s_*}{s_* - s_*}, \quad n = 1..4 \quad (1.82)$$

Уравнения неразрывности фаз имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ms\rho_w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w \vec{v}_w) &= 0, \\ \frac{\partial(m(1-s)\rho_O)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_O \vec{v}_O) &= 0. \end{aligned}$$

Т.к. плотности фаз считаются постоянными, эти уравнения упрощаются,

$$\frac{\partial(ms)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_w) = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial(m(1-s))}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_O) = 0. \quad (1.84)$$

Сложим уравнения (1.83) и (1.84) и получим

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_w + \vec{v}_O) = \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_O \quad (1.85)$$

Здесь введена *суммарная скорость* флюида, или скорость суммарного потока

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{v}_w = -k \left(\frac{k_o}{\mu_o} + \frac{k_w}{\mu_w} \right) \nabla p \equiv -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (1.86)$$

где μ – вязкость флюида, которая связана с вязкостями фаз μ_O, μ_w формулой

$$\frac{1}{\mu} = \frac{k_w(s)}{\mu_w} + \frac{k_O(s)}{\mu_O} \quad (1.87)$$

Подставив в (1.85) выражение (1.86), получим уравнение для давления, или *уравнение пьезопроводности*

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}[\sigma(s) \operatorname{grad} p], \quad \sigma = \frac{k}{\mu}. \quad (1.88)$$

Коэффициент σ зависит от насыщенности s и называется проводимостью или гидропроводностью. По аналогии вводятся коэффициенты проводимости фаз

$$\sigma_w(s) = k k_w(s) / \mu_w, \quad \sigma_O(s) = k k_O(s) / \mu_O; \quad \sigma = \sigma_w + \sigma_O.$$

В случае, когда σ, β постоянны, можно ввести коэффициент пьезопроводности $\kappa = \sigma / \beta$, м²/с и переписать уравнение (1.88) в виде классического уравнения гидропроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p, \quad \kappa = \frac{k}{\beta \mu}. \quad (1.89)$$

Уравнение для определения водонасыщенности представляет собой баланс воды в суммарном потоке флюида (1.84):

$$\frac{\partial(ms)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}_w) = 0.$$

От скорости фильтрации воды в этом уравнении удобно перейти к скорости суммарного потока, введя функцию f , которая определяет долю воды в потоке, $v_w = f v = f(v_w + v_o)$. Из этого равенства следует, что $f = v_w / (v_w + v_o)$.

Подставив сюда выражения для скоростей фаз и суммарной скорости, получим

$$f(s) = k_w(s) \frac{\mu(s)}{\mu_w} = \frac{k_w}{\mu_w} \left(\frac{k_w}{\mu_w} + \frac{k_O}{\mu_O} \right)^{-1} = \frac{k_w \mu_O}{k_w \mu_O + k_O \mu_w} = \frac{\sigma_w}{\sigma}. \quad (1.90)$$

Функция $f(s)$ называется функцией Баклея-Леверетта; она однозначно определяется по водонасыщенности (см. рис. 1.5). Подставляя (1.90) в уравнение баланса воды, при постоянной пористости получаем *уравнение водонасыщенности* в терминах суммарного потока

$$s \beta \frac{\partial p}{\partial t} + m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}[f(s) \vec{v}] = 0, \quad \vec{v} = -\sigma(s) \operatorname{grad} p. \quad (1.91)$$

Первый член в этом уравнении, как правило, очень мал из-за слабой сжимаемости скелета, и им часто пренебрегают. Итак, модель двухфазной фильтрации включает в себя два уравнения (1.88) и (1.91) для расчета функций

и а также формулы (1.86) для скорости фильтрации и (1.90) для доли воды в потоке. Все остальные характеристики (нефтенасыщенность и скорости фаз, запасы нефти и воды) определяются по этим двум полям: давления и насыщенности.

1.8.3. Простейшие модели разработки залежей нефти

На основе уравнений для давления и насыщенности можно сконструировать ряд моделей разработки нефтяных месторождений. Конкретную модель определяют граничные и начальные условия для этих уравнений. Мы рассмотрим простейшую модель пласта, вскрытого системой вертикальных скважин, перфорированных по всей длине.

Граница нефтяного пласта многосвязна; ниже перечисляются её отдельные участки.

1. *Внешние границы.* Это боковая поверхность Γ , ограничивающая месторождение в плане. Считаем, что там задано постоянное давление (точнее, превышение над гидростатическим давлением)

$$p|_{\Gamma} = p_0. \quad (1.92)$$

Кроме того, задана водонасыщенность s на той ее части Γ_{in} , в которой жидкость втекает в пласт извне.

$$s|_{\Gamma_{in}} = s_0. \quad (1.93)$$

Как правило, $s_0 = s^*$. Однако бывают и более сложные ситуации, когда для описания взаимодействия изучаемой залежи с окружающими породами привлекают т.н. модель аквифера. Признаком того, что участок границы является входным является неравенство $u_n < 0$, или

$$\Gamma_{in} : u_n = -\sigma \partial p / \partial n < 0.$$

Другими внешними участками границы являются кровля Γ_{top} и подошва Γ_{bot} пласта, которые обычно не проницаемы для жидкости:

$$\Gamma_{top}, \Gamma_{bot} : u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

2. Внутренние границы $\gamma_k, k=1..N$ – это боковые поверхности добывающих и нагнетательных скважин. Дебитом k -й скважины называется суммарный расход жидкости через ее поверхность:

$$Q_k = \int_{\gamma_k} u_n d\gamma = - \int_{Z_{bot}}^{Z_{top}} \int_0^{2\pi} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} r_k d\varphi dz, \quad (1.94)$$

где r_k – радиус скважины. Если $Q_k < 0$, то скважина нагнетательная (закачивают воду), а если $Q_k > 0$, то добывающая (или эксплуатационная), из которой выкачивается водонефтяная смесь. Для обоих типов скважин и режимов их работы давление на скважине считается постоянным,

$$p|_{\gamma_k} = p_k. \quad (1.95)$$

При моделировании разработки месторождения для каждой скважины задают один из двух режимов работы:

- Режим заданных давлений. В этом случае величина p_k в условии (1.95) считается заданной и это условие служит граничным условием Дирихле для уравнения пьезопроводности (1.88). Формула (1.94) при решении задачи не используется, а применяется после расчета давления для определения дебита скважины.
- Режим заданных дебитов. В этом случае суммарный дебит в (1.94) задан, а величина давления на скважине p_k в условии (1.95) подлежит определению. Совокупность интегрального условия (1.94) и равенства (1.95) представляет собой т.н. нелокальное граничное условие на скважине.

Граничные условия на γ_k для водонасыщенности s задаются только для нагнетательных скважин: при закачке воды, очевидно,

$$s|_{\gamma_k} = s^* \text{ при } Q_k < 0.$$

Для добывающих скважин граничное условие к уравнению (1.91) гиперболического типа не требуется, поскольку жидкость здесь вытекает из пласта. Такая же ситуация возникает на части внешней границы Γ_{out} , где $u_n > 0$, а также на кровле и подошве пласта, где $u_n = 0$.

Должны быть также заданы начальные условия – поля водонасыщенности и давления в начальный момент:

$$t = 0: s = s_0(x, y, z), p = p_0(x, y, z).$$

Таким образом, даже в простейшем случае (без учета гравитации, капиллярных эффектов, сжимаемости флюида и при использовании только вертикальных скважин) модель представляет собой систему двух нелинейных уравнений в области со сложными граничными условиями.

Примеры графического представления результатов численного моделирования двухфазной фильтрации в нефтяных пластах приведены ниже на рис. 1.6 – 1.9.

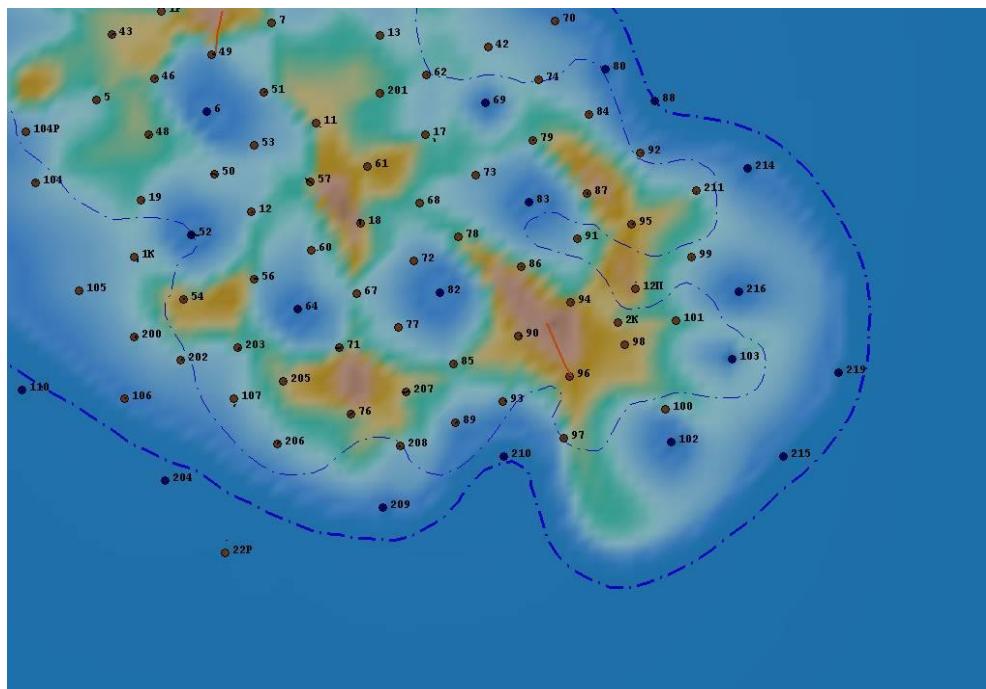


Рис. 1.6. Карта нефтенасыщенности, расположение скважин.
Красным цветом показан боковой ствол

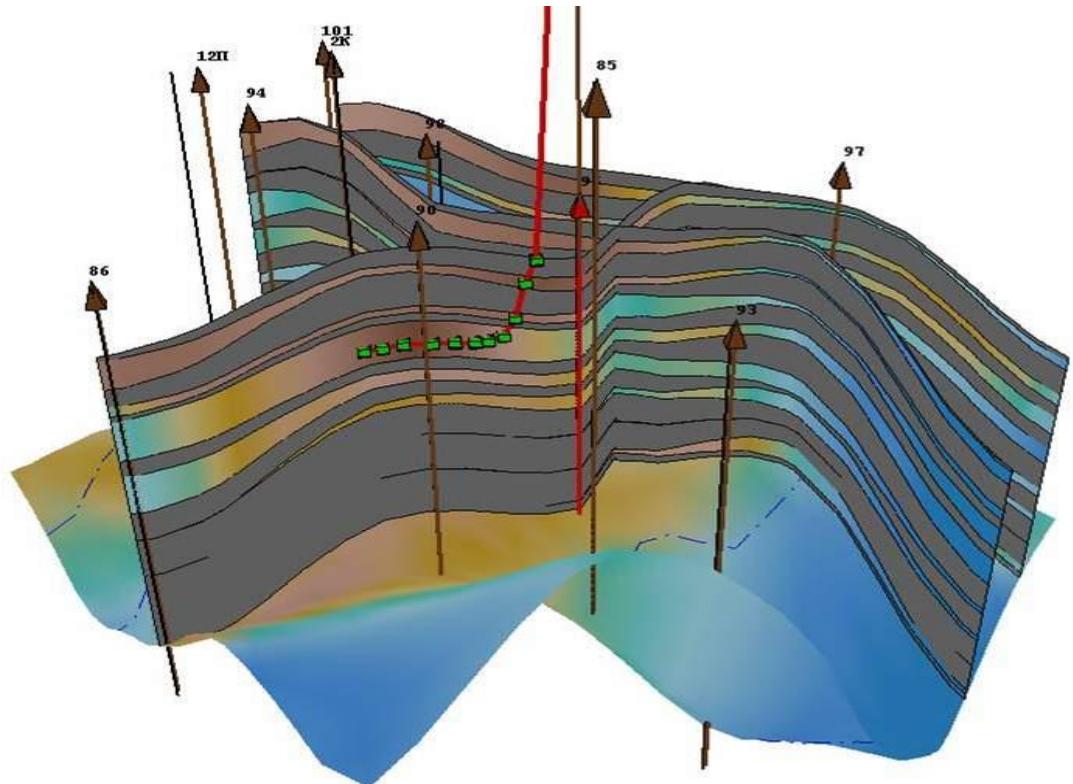


Рис. 1.7. Нефтенасыщенность, структура пропластков в разрезе.
Красным цветом показана скважина 96 и её боковой ствол

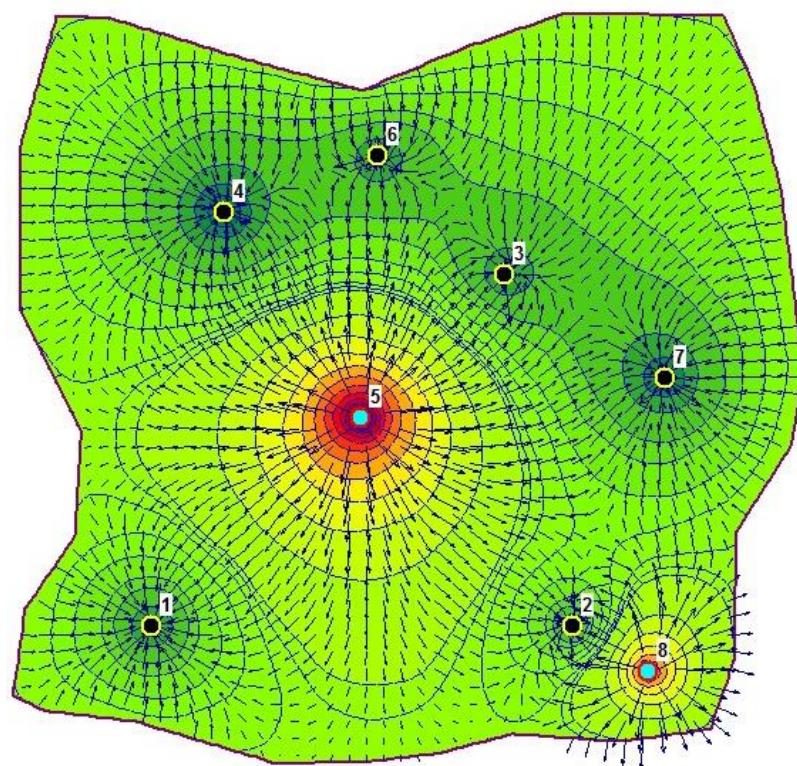


Рис. 1.8. Карта изобар и фильтрационные потоки

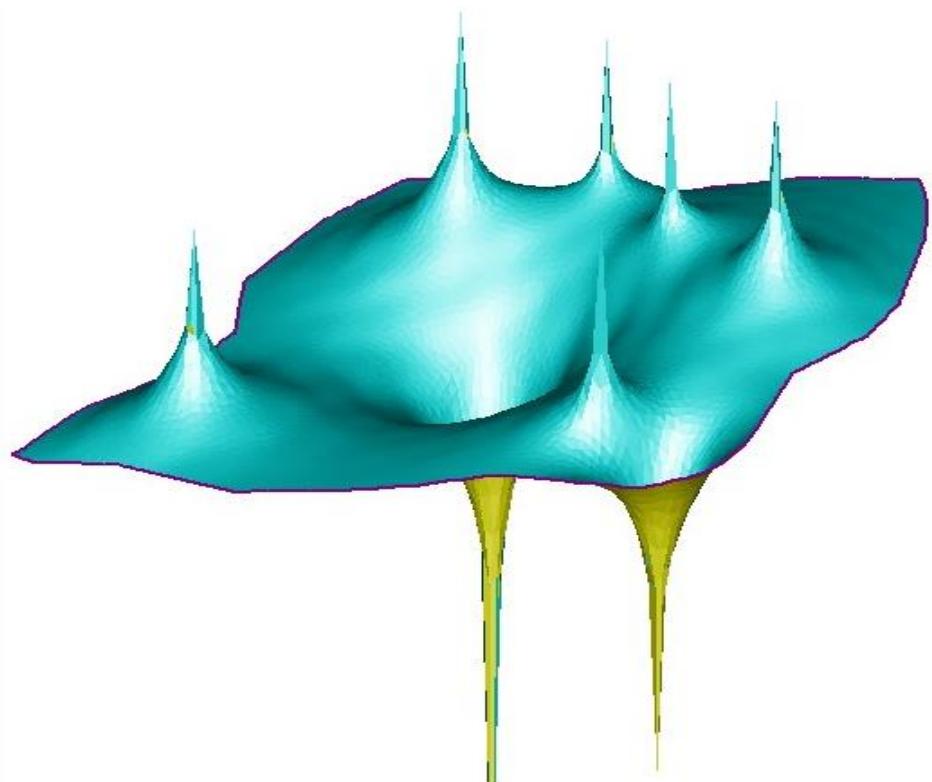


Рис. 1.9. Энергетическое состояние нефтяного пласта (поле давления)

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ СЕТОК

2.1. Простейшие одномерные сетки

Рассмотрим модельную задачу теплопроводности в вертикальной стенке толщиной l , разделяющей две среды. Координату x направим горизонтально слева-направо. Температура справа от стенки поддерживается постоянной и равна $T(l) = T_0$, а температура слева изменяется по закону $T(0) = T_0 + \Delta T \sin(\omega t)$, ω - частота колебаний, t - время. Термофизические свойства постоянны: заданы теплопроводность λ , теплоёмкость c и плотность ρ . В начальный момент времени $t = 0$ температура в стенке равна T_0 . Требуется рассчитать температуру - функцию $T(x, t)$, $0 < x < l, t > 0$.

Задача одномерна и описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$T(0) = T_0 + \Delta T \sin(\omega t), \quad T(l) = T_0 \quad (2.2)$$

и начальным условием

$$T(x, 0) = T_0. \quad (2.3)$$

Вначале преобразуем задачу к безразмерному виду, введя относительные переменные (их помечаем чертой сверху)

$$\bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t^0}, \quad t^0 = \frac{l^2}{a}, \quad a = \frac{\lambda}{c\rho}; \quad \bar{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T}; \quad \bar{\omega} = \omega t^0, \quad (2.4)$$

где a – температуропроводность.

Подставляя (2.4) в (2.1), получим уравнение (черту над безразмерными величинами для сокращения записи опустим)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

а краевые условия (2.2), (2.3) запишутся следующим образом:

$$T(0) = \sin(\omega t), \quad T(1) = 0; \quad (2.6)$$

$$T(x, 0) = 0. \quad (2.7)$$

Заметим, что исходная задача, а значит и её решение, зависела от 7 параметров: $l, c, \rho, \lambda, T_0, \Delta T, \omega$, а безразмерная задача (2.5) - (2.6) содержит единственный параметр – безразмерную частоту ω колебаний температуры левой границы. Численное решение этой задачи предполагает построение сеток по времени t и по пространству x .

1. *Равномерная сетка по времени.* Через τ обозначим временной шаг сетки. Пусть j – номер временного интервала (говорят: временного слоя), тогда узлы сетки по t вычисляются по формуле $t^j = j\tau$, $j = 1, 2, \dots$. Значение функции T на j -м временном слое обозначим так: $T(x, t^j) = T^j(x)$.

2. *Равномерная сетка по пространству.* Пространственный шаг сетки $h = 1/N$, где N – число разбиений области расчета. Узлы сетки имеют координаты $x_i = ih$, $i = 0..N$. Значение функции T на j -м временном слое в узле x_i обозначим с помощью пары индексов: $T(x_i, t^j) = T_i^j$.

Сеточная функция. Функция u , определенная только в узлах сетки, называется сеточной функцией, а ее значения – это узловые значения u_i^j . Над сеточными функциями можно совершать различные операции, которые приводятся ниже для сеточных функций u, v, w и скаляра a (временной, а также пространственный индекс часто будем опускать, если это не приводит к путанице):

- Сложение $w = u + v$, $w_i^j = u_i^j + v_i^j$.
- Умножение $w = uv$, $w_i^j = u_i^j v_i^j$ (не суммировать); $w = ua$, $w_i^j = u_i^j a$.
- Скалярное произведение

$$s = (u, v) = \sum_{i=0}^N u_i v_i \hbar_i, \quad \hbar_i = \begin{cases} h, & 1 \leq i \leq N, \\ h/2, & i = 0, i = N. \end{cases}$$

- Интеграл по области

$$\int_0^1 u(x) dx \sim (u, 1) = \sum_{i=1}^N u_i \hbar_i.$$

Это квадратурная формула трапеций для приближенного вычисления интеграла.

- Первая производная сеточной функции в узле может определяться по-разному, некоторые формулы приводятся ниже. При этом используются понятия текущего временного слоя t^j , верхнего $t^{j+1} = t^j + \tau$ и нижнего $t^{j-1} = t^j - \tau$; соответствующие значения сеточных функций вместо индексов часто помечаются крышкой для верхнего слоя, $\hat{u} = u^{j+1}$, и галкой для нижнего временного слоя $\check{u} = u^{j-1}$.

Разность вперед по времени

$$\frac{\partial u_i^j}{\partial t} \sim u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \equiv \frac{\hat{u} - u}{\tau}; \quad \hat{u} = u^{j+1}$$

Разность назад по времени

$$\frac{\partial u_i^j}{\partial t} \sim u_{\bar{t}} = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} = \frac{u - \check{u}}{\tau}, \quad \check{u} = u^{j-1}.$$

Разность вперед и назад по пространству

$$\frac{\partial u_i^j}{\partial x} \sim u_x = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}; \quad \frac{\partial \theta_i^j}{\partial x} \sim u_{\bar{x}} = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}$$

- Вторая производная сеточной функции

$$\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2} \sim (u_x)_{\bar{x}} = (u_{\bar{x}})_x = u_{x\bar{x}} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

- Нормы сеточных функций

$$\|u\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i|; \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)},$$

которые будут использованы при оценках точности численных решений.

Приведенные выше определения операций с сеточными функциями не исчерпывают всех возможностей. Но именно они будут использованы для численного решения задачи (2.5) – (2.7)

Дискретизация задачи (2.5) – (2.7) – это переход от функций и дифференциальных уравнений к сеточным функциям и замена (приближение, аппроксимация) производных их сеточными аналогами. Например,

$$\begin{aligned} u_t^j &= u_{xx_i}^j, \text{ или } \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}; j > 0, i = 1..N-1 \\ u_0^j &= \sin(\omega t_j), \quad u_N^j = 0; \\ u_i^0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Систему алгебраических уравнений (2.8) называют *конечно-разностной схемой* для задачи (2.5) – (2.7). Решение этой схемы получается легко, при последовательном продвижении от одного временного слоя к следующему (точнее, от текущего слоя - к верхнему). Алгоритмически процесс вычислений можно записать так.

```

Gam:= tau/sqr(h);

// Начальное условие

j:=0; t:=j*tau;

For i:=0 to N do U[i]:=0;

For j:=1 to M do // цикл по времени

Begin

t:=j*tau;

U1[0]:= sin(w*t); U1[N]:=0; // граничные условия

For i:=1 to N-1 do // внутренние узлы

U1[i]:= U[i]*(1-2*Gam) + Gam*(U[i+1]+ U[i-1]);

```

For i:=0 to N do // переход на новый временной слой

Begin

U[i]:= U1[i];

Writeln(f, U[i]:16:6); // печать в файл

End; //i

End; //j

Видим, что решение задачи на каждом временном слое получается явным формулам, поэтому такую разностную схему (2.8) называют явной. К сожалению, алгоритмически простые явные схемы дают устойчивое² решение задачи лишь при определенном соотношении шагов сетки τ и h . Это, как будет показано ниже, может приводить к катастрофическому увеличению вычислительных затрат. Поэтому часто используются и т.н. неявные схемы, свободные от обременительных условий устойчивости.

Если в (2.8) аппроксимировать производную по времени разностью назад, получим чисто неявную РС

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}_i}^j &= u_{x\bar{x}_i}^j, \text{ или } \frac{u_i - \bar{u}_i}{\tau} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}; j > 0, i = 1..N-1 \\ u_0^j &= \sin(\omega t_j), \quad u_N^j = 0 \\ u_i^0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Для перехода с нижнего временного слоя на текущий временной слой в этом случае придется решать СЛАУ

$$\begin{aligned} u_0 &= \sin(\omega t_j); \\ -\gamma u_{i-1} + (1+2\gamma)u_i - \gamma u_{i+1} &= \bar{u}_i, \quad i = 1..N-1; \\ u_N &= 0; \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\gamma = \tau / h^2$. Система (2.10) имеет 3-х диагональную матрицу и является частным случаем системы

² Определение и исследование устойчивости РС будет дано в следующих разделах

$$\begin{aligned}
C_0 u_0 - B_0 u_1 &= F_0; \\
-A_i u_{i-1} + C_i u_i - B_i u_{i+1} &= F_i, \quad i = 1..N-1; \\
-A_N u_{N-1} + C_N u_N &= F_N.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

В нашем случае $C_0 = 1$, $B_0 = 0$, $F_0 = \sin(\omega t_j)$; $A_i = B_i = \gamma$, $C_i = 1 + A_i + B_i$, $F_i = \ddot{u}_i$, $i = 1..N-1$; $A_N = 0$, $C_N = 1$, $F_N = 0$.

Решение СЛАУ (2.11) не может быть записано в виде явных формул, требуется применять *прямой* метод исключения Гаусса. В случае трёхдиагональной матрицы он приводит к *методу прогонки* или в английском наименовании – *алгоритму Томаса*. Решение находится в два этапа. На первом вычисляются прогоночные коэффициенты α_i, β_i (т.н. прямой ход метода исключения Гаусса) по формулам

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_1 = \frac{F_0}{C_0}, \\
\alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1..N-1;
\end{aligned}$$

На втором этапе (обратный ход) вычисляется решение – вектор \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}
u_N &= \frac{F_N + \beta_N A_N}{C_N - \alpha_N A_N}, \\
u_i &= \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.
\end{aligned}$$

3. *Неравномерная сетка по пространству*. Обычно такая сетка строится для того, чтобы получить достаточную точность в подобластях с большими градиентами искомой функции, здесь сетка сгущается, а в подобластях малых изменений функции, наоборот, сетка разрежается. Узлы имеют координаты

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_N = 1.$$

Шаг сетки становится переменным,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1..N; \quad h_0 = h_1 / 2.$$

Кроме того, определяются усреднённые шаги

$$\bar{h}_i = (h_i + h_{i+1}) / 2, \quad i = 0..N-1; \quad \bar{h}_N = h_N / 2.$$

Операции над сеточными функциями на неравномерной сетке.

- Скалярное произведение $s = (u, v) = \sum_{i=0}^N u_i v_i h_i$.

- Интеграл по области $\int_0^1 u(x) dx \sim \sum_{i=1}^N u_i h_i$.

- Первая производная в узле

$$\text{Разности вперёд и назад } u_x = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h_{i+1}}; \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i};$$

$$\text{Центральная разность } u_{\dot{x}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_i}$$

- Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2} &\sim \frac{u_{x_i} - u_{x_{i-1}}}{h_i} = \frac{u_{x_i} - u_{\bar{x}_i}}{h_i} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) = \\ &= \frac{(h_i / h_{i+1}) u_{i+1} - (h_i / h_{i+1} + h_i / h_i) u_i + (h_i / h_i) u_{i-1}}{h_i^2} \end{aligned}$$

- Нормы функций

$$\|u\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i|; \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}.$$

Явная РС для уравнения теплопроводности на неравномерной сетке во внутренних узлах записывается так:

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = \frac{u_{x_i} - u_{\bar{x}_i}}{h_i}, \quad i = 1..N-1$$

а в граничных узлах – так же как на равномерной сетке (2.8). В случае неявной схемы РС сводится к СЛАУ вида (2.11) с переменными коэффициентами и решается методом прогонки.

4. Сгущение одномерной сетки в окрестности точки x_0 . Пусть x_i – узлы равномерной сетки, а y_i – координаты новых узлов, сгущающихся к заданной

точке x_0 (или разрежающиеся в ее окрестности). Надо задать гладкую монотонную функцию

$$y = f(x), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x_0) = x_0$$

и с ее помощью найти координаты узлов. Если $y' < 1$ в окрестности x_0 , то там будет сгущение, в противном случае – разрежение. Вот пример такой функции:

$$y = \begin{cases} x_0 \left[1 - \left(\frac{x_0 - x}{x_0} \right)^\alpha \right], & x < x_0; \\ x_0 + \left(\frac{x - x_0}{1 - x_0} \right)^\alpha (1 - x_0), & x > x_0. \end{cases}$$

При $\alpha > 1$ получаем сгущение, а при $\alpha < 1$ – разрежение.

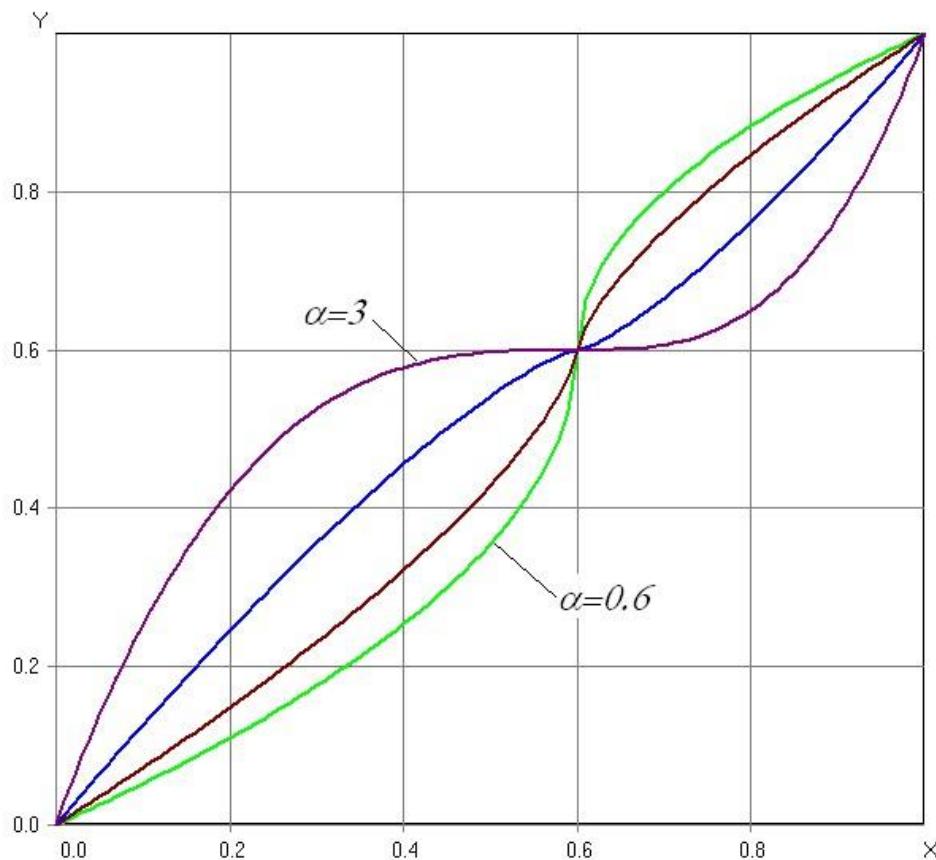


Рис. 2.1. Построение одномерной сетки с локальным сгущением

Задание 2. Решить задачу (2.5) - (2.7) численно с помощью явной (2.8) и неявной (2.9) конечно-разностных схем. Сравнить результаты расчета по двум схемам. Уяснить зависимость решения задачи от шагов сетки h и τ .

Исследовать влияние частоты колебаний ω на решение задачи и, в частности, на глубину x_* проникновения тепловых возмущений в стенку. Под x_* понимать максимальное значение x , для которого $|T(x,t)| > \varepsilon$, $t \in [0, 2\pi\omega^{-1}]$, $\varepsilon \approx 10^{-3}$. Построить график $x_*(\omega)$.

Указание. При реализации явной схемы соблюдать условие устойчивости $\tau \leq 0.5h^2$.

2.2. Простейшие двумерные сетки

2.2.1. Сетки в прямоугольных областях

Пусть область с границей - прямоугольник $D = [0, l_x] \times [0, l_y]$. Здесь все похоже на одномерную сетку по каждому направлению, но принято считать индексы, начиная с единицы:

$$h_x = l_x / (N_x - 1), \quad x_i = (i - 1)h_x, \quad i = 1..N_x;$$

$$h_y = l_y / (N_y - 1), \quad y_j = (j - 1)h_y, \quad j = 1..N_y;$$

Любая сеточная функция f в узле (i, j) имеет значение с двумя индексами $f_{i,j}$. Наряду с двухиндексной нумерацией вводят сквозную нумерацию узлов с помощью одного индекса k . Это можно сделать по-разному, например, вводя лексикографическое упорядочивание слева-направо-снизу-вверх, т.е.

$$(1,1), (2,1), \dots, (N_x, 1), \\ (1,2), (2,2), \dots, (N_x, 2), \\ (1, N_y), \dots, (N_x, N_y)$$

Можно установить взаимно-однозначную связь между k и парой (i, j) . В нашем случае, очевидно,

$$k = (j-1)N_x + i; \quad \begin{cases} j = 1 + \left\lceil \frac{k}{N_x} \right\rceil, \\ i = k - (j-1)N_x. \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь прямые скобки означают целую часть числа, например $\lceil 7.438 \rceil = 7$. Такая сетка называется прямоугольной, а при $h_x = h_y$ – квадратной. Можно очевидным образом строить и неравномерные сетки по x и/или по y . Операции с сеточными функциями проводятся по аналогии с одномерными сетками.

- Скалярное произведение

$$s = (u, v) = \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} u_{i,j} v_{i,j} \hbar_i^x \hbar_j^y,$$

$$\hbar_i^x = \begin{cases} h_x, & 1 < i < N_x, \\ h_x / 2, & i = 1, i = N_x. \end{cases} \quad \hbar_i^y = \begin{cases} h_y, & 1 < i < N_y, \\ h_y / 2, & i = 1, i = N_y. \end{cases}$$

- Интеграл по области

$$\int_D u dD = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} u(x, y) dx dy \sim \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{i=1}^{N_x} u_{i,j} \hbar_i^x \hbar_j^y$$

- Первые производные по времени и пространству

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \sim u_t(i, j) &= \frac{\hat{u}_{i,j} - u_{i,j}}{\tau}, \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \sim u_{\bar{t}}(i, j) = \frac{u_{i,j} - \bar{u}_{i,j}}{\tau}. \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \sim u_x(i, j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}; \quad u_{\bar{x}}(i, j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}; \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \sim u_y(i, j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}; \quad u_{\bar{y}}(i, j) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}; \end{aligned}$$

- Вторые производные по пространству

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \sim u_{x\bar{x}}(i, j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \sim u_{y\bar{y}}(i, j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

- Нормы функций

$$\|u\|_C = \max_{1 \leq k \leq N_x N_y} |u_k|; \quad \|u\|_2 = \sqrt{(u, u)}.$$

Для иллюстрации применения двумерных сеток и сеточных функций при решении задач ВГ рассмотрим следующее упражнение. Краевая задача Дирихле для безразмерного уравнения теплопроводности в двумерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f, \quad t > 0, 0 < x < l_x, 0 < y < l_y; \\ t = 0 : u(x, y, 0) &= u_0(x, y). \\ x, y \in \Gamma : u &= u_\Gamma(x, y). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Явная разностная схема (РС) для уравнения (2.13) во внутренних узлах сетки имеет вид $u_t = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}} + f$ или

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_{i,j} - u_{i,j}}{\tau} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + f_i^j; \\ i = 2..N_x - 1, j &= 2..N_y - 1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Начальные и граничные условия Дирихле на сетке в соответствии с постановкой задачи (2.13) задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} t = 0 : u_{i,j} &= u_0(x_i, y_j), \quad x_i = (i-1)h_x, y_j = (j-1)h_y, i = 1..N_x, j = 1..N_y; \\ u_{i,j} &= u_\Gamma(x_i, y_j), \quad i = 1, i = N_x, j = 1..N_y; j = 1, j = N_y, i = 1..N_x. \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.14) – функция $\hat{u}_{i,j}$ на верхнем слое – вычисляется по формуле

$$\hat{u}_i^j = (1 - 2\gamma_x - 2\gamma_y)u_i^j + \gamma_x(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \gamma_y(u_i^{j+1} + u_i^{j-1}) + \tau f_i^j;$$

$$\gamma_x = \tau / h_x^2, \quad \gamma_y = \tau / h_y^2; \quad i = 2..N_x - 1, \quad j = 2..N_y - 1.$$

Задание 3. Решить задачу (2.13) при следующих условиях: $l_x = l_y = 1$,

$T_0 \equiv 0, T_\Gamma \equiv 0$. Источник нагрева задать формулой $f(x, y) = A \exp(-br^2)$, $r^2 = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$. Исследовать влияние мощности $A = 5, 10, 20$ и его сосредоточенности $b = 0.3, 1, 3$ на динамику температурного поля.

Указание. Использовать явную РС (2.14), соблюдать условие устойчивости $\tau \leq 0.25h^2$.

Неявная разностная схема (РС) для уравнения (2.13) во внутренних узлах сетки имеет вид $u_{\bar{i}}^- = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}} + f$ или

$$\frac{u_{i,j} - \bar{u}_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + f_i^j;$$

$$i = 2..N_x - 1, \quad j = 2..N_y - 1.$$

В каждом уравнении этой схемы содержится только 5 неизвестных; шаблон РС «крест» показан на рис. 2.2. Шаблоном РС называется совокупность узлов сетки, участвующих в одной строке схемы.

Если использовать сквозную нумерацию (2.12), то соответствие индексов выглядит так

$$(i, j) \leftrightarrow k \quad (i-1, j) \leftrightarrow k-1 \quad (i+1, j) \leftrightarrow k+1 \\ (i, j-1) \leftrightarrow k - N_x \quad (i, j+1) \leftrightarrow k + N_x.$$

В связи с этим k -ю строку СЛАУ можно записать следующим образом

$$-P_k u_{k-N_x} - A_k u_{k-1} + C_k u_k - B_k u_{k+1} - Q_k u_{k+N_x} = F_k, \quad (2.15)$$

где

$$P_k = Q_k = \tau / h_y^2, A_k = B_k = \tau / h_x^2, C_k = 1 + 2P_k + 2A_k, F_k = \bar{u}_k + \tau f_k$$

СЛАУ (2.15) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{Au} = \mathbf{F}.$$

Матрица \mathbf{A} имеет размерность $N \times N, N = N_x N_y$, строка с номером k представлена формулой (2.15), а вектор неизвестных – это $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$. Легко видеть, что матрица \mathbf{A} симметрична и имеет структуру расположения ненулевых элементов (*портрет матрицы*) в виде пяти диагоналей: главной, двух побочных и еще двух диагоналей, отстоящих на N_x от главной; остальные элементы матрицы равны нулю. Портрет данной матрицы показан на рис. 2.3.

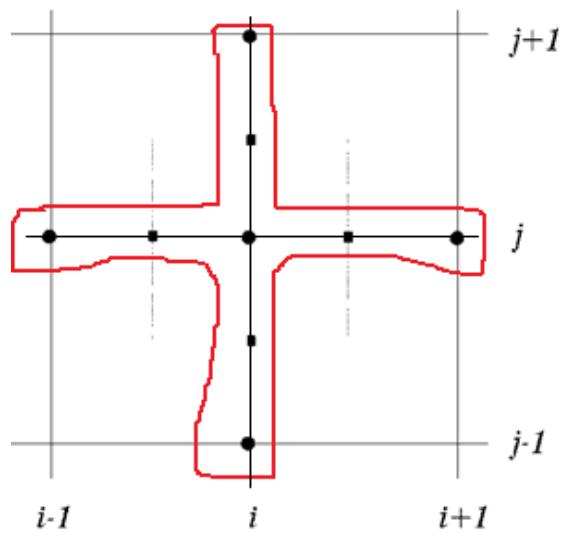


Рис. 2.2. Пятиточечный шаблон «крест» конечно-разностной схемы.

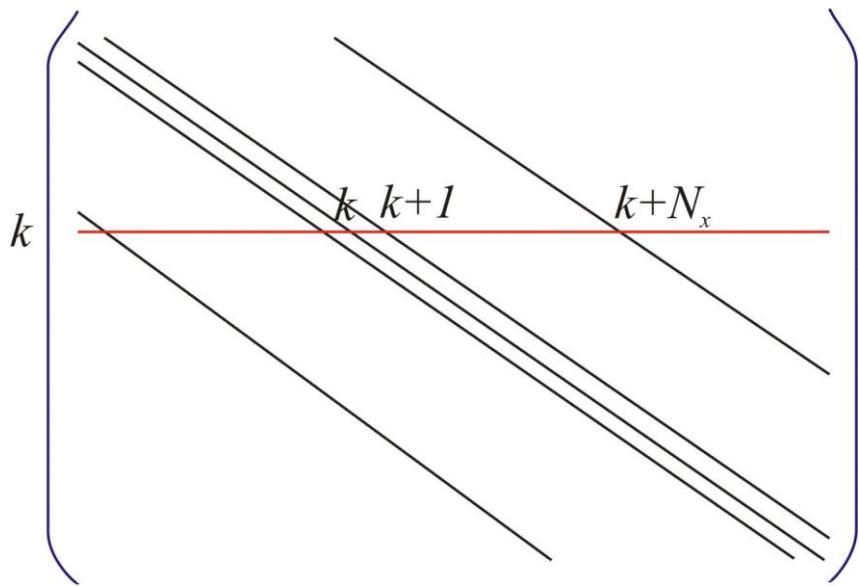


Рис. 2.3. Матрица с пятидиагональной структурой

2.2.2. Структурированные сетки в канонических областях

Типичным примером канонической области служит единичный квадрат с вырезанным по центру квадратом, показанный на рис. 2.4. Это область с двусвязной границей, которая будет служить прообразом для топологически подобных областей при построении сеток.

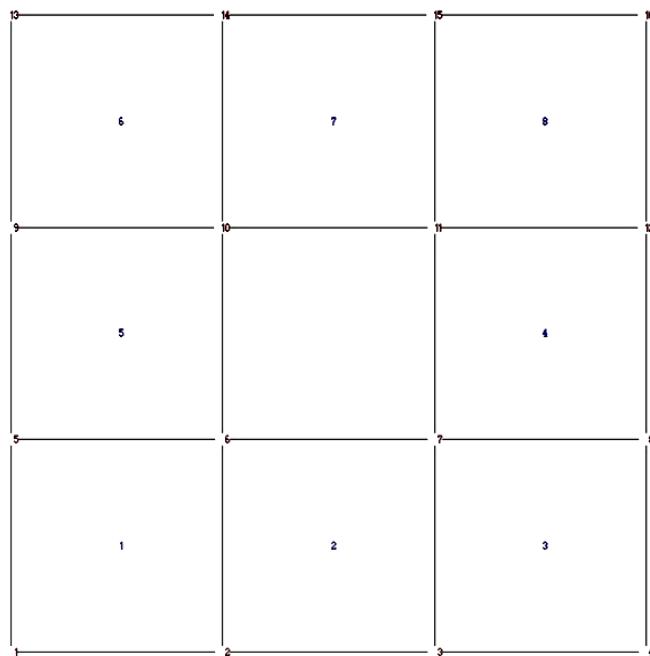


Рис. 2.4. Конечноэлементная сетка в канонической двусвязной области

Для решения двух- и трёхмерных задач ВГ в областях сложной геометрии применяется *метод конечных элементов* (МКЭ), который будет изложен в Части 2 учебного пособия. В этом методе используется расчетная сетка МКЭ в виде покрытия области совокупности непересекающихся конечных элементов, представляющих собой, чаще всего, многоугольники.

Сетка квадратных конечных элементов в области, представленной на рис. 2.4, может быть задана двумя таблицами: *узлов* и *связности*:

Таблица узлов

i	ξ	η	bound
1	0	0	0
2	1/3	0	0
3	2/3	0	0
4	1	0	0
5	0	1/3	0
6	1/3	1/3	0
7	2/3	1/3	0
8	1	1/3	0
9	0	2/3	0
10	1/3	2/3	0
11	2/3	2/3	0
12	1	2/3	0
13	0	1	0
14	1/3	1	0
15	2/3	1	0
16	1	1	0

Таблица связности

j	n1	n2	n3	n4
1	1	2	6	5
2	2	3	7	6
3	3	4	8	7
4	7	8	12	11
5	5	6	10	9
6	9	10	14	13
7	10	11	15	14
8	11	12	16	15

Каждая строка таблицы узлов содержит координаты узла (в данном случае это координаты ξ, η) и признак границы Bound (чтобы различать участки разные границы и внутренние узлы; пока не используется). Каждая строка в таблице связности описывает конкретный конечный элемент, перечисляя номера узлов n1..n4, которые служат вершинами элемента. Номера

перечисляются против хода часовой стрелки, на первом месте может быть любой узел – вершина элемента.

Чтобы на базе этой сетки построить пригодную для счета более подробную сетку, можно применить алгоритм учетверения элементов. Каждый квадрат разбивается линиями, проходящими через середины сторон, на 4 новых; при этом появляются 5 новых узлов: 4 на серединах сторон и один в центре старого элемента. Проблема построения учетверенной сетки состоит в том, чтобы не учитывать дважды узлы на смежных ребрах. Для этого строим структуру ребер (ребро соединяет две старых вершины k_1, k_2 и вновь появившийся в середине узел k_0). При инициализации структуры полагаем $k_0 = 0$ для всех ребер, а по мере добавления новых узлов этот номер заменяется на очередной номер в порядке возрастания. Само добавление узла происходит, только если $k_0 = 0$. Итак, пусть $n1..n4$ и $k1..k5$ – старые и добавленные узлы. Тогда в таблицу связности добавляется 4 элемента $(n1, k1, k5, k4)$, $(k1, n2, k2, k5)$, $(k5, k2, n3, k3)$, $(k4, k5, k3, n3)$.

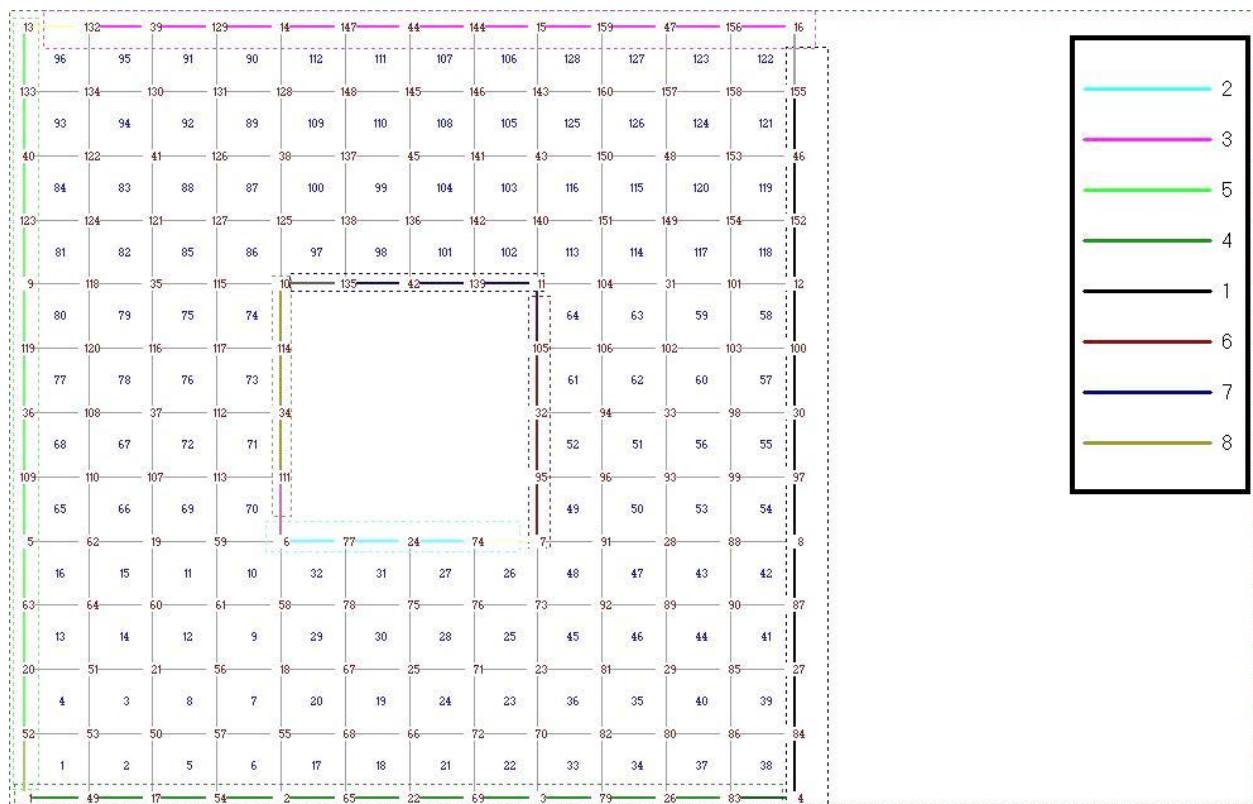


Рис. 2.5. Дважды учетверенная сетка МКЭ с маркерами граничных условий

Сетка МКЭ, построенная в канонической области в координатах ξ, η , деформируется так, чтобы покрыть требуемую область в физической плоскости x, y . Это осуществляется с помощью преобразования координат

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

Данное преобразование строится, например, методом конформных отображений, и тогда координаты узлов сетки просто пересчитываются, либо с помощью решения двух краевых задач Дирихле в канонической области, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= 0, \quad x|_{\Gamma} = x_{\Gamma}(\xi, \eta); \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) &= 0, \quad y|_{\Gamma} = y_{\Gamma}(\xi, \eta) \end{aligned} . \quad (2.16)$$

Коэффициент $\lambda(\xi, \eta) \sim 1$ можно использовать для управления сгущением сетки: чем он больше, тем сильнее сгущение. Функции $x_{\Gamma}(\xi, \eta)$, $y_{\Gamma}(\xi, \eta)$ обеспечивают отображение границ канонической области (в нашем случае это 8 отрезков прямых – сторон внешнего квадрата и дырки) на границы топологически подобной области в физической плоскости.

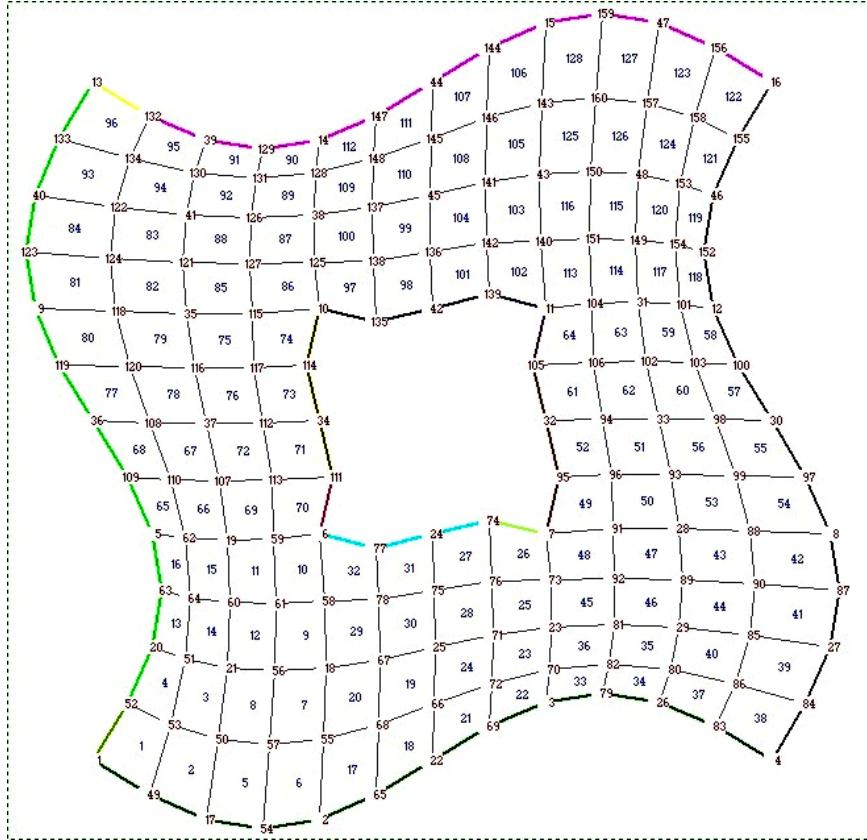


Рис. 2.6. Регулярная МКЭ–сетка в физической плоскости

Результат решения задач (2.16) показан на рис. 2.6. Подчеркнем, что из-за топологического подобия нумерация узлов остается неизменной (т.е. *таблица связности* не меняется при преобразовании координат), а меняются лишь координаты узлов (*таблица узлов*). На рис. 2.7. Показана сетка для еще одного учетверения элементов.

Решение задач Дирихле (2.16) проводилось на канонической области методом конечных элементов с применением итерационной процедуры сопряженных градиентов.

Наряду с квадратом, используются и другие канонические области и их преобразования, например прямоугольник, отображаемый в т.н. О-сетку (рис. 2.8) и С-сетку с разрезом (рис. 2.9). Решение уравнений (2.16) с соответствующими граничными условиями позволяет перестроить таблицу узлов сетки и получить новые сетки в физической плоскости на основе прототипа – структурированной сетки в кольце (рис. 2.10, 2.11).

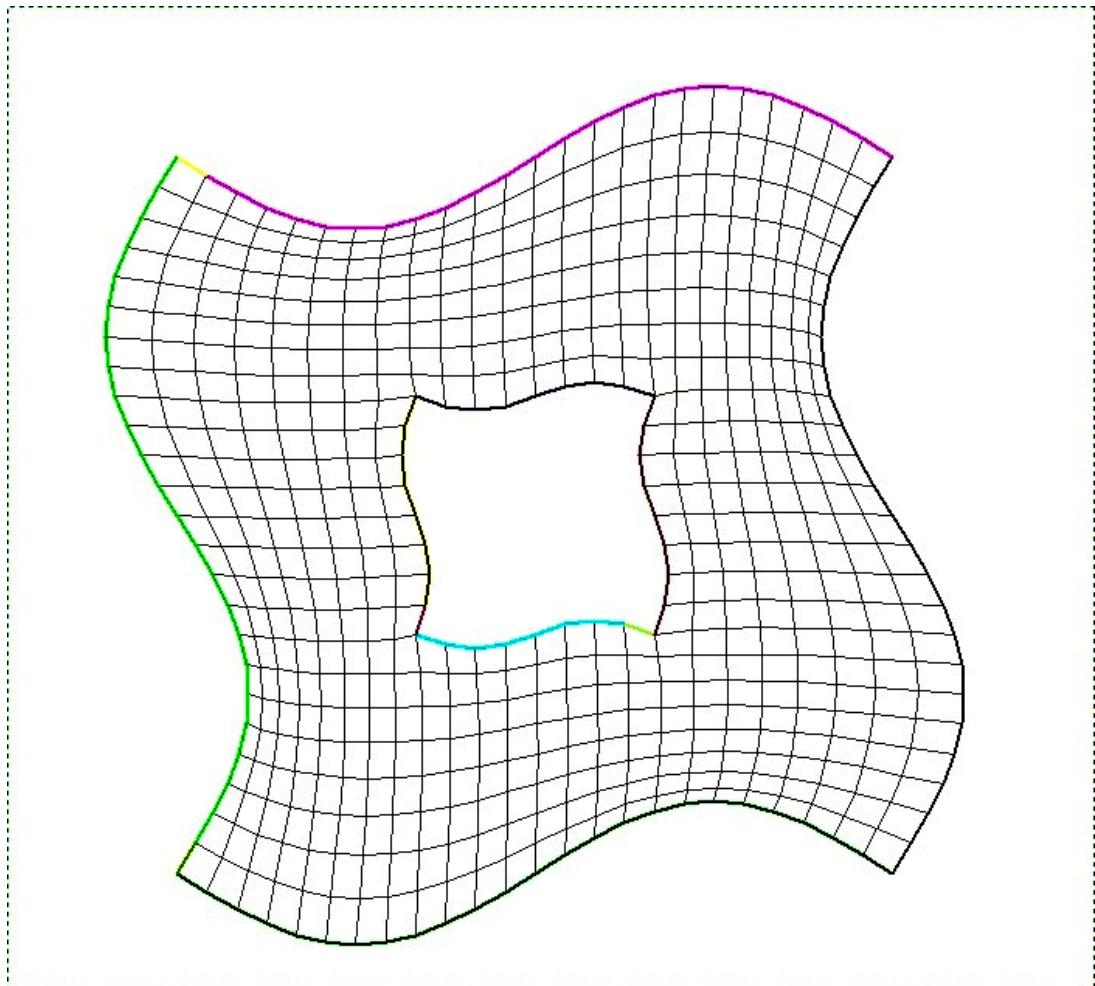


Рис. 2.7. Учетверенная МКЭ–сетка в физической плоскости

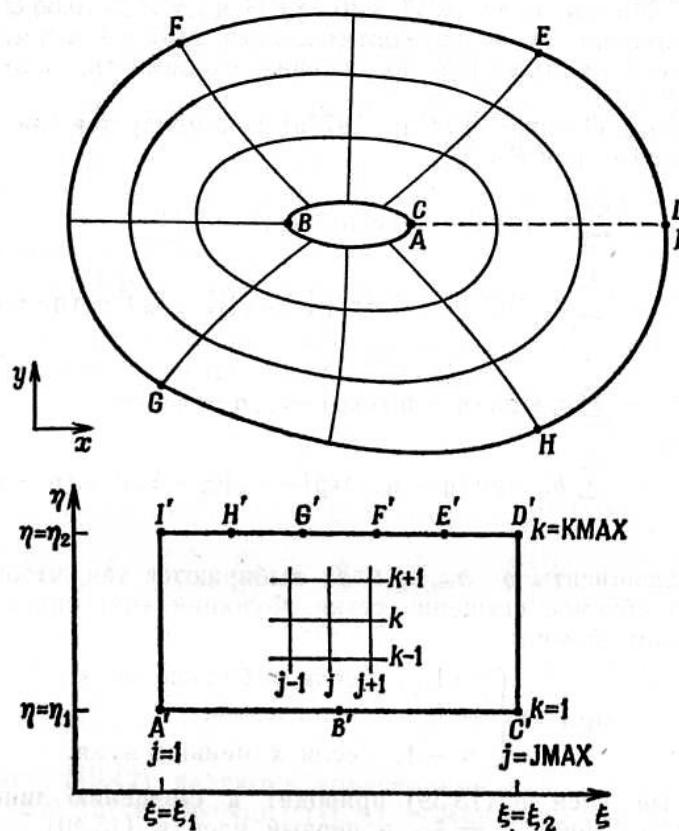


Рис. 2.8. О-сетка

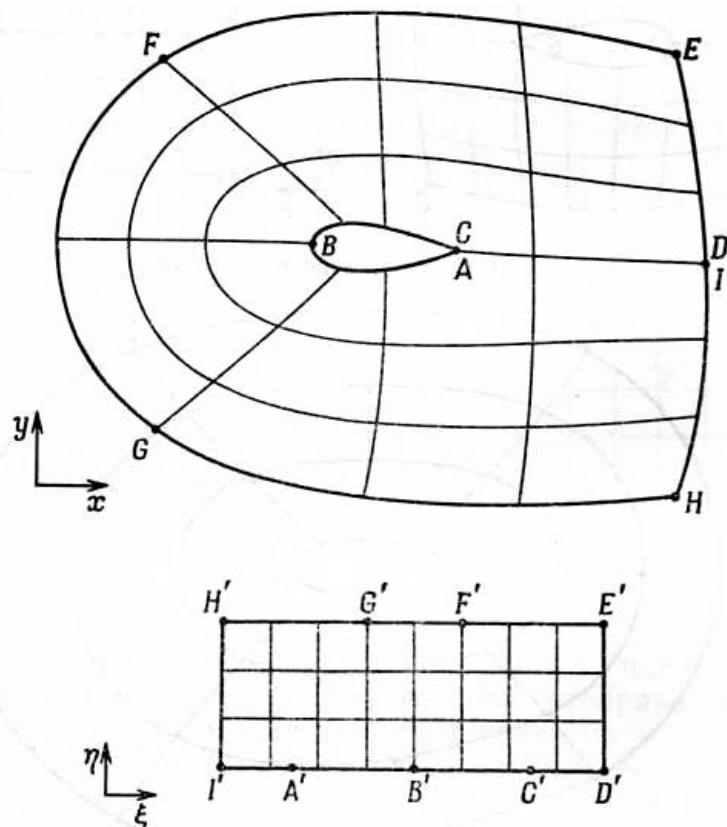


Рис. 2.9. С-сетка с разрезом

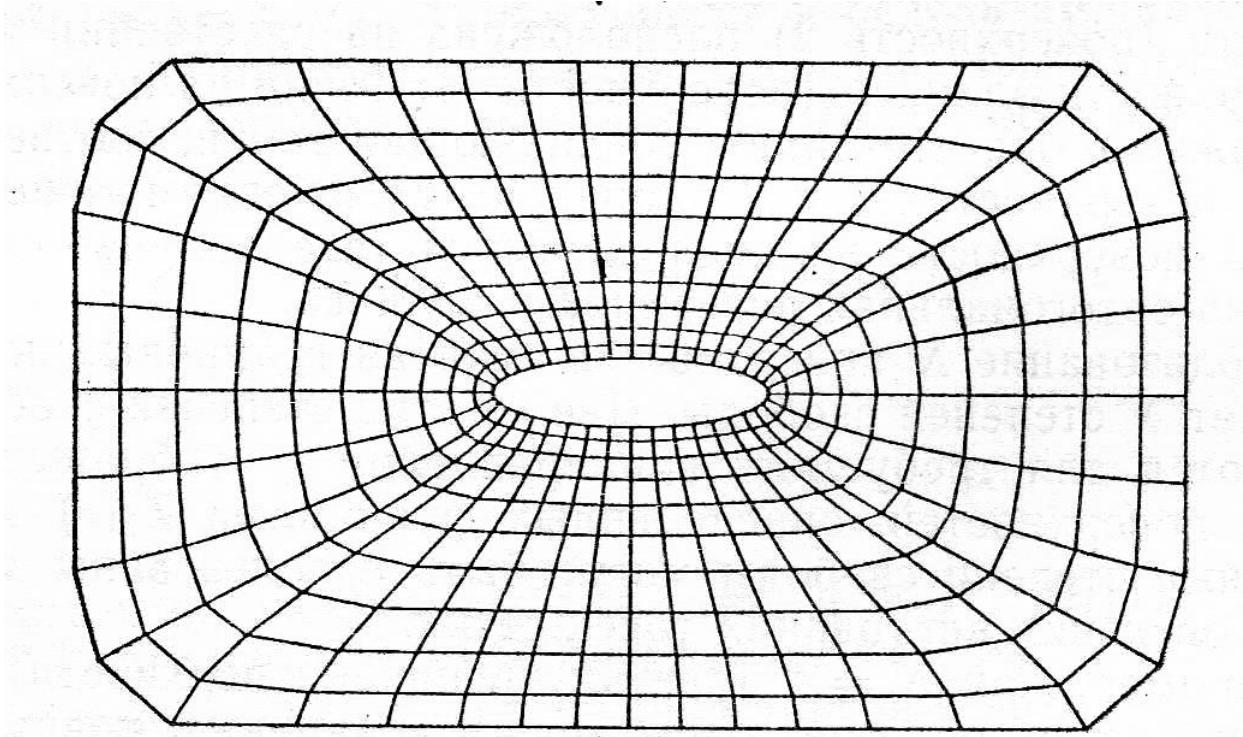


Рис. 2.10. О-сетка, полученная из кольца

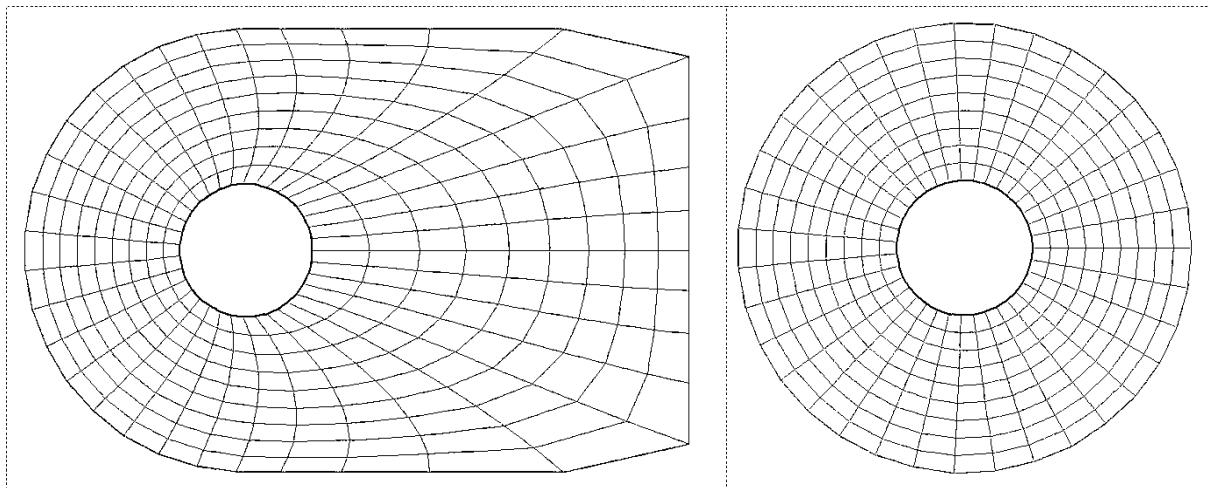


Рис. 2.11. О-сетка (слева), полученная из кольца (справа)
с помощью решения уравнений Лапласа (2.16)

Имея различные прототипы (сетки в канонических областях), можно строить хорошие *многоблочные* сетки в сложных областях, разбивая их на блоки, и в каждом из этих блоков пользуясь соответствующим прототипом. При этом необходимо решать проблему «сшивки» сеток на линиях контакта

блоков. Некоторые алгоритмы сшивки сеточных блоков будут рассмотрены в следующих параграфах.

2.3. Неструктурированные двумерные сетки

Неструктурированные сетки отличаются тем, что не имеют чёткой структуры триангуляции (разбиения области на элементы). Поэтому алгоритмы триангуляции (а она в конечном итоге выражена в таблицах узлов и связности) достаточно сложны и не могут быть выражены конечными формулами.

2.3.1. Триангуляция Делоне с управляемым сгущением узлов

Укажем основные этапы построения неструктурированной сетки из треугольников на основе триангуляции Делоне.

- Создаётся прямоугольный контейнер C , содержащий область D , подлежащую триангуляции. Строится вспомогательная структурированная прямоугольная сетка в контейнере C . Создаётся облако N точек с управляемым сгущением (для их координат используется генератор случайных чисел).
- Удаляются точки вне области D , проводится перемещение точек вблизи границы; обработка разрезов, острых углов и тонких перемычек. Результат – таблица узлов.
- Проводится триангуляция Делоне на облаке точек: соединение узлов в непересекающиеся треугольники, наиболее близкие к равносторонним. Результат – таблица связности.

Алгоритм управления сгущением узлов сетки

Дано N – общее число узлов и функция $1 \leq \rho(x, y) \ll N$ – относительная плотность узлов сетки. Требуется распределить узлы в области D в соответствии с функцией ρ .

Область D мысленно разделим на квадраты q^k , $k = 1..M$ со стороной h , причем значение h подлежит определению. В каждый квадрат поместим

$N_k = \rho(x_k, y_k)$ узлов, x_k, y_k – координаты центра квадрата q^k . Тогда, очевидно, должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^M N_k = \sum_{j=1}^M \rho(x_k, y_k) \approx N \quad (2.17)$$

Заметим, что ее интеграл плотности может быть вычислен с помощью квадратурной формулы

$$I = \int_D \rho(x, y) dD \approx \sum_{k=1}^M h^2 \rho(x_k, y_k), \quad (2.18)$$

поэтому формулу (2.17) можно записать в виде

$$N = \sum_{k=1}^M \rho(x_k, y_k) = \frac{I}{h^2},$$

откуда находим шаг квадратной сетки

$$h = \sqrt{I / N} \quad (2.19)$$

Таким образом, задача свелась к следующей.

1. Разбить область D на квадраты q^k , $k = 1..M$ со стороной h ;
2. В каждый квадрат поместить $N_k = \rho(x_k, y_k)$ узлов.

После того, как триангуляция произведена, можно «сгладить» сгущение по итерационной формуле

$$\hat{x}_i = \alpha x_i + \frac{1-\alpha}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} x_k, \quad \hat{y}_i = \alpha y_i + \frac{1-\alpha}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} y_k, \quad i = 1..N,$$

где $\alpha < 1$ – параметр релаксации, N_i – количество соседей узла i , x_k, y_k – их координаты.

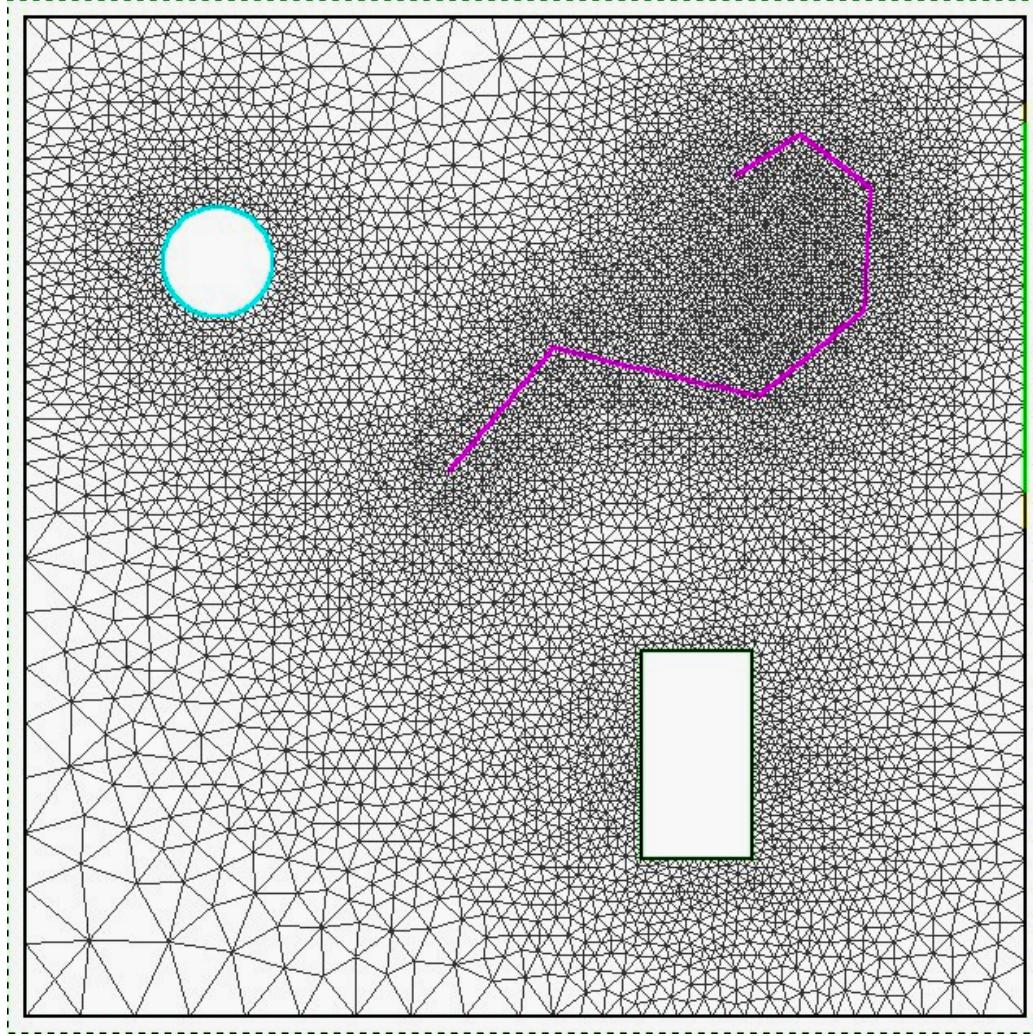


Рис. 2.12. Неструктурированная треугольная сетка со сгущением, построенная на основе триангуляции Делоне (генератор GridGen)

Адаптивное сгущение сетки. Обычно сетка сгущается там, где наибольшие градиенты решения. В стационарных и некоторых нестационарных задачах эти участки области расчета можно указать заранее, однако в динамических задачах с подвижными фронтами иногда приходится перестраивать сетку в процессе решения задачи, например по следующей схеме:

- момент t , получено решение $u(x, y)$ на сетке $\text{Grid}(t)$;

- определяется функция $g(x, y) = |\operatorname{grad} u|$ и строится функция сгущения узлов $\rho(x, y) = \left(1 + 9 \frac{g - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}\right)^p$, где $p > 1$ – усилитель сгущения;

$$g_{\min} = \min_{x, y \in D} g(x, y), g_{\max} = \max_{x, y \in D} g(x, y)$$

- строится сетка $\operatorname{Grid}(t+\tau)$ со сгущением по функции ρ ;
- пересчет решения u и других параметров со старой сетки $\operatorname{Grid}(t)$ на новую сетку $\operatorname{Grid}(t+\tau)$ проводят с использованием различных методов интерполяции.

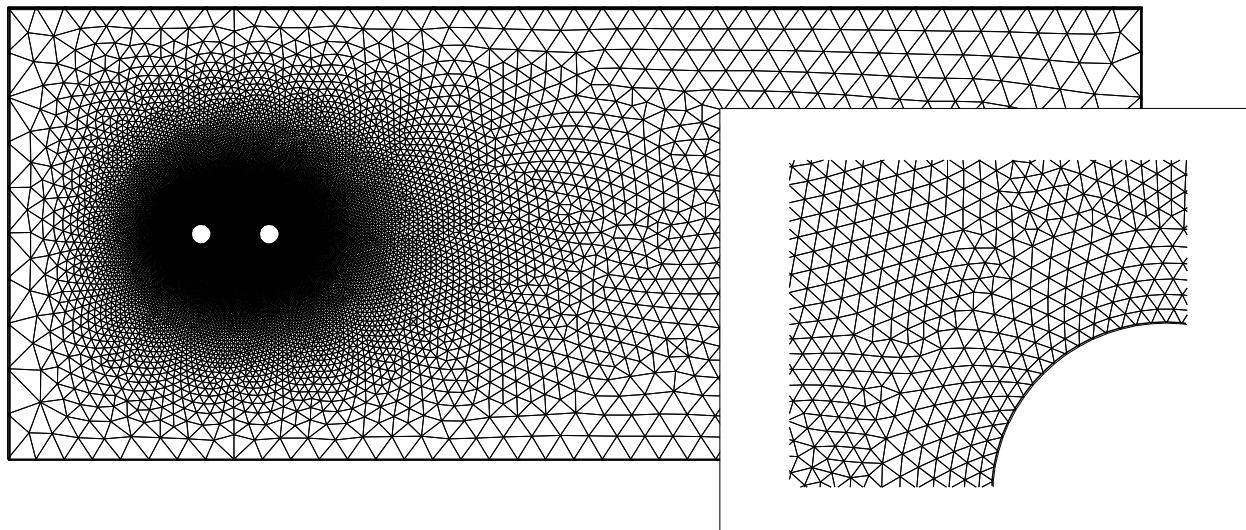


Рис. 2.12. Неструктурированная треугольная сетка со сгущением, построенная с продвижением от границ (генератор Gambit-Fluent)

2.3.2. Алгоритм триангуляции с продвижением от границ

Вводится понятие фронта триангуляции. Вначале он совпадает с границей (возможно многосвязной) области. Проводится разбиение этого фронта на отрезки прямых заданной длины (замкнутая граница теперь представлена многоугольником), затем на отрезках строятся треугольники, одна из вершин которых расположена внутри области. Если соединить все эти внутренние вершины, получим многоугольник – новый фронт триангуляции.

Продвижение этого фронта внутрь области происходит так же, как начального фронта от границы. Процесс продолжается, пока фронты

триангуляции не сойдутся. После этого используются специальные завершающие алгоритмы сшивки. Пример неструктурированной сетки со сгущением, построенной данным методом представлен на рис. 2.12.

2.3.3. Гибридные композитные блочно-структурные сетки

При построении сеток в сложных областях часто проводят предварительную декомпозицию области на отдельные подобласти (блоки), в которых сетки строятся независимо. Впоследствии блоки собираются вместе, отдельные сетки в блоках как-то объединяются, и в результате получается композитная сетка. Если сетки разных блоков при сборке просто накладываются друг на друга, а их взаимодействие программируется в ходе решения задачи, то такую композитную схему называют многоблочной. Если же при объединении блоков сетки срашиваются (связываются) в подобластях контакта блоков, и в результате получается единая сетка, то она называется моноблочной. Поскольку при численном моделировании структурированные сетки имеют значительные преимущества над неструктурными сетками по требуемым вычислительным ресурсам, композитные сетки в отдельных блоках целесообразно строить структурированными, а объединение блоков проводить с помощью неструктурных вставок. Такая объединенная (композитная) сетка будет называться гибридной.

Данный подход реализован в сеточном генераторе HybMesh и содержит три основных шага: 1) конструирование структурированных прототипов в канонических областях; 2) отображение этих сеток на блоки неканонической геометрии; и 3) финальное связывание сеток нижнего уровня в гибридную сетку с помощью неструктурных вставок.

Суперпозиция двух сеток – это основная операция HybMesh. Область объединенной сетки точно равна геометрическому объединению исходных блоков, а её ячейки совпадают с ячейками исходных сеток всюду, за исключением зоны контакта, где строится переходная треугольная сетка, причем размер её ячеек обеспечивает плавный переход между исходными

сетками. Эта зона называется буферной зоной, см. рис. 2.13. Видно, что порядок наложения сеток существенно влияет на результат. Первая из двух связываемых сеток называется базовой, а вторая – наложенной сеткой. Наложенная сетка переносится в результирующую сетку без изменений, а буфер строится в базовой сетке. Как видно рис. 2.13, меняя роли исходных сеток, получаем разные результаты суперпозиции.

Размер b неструктурированного буфера может задаваться различным, и это влияет на результат (рис. 2.14). Очевидно, чем больше размер буфера, тем более плавный переход между исходными сетками будет обеспечен.

Отображение сеток в канонических областях на реальные блоки неканонической геометрии осуществляются с помощью решения задач Дирихле для уравнений Лапласа (2.16), как было изложено параграфе 2.2.2. В пакете HybMesh при задании граничных условий для этих задач явно указываются точки соответствия, см. рис. 2.15.

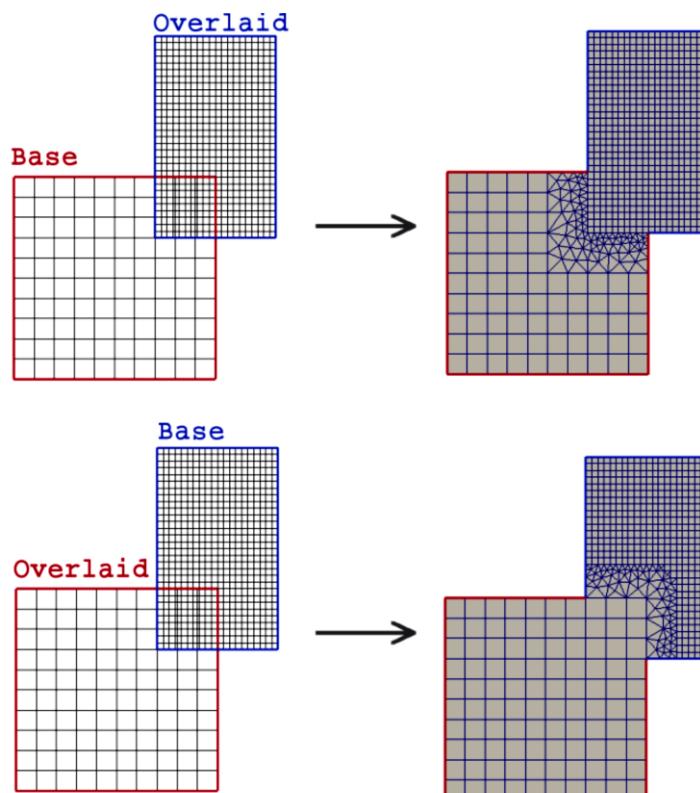


Рис. 2.13. Порядок наложения при связывании сеток

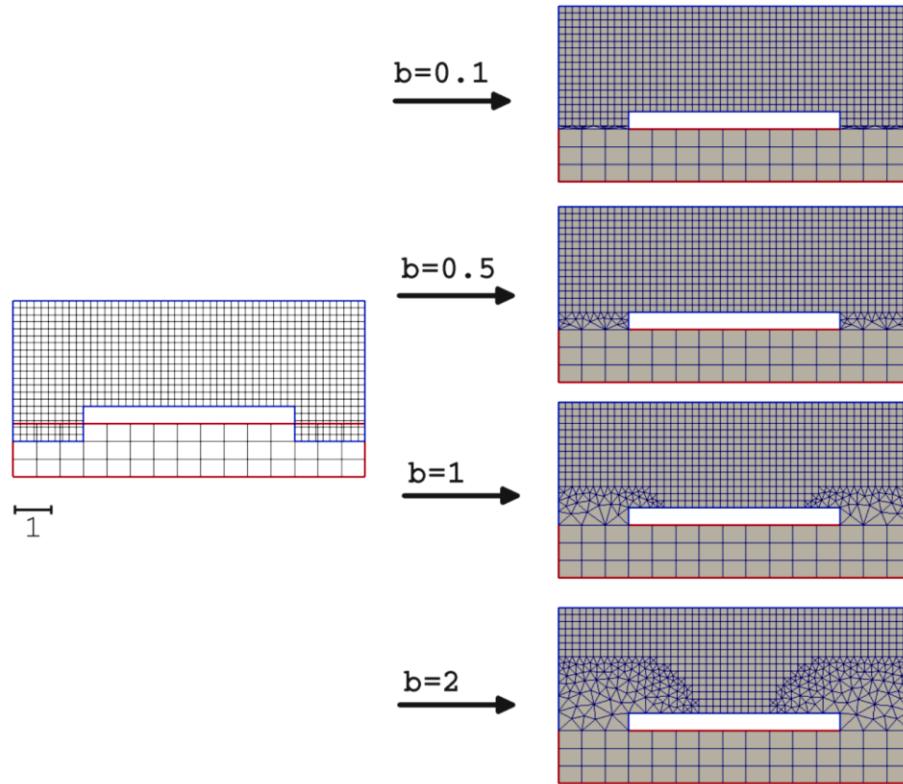


Рис. 2.14. Влияние размера буфера на связывание сеток

Отображение сеток в канонических областях на реальные блоки неканонической геометрии осуществляются с помощью решения задач Дирихле для уравнений Лапласа (2.16), как было изложено параграфе 2.2.2. В пакете `HybMesh` при задании граничных условий для этих задач явно указываются точки соответствия, см. рис. 2.15.

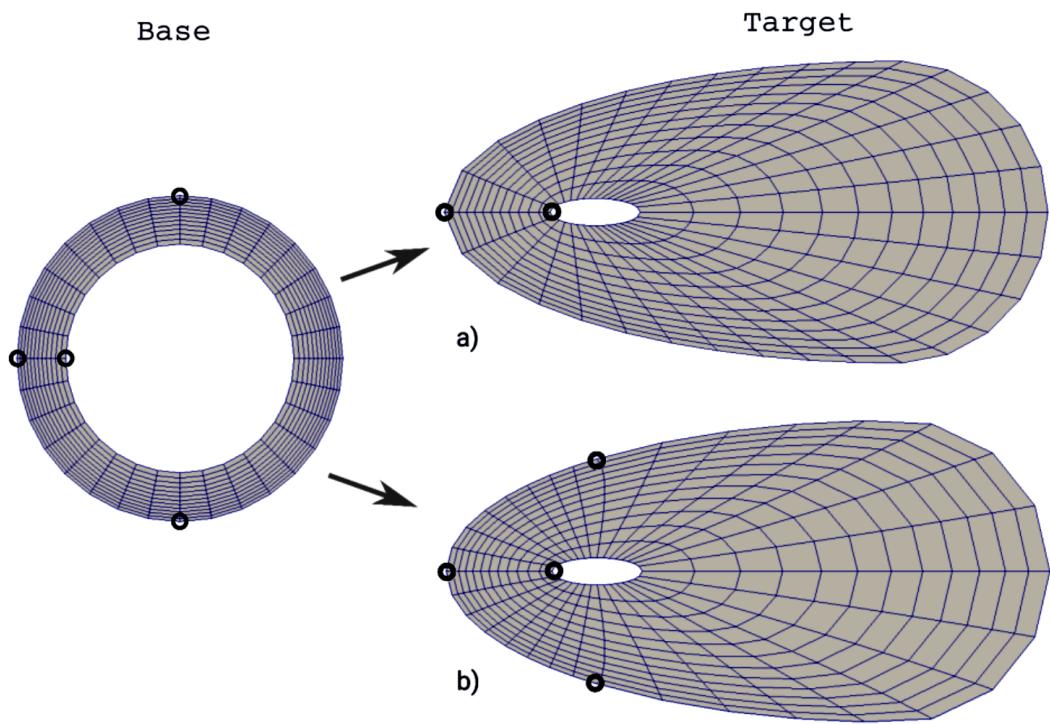


Рис. 2.15. Отображение сетки в кольце, используя две (а) и четыре (б) точки соответствия границ

Сеточный генератор HubMesh поддерживает расширяемую коллекцию структурированных ортогональных сеточных прототипов, а также инструменты для их разработки.

На рис. 2.16 показана сетка «акула», собранная многократным связыванием блоков, состоящим из трёх простых шагов. Вначале были построены сеточные прототипы для «тела» и «плавников»; при этом использовались отображения канонических блоков (прямоугольник, треугольник) в области реальной геометрии. Затем эти сетки объединялись с использованием буферов ненулевого размера. Наконец, «жабры», «глаз» и «рот» были построены и вырезаны (реализована процедура вычитания областей) из базовой сетки.

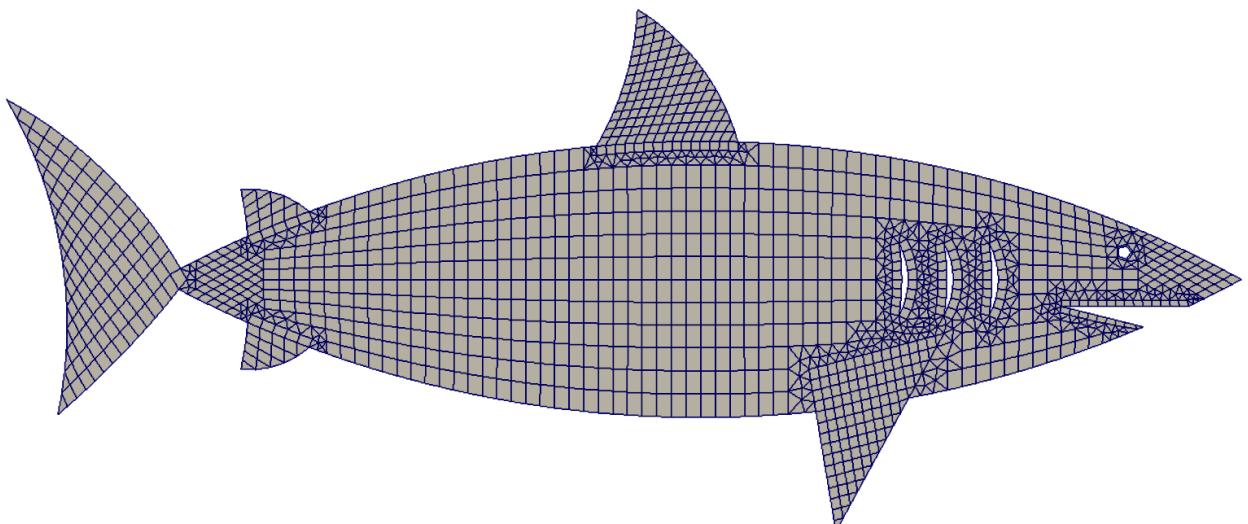


Рис. 2.16. Результат многократной суперпозиции сеток

Более близкие к вычислительной гидродинамике примеры гибридных композитных сеток представлены на рис. 2.17, 2.18.

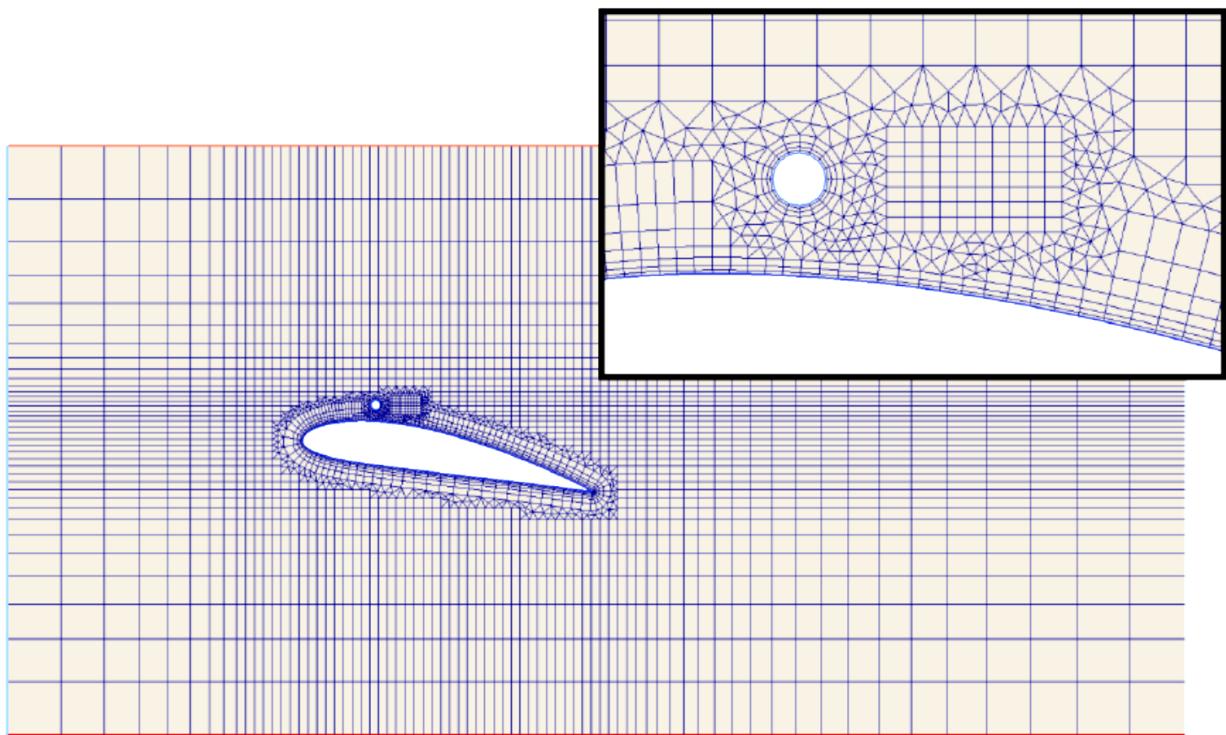


Рис. 2.17. Крыловой профиль с круговым вихрегенератором

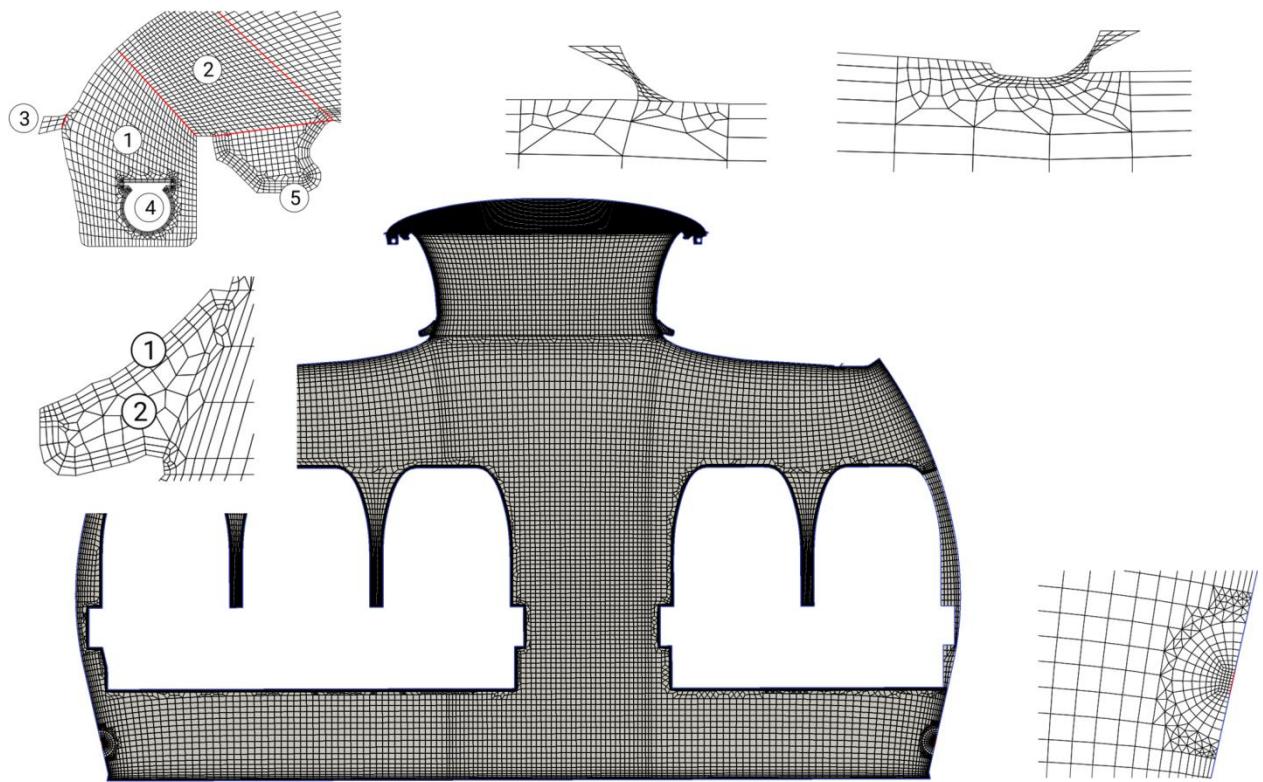


Рис. 2.18. Гибридная сетка в сечении салона пассажирского самолета (сеточный генератор HybMesh). Применялась для расчета вентиляции салона

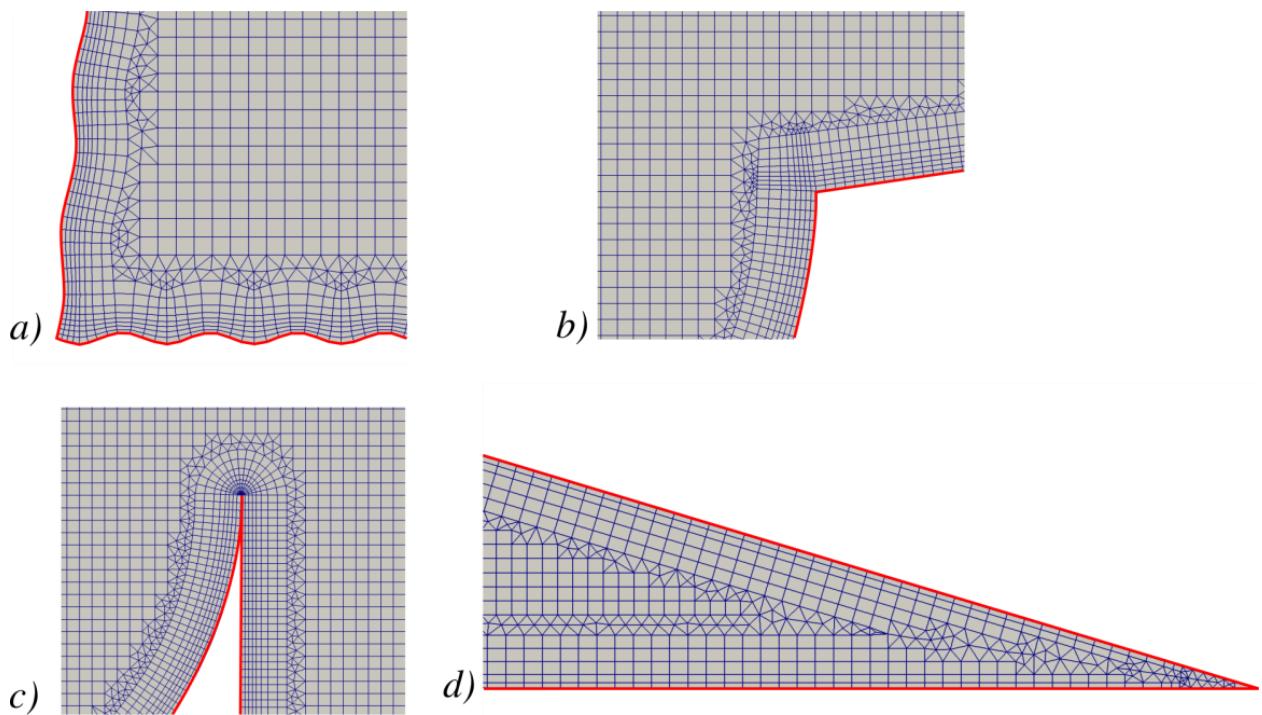


Рис. 2.19. Гибридная сетка в пограничных слоях (пакет HebMesh)

Разумеется, приведенные примеры иллюстрируют лишь основные функции, реализованные в сеточном генераторе. Для обеспечения его работы необходимо разработать и реализовать довольно сложные алгоритмы. В частности, это алгоритмы триангуляции пограничных слоев во внутренних углах (рис. 2.19, *a*), внешних углах (*b*), снаружи (*c*) и внутри (*d*) острых кромок.

2.4. Трехмерные сетки

2.4.1. Трехмерные элементы и общие трехмерные сетки

При построении трехмерных сеток в областях сложной пространственной структуры используют многообразные сеточные элементы. Некоторые конечные элементы из библиотеки коммерческого пакета STAR-CD показаны на рис. 2.20, 2.21.

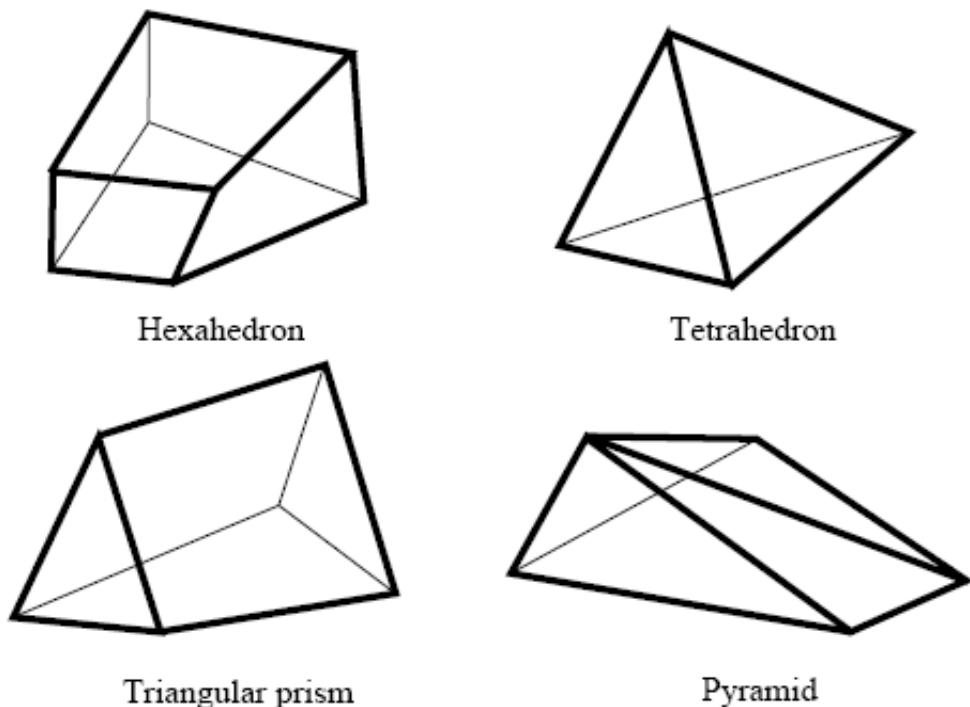


Рис. 2.20. Базовые конечные элементы: гексаэдр, тетраэдр, треугольная призма, четырехугольная пирамида (пакет STAR-CD)

Используются и элементы более сложных форм.

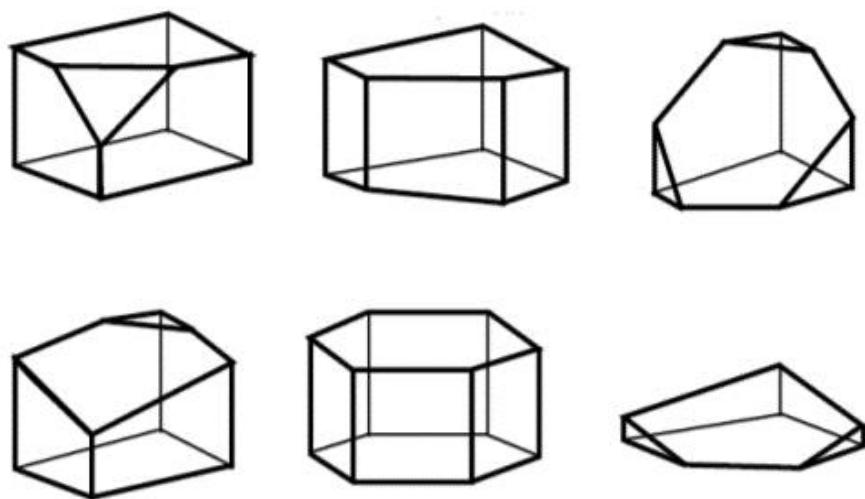


Рис. 2.21. Полиэдральные конечные элементы усложненных форм
(пакет STAR-CD)

Примеры трехмерных сеток показаны на рис. 2.22, 2.23.

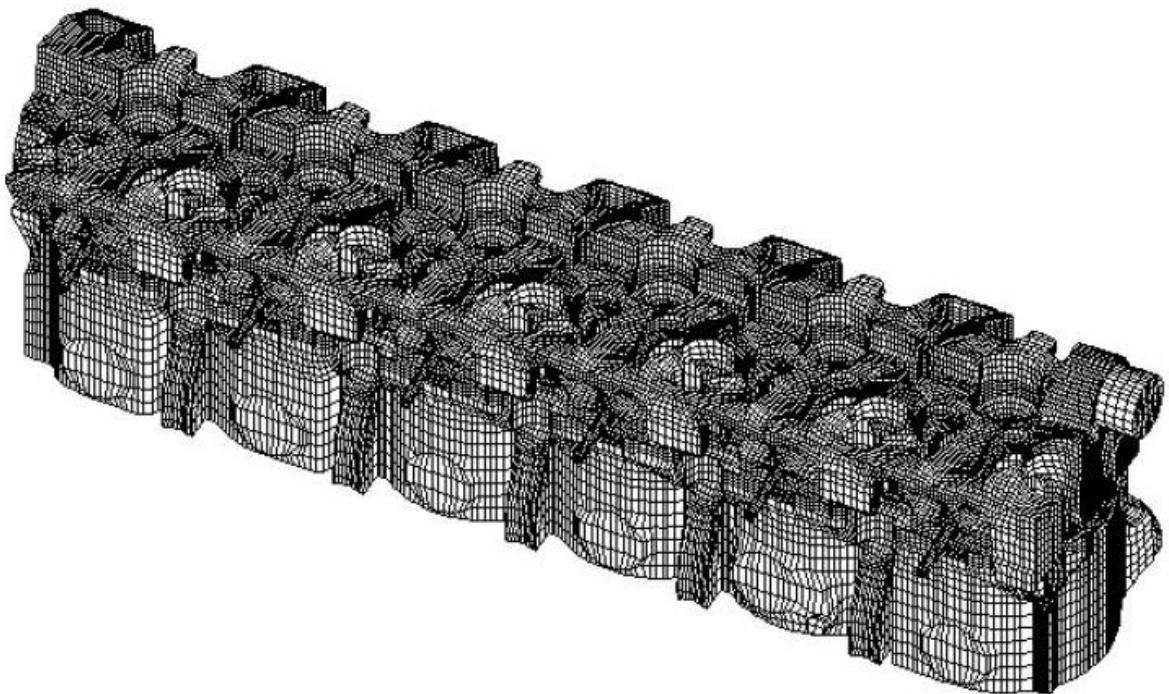


Рис. 2.22. Трехмерная сетка из элементов разных типов
для расчета системы охлаждения двигателя (пакет STAR-CD)

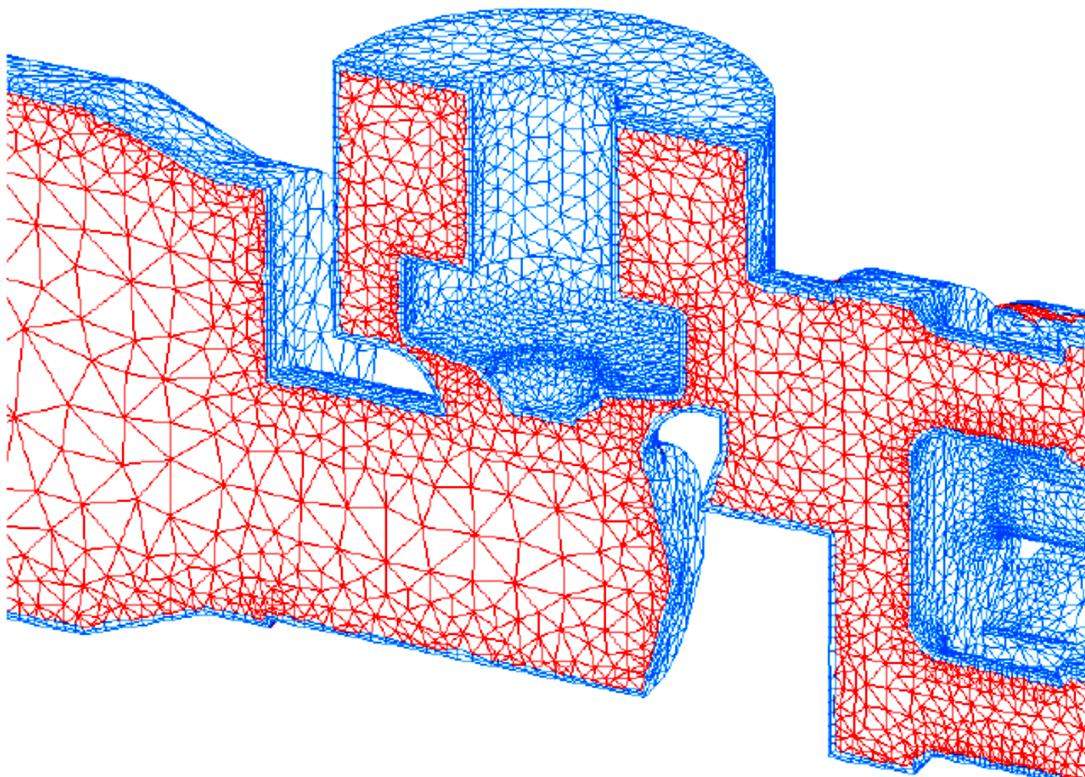


Рис. 2.23. Трехмерная сетка тетраэдров (пакет STAR-CD)

При построении трехмерных сеток применяются те же принципиальные подходы, которые мы рассматривали для плоских сеток. Это простейшие сетки из кубиков, параллелограммов и т.п. в канонических областях; отображение канонических прототипов в реальные объекты с помощью решения задач Лапласа $\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$; многоблочные сетки; алгоритмы продвижения фронтом от границ; неструктурированные сетки на основе триангуляции Делоне. Однако необходимо подчеркнуть, что все эти алгоритмы в трехмерном варианте намного сложнее, чем в двумерном случае.

2.4.2. Псевдотрехмерные сетки (2.5D)

Очень популярен метод построения трехмерных (3D) сеток на основе двумерных (2D): вначале строится сетка 2D, а затем она «выдавливается - extrude» вдоль некоторого пути с определенным шагом, порождая 3D сетку. Такие сетки иногда называют «2.5D». На рис. 2.24-2.27 приводятся несколько примеров таких сеток.

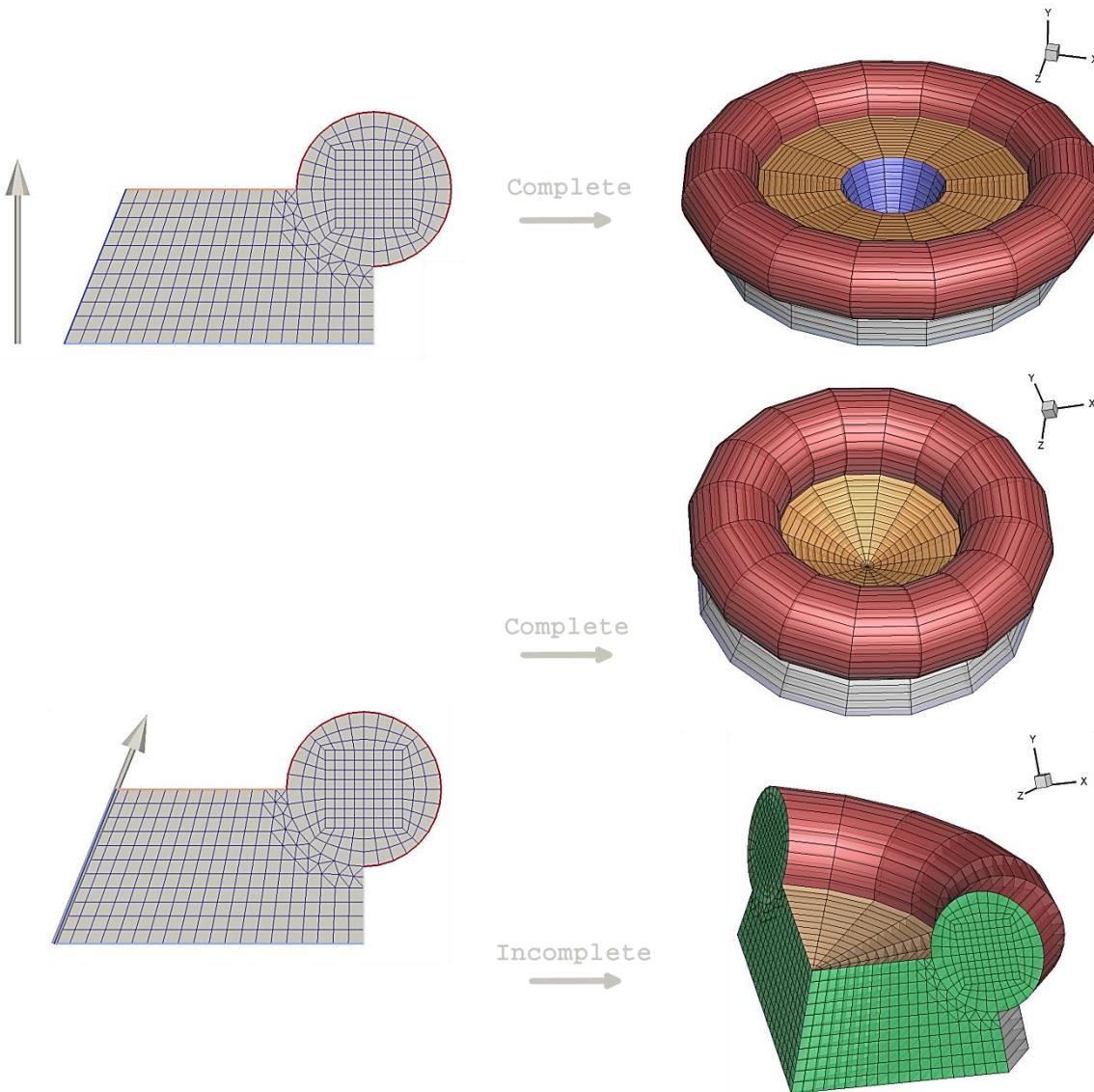


Рис. 2.24. Трехмерные сетки (справа), полученные полным и неполным вращением двумерных сеток, изображенных слева (пакет HybMesh)

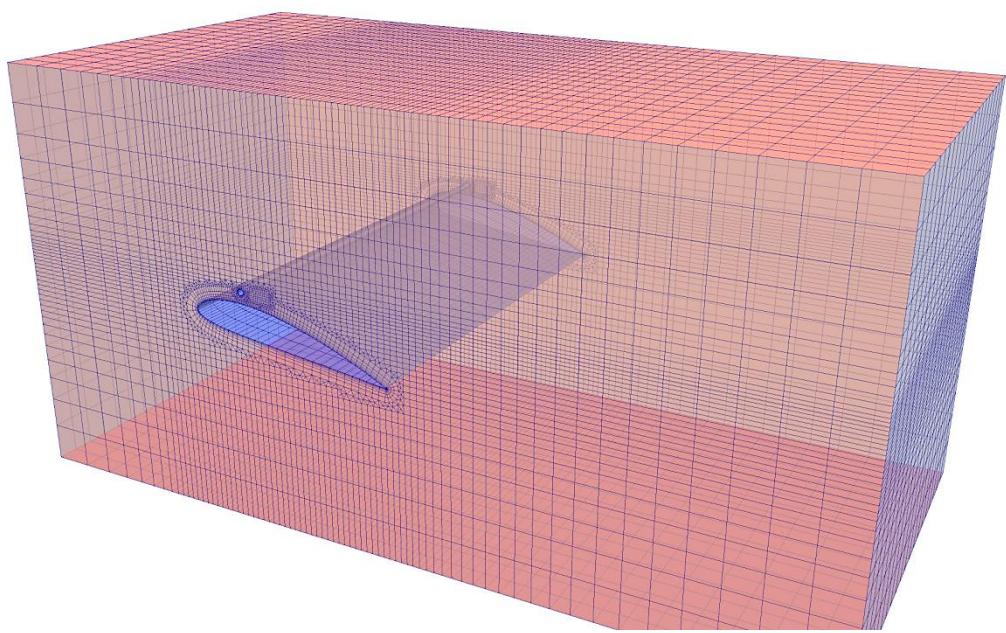


Рис. 2.25. Псевдотрехмерная 2.5D сетка, полученная выдавливанием 2D сетки крылового профиля с вихревогенератором рис. 2.17 (пакет HybMesh)

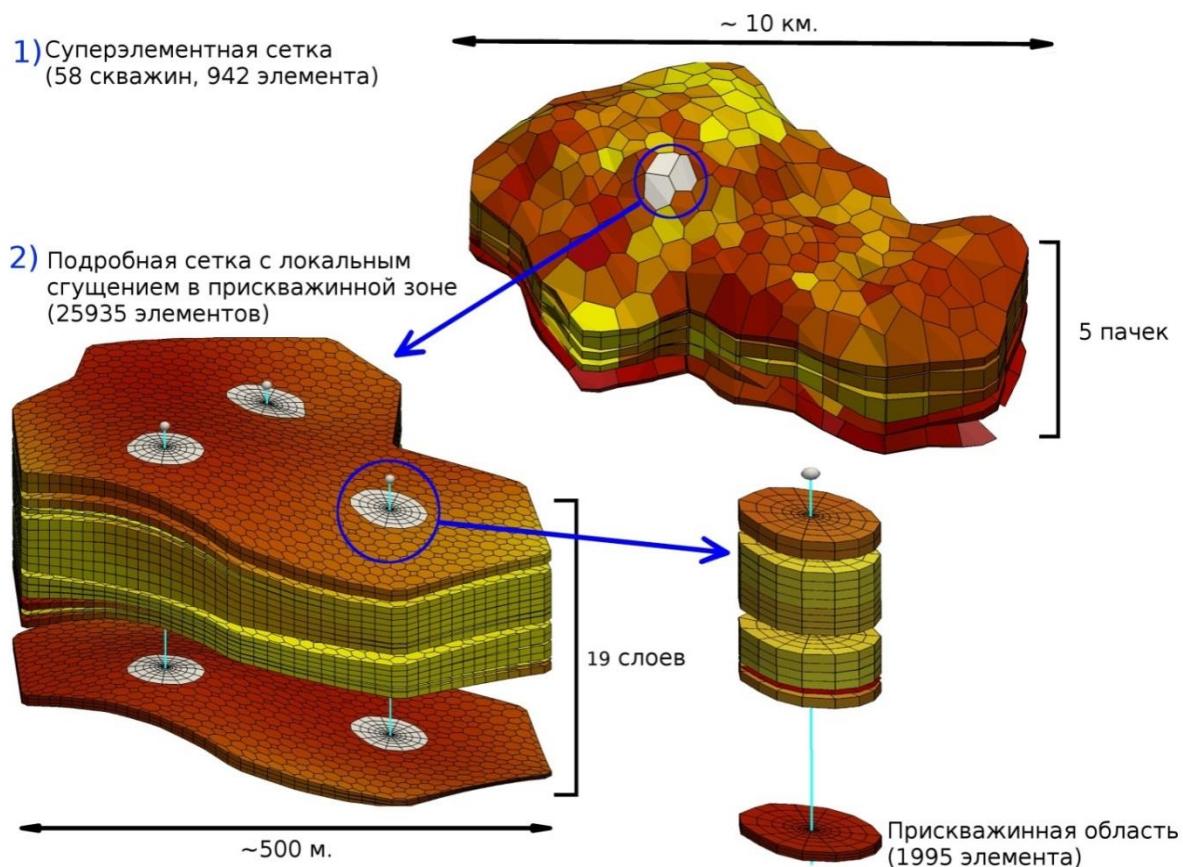


Рис. 2.26. Суперэлементная 2.5D сетка для моделирования нефтедобычи, полученная выдавливанием 2D сетки по вертикали (пакет Delta-Integra)

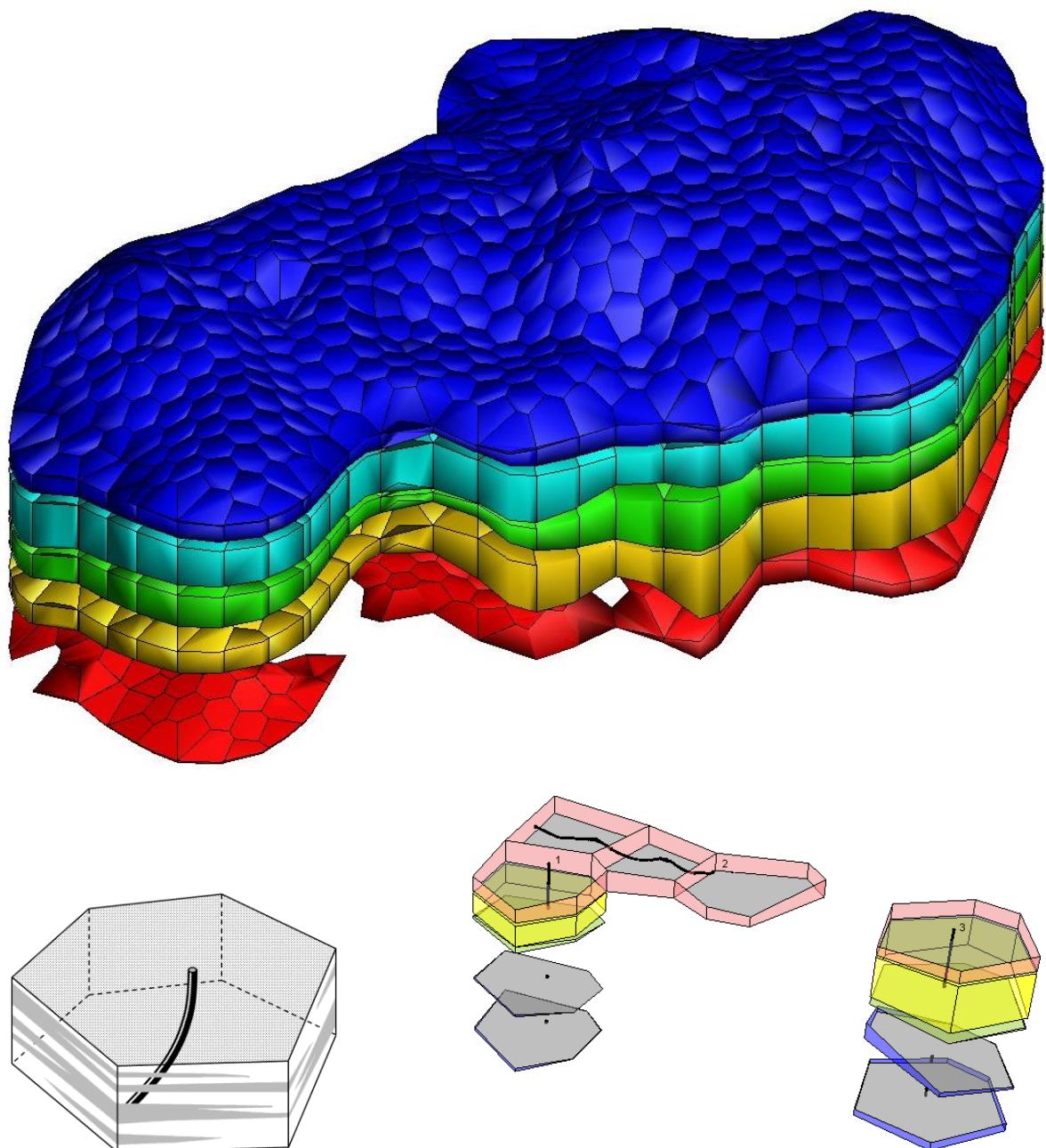


Рис. 2.27. Суперэлементная 2.5D сетка для моделирования слоистого нефтяного пласта и используемые типы элементов (пакет Delta-Integra)

ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Численное решение задачи математической модели в вычислительной гидродинамике предполагает построение сетки и сеточной схемы для этой задачи (аппроксимация дифференциального уравнения и краевых условий).

В данной главе мы излагаем основы метода конечных разностей для построения сеточных схем. Базовые подходы к конструированию разностных схем (РС) будут продемонстрированы на типичных одномерных задачах ВГ, большинство из которых сводятся к модельному уравнению конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu + f \quad (3.1)$$

3.1. Аппроксимация

Способы аппроксимации первых и вторых производных уже были рассмотрены при описании операций над сеточными функциями в Главе 2. Какова точность конечно-разностных аналогов? Для ответа на этот вопрос применяем разложение функции в ряд Тейлора в окрестности узла x_i :

$$u(x_i + h) = u_{i+1} = u_i + h \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + O(h^4),$$

откуда следует

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + O(h^3). \quad (3.2)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u(x_i - h) &= u_{i-1} = u_i - h \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + O(h^4), \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{h} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Итак, направленные разности (разность вперёд и разность назад) аппроксимируют первую производную с первым порядком по h ,

$$u_{x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + O(h), \quad u_{\bar{x}_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + O(h). \quad (3.4)$$

Но если составить центральную разность, сложив (2.2) и (2.3),

$$u_{\dot{x}_i} = \frac{1}{2} (u_{x_i} + u_{\bar{x}_i}) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + O(h^2) \quad (3.5)$$

то порядок аппроксимации повышается до второго.

Если из формулы (3.2) вычесть (3.3) и разделить на h , получим выражение для аппроксимации второй производной

$$\frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + O(h^2),$$

или

$$u_{x\bar{x}_i} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (3.6)$$

Аналогичные оценки можно получить и для производных по времени.

Численные значения погрешности аппроксимации представлены в таблице для функции $u = u' = u'' = e^x$ в точке $x = 1$ на сетке с шагом $h = 0.1$ (точное значение u и ее производных в этой точке равно 2.7183)

Формула	u_x	$u_{\bar{x}}$	$u_{\dot{x}}$	$u_{x\bar{x}}$
Значение	2.8588	2.5868	2.7228	2.7205
Погрешность	0.1406	-0.1515	0.004533	0.002265

Видно, что аппроксимация 2-го порядка дает и большую точность.

Порядок аппроксимации конечно-разностной схемы определяется наименьшим порядком аппроксимации среди членов уравнения и граничных условий. Для модельного уравнения (3.1) можно записать следующие популярные варианты РС.

$$\begin{Bmatrix} u_t \\ u_{\bar{t}} \end{Bmatrix} + V \begin{Bmatrix} u_x \\ u_{\bar{x}} \\ u_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = (ku_{\bar{x}})_x - qu + f$$

Выбор варианта в фигурных скобках определяет тип РС и её порядок аппроксимации. Так, разность вперед по времени в первом члене схемы дает явную РС и аппроксимацию $O(\tau)$, а выбор $u_{\bar{t}}$ делает схему неявной. Направленные разности u_x , $u_{\bar{x}}$ в конвективном члене дают первый порядок аппроксимации, а центральная разность $u_{\dot{x}}$ - второй, $O(h^2)$. Диффузионный член (первый в левой части) имеет аппроксимацию $O(h^2)$, а остальные члены, как правило, аппроксимируются точно. Итак, погрешность аппроксимации явной и неявной схем для линейного уравнения конвективной теплопроводности (3.1) с постоянными коэффициентами на равномерной сетке равна $O(\tau + h^2)$ для центрально-разностной аппроксимации конвективного слагаемого и $O(\tau + h)$ при использовании направленных разностей.

3.1.1. Аппроксимация и сходимость

Рассмотрим линейное уравнение $Lu = f$, где L - линейный дифференциальный оператор, а искомая функция u и правая часть f принадлежат пространству U с нормой $\|\cdot\|$. Сеточная аппроксимация (разностная схема) задачи имеет вид $L_h u_h = f_h$, где L_h - конечно-разностный оператор (матрица СЛАУ), а u_h и f_h - сеточные функции из пространства U_h с нормой $\|\cdot\|_h$. Индекс h в этой РС указывает на сетку с шагом h . По существу РС представляет собой набор СЛАУ, каждая из которых определяется конкретной сеткой и имеет решение u_h .

Говорят, что РС *сходится*, если $u_h \rightarrow u$ при $h \rightarrow 0$. Фактически это означает, что

$$\|(u)_h - u_h\|_h \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

где $(u)_h$ - это проекция точного решения исходной задачи из пространства U в пространство сеточных функций U_h . Решение РС u_h сходится к точному решению задачи u со скоростью $O(h^p)$, $p > 0$, если

$$\|(u)_h - u_h\|_h = O(h^p), \quad h \rightarrow 0$$

Может показаться, что для исследования сходимости РС необходимо знать точное решение задачи u . Однако для линейных задач обязательно. Обозначим через $(u)_h, (f)_h$ проекции соответствующих функций на сетку. Решение u_h сеточной схемы можем представить в виде $u_h = (u)_h + z_h$. Аналогично $f_h = (f)_h + \varphi_h$, где φ_h - погрешность аппроксимации правой части уравнения. Подставим эти разложения в разностную схему $L_h u_h = f_h$. Будем иметь $L_h(u)_h + L_h z_h = (f)_h + \varphi_h$. Для погрешности z_h сеточного решения получаем задачу

$$\begin{aligned} L_h z_h &= -L_h(u)_h + (f)_h + \varphi_h = \pm(Lu)_h - L_h(u)_h + (f)_h + \varphi_h = \\ &= (Lu)_h - L_h(u)_h + (f)_h - (Lu)_h + \varphi_h = \psi_h + (f - Lu)_h + \varphi_h. \end{aligned}$$

Здесь $\psi_h = (Lu)_h - L_h(u)_h$ представляет собой погрешность аппроксимации оператора на точном решении задачи, а второе слагаемое равно нулю при естественных требованиях к оператору проекции $(0) = 0, (a + b) = (a) + (b)$. Таким образом, для погрешности сеточного решения имеем задачу

$$L_h z_h = \varsigma_h \equiv \psi_h + \varphi_h,$$

правая часть которой ς_h есть погрешность аппроксимации сеточной схемы, складывающаяся из погрешностей аппроксимации оператора и правой части уравнения. Сходимость РС означает $\|z_h\|_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. При невырожденной матрице L_h это является следствием аппроксимации $\|\varsigma_h\|_h \rightarrow 0$.

В теории линейных РС известна *основная теорема*.

Из аппроксимации с порядком p и устойчивости РС следует сходимость при $h \rightarrow 0$ решения РС u_h к точному решению u с той же скоростью, т.е.

$$\|(u)_h - u_h\|_h = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Таким образом, чтобы оценить точность сеточного решения u_h , не требуется знать точное решение u , достаточно оценить порядок аппроксимации и доказать устойчивость РС. С понятием устойчивости и методами её исследования мы познакомимся позже в этой Главе учебного пособия.

В дальнейшем мы будем опускать символ проекции и индекс h в тех случаях, где это ясно из контекста, например, будем писать $\|u - u_h\|$ вместо $\|(u)_h - u_h\|_h$.

Математическая запись $\|u - u_h\| = O(h^p)$ означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u - u_h\|}{h^p} = C, \quad (3.7)$$

где C является константой в том смысле, что не зависит от h . Её значение, как видно из формул (2.2), (2.3) разложений в ряд Тейлора, определяется значениями высших производных, входящих в погрешность аппроксимации.

Задание 4. Выбрать тестовую функцию $u(x)$, $x \in [0,1]$ в виде комбинации тригонометрических, степенных и показательных функций. Вычислить ее производные u' , u'' . Ввести на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку с шагом $h = 1/N$. Проводя серию расчетов на сгущающихся сетках (задавая $h = 0.1; 0.01; \dots; 10^{-6}$), проверить формулу (3.7) для аппроксимаций производных первого порядка (3.4) и второго порядка (3.5), (3.6).

Указание. В качестве нормы использовать максимальную норму ошибки $\|e_h\|_h = \max_{1 \leq i \leq N-1} |e_h(i)|$. Для аппроксимации первой производной конечной разностью назад ошибка вычисляется по формуле $e_h(i) = u'(x_i) - u_{\bar{x}_i}$. Аналогично для других аппроксимаций.

3.2. Точность сеточного представления волн

Рассмотрим уравнение (3.1), когда $k = q = f \equiv 0$, т.е. уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.8)$$

При $V = \text{const}$ решение этого гиперболического уравнения имеет вид бегущей волны

$$u(x, t) = u_0(x - Vt), \quad (3.9)$$

где $u_0(x)$ – начальная форма волны (см. рис. 3.1).

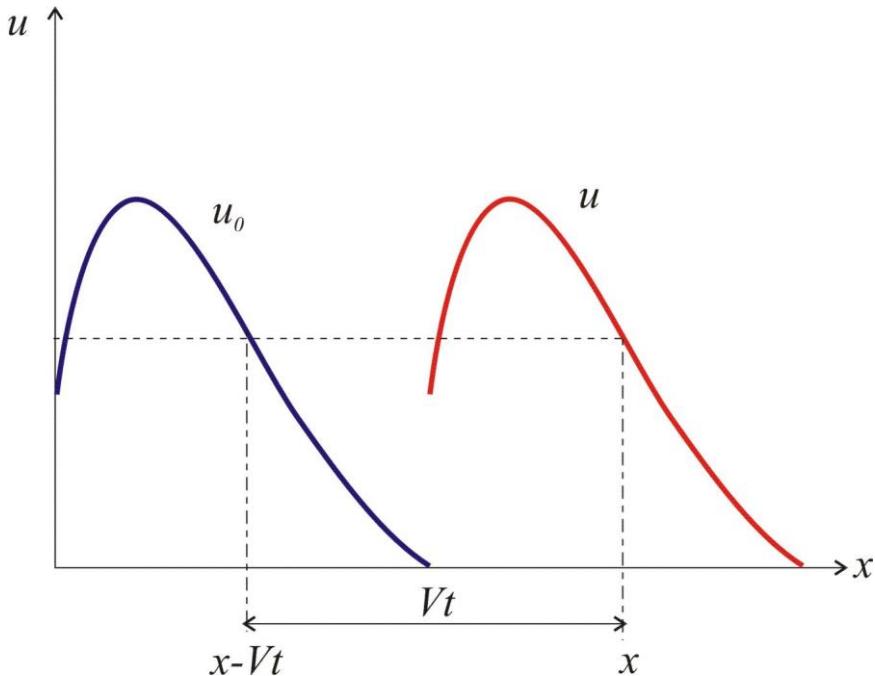


Рис. 3.1. Бегущая волна – решение уравнения переноса

Форма волны может быть представлена рядом Фурье с гармониками различных длин волн. Но на сетке с шагом h не может быть представлены

гармоники с длинами волн $\lambda < h$. Рассмотрим одну гармонику с волновым числом $k = 2\pi / \lambda$

$$u = \operatorname{Real} \{ \exp[ik(x - Vt)] \} = \cos[k(x - Vt)] \quad (3.10)$$

В узле x_i первая и вторая производные функции u равны

$$u' = -k \sin[k(x - Vt)], \quad u'' = -k^2 \cos[k(x - Vt)] \quad (3.11)$$

Подставим представление (3.10) в формулу центральной разности:

$$\begin{aligned} u' \sim u_{\dot{x}} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{\cos[k(x - Vt) + kh] - \cos[k(x - Vt) - kh]}{2h} = \\ &= -\frac{2 \sin[k(x - Vt)] \sin[kh]}{2h} \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (3.10), найдем т.н. *амплитудный фактор*

$$AR_1 = \frac{u_{\dot{x}}}{u'} = \frac{\sin(kh)}{kh} \quad (3.12)$$

Очевидно, что при фиксированном значении k и при $h \rightarrow 0$ имеем $AR_1 \rightarrow 1$, однако для высокочастотных (коротковолновых) гармоник, при $k \gg 1$ амплитудный фактор будет меньше единицы. На самом деле для адекватного представления волны с волновым числом k (точнее, центрально-разностной аппроксимации её производной) на сетке требуется такой шаг h , чтобы выполнялось условие $kh \ll 1$.

Если рассмотреть по аналогии разности вперед и назад, то увидим, что искажения вносятся не только в амплитуду волны, но и в ее фазу: истинная амплитуда умножается на величину $\sin(kh/2)/(kh/2)$, а фаза сдвигается на полшага сетки вперед либо назад.

Вычислим амплитудный фактор для второй разностной производной $u_{x\bar{x}}$, учитывая её точное значение (3.11). Имеем

$$\begin{aligned}
AR_2 &= \frac{u_{x\bar{x}}}{u''} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2 \left(-k^2 \cos[k(x-Vt)] \right)} = \\
&= -\frac{\cos[k(x-Vt) - kh] - 2\cos[k(x-Vt)] + \cos[k(x-Vt) + kh]}{k^2 h^2 \cos[k(x-Vt)]} = \\
&= -\frac{2\cos[k(x-Vt)]\cos[kh] - 2\cos[k(x-Vt)]}{k^2 h^2 \cos[k(x-Vt)]} = \\
&= -\frac{2(\cos[kh] - 1)}{k^2 h^2} = \frac{4\sin^2(kh/2)}{k^2 h^2} = \left[\frac{\sin(kh/2)}{kh/2} \right]^2
\end{aligned}$$

Простой расчет показывает, что если на одну волну приходится менее 4 узлов сетки, то $AR_2=0.64$, но даже при $h=\lambda/20$ получается $AR_2=0.992$. Это значит, что шаг расчетной сетки должен быть таким, чтобы в самой мелкой гармонике решения умещалось порядка 20 узлов и более.

Задание 5. Задать тригонометрическую функцию, например $u(x) = \cos(2\pi x)$, период которой равен единице. Вычислить u' и u'' . На отрезе $x \in [0,1]$ ввести равномерную сетку с шагом $h = 1/N$ и узлами $x_i = ih$, $i = 0..N$. Вычислить узловые значения $u_i = u(x_i)$, а также аппроксимации $u_x, u_{\bar{x}}, u_{\dot{x}}, u_{x\bar{x}}$ во внутренних узлах сетки. Сравнить графики этих сеточных функций с точными значениями u' и u'' в тех же узлах при различных N , определить визуально достаточно подробную сетку.

3.3. Устойчивость конечно-разностных схем

В вычислительной математике развита строгая теория устойчивости разностных схем, использующая сложный аппарат функционального анализа. В вычислительной гидродинамике чаще применяется менее формализованный подход к анализу устойчивости схем, излагаемый ниже.

Вычисления при решении нестационарных задач ВГ происходят в виде последовательности шагов по времени, с однотипными вычислениями на

каждом временном слое. Если при этом на текущем временном слое образовалась погрешность, то важно, чтобы эта погрешность при переходе со слоя на слой не возрастила. Такие вычислительные схемы называются устойчивыми, в противном случае – неустойчивыми.

Элементарный пример: вычисление «единицы» по двум формулам:

1) $\hat{u} = 9u - 8$, $u^0 = 1 + \varepsilon$. и 2) $\hat{u} = 0.5u + 0.5$, $u^0 = 1 + \varepsilon$. Очевидно, что точные вычисления при $\varepsilon = 0$ по обеим формулам дают неизменное значение $\hat{u} = u = 1$. Если же $\varepsilon \neq 0$, то ситуация меняется. Результаты расчета за 20 слоев при $\varepsilon = 10^{-7}$ приведены в таблице и свидетельствуют, что вторая рекуррентная формула вычисления является устойчивой, а первая – нет.

1	1.0000090E+0000	1.0000005E+0000
2	1.0000810E+0000	1.0000003E+0000
3	1.0007290E+0000	1.0000001E+0000
4	1.0065610E+0000	1.0000001E+0000
5	1.0590490E+0000	1.0000000E+0000
6	1.5314410E+0000	1.0000000E+0000
7	5.7829690E+0000	1.0000000E+0000
8	4.4046721E+0001	1.0000000E+0000
9	3.8842049E+0002	1.0000000E+0000
10	3.4877844E+0003	1.0000000E+0000
11	3.1382060E+0004	1.0000000E+0000
12	2.8243054E+0005	1.0000000E+0000
13	2.5418668E+0006	1.0000000E+0000
14	2.2876793E+0007	1.0000000E+0000
15	2.0589113E+0008	1.0000000E+0000
16	1.8530202E+0009	1.0000000E+0000
17	1.6677182E+0010	1.0000000E+0000

18	1.5009464E+0011	1.0000000E+0000
19	1.3508517E+0012	1.0000000E+0000
20	1.2157665E+0013	1.0000000E+0000

Проведем анализ устойчивости типичных РС для уравнений ВГ различными методами.

3.3.1. Метод дискретных возмущений

Он применяется для исследования устойчивости только явных РС. Пусть $\tilde{u} = u + \xi$ – приближенное решение линейной задачи $Au = f$ (A - линейный дифференциальный оператор), представленное в виде суммы точного решения u и ошибки ξ . Подставив разложение в уравнение, получаем, что погрешность (ошибка) удовлетворяет однородному уравнению: $A\tilde{u} = Au + A\xi = f, \Rightarrow A\xi = 0$. Таким образом, достаточно исследовать на устойчивость однородные уравнения, отбросив их правую часть. При этом под устойчивостью понимаем невозрастание решения со временем. Ниже проводится исследование некоторых РС методом дискретных возмущений.

Явная РС для уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = a \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i$$

Для погрешности имеем точно такую же РС, но при $f_i = 0$. Решение однородной явной схемы имеет вид

$$\hat{u}_i = u_i + \frac{a\tau}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}),$$

или

$$\hat{u}_i = (1 - 2\gamma)u_i + \gamma u_{i-1} + \gamma u_{i+1}, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h^2} \quad (3.13)$$

Пусть на текущем слое возмущение сосредоточено в узле i : $u_i = \varepsilon > 0$; $u_k = 0, k \neq i$. Тогда на следующем слое возмущение получат 3 узла: $i+1, i, i-1$. Вычислим их по формуле (3.13):

$$\hat{u}_i = (1 - 2\gamma)\varepsilon; \quad \hat{u}_{i-1} = \hat{u}_{i+1} = \gamma\varepsilon.$$

Можно наложить два требования на устойчивость: а) чтобы возмущения не возрастали по абсолютной величине, т.е. выполнялись неравенства $|1 - 2\gamma| \leq 1, |\gamma| \leq 1$; и б) чтобы, кроме того, решение не испытывало осцилляций, т.е. выполнено условие $1 - 2\gamma \geq 0$, и решение не меняет знак. Последнее, более жесткое, требование приводит к условию устойчивости РС как условию на соотношение шагов сетки по времени и пространству:

$$\gamma \leq 0.5 \quad \text{или} \quad \tau \leq \frac{h^2}{2a} \quad (3.14)$$

Вообще говоря, нужно рассмотреть еще один шаг по времени, чтобы посмотреть, как ведет себя погрешность при появившихся возмущениях в смежных узлах.

$$\begin{aligned} \hat{\hat{u}}_i &= (1 - 2\gamma)\hat{u}_i + \gamma(\hat{u}_{i-1} + \hat{u}_{i+1}) = \varepsilon(1 - 2\gamma)^2 + \varepsilon 2\gamma^2 = \\ &= \varepsilon[1 - 4\gamma + 6\gamma^2]; \\ \hat{\hat{u}}_{i+1} &= (1 - 2\gamma)\gamma\varepsilon + \gamma(1 - 2\gamma)\varepsilon = 2(1 - 2\gamma)\gamma\varepsilon. \end{aligned}$$

Условие устойчивости для последнего уравнения $\hat{\hat{u}}_{i+1} \leq \varepsilon$ выполняется, если имеет место (3.14). В центральном узле получаем условие $|1 - 4\gamma + 6\gamma^2| \leq 1$, откуда следует $2\gamma(3\gamma - 2) \leq 0$. Это значит, что $\gamma \leq 2/3$, однако это условие также вкладывается в (3.14). Итак, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой, условие устойчивости имеет вид (3.14).

Явная РС с разностью по потоку для уравнения переноса .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad V = \text{const} > 0.$$

Явная схема для ошибки с разностью *по потоку* имеет вид

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = -V \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \hat{u}_i = (1+C)u_i - Cu_{i+1}, \quad C = \frac{\tau V}{h}. \quad (3.15)$$

Очевидно, что при $V > 0$ $\hat{u}_i = (1+C)\varepsilon > \varepsilon$, и данная схема неустойчива.

Явная РС с разностью против потока для уравнения переноса

Явная схема для ошибки с разностью *против потока* имеет вид

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = -V \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \hat{u}_i = (1-C)u_i + Cu_{i-1}. \quad (3.16)$$

Задавая дискретное возмущение в узле i : $u_i = \varepsilon > 0$; $u_k = 0, i \neq k$, находим значения $\hat{u}_i = (1-C)\varepsilon, \hat{u}_{i+1} = C\varepsilon; \hat{u}_i = (1-C)^2\varepsilon, \hat{u}_{i+1} = C(1-C)\varepsilon$, и условие устойчивости Рихарда Куранта записывается в виде

$$C \leq 1 \text{ или } \tau \leq \frac{h}{V} \quad (3.17)$$

Явная симметричная РС для уравнения переноса

Исследуем *симметричную* явную схему для ошибки (с центральной разностью для аппроксимации конвекции)

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = -V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad \hat{u}_i = u_i - \frac{C}{2}u_{i+1} + \frac{C}{2}u_{i-1}. \quad (3.18)$$

При $u_i = \varepsilon > 0; u_k = 0, i \neq k$ имеем $\hat{u}_i = \varepsilon, \hat{u}_{i\pm 1} = \pm 0.5C\varepsilon$. Казалось бы, условие устойчивости такой схемы имеет вид $C < 2$, но если рассмотреть следующий шаг по времени, получим

$$\hat{u}_i = \varepsilon \left(1 - \frac{C^2}{2} \right), \quad \hat{u}_{i+1} = \varepsilon C, \quad \hat{u}_{i-1} = -\varepsilon C;$$

Наконец, на третьем шаге получим

$$\hat{\hat{u}}_i = \varepsilon \left(1 + \frac{C^2}{2} \right) > \varepsilon.$$

Поэтому центральная разность при аппроксимации конвективной производной приводит к неустойчивости схемы (3.18).

В заключение рассмотрим симметричную явную РС для уравнения конвекции-диффузии

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = k \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (3.20)$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= u_i (1 - 2\gamma) + u_{i+1} \left(\frac{C}{2} + \gamma \right) + u_{i-1} \left(-\frac{C}{2} + \gamma \right), \\ \gamma &= \frac{\tau k}{h^2}, \quad C = \frac{\tau V}{h} \end{aligned}$$

Видно, что возмущение в точке i не приводит к каким-то новым, по сравнению с уравнением диффузии, ограничениям, поскольку в центрально-разностной аппроксимации конвекции не входит центральная точка. Имеем $\gamma < 0.5$. Посмотрим на узлы $i+1$ и $i-1$:

$$\hat{u}_{i+1} = \left(\gamma + \frac{C}{2} \right) \varepsilon, \quad \hat{u}_{i-1} = \left(\gamma - \frac{C}{2} \right) \varepsilon$$

Решение будет устойчиво и без осцилляций, если

$$0 < \gamma + \frac{C}{2} \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 < \gamma - \frac{C}{2} \leq 1 \quad (3.21)$$

Из второго условия, в частности, следует, что

$$C \leq 2\gamma, \quad \frac{\tau V}{h} \leq 2 \frac{k\tau}{h^2} \Rightarrow \frac{Vh}{k} \equiv \text{Re}_c \leq 2. \quad (3.22)$$

Сеточное число Рейнольдса Re_c называется так потому, что роль k в уравнении переноса завихренности играет кинематическая вязкость, а в

безразмерном виде $k = \text{Re}^{-1}$, и тогда получаем ограничение на шаг по пространству

$$h < 2 / (V \text{Re}). \quad (3.23)$$

Примечательно, что условие (3.22) не зависит от шага по времени.

Из первого неравенства (3.21) получаем

$$C + 2\gamma \leq 2 \Rightarrow \tau \leq \frac{2h}{V + 2k/h}; \quad \gamma \leq \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

Условие (3.24) выполнено, если $C \leq 1$ и $\gamma \leq \frac{1}{2}$.

3.3.2. Матричный метод

Метод связан с оценкой нормы оператора перехода в явной схеме $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ через собственные числа разрешающей матрицы \mathbf{A} . Как известно, для устойчивости данной вычислительной схемы должно быть выполнено условие ограниченности спектрального радиуса

$$S(\mathbf{A}) = \max_k |\lambda_k| \leq 1$$

где λ_k - собственные числа матрицы \mathbf{A} .

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0; \\ u(0, t) &= u_0, \quad u(1, t) = u_1; \quad u(x, 0) = u^0(x) \end{aligned}$$

и явную схему (3.13) для неё – систему алгебраических уравнений

$$\hat{u}_i = (1 - 2\gamma)u_i + \gamma u_{i-1} + \gamma u_{i+1}, \quad \gamma = \tau / h^2, \quad i = 1..N-1$$

с трёхдиагональной матрицей \mathbf{A} . Собственные числа этой матрицы известны:

$$\lambda_k = 1 - 4\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \quad k = 1..N-1$$

Очевидно, схема будет устойчива, если $|\lambda_k| \leq 1$, т.е.

$$-1 \leq 1 - 4\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \leq 1, \text{ или } 1 \geq 2\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), -4\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \leq 0$$

Последнее неравенство выполнено всегда, а предпоследнее – только если $\gamma \leq 0.5$, что совпадает с полученным ранее условием устойчивости этой РС.

Теперь исследуем чисто неявную РС для этого же уравнения $(1+2\gamma)u_i + \gamma u_{i-1} + \gamma u_{i+1} = \bar{u}_i$. Она записывается через трехдиагональную матрицу $\mathbf{B}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ в левой части:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix}$$

Собственные числа этой матрицы равны $\lambda_k = 1 + 4\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \geq 1$, поэтому

неявная схема безусловно устойчива.

Для уравнений общего вида оценка собственных значений разрешающей матрицы – сложная задача. Поэтому матричный метод исследования устойчивости РС используется крайне редко.

3.3.3. Метод фон Неймана

Он применяется для анализа устойчивости явных и неявных РС для линейных задач с постоянными коэффициентами. В случае переменных коэффициентов метод в ряде случаев тоже даёт верные оценки; при этом для анализа коэффициенты «замораживают» с помощью априорных оценок.

Ошибка представляется конечным рядом Фурье с числом членов (гармоник), равным количеству узлов сетки. На временном слое n решение для погрешности в узле j ищется в виде

$$u_j^n = G^n \exp(ij\theta), i = \sqrt{-1}, \theta = \kappa h, \kappa = 2\pi / \lambda \quad (3.26)$$

где κ – волновое число, θ – фазовый угол, а G^n – это коэффициент усиления G в степени n . Этот коэффициент для различных РС может быть либо действительным, либо комплексным. Утверждается, что РС устойчива, если модуль коэффициента усиления $|G| < 1$.

Далее мы продемонстрируем применение метода Неймана для анализа устойчивости некоторых конечно-разностных схем.

Подставим это представление в явную РС для уравнения диффузии $\hat{u}_j = (1 - 2\gamma)u_j + \gamma u_{j-1} + \gamma u_{j+1}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} G^{n+1} \exp(ij\theta) &= \\ &= (1 - 2\gamma)G^n \exp(ij\theta) + \gamma G^n \exp(i(j-1)\theta) + \gamma G^n \exp(i(j+1)\theta) \end{aligned}$$

Сократим на $G^n \exp(ij\theta)$:

$$G = (1 - 2\gamma) + \gamma \exp(-i\theta) + \gamma \exp(i\theta).$$

Вспоминая, что $\exp(-i\theta) + \exp(i\theta) = 2\cos\theta$, получаем

$$G = (1 - 2\gamma) + 2\gamma \cos\theta = 1 + 2\gamma(\cos\theta - 1) = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Условие устойчивости $|G| < 1$ будет выполнено, если имеют место два неравенства

$$1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1, \quad 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq -1$$

Первое из них всегда справедливо, а из второго следует $4\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 2$, что при произвольном угле θ означает, что должно быть $\gamma \leq 0.5$. Эта оценка повторяет полученный ранее результат для устойчивости явной схемы.

Применим метод Неймана к исследованию устойчивости симметричной РС для уравнения переноса (3.18)

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} = -V \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \quad \hat{u}_j = u_j - \frac{C}{2}u_{j+1} + \frac{C}{2}u_{j-1}.$$

Ищем решение на временном слое n в узле j в виде гармоники $u_j^n = G^n \exp(ij\theta)$. Подставим это выражение в РС и сократим на $G^n \exp(ij\theta)$.

Получим

$$\begin{aligned} G &= 1 - \frac{C}{2} [e^{i\theta} - e^{-i\theta}] = \\ &= 1 - \frac{C}{2} [(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))] = \\ &= G = 1 - \frac{C}{2} [i 2 \sin \theta] = 1 - i C \sin \theta. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\forall \theta |G| = 1 + C^2 \sin^2 \theta \geq 1$, что доказывает неустойчивость симметричной разностной схемы.

Перейдем к исследованию методом Неймана устойчивости противопотоковой РС для уравнения переноса (3.17).

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} + V \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \quad \hat{u}_j = (1 - C)u_j + Cu_{j-1}, \quad C = \frac{\tau V}{h}.$$

Подставим сюда гармонику $u_j^n = G^n \exp(ij\theta)$:

$$GG^n e^{ij\theta} = G^n e^{ij\theta} (1 - C) + CG^n e^{ij\theta} e^{-i\theta}$$

После деления на $G^n e^{ij\theta}$ имеем

$$\begin{aligned} G &= (1 - C) + Ce^{-i\theta} = (1 - C) + C(\cos \theta - i \sin \theta) = \\ &= (1 - C) + C \cos \theta - i C \sin \theta \end{aligned}$$

Требование $|G| \leq 1$ эквивалентно условию $|G|^2 \leq 1$, или

$$\begin{aligned} |G|^2 &= (1 - C)^2 + \textcolor{blue}{C^2 \cos^2 \theta} + 2(1 - C)C \cos \theta + \textcolor{blue}{C^2 \sin^2 \theta} = \\ &= (1 - C)^2 + C^2 + 2(1 - C)C \cos \theta \pm 2(1 - C)C = \\ &= [C + (1 - C)]^2 + 2(1 - C)C[\cos \theta - 1] = 1 - 4(1 - C)C \sin^2 \frac{\theta}{2} < 1 \end{aligned}$$

которое выполняется при условии Куранта-Фридрихса-Леви (условии КФЛ) $C \leq 1$. Данное условие устойчивости было получено ранее методом дискретных

возмущений. Физически оно означает, что за один временной шаг частица не может продвинуться дальше, чем на 1 шаг сетки по пространству.

Далее, применим метод Неймана для анализа устойчивости неявной РС для уравнения теплопроводности

$$u_{\bar{t}} = u_{x\bar{x}}, \quad u_j(1+2\gamma) - \gamma(u_{j-1} + u_{j+1}) = \bar{u}_j, \quad \gamma = \tau/h^2$$

Подстановка в эту схему гармоники $u_j^n = G^n \exp(ij\theta)$ приводит к выражению для коэффициента усиления

$$G^n e^{ij\theta} (1+2\gamma) - \gamma G^n e^{ij\theta} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = G^n G^{-1} e^{ij\theta},$$

$$G^{-1} = (1+2\gamma) - 2\gamma \cos \theta = 1 + 2\gamma(1 - \cos \theta) = 1 + 4\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 1$$

откуда следует $|G| \leq 1 \quad \forall \theta$, т.е. неявная схема безусловно устойчива.

Задание 6.

6.1. Исследовать методом Неймана устойчивость симметричной явной РС для уравнения конвективной теплопроводности $u_t + Vu_x = ku_{x\bar{x}}$ или

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = k \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Сравнить условия устойчивости с результатами, полученными ранее методом дискретных возмущений.

6.2. Исследовать аппроксимацию и устойчивость РС (методом Неймана) для уравнения конвективной теплопроводности, явной по конвекции, но неявной по диффузии: $u_t + Vu_x = k\hat{u}_{x\bar{x}}$ или

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = k \frac{\hat{u}_{i+1} - 2\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1}}{h^2}$$

3.3.4. Обзор результатов по устойчивости РС

1) Для уравнения теплопроводности явная схема условно устойчива (при $\gamma = k\tau / h^2 \leq 1/2$), а неявная – безусловно устойчива.

2) Для уравнения переноса аппроксимация конвективного члена вперед по потоку, либо с помощью центральной разности дает абсолютно неустойчивую схему. И только аппроксимация против потока дает условно устойчивую схему при $C = \tau V / h \leq 1$ (условие КФЛ).

3) Для явной симметричной РС для уравнения конвективной диффузии условия устойчивости состоят из трех неравенств: $\gamma \leq 1/2$, $C \leq 1$ и $C \leq 2\gamma$, или $Re_c = Vh / k \leq 2$. Последнее ограничение на сеточное число Рейнольдса предотвращает осцилляции численного решения.

Таким образом,

- наличие диффузионного члена способствует устойчивости, а конвекция провоцирует неустойчивость.
- неявные схемы более устойчивы, чем явные.

В чем же причина устойчивости явной противопотоковой схемы? В том, что на самом деле она содержит *диффузию!* В самом деле, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, видим

$$\begin{aligned} u_t + V \frac{u_i - u_{i-1}}{h} &= u_t + \frac{V}{h} \left\{ u_i - \left[u_i - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) \right] \right\} = \\ &= u_t + V \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Vh}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2). \end{aligned}$$

Итак, противопотоковая схема (upwind) в действительности аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu = \frac{Vh}{2}$$

где $\nu > 0$ называется искусственной или схемной вязкостью, а сам член в правой части называется диффузионным. К счастью, $\nu \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Если же исследовать схему «по потоку» (downwind), то окажется, что эта РС содержит *антидиффузию*, т.е. перед второй производной в правой части будет знак минус. Поэтому такая дифференциальная задача будет математически некорректной, а РС – абсолютно неустойчивой.

3.4. РС повышенного порядка точности для линейного уравнения конвекции

Мы уже рассмотрели простейшие РС для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad V > 0 \quad (3.27)$$

с аппроксимацией конвективной производной по потоку и против потока (порядок аппроксимации $O(\tau + h)$), а также симметричную РС (порядок $O(\tau + h^2)$), исследовали их устойчивость. Ниже рассматриваются другие употребительные РС, имеющие более высокий порядок аппроксимации.

3.4.1. Схема «чехарда»

Это трехслойная симметричная схема, как по x , так и по t .

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - \check{u}_i}{2\tau} + V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= 0, \\ \hat{u}_i(t) &= u_i(t + \tau), \quad \check{u}_i(t) = u_i(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Разложением в ряд Тейлора легко показать, что порядок аппроксимации этой РС равен $O(\tau^2 + h^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - \check{u}_i}{2\tau} &= \frac{1}{2\tau} \left\{ u_i + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots - \right. \\ &\quad \left. - u_i + \tau \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \right\} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^3). \end{aligned}$$

$$V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{V}{2h} \left\{ u_i + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \right. \\ \left. - u_i + h \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4) \right\} = V \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Vh^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^3)$$

Поскольку из самого уравнения (3.27) следует

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -V^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

то модифицированное уравнение для РС (1) с точностью до слагаемых порядка $O(h^3 + \tau^3)$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + E &= 0, \\ E &= \frac{Vh^2}{6} \left[1 - C^2 \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad C = \frac{\tau V}{h}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Применение метода Неймана дает условие устойчивости схемы (3.28) в виде $C \leq 1$. Легко видеть, что временные слои как бы перепрыгивают через один, так что получаются две ветки решения: четные и нечетные слои по времени, не зависящие друг от друга. На практике через несколько шагов по времени решение осредняют по двум смежным временным слоям. Поскольку схема трехслойная, нужно стартовать с начальных данных и вычислить первый слой с помощью какой-либо другой двухслойной схемы, например схемы Upwind.

3.4.2. Схема Лакса-Вендроффа или Лейза

Это двухслойная схема второго порядка. Она основана на уточнении аппроксимации разностной производной по времени за счет равенства

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Разложение в ряд Тейлора разностной производной по времени дает

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left\{ u_i + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u_i + O(\tau^3) \right\} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau V^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2).$$

Поэтому можем записать двухслойную аппроксимацию второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau V^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2) \sim \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau V^2}{2h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}).$$

Разностная схема Лакса-Вендрофа с центральной разностью в конвекции имеет вид

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau V^2}{2h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

или

$$\hat{u}_i = u_i + \frac{C^2}{2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \frac{C}{2} (u_{i+1} - u_{i-1}).$$

Видно, что по существу, в неустойчивой РС с центральной разностью по пространству добавилась диффузия, которая компенсировала антидиффузию, содержащуюся в разностной производной по времени. В этом смысле можно трактовать РС Лакса-Вендрофа как схему с искусственной вязкостью. Условие устойчивости этой КРС – это условие Куранта $C \leq 1$. На рис. 3.2 показаны результаты расчета по схеме Лакса-Вендрофа переноса прямоугольного импульса. Представлены точное решение как бегущая волна без искажения формы (на правой группе графиков показано синим цветом); решение по диссипативной схеме «upwind» с размазыванием фронтов волны (красным); и решение по схеме Лакса-Вендрофа с нефизичной осцилляцией на фронтах волны (темно-синим).

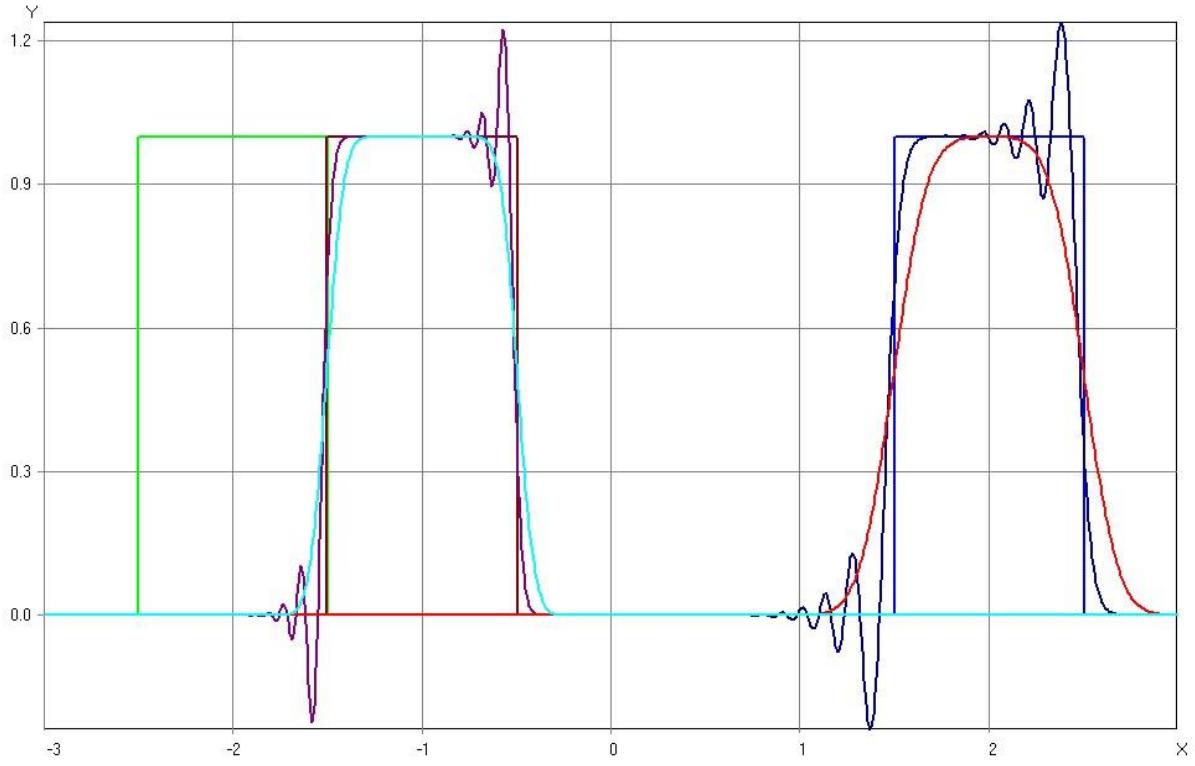


Рис. 3.2. Решение уравнения переноса прямоугольного импульса.
Точное решение, диссипативная схема «upwind» и схема Лакса-Вендрофа
с осцилляцией на фронтах волны

3.4.3. Схема Кранка – Николсон

Это симметричная двухслойная неявная схема второго порядка аппроксимации. Производная по времени аппроксимируется разностью вперёд, а пространственный оператор осредняется по двум временным слоям: верхнему и текущему. В результате схема становится симметричной относительно временного слоя $\tilde{t} = 0.5(t + \hat{t}) = t + 0.5\tau$.

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ V \frac{\hat{u}_{i+1} - \hat{u}_{i-1}}{2h} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ V \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right\} = 0 \quad (3.30)$$

или

$$-\frac{C}{4} \hat{u}_{i-1} + \hat{u}_i + \frac{C}{4} \hat{u}_{i+1} = \frac{C}{4} u_{i-1} + u_i - \frac{C}{4} u_{i+1}. \quad (3.31)$$

Решение СЛАУ (3.31) легко найти методом прогонки. Эта РС безусловно устойчива.

Замечание. Применение разумных неявных схем к уравнению конвекции обычно приводит к безусловной устойчивости. Однако это не значит, что такие схемы лучше, чем явные. Дело в том, что при использовании неявной схемы на каждом временном слое решается система алгебраических уравнений, что соответствует решению уравнения в частных производных параболического типа (нестационарная диффузия). Это значит, что ошибка, появившаяся в узле i пространственной сетки, сразу распространяется на все узлы. А в гиперболических уравнениях (конвективный перенос) возмущения движутся с конечными скоростями и локализованы на характеристиках (линиях тока). Поэтому, а также из-за алгоритмической простоты, на практике для уравнений переноса чаще используются явные РС с выбором шага по времени, обеспечивающего условие устойчивости КФЛ.

Задание 7. Решить уравнение переноса волны со скоростью $V = 1$ с помощью трех РС: «чехарда», Лейза и Кранка-Николсон. Начальное условие задавать в виде

$$1) \text{ прямоугольного импульса } u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \quad x > 2; \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

$$2) \text{ треугольного импульса } u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \quad x > 2; \\ 2(x-1), & 1 < x < 1.5; \\ 1-2(x-1.5), & 1.5 < x < 2; \end{cases}$$

$$3) \text{ гладкого импульса } u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \quad x > 2; \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sin \left(2\pi(x-1) - \frac{\pi}{2} \right) \right\}, & 1 < x < 2; \end{cases}$$

Проверить условия устойчивости схем на счете. Сравнить результаты счета по трем РС между собой и со схемой «upwind».

Указание. Область расчета взять $0 < x < 15$, время счета $0 < t < 10$.

3.5. Численная диссипация и дисперсия разностных схем

Как уже отмечалось, точное решение уравнения конвективного переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

– это волна, двигающаяся с постоянной скоростью. Любое решение линейной задачи можно представить в виде суперпозиции волн разной длины. Рассмотрим одну гармонику в виде прогрессивной волны

$$U = e^{-pt} \cos[k(x - Wt)], \quad k = 2\pi / \lambda \quad (3.32)$$

Здесь λ – длина волны, k – волновое число, W – скорость распространения волны, p – скорость ее затухания. Предполагается, что p и W могут зависеть от k , т.е. каждая гармоника (волна) в принципе распространяется и затухает по-своему. Вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -pe^{-pt} \cos[k(x - Wt)] + kW e^{-pt} \sin[k(x - Wt)]; \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= -ke^{-pt} \sin[k(x - Wt)]; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -k^2 e^{-pt} \cos[k(x - Wt)]; \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} &= k^3 e^{-pt} \sin[k(x - Wt)]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Подставим точное представление волны (3.32) в уравнение конвекции (3.31). Пользуясь формулами (3.33), получим

$$\begin{aligned} &-pe^{-pt} \cos[k(x - Wt)] + kW e^{-pt} \sin[k(x - Wt)] - \\ &-kV e^{-pt} \sin[k(x - Wt)] = \\ &= e^{-pt} \{-p \cos[k(x - Wt)] + k(W - V) \sin[k(x - Wt)]\} = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Очевидно, уравнение (3.34) справедливо, когда $W = V$, $p = 0$, т.е. все волны бегут с одинаковой скоростью и не затухают.

Наряду с «чистым» уравнением переноса (3.31) рассмотрим уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu > 0 \quad (3.35)$$

и т.н. линейное уравнение Кортевега - де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \delta < 0. \quad (3.36)$$

Подставим в уравнение конвекции-диффузии (3.35) прогрессивную волну U и воспользуемся формулами (3.33), (2.34). Будем иметь

$$\begin{aligned} e^{-pt} \left\{ -p \cos[k(x-Wt)] + k(W-V) \sin[k(x-Wt)] \right\} = \\ = -\nu k^2 e^{-pt} \cos[k(x-Wt)] \end{aligned}$$

Это уравнение превращается в тождество при $p = \nu k^2$, $W = V$. Это означает, что все волны в решении уравнения (3.35) бегут с одной скоростью, но интенсивно затухают, причем короткие волны (большие k) затухают гораздо быстрее, чем длинные (малые k). Процесс затухания волн в численном решении называется схемной диссипацией.

Теперь подставим гармонику U в уравнение Кортевега - де Вриза (3.36):

$$\begin{aligned} e^{-pt} \left\{ -p \cos[k(x-Wt)] + k(W-V) \sin[k(x-Wt)] \right\} = \\ = \delta k^3 e^{-pt} \sin[k(x-Wt)] \end{aligned}$$

Имеем $p = 0$, $W = V + k^2 \delta$, т.е. затухания волн не происходит, но скорость их распространения существенно различна для волн разной длины. Короткие волны (большие волновые числа k) заметно опережают «точный» фронт волны, движущийся со скоростью V . Это приводит к искажению формы волны и называется схемной дисперсией.

Уравнения (3.35) и (3.36) будем трактовать как асимптотическое (при $h \rightarrow 0$) представление РС для уравнения переноса (3.31), в котором вторая и

третья производные с коэффициентами $\nu(h), \delta(h)$ - это главные члены погрешности аппроксимации. Такие дифференциальные уравнения для конкретных РС называют также *модифицированными* уравнениями.

Рассмотренный пример показал, что если погрешность аппроксимации РС выражена производными четного порядка, то наблюдается схемная **диссипация** решения, т.е. уменьшение амплитуды его гармоник, особенно высокочастотных гармоник. Погрешности аппроксимации РС, выраженные через производные нечетного порядка, приводят к численной **дисперсии**, когда скорости распространения гармоник, составляющих решение задачи, неодинаковы и отличаются от точной скорости продвижения фронта волны.

Например, в схеме Лакса-Вендроффа с помощью разложения в ряд Тейлора можно показать, что главный член ошибки аппроксимации имеет вид

$$\frac{h^2}{6}V\left(1-C^2\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^3}{8}VC\left(1-C^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Это значит, что дисперсия этой схемы имеет второй порядок, а диссипация – третий порядок малости по h .

Анализ РС с помощью модифицированного уравнения имеет еще и то преимущество, что он распространяется и на нелинейные уравнения. Однако при этом требуется проведение громоздких преобразований. В этом случае иногда прибегают к пакетам, осуществляющим символьные (формульные) преобразования.

3.6. Разностные схемы повышенного порядка точности для линейного уравнения диффузии

Мы уже рассматривали чисто явную и чисто неявную схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu + f \quad (3.37)$$

Обе они имеют порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$, и причина того, что по времени эти схемы имеют первый порядок аппроксимации, в том, что в обоих случаях использовалась направленные разности по времени. Явная РС была условно устойчива (при $\gamma \leq 0.5$), а неявная – безусловно устойчива.

3.6.1. Схема Дюфорта – Франкела

Чтобы добиться повышенного порядка точности, запишем вначале уравнение (3.37) в операторном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f, \quad Au = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

и будем варьировать аппроксимацию производной по времени и способ представления во времени пространственного оператора. При этом получаются т.н. *полудискретизованные* схемы. Так, полуdiscретизованная по времени явная схема имеет вид

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = Au + f,$$

а чисто неявная полуdiscретизованная схема выглядит так:

$$\frac{u - \check{u}}{\tau} = Au + f.$$

Естественным способом симметризации РС кажется использование центральной разности по времени. Такая схема называется *схемой Ричардсона*

$$\frac{\hat{u} - \check{u}}{2\tau} = Au + f. \quad (3.39)$$

Очевидно, эта трёхслойная РС имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$, если пространственный оператор A аппроксимирован, как обычно, со вторым порядком, например $Au_j \sim u_{xx}(j)$. Однако такая схема оказывается неустойчивой. Покажем это, применив метод Неймана, подставив в дискретизованное уравнение (3.39) гармонику $u^n = G^n \exp(ij\theta)$, где $i = \sqrt{-1}$,

j - номер узла пространственной сетки; n - номер текущего временного слоя, так что $\hat{u} = u^{n+1}$, $\check{u} = u^{n-1}$, G - коэффициент усиления; θ - фазовый угол. Получим равенство

$$G^n G e^{ij\theta} - G^n G^{-1} e^{ij\theta} = 2\gamma G e^{ij\theta} \left(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta} \right);$$

$$G - \frac{1}{G} = 2\gamma(-2 + 2\cos\theta) = -4\gamma(1 - \cos\theta) = -8\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Обозначим $b = 8\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 0$ и запишем квадратное уравнение для коэффициента усиления G :

$$G^2 + bG - 1 = 0, \quad G_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}.$$

Легко получаются оценки

$$|G_1| = \frac{\sqrt{b^2 + 4} - b}{2}, \quad |G_2| = \frac{\sqrt{b^2 + 4} + b}{2}, \quad \max |G| = |G_2| > 1 \quad \forall b > 0.$$

Таким образом, схема Ричардсона неустойчива и не имеет практического применения. Однако если в этой трехслойной РС аппроксимировать оператор Au выражением

$$Au = \frac{u_{j-1} - 2\tilde{u}_j + u_{j+1}}{h^2}, \quad \tilde{u}_j = \frac{\hat{u}_j + \check{u}_j}{2},$$

то получим схему Дюфорта-Франкела

$$\frac{\hat{u}_j - \check{u}_j}{2\tau} = \frac{u_{j-1} - (\hat{u}_j + \check{u}_j) + u_{j+1}}{h^2}, \quad (3.40)$$

которая тоже симметрична по пространству и времени, и к тому же безусловно устойчива. В самом деле, перепишем (3.40) в виде

$$\hat{u}_j (1 + 2\gamma) = \check{u}_j (1 - 2\gamma) + 2\gamma (u_{j-1} + u_{j+1})$$

и применим метод Неймана для анализа устойчивости. Будем иметь

$$\hat{u}_j = \bar{u}_j \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma} + (u_{j-1} + u_{j+1}) \frac{2\gamma}{1+2\gamma};$$

$$G = \frac{1}{G} \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma} + 2 \cos \theta \frac{2\gamma}{1+2\gamma}, \quad G^2 - 2 \cos \theta \frac{2\gamma}{1+2\gamma} G - \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma} = 0.$$

Наибольший корень этого квадратного уравнения равен

$$G = \cos \theta \frac{2\gamma}{1+2\gamma} + \sqrt{\cos^2 \theta \left(\frac{2\gamma}{1+2\gamma} \right)^2 + \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}} =$$

$$= \frac{2\gamma \cos \theta}{1+2\gamma} \sqrt{\cos^2 \theta (2\gamma)^2 + (1-2\gamma)(1+2\gamma)} =$$

$$= \frac{2\gamma \cos \theta}{1+2\gamma} \sqrt{\cos^2 \theta (2\gamma)^2 + 1 - (2\gamma)^2} = \frac{2\gamma \cos \theta}{1+2\gamma} \sqrt{1 - (2\gamma)^2 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq 1.$$

Итак, схема Дюфорта-Франкела безусловно устойчива, но у нее есть недостаток в аппроксимации. Если разложить в ряд Тейлора решение в окрестности узла j на текущем временном слое и подставить в схему (3.40), то получим

$$\frac{\hat{u}_j - \bar{u}_j}{2\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2) = \frac{u_{j-1} - 2u_j + O(\tau^2) + u_{j+1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O\left(\frac{\tau}{h}\right)^2.$$

Это значит, что при $h \rightarrow 0$ стремление $\tau \rightarrow 0$ должно быть настолько быстрым, чтобы и $\tau/h \rightarrow 0$. Например можно потребовать $\tau/h = O(h)$, $\tau = O(h^2)$. Данное условие может оказаться обременительным в расчетах на мелких сетках.

3.6.2. Схема Кранка-Николсон

Наиболее популярной в приложениях схемой 2-го порядка является неявная схема Кранка-Николсон, которую мы уже обсуждали в приложении к уравнению переноса. Для уравнения диффузии ее можно записать так:

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \frac{1}{2} (A\hat{u} + Au) + \frac{1}{2} (\hat{f} + f). \quad (3.41)$$

Эта схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, при аппроксимации второго порядка для оператора A , и абсолютно устойчива. Для ее решения следует перенести все члены с верхнего временного слоя влево, а остальные – вправо. Получим

$$\left(E - \frac{\tau}{2} A \right) \hat{u} = \left(E + \frac{\tau}{2} A \right) u + \tau \tilde{f}, \quad \tilde{f} = \frac{\hat{f} + f}{2}. \quad (3.42)$$

Полудискретизованная схема (3.42) при симметричной аппроксимации оператора A на трехточечном шаблоне порождает СЛАУ с трехдиагональной матрицей, и решается прогонкой так же, как и чисто неявная РС. Однако вычисление правой части уравнения (3.42) к каждой точке сетки может потребовать больших затрат. Вычисления можно оптимизировать, если интерпретировать РС Кранка-Николсон как схему с экстраполяцией. Введем промежуточную функцию $\tilde{u} = 0.5(\hat{u} + u)$, которую отнесем к времени $t + \tau / 2$. Если записать и решить чисто неявную схему

$$\frac{\tilde{u} - u}{\tau / 2} = A\tilde{u} + \tilde{f} \quad \text{или} \quad \left(E - \frac{\tau}{2} A \right) \tilde{u} = u + \frac{\tau}{2} \tilde{f}, \quad (3.43)$$

а затем провести экстраполяцию

$$\hat{u} = 2\tilde{u} - u, \quad (3.44)$$

то получим решение задачи (3.41). Для того, чтобы убедиться в этом, нужно просто подставить промежуточное значение $\tilde{u} = 0.5(\hat{u} + u)$ в (3.42).

Задание 8. Решить нестационарную задачу диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1; \\ t = 0: \quad u &= 0; \quad x = 0, x = 1: \quad u = 0. \end{aligned}$$

по разностным схемам Дюффорта-Франкела и Кранка-Николсон. Сравнить результаты счета между собой и с решением по чисто неявной схеме.

Указание. В качестве источника нагрева взять $f = 10$, счет вести до $t = 5$.

3.7. Аппроксимация граничных условий

Формулировка граничных условий для типичных краевых задач ВГ обсуждалась в главе 1 этого пособия. При построении РС до сих пор мы рассматривали только аппроксимацию уравнений во внутренних узлах сетки. При этом неявно предполагалось, что в граничных узлах ставятся граничные условия Дирихле, или условия I-го рода, когда на границе задано значение искомой функции в любой момент времени:

$$u|_{\Gamma} = u_{\Gamma}(t). \quad (3.45)$$

Если же заданы граничные условия Неймана (условия II-го рода), когда на границе задается плотность потока по нормали

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q(t). \quad (3.46)$$

Диффузионный обмен с окружающей средой на границе задается граничными условиями III-го рода:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\alpha(t) u|_{\Gamma} + \beta(t). \quad (3.47)$$

Граничное условие (3.47) выглядит более наглядно, если его переписать в виде

$$\Gamma: k \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha(t)[u - u_0(t)]; \quad u_0 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (3.48)$$

где α – коэффициент обмена, а функция u_0 характеризует состояние окружающей среды.

При построении РС для задач с граничными условиями (3.46) - (3.48) возникает проблема аппроксимации нормальной производной на границе. *Общее правило* состоит в том, чтобы не записывать непосредственно конечно-разностные аналоги граничных условий с производной, но аппроксимировать основное уравнение в точках границы с учетом граничных условий II-го или

III-го рода, в которых нормальная производная выражена через значения функций на границе.

Проиллюстрируем данный подход на построении РС для смешанной краевой задачи с граничными условиями второго и третьего рода.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + f, \quad Q \equiv k(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in (0,1); \quad t > 0. \\ t = 0 : u &= u_0(x); \\ x = 0 : Q_n &= k \frac{\partial u}{\partial n} = q; \quad x = 1 : Q_n = k \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u + \beta. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Запишем явную разностную схему на равномерной сетке $x_i = ih, h = 1/N, i = 0..N$. Во внутренних узлах, как обычно,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} &= \frac{1}{\hbar_i} (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}) + f_i, \quad i = 1..N-1; \\ Q_{i+1/2} &= k_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad k_{i+1/2} = \frac{k_i + k_{i+1}}{2}; \quad \hbar_i = \begin{cases} h, & i = 1..N-1, \\ h/2, & i = 0, i = N. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$

В граничном узле $i = 0, x = 0$ с учетом равенства $n = -x$ и левого граничного условия (3.49) схема (3.50) запишется следующим образом:

$$\frac{\hat{u}_0 - u_0}{\tau} = \frac{1}{\hbar_0} (Q_{1/2} - Q_0) + f_0, \quad Q_{1/2} = k_{1/2} \frac{u_1 - u_0}{h}, \quad Q_0 = -Q_n(0) = -q$$

или

$$\frac{\hat{u}_0 - u_0}{\tau} = \frac{2}{h} \left(k_{1/2} \frac{u_1 - u_0}{h} + q \right) + f_0 \quad (3.51)$$

Аналогично записывается схема (3.50) в узле $i = N, x = 1$ с учетом $n = x$ и правого граничного условия (3.50):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_N - u_N}{\tau} &= \frac{1}{\hbar_N} (Q_N - Q_{N-1/2}) + f_N, \\ Q_{N-1/2} &= k_{N-1/2} \frac{u_N - u_{N-1}}{h}, \quad Q_N = Q_n(1) = -\alpha u_N + \beta \end{aligned}$$

или

$$\frac{\hat{u}_N - u_N}{\tau} = \frac{2}{h} \left(-\alpha u_N + \beta - k_{N-1/2} \frac{u_N - u_{N-1}}{h} \right) + f_N . \quad (3.52)$$

Уравнения (3.51) и (3.52) – это правильные аппроксимации граничных условий второго и третьего рода.

Задание 9. Решить нестационарную задачу диффузии (3.49) со смешанными граничными условиями (второго и третьего рода) по неявной РС. Принять следующую формулировку этой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad f = 10, \quad x \in (0,1); \quad t > 0.$$

$$t = 0 : u = u_0 = 0;$$

$$x = 0 : \frac{\partial u}{\partial n} = q = 1; \quad x = 1 : \frac{\partial u}{\partial n} = -\alpha u + \beta, \quad \alpha = 1, \beta = 1.$$

Изучить влияние граничных условий на решение, меняя значения параметров q, α, β .

Расчет вести до момента времени $t = 5$.

3.8. Экономичные разностные схемы для многомерных уравнений теплопроводности

До сих пор мы рассматривали простейшие одномерные уравнения, решение неявных РС для них получалось с помощью алгоритма Томаса (прогонки). Оказывается, можно распространить этот алгоритм и на многомерные задачи в простейших областях.

Идея написания простых схем базируется на том или ином способе расщепления исходного многомерного уравнения и решения последовательности одномерных задач.

В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, \quad x, y \subset D = (0, 1) \times (0, 1) \quad (3.53)$$

Выясним, какие из схем явного и неявного счета применимы для его численного решения.

3.8.1. Чисто явная РС

Схема имеет вид

$$\frac{\Delta u_{j,k}}{\tau} = L_{xx}u_{j,k} + L_{yy}u_{j,k}, \quad \Delta u_{j,k} = \hat{u}_{j,k} - u_{j,k}, \quad (3.54)$$

где

$$L_{xx}u_{jk} = \frac{u_{j-1,k} - 2u_{jk} - u_{j+1,k}}{h_x^2}, \quad L_{yy}u_{jk} = \frac{u_{j,k-1} - 2u_{jk} - u_{j,k+1}}{h_y^2}.$$

Решение РС (3.54) можно переписать виде, удобном для вычислений:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{jk} &= \gamma_x u_{j-1,k} + \gamma_x u_{j+1,k} + \gamma_y u_{j,k-1} + \gamma_y u_{j,k+1} + (1 - 2\gamma_x - 2\gamma_y)u_{jk}, \\ \gamma_x &= \tau / h_x^2, \quad \gamma_y = \tau / h_y^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Разложением в ряд Тейлора легко показать, что РС (3.54) аппроксимирует уравнение (3.53) с порядком $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. Анализ устойчивости явной схемы по Нейману дает условие $\gamma_x + \gamma_y \leq 0.5$. Заметим, что в случае одинаковых шагов $h_x = h_y = h$ это неравенство превращается в условие устойчивости $\gamma \leq 0.25$ - более сильное, чем для одномерной задачи.

3.8.2. Схема «классики»

Это РС реализуется в два этапа. Если «раскрасить» все узлы двумерной сетки по принципу шахматной доски, получим черные и белые узлы. На первом этапе по чисто явной схеме (3.54) определяются значения в черных узлах, а в белых узлах значения на новом временном слое на этом этапе не вычисляются. На втором этапе вычисляются значения в белых узлах по якобы неявной схеме

$$\frac{\Delta u_{jk}}{\tau} = \frac{\hat{u}_{jk} - u_{jk}}{\tau} = L_{xx}\hat{u}_{jk} + L_{yy}\hat{u}_{jk},$$

которая переписывается в виде

$$\hat{u}_{jk} (1 + 2\gamma_x + 2\gamma_y) = \gamma_x \hat{u}_{j-1,k} + \gamma_x \hat{u}_{j+1,k} + \gamma_y \hat{u}_{j,k-1} + \gamma_y \hat{u}_{j,k+1} + u_{jk}$$

Но дело в том, что справа стоят только те значения искомой функции на верхнем временном слое, которые уже были вычислены на первом этапе, т.е. значения в черных узлах. При переходе на следующий временной слой порядок меняется: вначале по явной схеме обрабатываются белые узлы, а затем по «неявной» – черные. На самом деле все вычисления проводятся по явным формулам. Очевидно, что «классики» - это схема 2-го порядка по h и первого по τ . Она *безусловно устойчива*.

3.8.3. Чисто неявная РС

Эта схема

$$\frac{\Delta u_{j,k}}{\tau} = \frac{\hat{u}_{j,k} - u_{j,k}}{\tau} = L_{xx} \hat{u}_{j,k} + L_{yy} \hat{u}_{j,k}$$

напоминает второй этап «классиков», однако обрабатываются все узлы сразу, поэтому алгоритм решения следует применять к СЛАУ с матрицей, содержащей 5 ненулевых элементов в каждой строке:

$$\hat{u}_{jk} (1 + 2\gamma_x + 2\gamma_y) - \gamma_x \hat{u}_{j-1,k} - \gamma_x \hat{u}_{j+1,k} - \gamma_y \hat{u}_{j,k-1} - \gamma_y \hat{u}_{j,k+1} = u_{jk}$$

Метод прогонки здесь уже применить нельзя, а метод исключения Гаусса при больших размерностях сетки будет расточительным. Очевидно, теми же недостатками обладает и схема Кранка-Николсон. Чисто неявная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ и *безусловно устойчива*.

3.8.4. Неявная схема переменных направлений Писмена-Рэкфорда

В этом методе решение задачи на верхнем временном слое ищется за два полушага длиной $\tau / 2$: *первый* шаг делают по схеме

$$\frac{\tilde{u}_{j,k} - u_{j,k}}{0.5\tau} = L_{xx} \tilde{u}_{j,k} + L_{yy} u_{j,k} \quad (3.56)$$

в которой волной сверху помечены промежуточные значения на момент $t + \tau / 2$

На втором полу шаге применяется аналогичная схема, но в другом направлении:

$$\frac{\hat{u}_{j,k} - \tilde{u}_{j,k}}{0.5\tau} = L_{xx}\tilde{u}_{j,k} + L_{yy}\hat{u}_{j,k} \quad (3.57)$$

Чтобы стал очевидным алгоритм решения уравнений (3.56), (3.57), надо переписать их в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{j,k} - 0.5\tau L_{xx}\tilde{u}_{j,k} &= u_{j,k} + 0.5\tau L_{yy}u_{j,k}, \\ \hat{u}_{j,k} - 0.5\tau L_{yy}\hat{u}_{j,k} &= \tilde{u}_{j,k} + 0.5\tau L_{yy}\tilde{u}_{j,k}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Первое из уравнений (3.58) решается прогонкой по x для всех фиксированных сеточных линий $y = const$, а второе уравнение, наоборот, прогонкой по y для всех фиксированных сеточных линий $x = const$. Таким образом, для построения решения на верхнем временном слое достаточно решить серию последовательных одномерных задач в разных направлениях методом Томаса (прогонки). Поэтому эту схему еще называют локально-одномерной и продольно-поперечной.

Схема Писмена-Рэкфорда имеет второй порядок аппроксимации по времени и по пространству и безусловно устойчива. Она легко обобщается на 3-мерный случай, но там она становится условно устойчивой при $\max\{\gamma_i\} \leq 1.5$.

3.8.5. Факторизованная схема Кранка-Николсон с поправкой

Запишем схему Кранка-Николсон как схему с поправкой
 $\Delta u_{j,k} = \hat{u}_{j,k} - u_{j,k}$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \hat{u}_{j,k}}{\tau} &= \frac{1}{2}(L_{xx}\hat{u}_{j,k} + L_{yy}\hat{u}_{j,k}) + \frac{1}{2}(L_{xx}u_{j,k} + L_{yy}u_{j,k}), \\ \Delta \hat{u}_{j,k} &= \hat{u}_{j,k} - u_{j,k}; \quad \hat{u}_{j,k} = u_{j,k} + \Delta \hat{u}_{j,k}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Нетрудно показать, что она имеет второй порядок аппроксимации. Если подставить в уравнение (3.59) выражение $\hat{u}_{j,k} = u_{j,k} + \Delta\hat{u}_{j,k}$, получим уравнение для поправки $\Delta\hat{u}_{j,k}$:

$$\frac{\Delta\hat{u}_{j,k}}{\tau} = \frac{1}{2} (L_{xx} + L_{yy}) \Delta\hat{u}_{j,k} + (L_{xx} + L_{yy}) u_{j,k},$$

или

$$\left(1 - \frac{\tau}{2} L_{xx} - \frac{\tau}{2} L_{yy}\right) \Delta\hat{u}_{j,k} = \tau (L_{xx} + L_{yy}) u_{j,k}. \quad (3.60)$$

Представим оператор в левой части (3.60) с помощью приближенной факторизации (это разложение на множители)

$$1 - \frac{\tau}{2} L_{xx} - \frac{\tau}{2} L_{yy} = \left(1 - \frac{\tau}{2} L_{xx}\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} L_{yy}\right) + O(\tau^2),$$

тогда схема (3.60) перепишется в виде

$$\left(1 - \frac{\tau}{2} L_{xx}\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} L_{yy}\right) \Delta\hat{u}_{j,k} = \tau (L_{xx} + L_{yy}) u_{j,k}. \quad (3.61)$$

Если теперь ввести обозначение

$$\left(1 - \frac{\tau}{2} L_{yy}\right) \Delta\hat{u}_{j,k} = z_{j,k},$$

то от (3.61) можно перейти к системе уравнений

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{2} L_{xx}\right) z_{j,k} = \tau (L_{xx} + L_{yy}) u_{j,k}, \\ \left(1 - \frac{\tau}{2} L_{yy}\right) \Delta\hat{u}_{j,k} = z_{j,k}. \end{cases} \quad (3.62)$$

каждое из которых по существу является одномерным и решается методом трехточечной прогонки. После того, как поправка $\Delta\hat{u}_{j,k}$ найдена, решение задачи на верхнем слое определяется по формуле $\hat{u}_{j,k} = u_{j,k} + \Delta\hat{u}_{j,k}$.

Факторизованная схема Кранка-Николсон с поправкой (3.62) безусловно устойчива; она легко обобщается на 3-мерный случай, причем, в отличие схемы переменных направлений, сохраняет это свойство и там.

Заметим, что изложенная выше методика может использоваться не только для решения нестационарных задач (параболические уравнения), но и для стационарных задач теплопроводности или диффузии (эллиптические уравнения) методом достижения предельного стационарного состояния. При этом необходимо, чтобы в процессе счета норма поправки $\|\Delta \hat{u}_{j,k} / \tau\|$ стала настолько близкой к нулю, что ее можно было считать малой погрешностью РС для эллиптической задачи.

Заключение по многомерным задачам диффузии. Для этих задач неявные схемы более эффективны, поскольку устойчивы при менее обременительных условиях на шаги сетки, чем явные схемы. Экономичность достигается благодаря переходу от многомерной задачи к цепочке одномерных задач и применению быстрого метода прогонки (алгоритм Томаса). Для этого используется приближенная факторизация (или расщепление) операторов.

Задание 10. Решить нестационарную двумерную задачу теплопроводности с граничными условиями первого рода в прямоугольнике

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + f, \quad x, y \in (0,1) \times (0,1), \quad t > 0.$$

$$f = A \exp(-br^2), \quad r^2 = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$$

$$t = 0 : u = u_0 = 0;$$

$$\Gamma |(x = 0,1; y = 0,1) : u = 0.$$

по схемам 1) «классики», 2) переменных направлений Писмена-Рекфорда, 3) факторизованная Кранка-Николсон с поправкой.

Сравнить решения между собой и с ранее полученным решением по явной схеме.

3.9. Линейные задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией

Во многих типичных задачах ВГ дифференциальные уравнения содержат и конвективный (инерционный) и диффузионный (вязкий) члены. В безразмерных уравнениях Навье-Стокса и энергии конвективные члены порядка единицы, а порядок вязкого и диффузионного членов этих уравнений определяются множителями - коэффициентами Re^{-1} и Pe^{-1} . Как правило, в гидродинамике числа Рейнольдса и Пекле значительно больше единицы, поэтому определяющие уравнения вязкого неизотермического течения являются уравнениями с преобладающей конвекцией.

3.9.1. Стационарное линейное уравнение конвекции-диффузии

Рассмотрим стационарное уравнение конвективной теплопроводности

$$u \frac{dT}{dx} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}, \quad u \sim 1, \quad \alpha \ll 1; \quad x \in (0,1); \quad (3.63)$$

с граничными условиями Дирихле

$$T(0) = 0; \quad T(1) = 1. \quad (3.64)$$

Решение этой задачи – это перенос слева-направо (при $u > 0$) величины T , которая задана первым граничным условием (3.64), а именно $T = 0$. При $\alpha = 0$ точным решением уравнения (3.63) является функция $T(x) \equiv 0$. Однако при $\alpha > 0$ граничное условие на правом конце приводит к образованию пограничного слоя вблизи точки $x = 1$. Внутри этого слоя конвекция уравновешивается диффузией, и решение меняется от 0 до 1.

Оценим толщину пограничного слоя δ . Для этого приведем уравнение (3.63) к безразмерному виду по формулам

$$\bar{x} = 1 + \frac{x-1}{\delta}, \quad \bar{T} = T \quad (3.65)$$

Очевидно, безразмерная координата пограничного слоя \bar{x} изменяется в интервале $[0,1]$ при изменении x от $1-\delta$ до 1, а граница $x=0$ переходит в

$\bar{x} = 1 - \delta^{-1} \rightarrow -\infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Подставляя (3.65) в (3.63), (3.64) получаем уравнение (черту над безразмерными величинами опускаем)

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{Pe} \frac{d^2T}{dx^2}, \quad Pe = \frac{u\delta}{\alpha}; \quad T(-\infty) = 0, \quad T(1) = 1. \quad (3.66)$$

Поскольку в пограничном слое конвекция уравновешивается диффузией, потребуем, чтобы число Пекле было равно единице. Отсюда найдем толщину пограничного слоя

$$\delta = \alpha / u \ll 1.$$

При $Pe = 1$ решение задачи (3.66) легко находится в виде $T = \exp(x-1)$, $x < 1$ и описывает распределение температуры вблизи правой границы. Его график показан на рисунке 3.3.

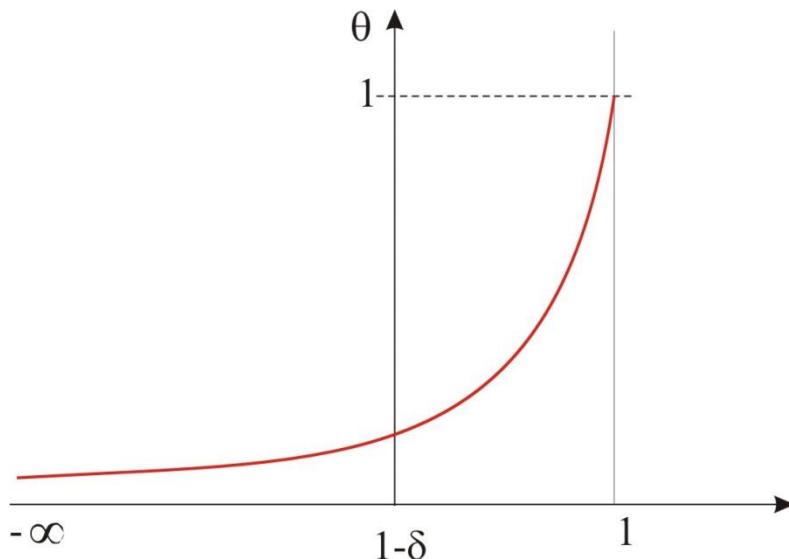


Рис. 3.3. Распределение температуры в пограничном слое

Теперь будем решать исходную задачу (3.63), (3.64) численно с использованием аппроксимацию центральных разностей при аппроксимации конвективного члена:

$$u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}. \quad (3.67)$$

Если ввести сеточное число Рейнольдса (в данном случае его правильнее назвать сеточным числом Пекле) $\text{Re}_c = uh / \alpha$, то РС можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 0.5\text{Re}_c(T_{i+1} - T_{i-1}) &= T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}, \quad \text{или} \\ -(1 + 0.5\text{Re}_c)T_{i+1} + 2T_i - (1 - 0.5\text{Re}_c)T_{i-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Очевидно, РС (3.67) обладает аппроксимацией 2-го порядка, и представляет собой неявную схему (3.68) на трехточечном шаблоне. Ранее для нестационарной задачи анализ устойчивости РС методом Неймана приводил к условию $\text{Re}_c < 2$. Нам будет полезно связать это условие со свойством трехдиагональной матрицы системы уравнений РС (3.68), каждая строка которой имеет вид

$$aT_{i+1} + cT_i + bT_{i-1} = 0; \quad a = -(1 + 0.5R_c), \quad c = 2, \quad b = -(1 - 0.5R_c).$$

Известно, что собственные числа такой матрицы равны

$$\lambda_k = c + 2\sqrt{ab} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)$$

Чтобы собственные числа были вещественными, надо обеспечить условие

$$ab = (1 + 0.5\text{Re}_c)(1 - 0.5\text{Re}_c) = 1 - 0.25\text{Re}_c^2 \geq 0$$

Это условие выполняется при $\text{Re}_c \leq 2$, которое раньше для нестационарной задачи гарантировало отсутствие осцилляций численного решения. Так же и для решения СЛАУ: нефизичные осцилляции в решении могут наступать тогда, когда у разрешающей матрицы есть комплексные собственные числа. Из алгебры известно, что симметричные матрицы со слабым диагональным преобладанием, т.е. при выполнении условия

$$a_{ii} \geq \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}|, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

имеют только действительные собственные числа. К сожалению, матрица рассматриваемой СЛАУ (3.68) не симметрична, но слабое диагональное преобладание $c \geq |a| + |b|$, или

$$1 + 0.5R_c + |1 - 0.5R_c| \leq 2$$

имеет место при $\text{Re}_c \leq 2$.

Схема «upwind» для стационарного уравнения конвективной теплопроводности. Если вместо симметричной схемы (3.67) использовать аппроксимацию конвекции разностью против потока

$$u \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2}, \quad (3.69)$$

то получим следующую СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$-T_{i-1} \left[1 + \frac{uh}{\alpha} \right] + T_i \left[2 + \frac{uh}{\alpha} \right] - T_{i+1} = 0,$$

или

$$aT_{i-1} + cT_i - bT_{i+1} = 0, \quad a = -[1 + \text{Re}_c], b = -1, c = 2 + \text{Re}_c.$$

Поскольку для этой системы $ab > 0$ при любых Re_c , то нет комплексных собственных чисел и нет осцилляций. Однако есть проблемы с точностью этой схемы. В самом деле, как мы видели ранее, направленная разность назад аппроксимирует выражение

$$\frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + O(h^2),$$

поэтому РС (3.69) в действительности аппроксимирует т.н. модифицированное уравнение с искусственной диффузией

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left(1 + \frac{\text{Re}_c}{2} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

так что приемлемая точность будет достигнута, только если $\text{Re}_c \ll 2$, а это более обременительное ограничение на шаг сетки ($h \ll 2\alpha/u$) чем условие $\text{Re}_c \leq 2$ для центрально-разностной схемы.

3.9.2. Нестационарное линейное уравнение конвекции-диффузии

Это уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad u \sim 1, \quad \alpha \ll 1; \quad t > 0, \quad 0 < x < l. \quad (3.70)$$

Для него нужно поставить начальное при $t = 0$ и два граничных условия концах $x = 0, x = l$. Однако при малых α можно ожидать, что это уравнение и его решение будут напоминать решение уравнение переноса (бегущая волна) со слабым затуханием за счет диффузии. Получим это решение численно.

Симметричная чисто явная схема

$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\tau} + u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \quad (3.71)$$

приводит к вычислительному алгоритму

$$\begin{aligned} \hat{T}_i &= T_{i-1} [\gamma + 0.5C] + (1 - 2\gamma)T_i + [\gamma + 0.5C]T_{i+1}, \\ C &= u\tau / h, \quad \gamma = \alpha\tau / h^2. \end{aligned}$$

Схема (3.71) аппроксимирует исходное уравнение с порядком $O(\tau + h^2)$, и со вторым порядком – по τ модифицированное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3.72)$$

Выразим вторую производную по времени в этом уравнении через производные по пространству, используя исходное уравнение (3.70):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ &= -u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-u \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2u\alpha \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \alpha^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Мысленно подставляя это выражение в модифицированное уравнение (3.72), видим схемную антидиффузию порядка $u^2\tau/2$ и дисперсию порядка $tu\alpha$. Дисперсия в нашей задаче, при $\alpha \ll 1$, не существенна, но антидиффузия не зависит от α , и при больших скоростях u может исказить решение. Ясно, чтобы искусственная диффузия не сильно влияла на решение РС, надо потребовать, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{u^2\tau}{2} \ll \alpha, \text{ или } \tau \ll \frac{2\alpha}{u^2}, \text{ или } \text{Re}_c = \frac{uh}{\alpha} \ll \frac{2}{C}, C = \frac{\tau u}{h}. \quad (3.73)$$

Напомним, что согласно результатам (3.22), полученным в параграфе 3.3.1, условие устойчивости этой схемы можно записать в виде

$$C^2 < 2\gamma < 1,$$

а без осцилляций решение будет при $\text{Re}_c < 2$. Однако, из требования (3.73) следует, что решения явной схемы на грани устойчивости будут не достаточно точными.

Противопотоковая схема

$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\tau} + u \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \alpha \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \quad (3.74)$$

вносит искусственную вязкость (диффузию) порядка $uh/2$ собственно от направленной аппроксимации первой производной по x и антидиффузию $u^2\tau/2$ от производной по времени. Суммарная искусственная диффузия равна

$$uh/2 - u^2\tau/2 = 0.5uh(1 - u\tau/h) = 0.5uh(1 - C),$$

и для точности нужно, чтобы выполнялось соотношение $0.5uh(1 - C) \ll \alpha$, или

$$\text{Re}_c \ll 2/(1 - C) \quad (3.75)$$

Условие устойчивости этой схемы имеет вид $C + 2\gamma < 1$. Его можно переписать в виде ограничения на шаг по времени

$$\tau \leq \frac{0.5h^2}{1 + 0.5\text{Re}_c}, \text{ или } \gamma = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{0.5}{1 + 0.5\text{Re}_c}. \quad (3.76)$$

Это чуть более обременительное ограничение на временной шаг РС, чем для уравнения диффузии.

Неявные схемы

Схема Кранка-Николсон с симметричной аппроксимацией конвекции

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_i - T_i}{\tau} + 0.5u \left(\frac{\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_{i-1}}{2h} + \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} \right) = \\ = 0.5\alpha \left[\frac{\hat{T}_{i+1} - 2\hat{T}_i + \hat{T}_{i-1}}{h^2} + \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

имеет второй порядок аппроксимации и безусловно устойчива. Но для отсутствия осцилляций требуется выполнение условия на сеточное число Рейнольдса $\text{Re}_c \leq 2$.

Однако эта схема обладает некоторой дисперсией. Чтобы ее уменьшить, предлагается новый прием: введение т.н. *массового оператора* (название заимствовано из метода конечных элементов - МКЭ) для производной по времени. В каждом узле x_i вместо сосредоточенной в этом узле производной по времени $u_t(i) = (\hat{u}_i - u_i)/\tau$ используют «размазанную» по трехточечному шаблону аппроксимацию

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim M \frac{\hat{T}_i - T_i}{\tau} \equiv \frac{\tilde{T}_i - \tilde{T}_i}{\tau}, \quad \tilde{T}_i = \delta T_{i-1} + (1 - 2\delta)T_i + \delta T_{i+1}, \quad \delta \leq \frac{1}{4};$$

Массовый оператор M можно представить как матрицу со строкой $M_i = 0, \dots, \delta, 1 - 2\delta, \delta, 0, \dots$, у которой отличны от нуля только диагональный и два соседних элемента.

Модифицированное уравнение для схемы с массовым оператором имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + uh^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{C^2}{12} - \delta \right) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \alpha h^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{C^2}{4} - \delta \right) \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \dots$$

Очевидно, что оптимальный выбор, подавляющий дисперсию,

$$\delta = \frac{1}{6} + \frac{C^2}{12}$$

Однако даже при этом введение массового оператора накладывает ограничение устойчивости схемы в виде условия Куранта $C \leq 1$

Заключение по РС для уравнения конвекции-диффузии с преобладанием конвекции.

На модельных примерах мы увидели, что большинство РС обладает численной дисперсией, что приводит к нефизичным осцилляциям в решении на грубой сетке, если используется симметричная аппроксимация конвективных членов. Чтобы ее задавить, можно применить массовый оператор к производной по времени. На мелкой сетке (при $\text{Re}_c < 2$) можно получить хорошее решение. Для анализа аппроксимации и устойчивости РС используем разложения в ряд Тейлора и метод Неймана, а также модифицированные уравнения для РС (они показывают схемную дисперсию и диссипацию).

Задание 11.

- 1) Решить стационарную задачу конвекции-диффузии (3.63) при $\alpha = 10^{-2} \div 10^{-4}$ по схемам (3.68), (3.69). Проверить все условия на параметры сетки. Выяснить, насколько численное решение разрешает поведение функции в пограничном слое.
- 2) Решить нестационарную задачу конвекции-диффузии (3.70) при $\alpha = 10^{-3}$, $u = 1$ нулевых граничных условиях Дирихле и начальном условии в виде финитных импульсов из Задания 7. Область расчета взять $0 < x < 15$, время счета $0 < t < 10$. Использовать схемы: явную симметричную (3.71), явную «upwind» (3.74) и неявную Кранка-Николсон (3.77). Проверить все условия устойчивости и подавления нефизичных осцилляций.

3.10. Нелинейные задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией

Конвективные слагаемые в уравнении являются линейными, когда скорость конвективного переноса задана. Однако в уравнениях импульса (Навье-Стокса) эти члены нелинейны и имеют вид $u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, что приводит к дополнительным сложностям в конструировании схем и алгоритмов численного решения. Для анализа ситуации будем рассматривать одномерное *уравнение Бюргерса*, которое совпадает с уравнением Навье-Стокса при нулевом градиенте давления.

3.10.1. Уравнение Бюргерса. Поведение решения

в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.78)$$

где $\nu \ll 1$ – вязкость.

Опрокидывание волны

Если положить $\nu = 0$, то получим уравнение, похожее на уравнение переноса, только скорость совпадает с самим решением, поэтому там, где оно большое, скорость переноса больше, а там где u мало, скорость также мала. Поэтому, если взять начальное условие в виде волны, ее гребень (максимум u) будет двигаться быстрее основания, и со временем произойдет опрокидывание волны, что означает неоднозначность решения, см. рис. 3.4.

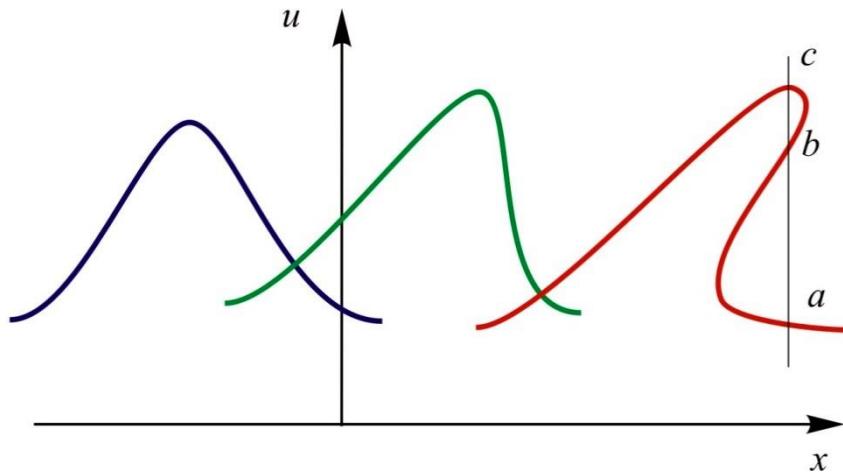


Рис. 3.4. Опрокидывание волны и многозначность решения

Вязкость предотвращает этот процесс, и получается волна с крутым фронтом, а при малых ν — волна типа ударной волны.

Наличие нелинейного члена способствует возникновению побочного эффекта (*aliasing*). Если в начальный момент разложить решение в ряд Фурье по гармоникам, то из-за произведения $u \partial u / \partial x$ будут перемножаться слагаемые с разными длинами волн. В результате спектр длин волн быстро (за короткое время) расширится, но на сетке конечного разрешения h высокочастотные моды будут неразличимы, и их энергия будет «перекачиваться» в низкочастотные (длинноволновые) моды, и те будут искажаться. Это может приводить к неустойчивости на больших временах. Вязкость (в том числе схемная) подавляет aliasing.

3.10.2 Явные схемы для уравнения Бюргерса

Симметричная явная неконсервативная схема

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{u_i(u_{i+1} - u_{i-1})}{2h} = \nu \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (3.79)$$

Решение этой схемы легко находится, а для повышения устойчивости можно u_i заменить на полусумму соседей (схема Дюфорта-Франкела). При анализе устойчивости по Нейману (строго говоря, он применим только для

линейных РС) u_i «замораживают» на слое, берут максимум. Практика показала, что такой анализ устойчивости эффективен.

Симметричная явная консервативная схема

Используется тождество

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{\partial F(u)}{\partial x}, \quad F(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Консервативная явная симметричная схема записывается в виде

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} = \nu \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \quad (3.80)$$

Но можно использовать и противопотоковую схему («upwind»), если аппроксимировать производную $\partial F / \partial x$ разностью назад $F_{\bar{x}}$. При этом надо быть уверенным, что скорость $u = dF / du$ положительна.

Схема Лакса-Вендроффа

Рассмотрим вначале уравнение Бюргерса без вязкости,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3.81)$$

Разложение в ряд Тейлора разности вперед u_t даёт модифицированную формулу

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \frac{1}{\tau} \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots - u \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Но из (3.81) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial F}{\partial x}. \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Подставив это выражение в модифицированную формулу, с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_t - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial F}{\partial x} \right) = u_t - \frac{\tau}{2} \frac{u_{i+1/2} F_{x_i} - u_{i-1/2} F_{\bar{x}_i}}{h}$$

С точностью $O(h^2)$ верна аппроксимация

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = F_{\dot{x}_i} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h}.$$

Сложив два последних выражения получаем аппроксимацию 2-го порядка – схему Лакса-Вендроффа для уравнения нелинейного переноса (3.81)

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} = \frac{\tau}{2h^2} [u_{i+1/2} (F_{i+1} - F_i) - u_{i-1/2} (F_i - F_{i-1})] \quad (3.82)$$

Она устойчива при условии КФЛ $|u_{\max} \tau / h| < 1$.

РС для уравнения Бюргерса с вязкостью строятся на основе (3.28) и сводятся к добавлению слагаемого $\nu u_{x\bar{x}_i}$ в правую часть.

Двухэтапная схема со смещением

Вначале рассмотрим РС для нелинейного уравнения переноса.

Этап 1. Вычисление смещенного по времени и пространству промежуточного решения $\tilde{u}_{i+1/2} \sim u(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})$

$$\frac{\tilde{u}_{i+1/2} - 0.5(u_i + u_{i+1})}{\tau/2} + \frac{F_{i+1} - F_i}{h} = 0, \quad F_i = F(u_i).$$

Этап 2. Вычисление решения на верхнем временном слое в узлах

$$\frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}}{h} = 0, \quad \tilde{F}_{i+1/2} = F(\tilde{u}_{i+1/2}).$$

РС для уравнения Бюргерса получается из этой схемы добавляем к правой части слагаемого $\nu u_{x\bar{x}_i}$ на этапе 1 и $\nu \tilde{u}_{x\bar{x}_i}$ на этапе 2.

Условие устойчивости этой схемы $\tau \leq h^2 / (2\nu + h|u_{\max}|)$.

3.10.3. Неявные схемы для уравнения Бюргерса

Часто для решения эволюционных уравнений применяют

схемы явные по конвекции, но неявные по диффузии

$$u_t + F_{\dot{x}}(u) = \nu \hat{u}_{x\bar{x}} \text{ либо } u_t + F_{\bar{x}}(u) = \nu \hat{u}_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Среди схем повышенного порядка точности популярна
схема Кранка-Николсон

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} + \frac{1}{2} L_x (\hat{F}_i + F_i) &= \frac{\nu}{2} L_{xx} (\hat{u}_i + u_i), \\ L_x u_i &= \frac{u_{i-1} - u_{i-1}}{2h}, \quad L_{xx} u_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Главная проблема в реализации этой схемы состоит в том, что из-за нелинейности $F(u)$ невозможно применить метод прогонки. Поэтому ее линеаризуют, используя разложение в ряд Тейлора и определение $F = u^2 / 2$:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= F + \tau \frac{\partial F}{\partial t} + O(\tau^2) \approx F + \tau \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \approx F + \tau u \frac{\hat{u} - u}{\tau} = F + u\hat{u} - u^2, \\ \hat{F} + F &\approx 2F + u\hat{u} - u^2 = u\hat{u}. \end{aligned}$$

В результате РС (3.83) становится линейной относительно функции на верхнем временном слое \hat{u} :

$$\hat{u}_i + \frac{\tau}{2} L_x (u_i \hat{u}_i) - \frac{\tau \nu}{2} L_{xx} \hat{u}_i = u_i + \frac{\tau \nu}{2} L_{xx} (u_i). \tag{3.84}$$

К этой трехточечной СЛАУ применим алгоритм Томаса.

$$\begin{aligned} -A_i \hat{u}_{i-1} + C_i \hat{u}_i - B_i \hat{u}_{i+1} &= f_i, \\ A_i &= \frac{\tau}{4h} u_{i-1} + \frac{\tau \nu}{2h^2}, \quad B_i = -\frac{\tau}{4h} u_{i+1} + \frac{\tau \nu}{2h^2}, \quad C_i = 1 + \frac{\tau \nu}{h^2}, \\ f_i &= u_i + \frac{\tau \nu}{2h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}). \end{aligned}$$

Разностная схема Кранка-Николсон имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству и абсолютно устойчива. Однако ей присущи осцилляции на фронте волны. Чтобы их подавить, к производной по времени применяют массовый оператор $M = (\delta, 1 - 2\delta, \delta)$ и за счет выбора δ уменьшают дисперсию схемы.

На рисунках (3.5) – (3.8) представлены результаты численного решения уравнения Бюргерса без вязкости по разным схемам.

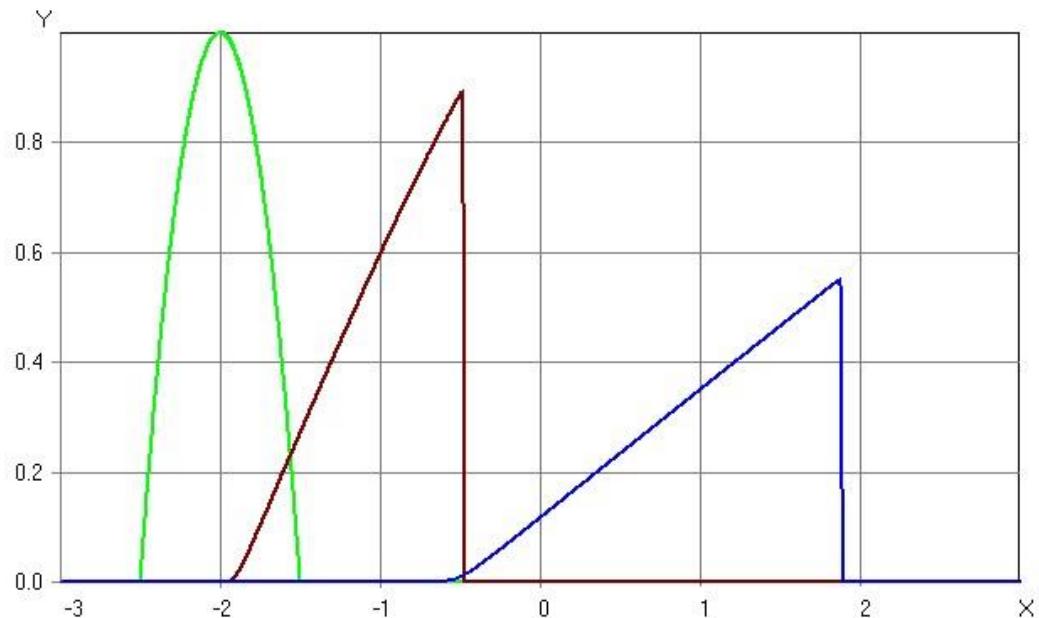


Рис. 3.5. Решение уравнения Бюргерса при $F(u) = u + u^2/2$

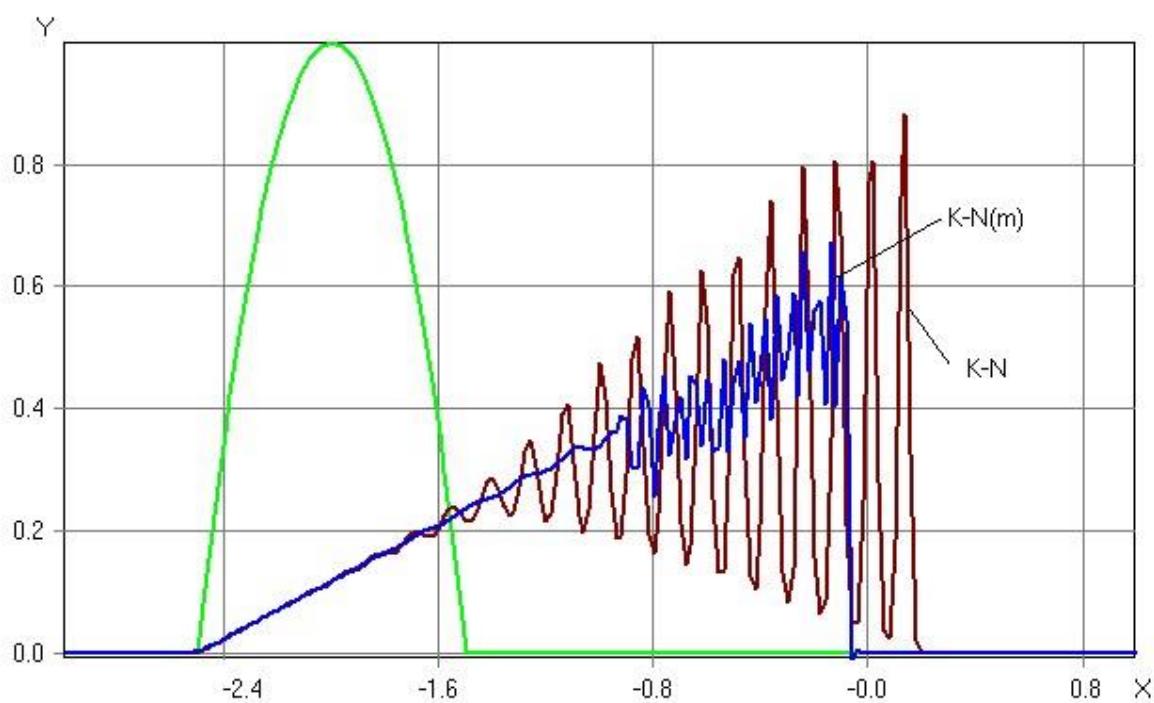


Рис. 3.6. Схема Кранка-Николсон для уравнения Бюргерса.
Оscилляции и массовый оператор

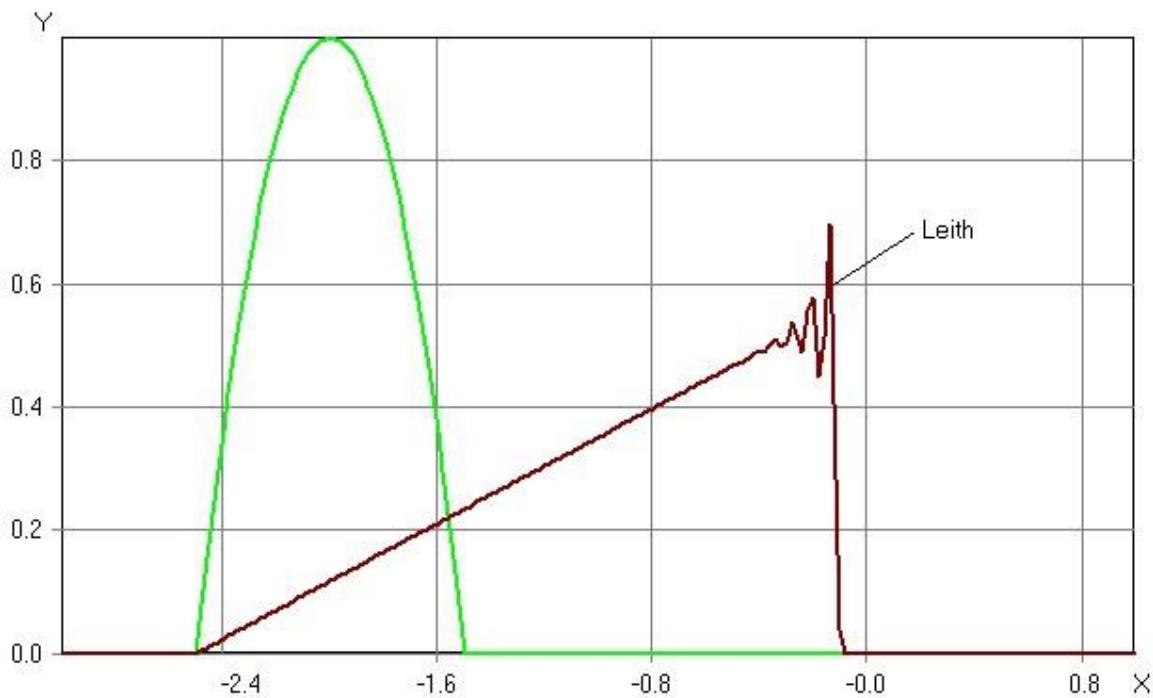


Рис. 3.7. Схема Лейза (Лакса-Вендроффа) для уравнения Бюргерса

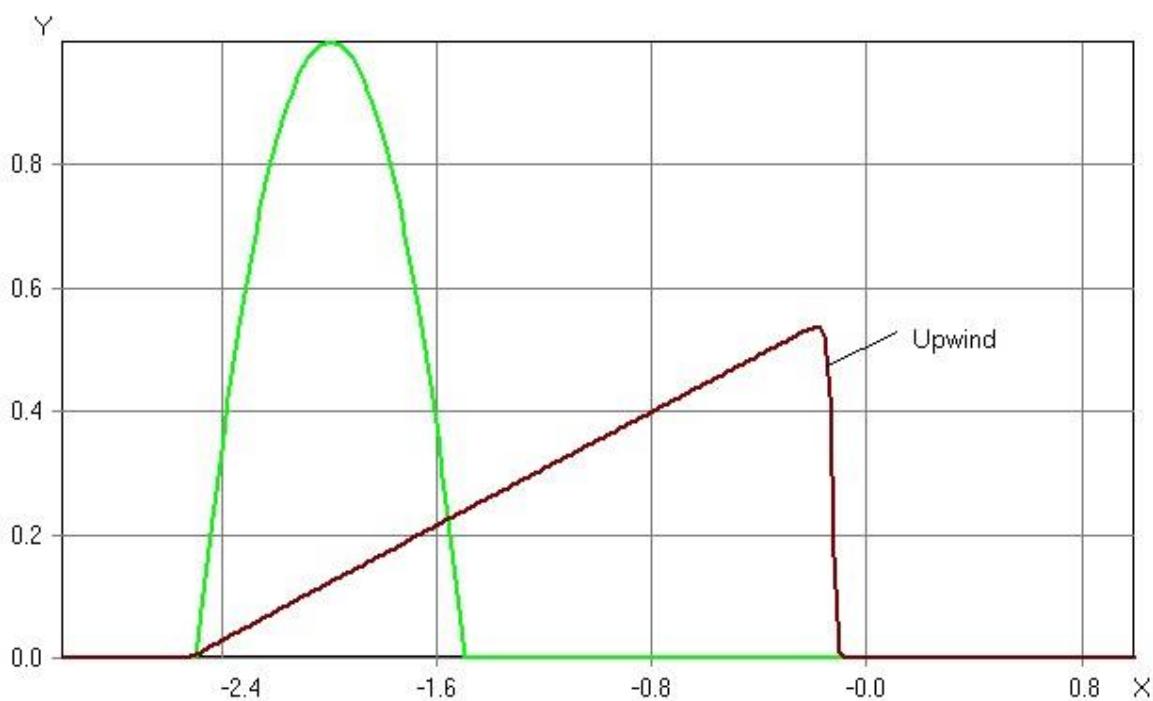


Рис. 3.8. Противопотоковая схема для уравнения Бюргерса

Задание 12.

Решить уравнение Бюргерса с начальными условиями в виде финитных импульсов из Задания 7 по разным РС. Сравнить результаты. Область расчета взять $0 < x < 15$, время счета $0 < t < 10$. Проверить все условия устойчивости и подавления нефизичных осцилляций.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СХЕМ TVD

СИЛЬНЫХ

РАЗРЫВОВ

4.1. Определения

Рассмотрим нелинейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0; \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (4.1)$$

Как известно, в линейном случае, когда $f(u) = Vu, V = \text{const}$, это уравнение имеет решение типа бегущей с постоянной скоростью V волны $u(x, t) = u_0(x - Vt)$. В общем случае (4.1) можно говорить о фазовой скорости, или о переменной скорости распространения возмущений

$$V(u) = \frac{df}{du}$$

Полной вариацией (Total Variation) решения этого уравнения называется величина

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx. \quad (4.2)$$

Свойство TVD (Total Variation Diminishing) для решения $u(x, t)$ выражается неравенством

$$TV(\hat{u}) \leq TV(u), \quad \hat{u} \equiv u(t + \tau) \quad \forall \tau > 0$$

Если мы строим численное решение задачи (4.1) на пространственной сетке с узлами $x_i = ih$, то требование невозрастания общей вариации выглядит так:

$$\sum_i |\hat{u}_{i+1} - \hat{u}_i| = TV(\hat{u}) \leq TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|. \quad (4.3)$$

Математический смысл этого свойства в том, что интенсивность локальных экстремумов сеточного решения не возрастает. Это обеспечивает подавление

нефизических осцилляций решения вблизи фронтов (скаков), присущих многим ранее рассмотренным разностным схемам.

Обозначим численный поток между узлами x_i и x_{i+1} через $f_{i+1/2}$ и запишем консервативную полудискретизованную по пространству схему

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} = 0. \quad (4.4)$$

Теорема Хартена утверждает, что схема (4.4) обладает свойством TVD, если она представима в виде

$$\frac{du_i}{dt} = c_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) + c_{i-1/2} (u_{i-1} - u_i) \quad (4.5)$$

с неотрицательными коэффициентами $c_{i\pm1/2}(u)$.

Пример. Пусть $f(u) = Vu$, $V = \text{const} > 0$. Тогда уравнение (4.1) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.6)$$

1) Рассмотрим монотонную схему «upwind» первого (низкого - Low) порядка, положив $f_{i+1/2}^L = Vu_i$. Из (4.4) имеем

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{Vu_i - Vu_{i-1}}{h} = \frac{V}{h} (u_{i-1} - u_i),$$

так что коэффициенты схемы Хартена (5) равны $c_{i-1/2} = V/h > 0$, $c_{i+1/2} = 0$. Поэтому схема «upwind» обладает свойством TVD. Как мы знаем, она условно устойчива.

2) Схема с разностями по потоку для уравнения (4.7) имеет вид

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{Vu_{i+1} - Vu_i}{h} = -\frac{V}{h} (u_{i+1} - u_i); \quad c_{i-1/2} = 0, c_{i+1/2} = -V/h < 0.$$

Следовательно, схема «downwind» не удовлетворяет условию теоремы Хартена и не обладает свойством TVD. Как мы знаем, она и абсолютно неустойчива.

3) Схема второго (высокого - High) порядка аппроксимации с центральными разностями

$$f_{i+1/2}^H = V \frac{u_{i+1} + u_i}{2},$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{Vu_{i+1} - Vu_{i-1}}{2h} = -\frac{V}{2h} ((u_{i+1} - u_i) - (u_{i-1} - u_i));$$

$$c_{i-1/2} = V / (2h) > 0, c_{i+1/2} = -V / (2h) < 0.$$

По определению (4.5) это не TVD-схема, и она неустойчива.

4) Задание для самостоятельной работы. Показать, что схема Лейза устойчива по Нейману, но не обладает свойством TVD. Следствие – нефизичные осцилляции решения.

4.2. Конструирование схем TVD

Цель – обеспечить следующие свойства РС.

1) **Консервативность**, которая на сеточном (алгебраическом) уровне гарантирует выполнение глобального закона сохранения, присущего дифференциальной постановке задачи. Например, если линейное уравнение переноса (4.6) дополнить начальным условием в виде конечного импульса $u_0(x)$, отличного от нуля только на интервале $x \in [a, b]$, то при $t > 0$ решением задачи $u(x, t)$ будет тот же импульс, но смешенный на Vt вправо. При этом интеграл от $u(x, t)$ по x от $-\infty$ до ∞ не зависит от t и равен U_0 – интегралу от $u_0(x)$ по x от a до b . Это и есть закон сохранения энергии импульса для данной задачи. Если проинтегрировать уравнение (4.6) по x от $-\infty$ до ∞ , получим выражение $dU_0 / dt = 0$, которое и выражает этот закон. Рассмотрим

теперь схему $\frac{du_i}{dt} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} = 0, i = 1..N-1$, в которой численный $f(u)$ поток обладает свойством $f(0) = 0$ и следовательно, равен нулю на невозмущенных границах расчетной области. Если умножить каждое i -ое уравнение этой схемы на h и сложить, то все внутренние потоки сократятся, а

оставшиеся граничные равны нулю. Поэтому получим равенство $d\tilde{U} / dt = 0$, $\tilde{U} = \sum_i u_i h \sim U_0$ как алгебраическое следствие.

2) *Высокий (High) порядок аппроксимации* схемы по пространству всюду, за исключением малой окрестности точек фронтов, где ограничиваются порядком аппроксимации $O(h)$.

3) *свойство TVD*.

Численный поток в схеме (4.4) берут в виде

$$f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^L + \phi_{i+1/2}(u) \left[f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L \right]. \quad (4.8)$$

Ясно, что сама форма записи гарантирует выполнение требования 1 – консервативность.

Очевидно, если $\phi = 1$, то получаем схему H (высокого порядка), а если $\phi = 0$, то имеем схему L (низкого порядка).

Функция $\phi(u)$ называется ограничителем антидиффузионных потоков. Она конструируется так, чтобы обеспечить свойство 3), и в то же время РС была схемой H везде, где нет угрозы возрастания вариации TV.

Почему мы говорим об антидиффузионных потоках? Потому что схема L типа «upwind» обладает схемной вязкостью (диффузией). В частности, линейный оператор конвекции в схеме L аппроксимируется как

$$\frac{V}{h} (u_i - u_{i-1}) = \frac{V}{h} \left(u_i - \left[u_i - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - O(h^3) \right] \right) = V \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{Vh}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2),$$

поэтому схема «upwind» реально (т.е. со вторым порядком) аппроксимирует модифицированное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu = \frac{Vh}{2} > 0,$$

где μ - схемная диффузия.

Рассмотрим для этого же примера численный поток

$$f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L = V \frac{u_{i+1} + u_i}{2} - Vu_i.$$

Подставив это выражение в (4.8), получаем

$$f_{i+1/2} = Vu_i + \phi \frac{V}{2} (u_{i+1} - u_i),$$

и после подстановки в (4.4) имеем

$$\frac{du_i}{dt} + V \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \phi \frac{V}{2} \left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right),$$

Модифицированное уравнение для этой схемы такое:

$$\frac{du_i}{dt} + V \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2), \quad \mu = \frac{Vh}{2}, \quad \nu = \phi \frac{Vh}{2}.$$

диффузия антидиффузия

При $\phi = 1$ имеем $\mu = \nu$, что называется полной компенсацией. При этом, очевидно, приходим к схеме H с центральной разностью в конвекции, и эта схема не TVD (она, как мы знаем, и абсолютно неустойчива). Поэтому ограничитель антидиффузии ϕ надо брать в целом меньше единицы, а еще лучше – выбирать его в каждой точке сетки по-разному, в зависимости от поведения решения вокруг.

4.3. Принципы построения ограничителей

Чтобы определить ограничитель ϕ в каждой точке, тестируют (анализируют) сеточное решение u на текущем временном слое с целью выявить угрозу зарождения локальных экстремумов. Для этого в каждом узле i используют отношение градиентов

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \tag{4.9}$$

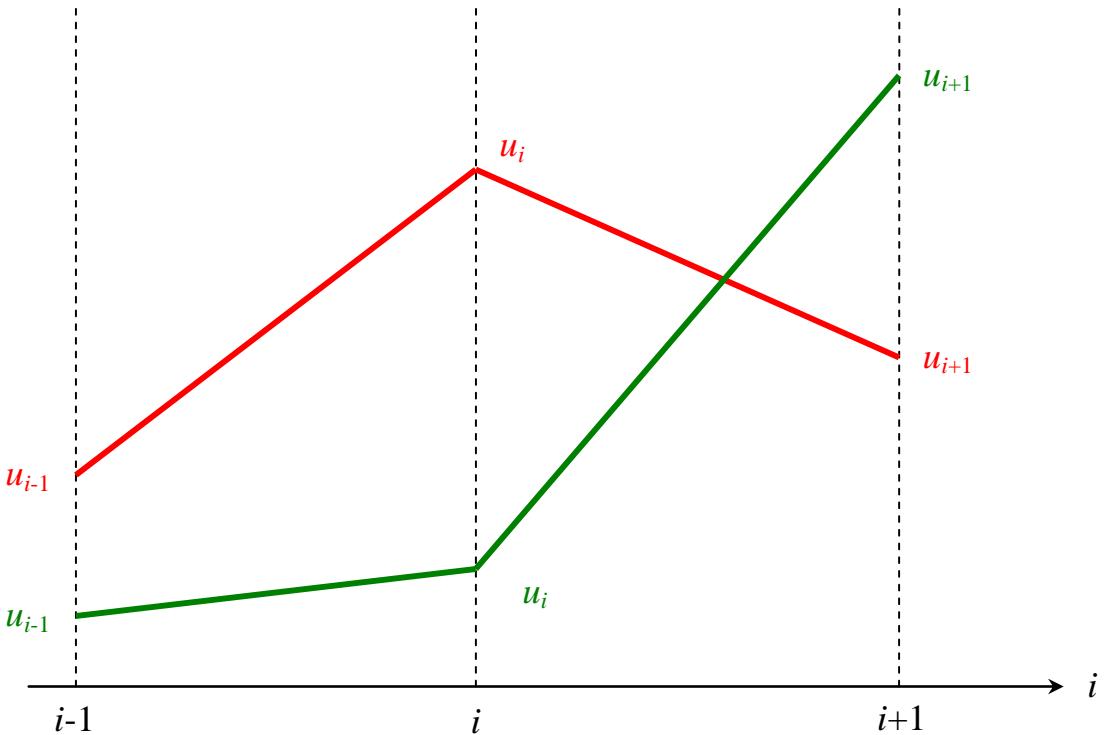


Рис. 4.1. Возможное поведение решения в окрестности узла i : зарождение локального экстремума (красная линия) и монотонный рост (зеленая)

Легко видеть, что при $r_i < 0$ в узле x_i есть локальный экстремум (красный график), а при $r_i > 0$ локального экстремума нет (зеленый график). Кроме того, если монотонная функция резко убывает или, наоборот, резко возрастает в узле x_i (т. е. здесь проходит фронт волны), то $r_i \rightarrow \pm\infty$, а для гладких функций $r_i \sim 1$. Ясно, что в тех узлах, где есть локальный экстремум ($r < 0$) или резкие изменения ($|r| \gg 1$), необходимо добавить диффузию (положить $\phi = 0$), а на гладких участках следует обеспечить полную компенсацию ($\phi = 1$ при $r \sim 1$).

Недостаток формулы (4.9) в том, что она имеет особенность при $u_{i+1} = u_i$. Джеймсон предложил использовать ограничитель вида $\phi(r) = \Im(1, r)$, где функция $\Im(a, b)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $\mathfrak{J}(a,b) = \mathfrak{J}(b,a)$
 2. $\mathfrak{J}(ca,cb) = c\mathfrak{J}(b,a)$
 3. $\mathfrak{J}(a,a) = a$
 4. $\mathfrak{J}(a,b) = 0$, если $ab \leq 0$.
- (4.10)

Последнее свойство 4 обеспечивает отсутствие антидиффузии в точках локальных экстремумов, поэтому здесь схема TVD превращается в схему «upwind» первого порядка. Из свойств 1 и 2 следует формула

$$\phi(r) = \mathfrak{J}(1,r) = r\mathfrak{J}(1,1/r) = r\phi(1/r), \quad (4.11)$$

Которая позволяет избавиться от особенности при делении на ноль. В частности, подставив в эту формулу определение (4.9), получим

$$\phi(r_i) = \phi\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}\right) = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \phi\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}\right),$$

или

$$\phi(r_i)(u_{i+1} - u_i) = \phi\left(\frac{1}{r_i}\right)(u_i - u_{i-1}) \quad (4.12)$$

Покажем, что использование в РС (4.4), (4.8) ограничителя ϕ , удовлетворяющего требованиям Джеймсона и, как следствие, уравнению (4.11), обеспечивает выполнение условий теоремы Хартена для схем TVD. Запишем РС для линейного уравнения переноса в соответствии подходом TVD:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{f(u)_{i+1/2} - f(u)_{i-1/2}}{h}, \\ f_{i+1/2} &= f_{i+1/2}^L + \phi(r)_{i+1/2} (f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L), \\ \phi(r)_{i+1/2} &= \begin{cases} \phi(r_i), & V > 0 \\ \phi(r_{i+1}), & V < 0 \end{cases}. \\ f_{i+1/2}^H &= V \frac{(u_{i+1} + u_i)}{2}, \quad f_{i+1/2}^L = \begin{cases} Vu_i, & V > 0 \\ Vu_{i+1}, & V < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Далее, для простоты рассматривается случай $V > 0$. Распишем RHS - правую часть схемы (4.13). Легко видеть, что

$$f_{i+1/2} - f_{i-1/2} = f_{i+1/2}^L - f_{i-1/2}^L + \phi_{i+1/2} \left(f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L \right) - \phi_{i-1/2} \left(f_{i-1/2}^H - f_{i-1/2}^L \right).$$

$$f_{i+1/2}^L - f_{i+1/2}^H = V(u_i - u_{i-1}); \quad f_{i+1/2}^H - f_{i+1/2}^L = \frac{V}{2}(u_{i+1} - u_i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{V}{h} \left\{ (u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{2} [\phi_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) - \phi_{i-1/2} (u_i - u_{i-1})] \right\} = \\ &= \frac{V}{h} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \phi_{i-1/2} \right) (u_i - u_{i-1}) + \frac{1}{2} \phi_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) \right\}. \end{aligned}$$

При $V > 0$ с учетом формулы (4.12) имеем

$$\phi_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) = \phi(r_i) (u_{i+1} - u_i) = \phi\left(\frac{1}{r_i}\right) (u_{i+1} - u_i),$$

и окончательно правую часть можем записать в виде

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{V}{2h} \left\{ (2 - \phi(r_{i-1})) (u_i - u_{i-1}) + \phi(1/r_i) (u_i - u_{i-1}) \right\} = \\ &= \frac{V}{2h} \left\{ \left[2 - \phi(r_{i-1}) + \frac{\phi(r_i)}{r_i} \right] (u_i - u_{i-1}) \right\}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Это значит, что полуодискретизованная разностная схема (4.13) может быть записана в виде (4.5), принятом в теореме Хартена

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= RHS = C_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) + C_{i-1/2} (u_{i-1} - u_i), \\ C_{i+1/2} &= 0, \quad C_{i-1/2} = \frac{V}{2h} \left[2 - \phi(r_{i-1}) + \frac{\phi(r_i)}{r_i} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить условию теоремы Хартена, необходимо, чтобы выражение в квадратной скобке было неотрицательно:

$$2 - \phi(r_{i-1}) + \frac{\phi(r_i)}{r_i} \geq 0. \tag{4.15}$$

Это и есть критерий, которому должен удовлетворять ограничитель, чтобы схема (4.13) была схемой TVD.

Известно несколько конструкций, удовлетворяющих как критерию (4.14), так и свойствам Джеймсона. Последнее означает, что все они имеют структуру

$$\phi(r) = \mathfrak{J}(1, r) = r\mathfrak{J}(1, 1/r) = r\phi(1/r). \quad (4.16)$$

1. Ограничитель **minmod** (Sewby)

$$S_2(a, b) = \frac{\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)}{2} = \begin{cases} 1, & a > 0, b > 0; \\ -1, & a < 0, b < 0; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathfrak{J}(a, b) = S_2(a, b) \min \{|a|, |b|\}.$$

2. Ограничитель **Van Leer**

$$\mathfrak{J}(a, b) = S_2(a, b) \frac{2|a||b|}{|a| + |b|}.$$

3. Ограничитель **MC**

$$\mathfrak{J}(a, b) = S_2(a, b) \min \left\{ \frac{|a| + |b|}{2}, 2|a|, 2|b| \right\}.$$

4. Ограничитель **SuperBee** (Roe)

$$\mathfrak{J}(a, b) = S_2(a, b) \max \left\{ \min \{2|a|, |b|\}, \min \{|a|, 2|b|\} \right\}.$$

Графики функций $\phi(r)$ для ограничителей 1 – 4 представлены на рис. 4.2.

Заметим, что $\phi \in [0, 2]$, причем значения 0,1 и 2 соответствуют схемам «upwind», с центральной разностью (ЦП) и «downwind».

Очевидно, TVD схемы могут с успехом применяться не только для модельной линейной задачи, но и для любой нелинейной задачи вида (1). На рисунке (4.3) показаны результаты расчета движения прямоугольного импульса по линейной модели, а на графике (4.4) – решение уравнения Бюргерса при $f(u) = u^2/2$.

Задание 13.

Построить и проанализировать графики ограничителей $\phi(r)$. Решить линейное уравнение переноса по схеме TVD с разными ограничителями. Сравнить решение с решениями, полученными по традиционным схемам.

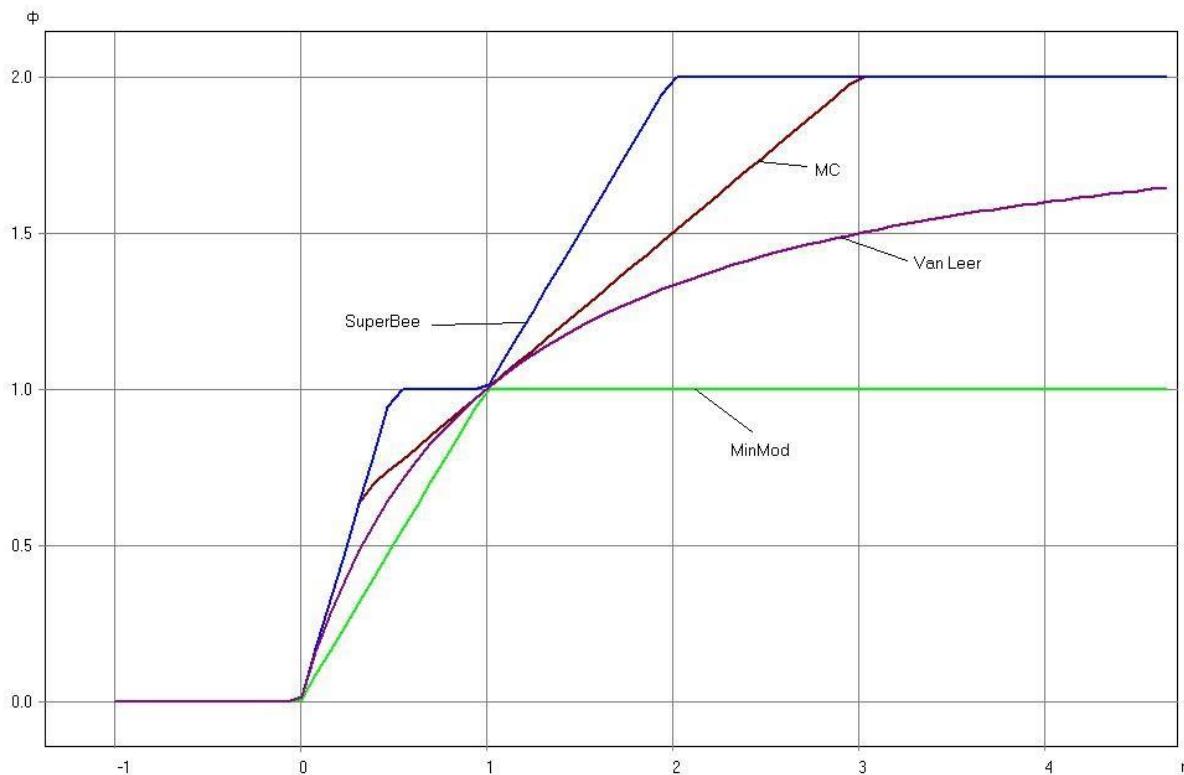


Рис. 4.2. Ограничители антидиффузионных потоков

4.4. Дополнительная диффузия в явных схемах по Лаксу-Вендроффу

В явных схемах производная по времени в уравнении (4.4) аппроксимируется разностью вперед u_t , что приводит к схемной антидиффузии. Как мы знаем,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} &= \frac{1}{\tau} \left\{ u_i + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) - u_i \right\} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial f}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

Поэтому со вторым порядком аппроксимации имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\hat{u}_i - u_i}{\tau} - \frac{\tau}{2h^2} \left[V_{i+1/2} (f_{i+1} - f_i) - V_{i-1/2} (f_i - f_{i-1}) \right].\end{aligned}$$

Второе слагаемое в этом выражении после подстановки в явную схему окажется в правой части со знаком плюс, что соответствует дополнительной диффузии. При численной реализации следует добавить величину

$\frac{\tau}{2h} V_{i+1/2} (f_{i+1} - f_i)$ к численному потоку $f_{i+1/2}$, определенному в (4.13).

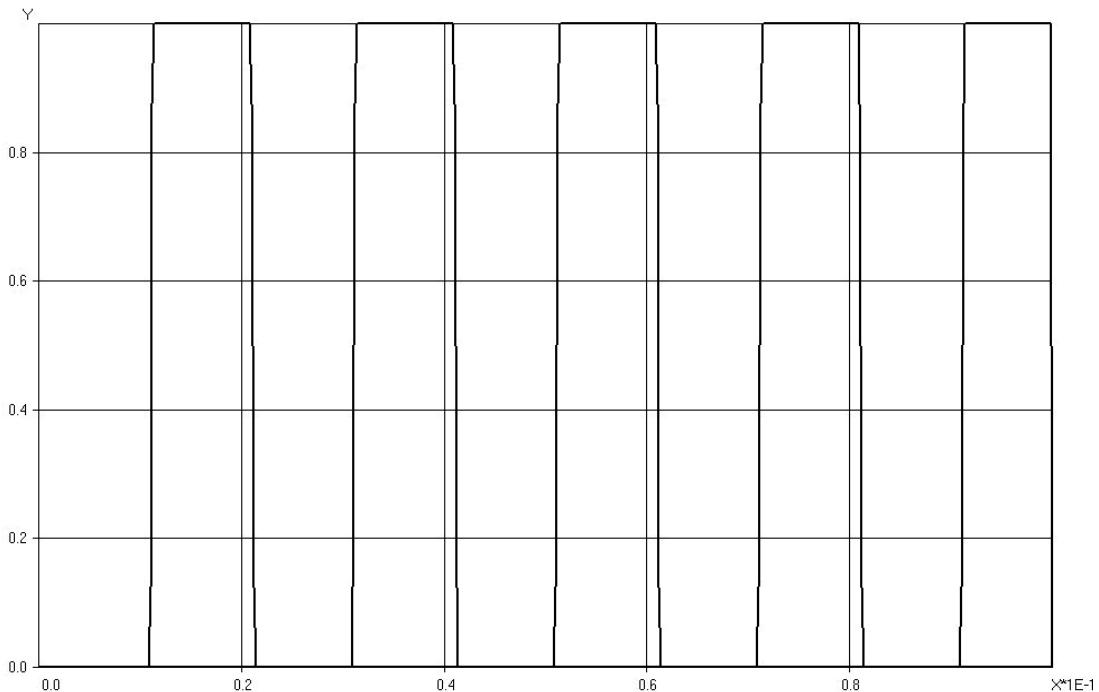


Рис. 4.3. Решение линейного уравнения переноса прямоугольного импульса по схеме TVD с ограничителем SuperBee



Рис. 4.4. Решение уравнения Бюргерса по схеме TVD с ограничителем Van Leer и дополнительной диффузией по Лаксу-Вендроффу

Заключение

Учебное пособие представляет собой первую часть курса «Вычислительная гидродинамика». Оно публикуется в электронном виде, что дает известные преимущества перед бумажным изданием в части цветных иллюстраций и оперативности. В ближайшее время планируются к такой же публикации еще две книги в виде учебных пособий:

- Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Методы конечных элементов и конечных объемов.
- Вычислительная гидродинамика. Часть 3. Методы решения сеточных уравнений.

Составитель благодарен своим ученикам и коллегам Е.И. Калинину, К.А. Поташеву, И.В. Моренко, чьи результаты по построению сеток использованы в данном учебном пособии в качестве иллюстраций.

Особых слов благодарности заслуживает рецензент пособия – профессор А.В. Лапин, благодаря критическим замечаниям которого были исправлены некоторые неточности изложения материала.

Литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том I, II. М.:Наука, 1976.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностранной литературы. 1956. 528 с.
3. Себиси Т.,Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир. 1987. 592 с.
4. Фрик П.Г. Тurbulentnost': подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 292 с.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1,2. М.: Мир, 1991.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977. 656 с.
8. Papamichael N., Stylianopoulos N. Numerical conformal mapping. Domain Decomposition and the Mapping of Quadrilaterals. World Scientific Publishing. 2010. 229 p.
9. Liseikin V.D. Grid Generation Methods. Springer Dordrecht Heidelberg London New York. 2010. 390 p.

Дополнительная литература

- 10.Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург. 2001. 162 с.
- 11.Lin B., Chandler-Wilde S.N. Numerical conformal mapping and mesh generation for polygonal and multiply-connected regions // J. Hydroinformatic. V. 02, No. 4. 2000. P. 255-267
- 12.Пивоваров Ю.В. О построении ортогональной разностной сетки в криволинейном четырёхугольнике // Вычислительные технологии, Т. 8, №5. 2003. С.94-101
- 13.Мазо А.Б. Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости. Учебное пособие. Казань: Изд-во КГУ. 2007. 106 с.
- 14.Мазо А.Б. Основы теории и методы расчета теплопередачи. Учебное пособие. Казань: Изд-во КГУ. 2013. 146 с.
- 15.Мазо А.Б., Савельев А.А. Триангуляция произвольной двумерной области с управляемым сгущением сетки // Исследования по прикладной математике, вып. 21, №21. 1999. С.196-204
- 16.Kalinin E.I, Mazo A.B, Isaev S.A. Composite mesh generator for CFD problems // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. Vol.158, Is.1. Art. № 012047.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Предмет и задачи вычислительной гидродинамики	5
Стиль и методы исследований в ВГ	7
Задание 1.	12
ВГ и экспериментальные исследования	12
Этапы решения задач ВГ	13
Глава 1. Основные уравнения и модели ВГ	16
1.1. Сведения из математики и механики	16
1.2. Уравнения Навье-Стокса	19
1.3. Уравнение энергии	23
1.4. Граничные условия. Постановка задач ВГ	25
1.5. Безразмерные переменные и критерии подобия	27
1.6. Упрощенные модели ВГ	29
1.6.1. Двумерные уравнения Навье-Стокса в преобразованных переменных	30
1.6.2. Ползучие и невязкие течения. Уравнения Стокса и Эйлера	33
1.6.3. Динамический пограничный слой	34
1.6.4. Тепловой пограничный слой	38
1.7. Моделирование турбулентных течений	39
1.7.1. Уравнения Рейнольдса	39
1.7.2. Осредненные уравнения теплопереноса	42
1.8. Модель напорной двухфазной фильтрации	43
1.8.1. Основные понятия подземной гидромеханики	44
1.8.2. Уравнения двухфазной фильтрации	46
1.8.3. Простейшие модели разработки залежей нефти	51
Глава 2. Построение расчетных сеток	56
2.1. Простейшие одномерные сетки	56
Задание 2	64
2.2. Простейшие двумерные сетки	64
2.2.1. Сетки в прямоугольных областях	64
Задание 3.	67

2.2.2. Структурированные сетки в канонических областях	69
2.3. Неструктурированные двумерные сетки	77
2.3.1. Триангуляция Делоне со сгущением узлов	77
2.3.2. Алгоритм триангуляции с продвижением от границ	80
2.3.3. Гибридные композитные сетки	81
2.4. Трехмерные сетки	87
2.4.1. Трехмерные элементы и общие трехмерные сетки	87
2.4.2. Псевдотрехмерные сетки (2.5D)	90
Глава 3. Метод конечных разностей	93
3.1. Аппроксимация и сходимость	93
Задание 4.	97
3.2. Точность сеточного представления волн	98
Задание 5.	100
3.3. Устойчивость конечно-разностных схем	100
3.3.1. Метод дискретных возмущений	102
3.3.2. Матричный метод	106
3.3.3. Метод фон Неймана	107
Задание 6.	110
3.3.4. Обзор результатов по устойчивости РС	111
3.4. РС повышенного порядка точности для линейного уравнения конвекции	112
3.4.1. Схема «чехарда»	112
3.4.2. Схема Лакса-Вендроффа или Лейза	113
3.4.3. Схема Кранка – Николсон	115
Задание 7	116
3.5. Численная диссипация и дисперсия разностных схем	117
3.6. Разностные схемы повышенного порядка точности для линейного уравнения диффузии	119
3.6.1. Схема Дюфорта-Франкела	120
3.6.2. Схема Кранка-Николсон	122
Задание 8	123
3.7. Аппроксимация граничных условий	124
Задание 9	126
3.8. Экономичные разностные схемы для многомерных уравнений	126

теплопроводности	
3.8.1. Чисто явная РС	127
3.8.2. Схема «классики»	127
3.8.3. Чисто неявная РС	128
3.8.4. Неявная схема переменных направлений Писмена-Рэкфорда	128
3.8.5. Факторизованная схема Кранка-Николсон с поправкой	129
Задание 10	131
3.9. Линейные задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией	132
3.9.1. Стационарное уравнение конвекции-диффузии	132
3.9.2. Нестационарное уравнение конвекции-диффузии	136
Задание 11	139
3.10. Нелинейные задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией	140
3.10.1. Уравнение Бюргерса. Поведение решения	140
3.10.2. Явные схемы для уравнения Бюргерса	141
3.10.3. Неявные схемы для уравнения Бюргерса	143
Задание 12.	147
Глава 4. Расчет сильных разрывов с помощью схем TVD	148
4.1. Определения	148
4.2. Конструирование схем TVD	150
4.3. Принципы построения ограничителей	152
Задание 13	157
4.4. Дополнительная диффузия в явных схемах по Лаксу-Вендроффу	157
Заключение	160
Литература	161

