

ELEKTRİKSEL POTANSİYEL

İÇERİK

- Elektriksel Potansiyel ve Potansiyel Farkı
- Düzgün Elektrik Alandaki Potansiyel Farkı
- Elektriksel Potansiyel ve Noktasal Yüklerin Oluşturduğu Potansiyel Enerji
- Elektriksel Potansiyelden Elektrik Alan Elde Edilmesi
- Sürekli Yük Dağılımının Oluşturduğu Elektriksel Potansiyel
- Yüklü Bir İletkenin Potansiyeli



▲ Processes occurring during thunderstorms cause large differences in electric potential between a thundercloud and the ground. The result of this potential difference is an electrical discharge that we call lightning, such as this display over Tucson, Arizona. (© Keith Kent/ Photo Researchers, Inc.)

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel



<http://en.wikipedia.org/wiki/Lightning>

- Yıldırımlar saniyede 10^5 Coulomb'dan daha fazla bir elektriksel yükü bulutlardan yere aktarabilirler.
- Bu olay sırasında 10^7 J/C veya 10^7 Voltluk bir elektriksel potansiyel oluşur.

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel

- Elektrik alanının içinde yüklü bir parçacık hareket ederse, elektrik alan parçacık üzerine bir kuvvet uygular ve iş yapar.
- Yapılan bu iş elektriksel potansiyel olarak ifade edilir.
- Kütle-çekim potansiyel enerjisinin cismin yerden yüksekliğine bağlı olması gibi, elektriksel potansiyel de yüklü parçacığın elektrik alan içindeki konumuna bağlıdır.
- Elektrik devrelerinde iki nokta arasındaki elektriksel potansiyel farkı “voltaj” olarak isimlendirilir.
- Potansiyel ve voltaj kavramları elektrik devrelerinin ve günlük hayatta kullandığımız bir çok temel elektrikli aletlerin nasıl çalıştığını anlamak için çok önemlidir.

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel

➤ E elektrik alan içinde hareket eden q_0 deneme yüküne uygulanan kuvvet;

$$F = q_0 E$$

➤ Sonsuz küçük ds yerdeğiştirmesi için, yük üzerine alan tarafından yapılan iş;

$$F \cdot ds = q_0 E \cdot ds \text{ olur.}$$

➤ Elektrik alan tarafından bu kadar iş yapılırken, yük alan sisteminin potansiyel enerjisi;

$$dU = -q_0 E \cdot ds \text{ kadar azalır.}$$

➤ q_0 yükünün A ve B noktaları arasında sonlu bir yerdeğiştirmesi halinde, sistemin $\Delta U = U_B - U_A$ potansiyel enerji değişimi;

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel

Bir elektrik alan içinde A ve B gibi herhangi iki nokta arasındaki $\Delta V = V_B - V_A$ potansiyel farkı, sistemin potansiyel enerjisindeki değişimin q_0 deneme yüküne oranı olarak tanımlanır:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Elektriksel potansiyel elektrik alanın skaler bir karakteristiğidir ve alan içinde bulunan yükten bağımsızdır.
- Potansiyel enerji ise alan-yük sistemini ifade eder.

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel

Bir yükün potansiyel enerjisindeki değişim, elektriksel kuvvet tarafından yapılan işin negatifine eşittir. A ile B noktaları arasındaki potansiyel farkı, kinetik enerjide değişim olmaksızın, bir q_0 yükünü bir dış etken tarafından A noktasından B noktasına götürmek için birim yük başına yapılması gereken işe eşittir.

$$W_{A \rightarrow B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

Bir elektrik alan içindeli herhangi bir noktadaki potansiyel, pozitif deneme yükünü sonsuzdan bu noktaya getirmek için birim yük başına yapılan işe eşittir.

$$V_P = -\int_{\infty}^P E \cdot ds$$

Potansiyel Farkı ve Elektriksel Potansiyel

- Potansiyel farkı, birim yük başına enerjinin bir ölçüsüdür.

$$\text{Volt(V)}=1\text{V}=1 \text{ J/C}$$

- 1V'luk potansiyel farkı boyunca 1 C'luk yükü götürmek için yapılması gereken iş 1J'dür.

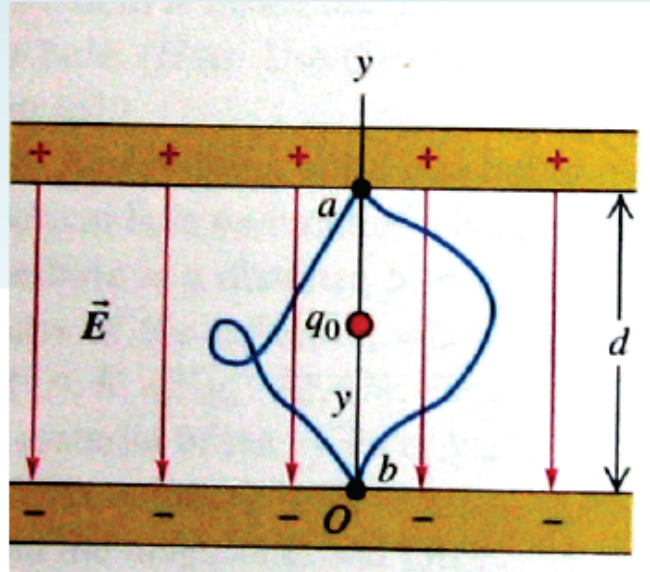
- Potansiyel farkı aynı zamanda, elektrik alanla uzaklık birimlerinin çarpımına eşittir.

$$1 \text{ N/C}=1 \text{ V/m}$$

- Elektron Volt: 1V büyüklüğündeki potansiyel farkı boyunca hareket eden bir elektron (veya proton) un kazandığı veya kaybettiği enerjisidir.

$$1 \text{ eV}=1,60 \times 10^{-19} \text{ C.V}=1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Düzgün Bir Elektrik Alandaki Potansiyel Farkları



Ref: University Physics, Young & Freedman, Pearson Addison Wesley

E elektrik alanı içinde artı yüklü plakadan eksi yüklü plakaya doğru $F=q_0E$ büyüklüğünde bir kuvvet etki eder. Yük a noktasından b noktasına hareket ederken yapılan pozitif bir iş yapılır;

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = q_0Ed$$

Elektriksel kuvvetin yalnızca y-bileşeni vardır.

$$F_y = -q_0E$$

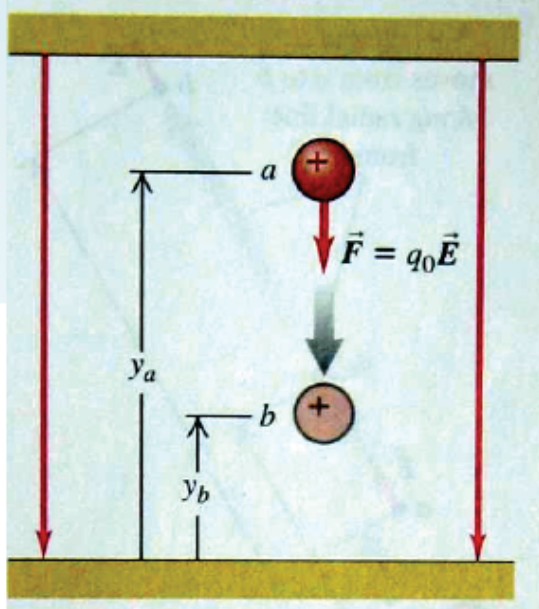
Bu kuvvet için potansiyel enerji;

$$U = q_0E_y$$

Düzgün Bir Elektrik Alandaki Potansiyel Farkları

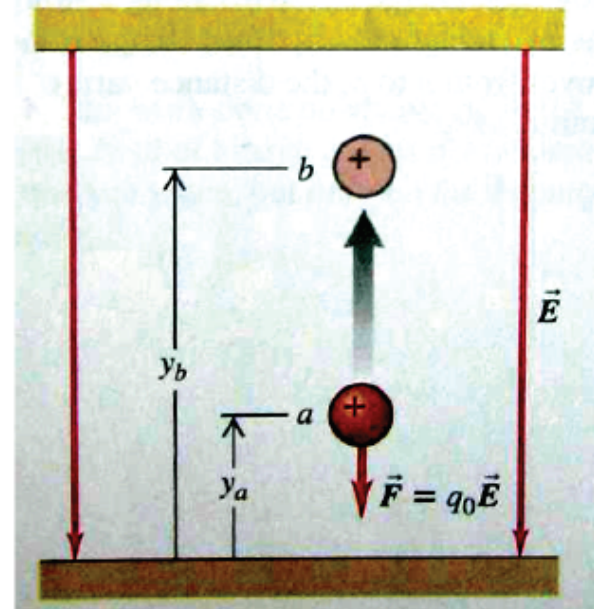
Yük y_a yüksekliğinden y_b yüksekliğine hareket ederse;

$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0 E y_b - q_0 E y_a) = q_0 E (y_a - y_b) \text{ olur.}$$



Ref: University
Physics, Young &
Freedman,
Pearson Addison
Wesley

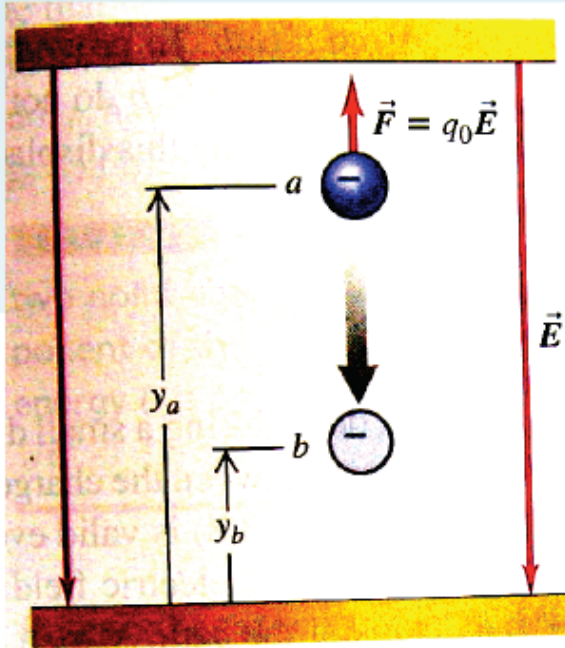
E alanı ile aynı doğrultuda, pozitif bir yük hareket ederse ($y_a > y_b$), elektrik alanı yük üzerinde pozitif iş yapar ve U potansiyel enerjisi azalır.



E alanı ile ters doğrultuda, pozitif bir yük hareket ederse ($y_a < y_b$), elektrik alanı yük üzerinde negatif iş yapar ve U potansiyel enerjisi artar.

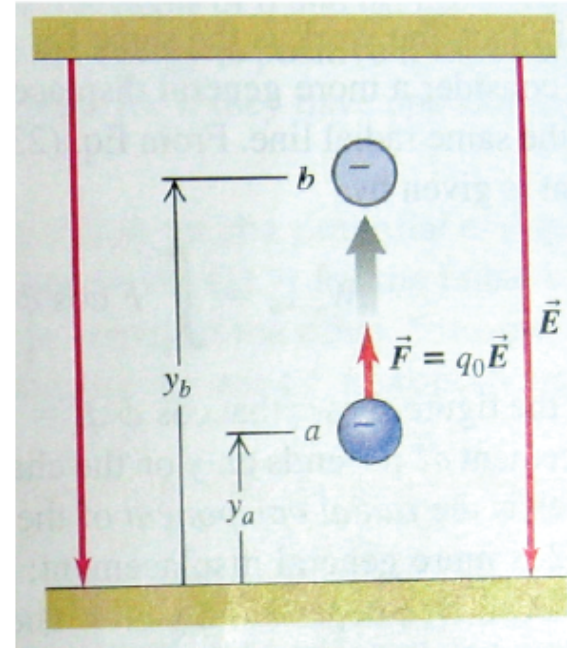
Düzgün Bir Elektrik Alandaki Potansiyel Farkları

Deneme yükünün pozitif veya negatif olması uygulanan kuralları değiştirmez!



Ref: University
Physics, Young &
Freedman, Pearson
Addison Wesley

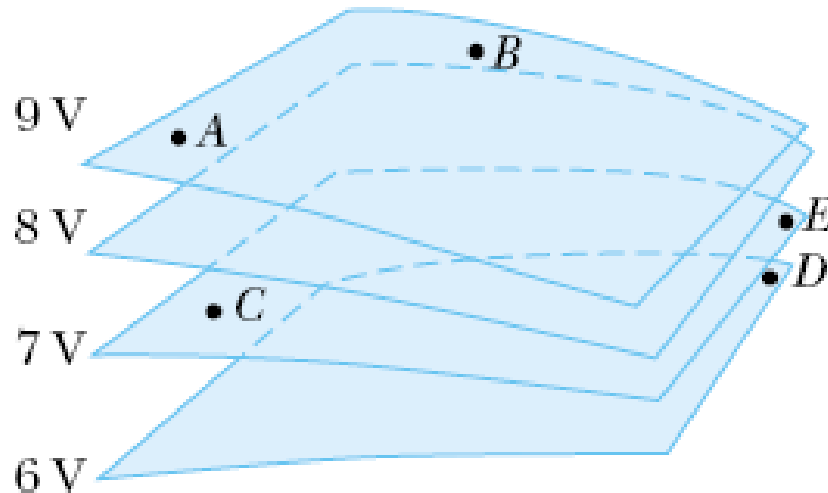
E alanı ile aynı doğrultuda, negatif bir yük hareket ederse ($y_a > y_b$), elektrik alanı yük üzerinde negatif iş yapar ve U potansiyel enerjisi artar.



E alanı ile ters doğrultuda, negatif bir yük hareket ederse ($y_a < y_b$), elektrik alanı yük üzerinde pozitif iş yapar ve U potansiyel enerjisi azalır.

Düzgün Bir Elektrik Alandaki Potansiyel Farkları

- Pozitif bir yük elektrik alan doğrultusunda hareket ederse, elektriksel potansiyel enerji kaybeder.
- Negatif bir yük, elektrik alan doğrultusunda hareket ettiği zaman elektriksel potansiyel enerji kazanır.
- Aynı potansiyele sahip olan noktaların sürekli dağılımlarının oluşturduğu herhangi bir yüzeye eşpotansiyel yüzey adı verilir.

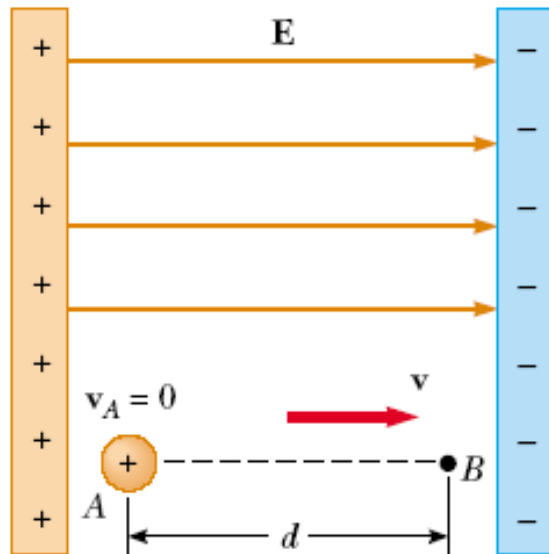


Ref: Fen ve Mühendislik
için Fizik 2, Serway &
Beichner

Örnek

Bir proton, pozitif x eksenini doğrultusu boyunca yönelen $8,0 \times 10^4$ V/m lik düzgün bir elektrik alan içinde durgun halden serbest bırakılıyor. Proton bu E elektrik alanının etkisiyle 0,50m yerdeğiştiriyor. (a) A ve B noktaları arasındaki elektriksel potansiyeldeki değişimi bulunuz. (b) Bu yerdeğiştirme için protonun potansiyel enerjisindeki değişimi bulunuz.

Ref: Fen ve Mühendislik için
Fizik 2, Serway & Beichner

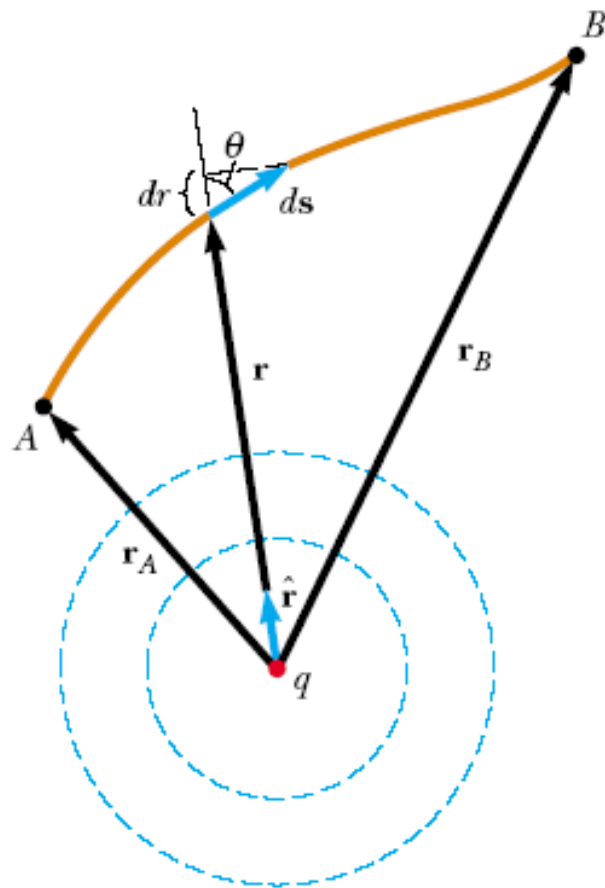


(a)
$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4 \text{ V/m})(0.50 \text{ m}) = -4.0 \times 10^4 \text{ V}$$

(b)
$$\begin{aligned} \Delta U &= q_0 \Delta V = e \Delta V \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \times 10^4 \text{ V}) \\ &= -6.4 \times 10^{-15} \text{ J} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= 0 \\ \left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + e \Delta V &= 0 \\ v &= \sqrt{\frac{-(2e \Delta V)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{-2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \times 10^4 \text{ V})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} \\ &= 2.8 \times 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Elektriksel Potansiyel ve Noktasal Yüklerin Oluşturduğu Potansiyel Enerji



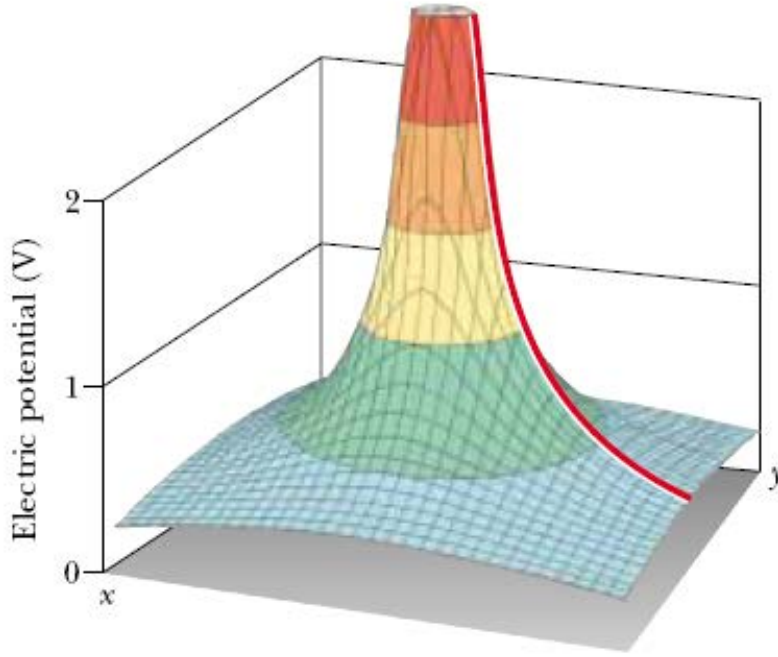
- Yalıtılmış pozitif bir noktasal q yükü bulunduğu yerden dışarı doğru ışınsal olarak bir elektriksel alan meydana getirir.
- Yükten r uzaklıkta bir noktada elektriksel potansiyel;

$$V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$E \cdot ds = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot ds$$

$$V_B - V_A = - \int E_r dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Elektriksel Potansiyel ve Noktasal Yüklerin Oluşturduğu Potansiyel Enerji



Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

Elektriksel Potansiyel ve Noktasal Yüklerin Oluşturduğu Potansiyel Enerji

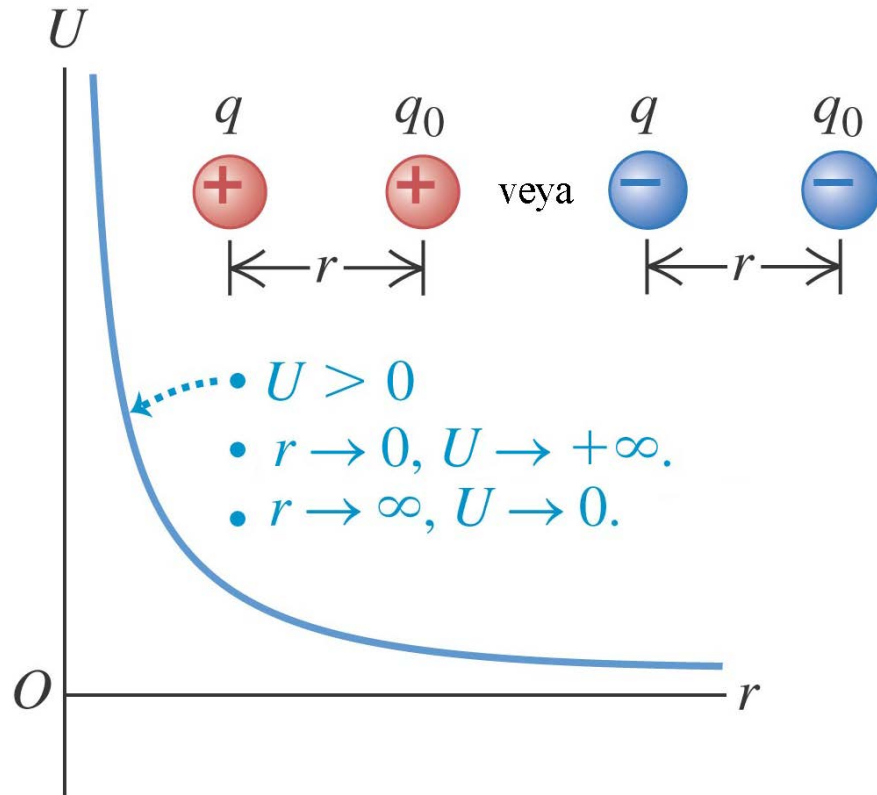
- İki veya daha fazla yükün bir noktada oluşturduğu elektriksel potansiyel üst-üste binme ilkesi uygulanarak elde edilir.
- Bir noktasal yük grubu için P noktasındaki toplam potansiyel;

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

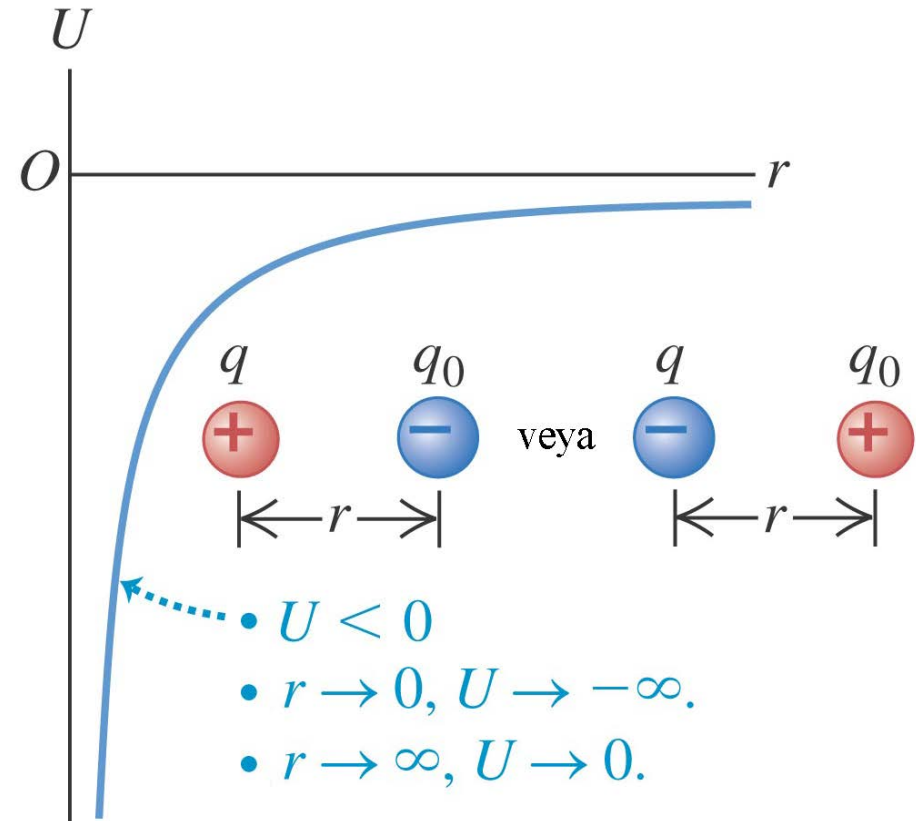
- Üç yükün toplam potansiyel enerji her bir yük çifti için U ayrı ayrı hesaplanıp sonuç toplanır;

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Elektriksel Potansiyel ve Noktasal Yüklerin Oluşturduğu Potansiyel Enerji



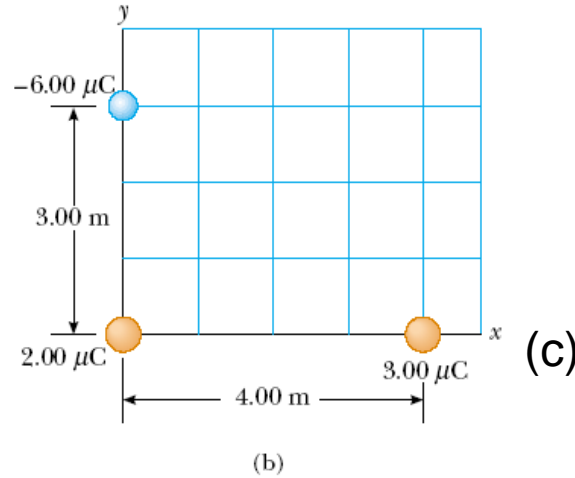
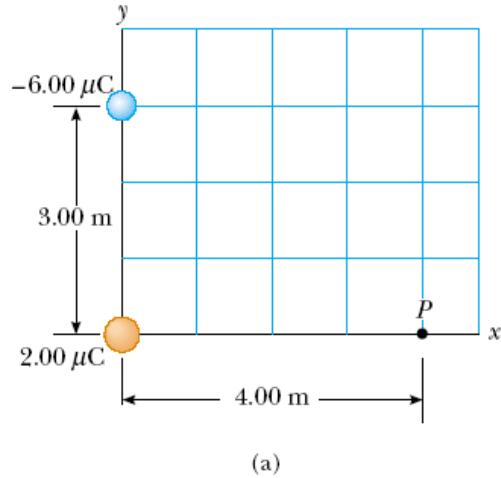
Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Örnek

Şekilde görüldüğü gibi $q_1 = 2,00 \mu\text{C}$ 'luk yük orijinde, $q_2 = -6,00 \mu\text{C}$ 'luk yük $(0;3,00) \text{ m}$ 'dedir. a) Bu yüklerin $(4,00;0) \text{ m}$ koordinatındaki P noktasında oluşturduğu toplam elektriksel potansiyeli bulunuz. b) Sonsuzdan P noktasına getirilen $3,00 \mu\text{C}$ 'luk yükün potansiyel enerjisindeki değişimi bulunuz.



(a)

(c)

$$V_P = k_e \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$V_P = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)$$

$$\times \left(\frac{2.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{4.00 \text{ m}} - \frac{6.00 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.00 \text{ m}} \right)$$

$$= -6.29 \times 10^3 \text{ V}$$

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$= (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)$$

$$\times \left(\frac{(2.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{3.00 \text{ m}} \right.$$

$$+ \frac{(2.00 \times 10^{-6} \text{ C})(3.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{4.00 \text{ m}}$$

$$\left. + \frac{(3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.00 \times 10^{-6} \text{ C})}{5.00 \text{ m}} \right)$$

$$= -5.48 \times 10^{-2} \text{ J}$$

(b) $\Delta U = q_3 V_P - 0 = (3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.29 \times 10^3 \text{ V})$

$$= -1.89 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Elektrik Alan Değerinin Elektriksel Potansiyelden Elde Edilmesi

Belirli bir bölgede elektriksel potansiyel biliniyorsa, elektrik alan hesaplanabilir.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

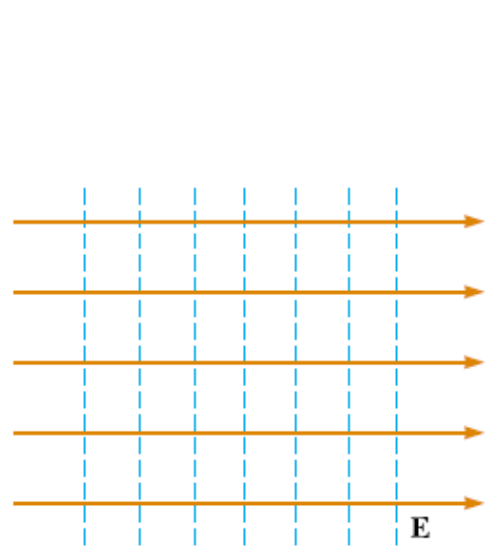
$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Bir koordinat eksenine doğrultusundaki elektrik alanının büyüklüğü, bu koordinata göre elektriksel potansiyelin türevinin negatifine eşittir.

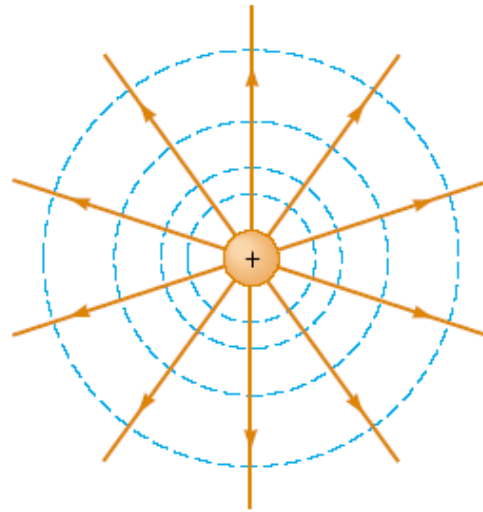
Elektrik alanına dik doğrultulardaki herhangi bir yerdeğiştirmede elektriksel potansiyel değişmez.

Elektrik Alan Değerinin Elektriksel Potansiyelden Elde Edilmesi

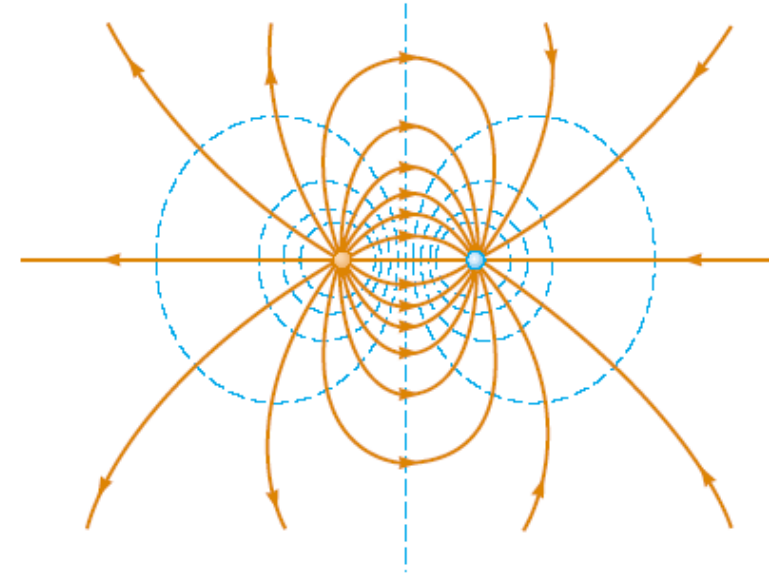
Bir deneme yükü, eşpotansiyelli yüzeyde bir ds yerdeğiştirmesi yaptığında, $dV=0$ olur, çünkü eşpotansiyelli yüzeylerde potansiyel sabittir. O zaman, $dV=-E.ds=0$ olur. Bu da, eşpotansiyel yüzeylerin her zaman elektrik alan çizgilerine dik olduğunu gösterir.



(a)



(b)

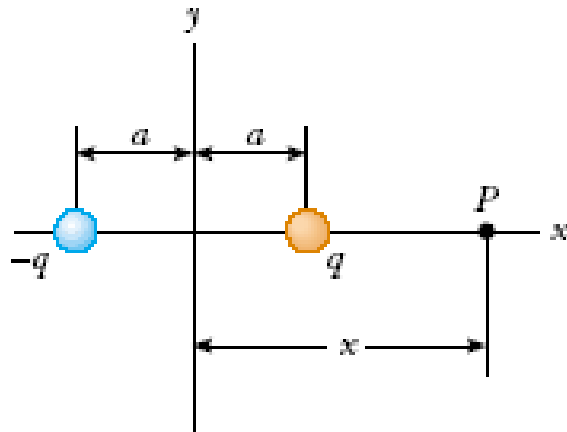


(c)

Örnek

Bir elektrik dipol , şekildeki gibi, birbirinden $2a$ uzaklığıyla ayrılmış bulunan eşit ve zıt işaretli iki yükten oluşur. Dipol, x eksenini boyunca uzamakta ve dipolün merkezi eksenlerin kesim noktasındadır. a) P noktasındaki elektriksel potansiyeli hesaplayınız. b) Dipolden çok uzak bir noktada V ve E_x 'i hesaplayınız. c) P noktası, iki yük arasında herhangi bir yerde bulunuyorsa, E_x ve V 'yi hesaplayınız.

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2,
Serway & Beichner



$$(a) \quad V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

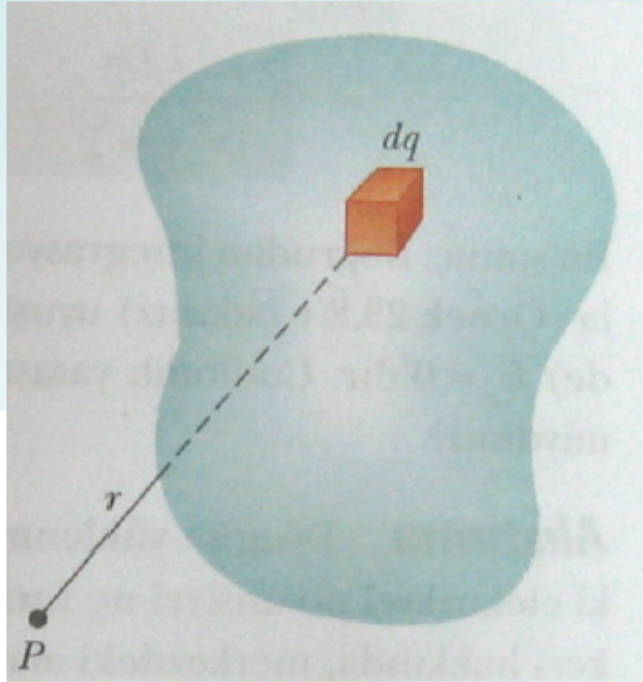
$$\mathbf{E} = -\nabla V = - \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) V$$

$$(b) \quad V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \gg a) \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a)$$

$$(c) \quad V = k_e \sum \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qx}{a^2 - x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{2k_e qx}{a^2 - x^2} \right) = -2k_e q \left(\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right)$$

Sürekli Yük Dağılımının Oluşturduğu Elektriksel Potansiyel



Herhangi bir P noktasında dq yük elemanının oluşturduğu dV potansiyeli;

$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

Her bir yük elemanı P noktasından farklı uzaklıklarda ve k_e sabit olduğundan;

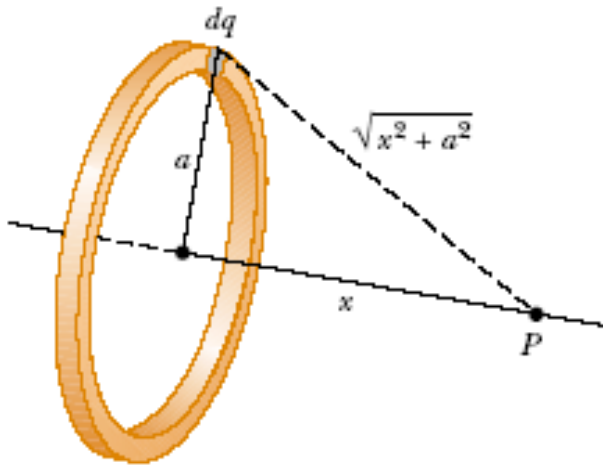
$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2,
Serway & Beichner

Örnek

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

- a) Toplam yükü Q ve yarıçapı a olan düzgün yüklenmiş bir halkanın merkezinden geçen çapına dik eksen üzerindeki bir P noktasındaki elektriksel potansiyeli bulunuz.
- b) P noktasındaki elektrik alanın büyüklüğü için bir ifade bulunuz.



$$(a) \quad V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

(b)

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx} (x^2 + a^2)^{-1/2}$$
$$= -k_e Q \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + a^2)^{-3/2} (2x)$$

$$E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Örnek

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

Yüzeyindeki yük yoğunluğu σ , yarıçapı a olan düzgün yüklenmiş bir diskin merkezinden dik geçen eksen boyunca a) Elektriksel potansiyeli, b) Elektrik alanının büyüklüğünü bulunuz.

(a) $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$

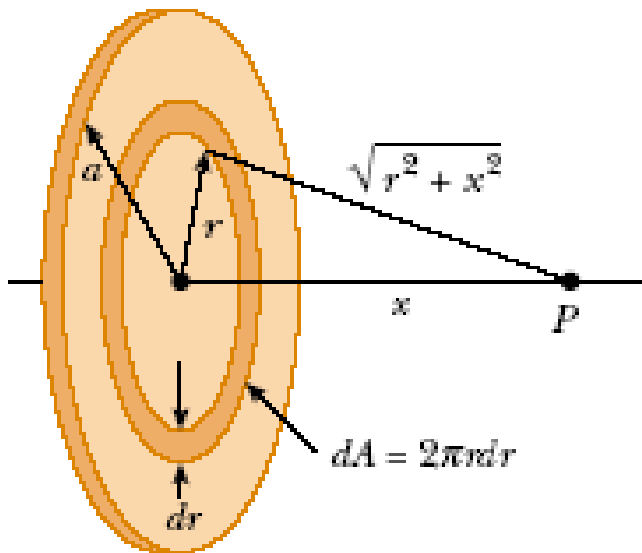
$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e \sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^a \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e \sigma \int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r dr$$

$$V = 2\pi k_e \sigma [(x^2 + a^2)^{1/2} - x]$$

(b)

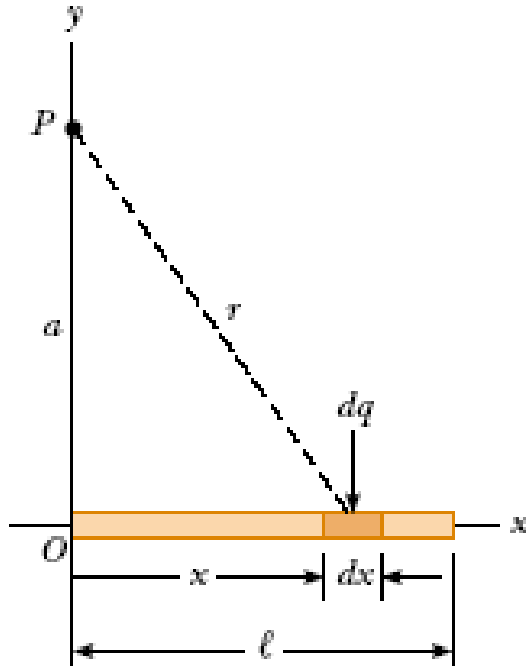
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$



ÖRNEK: Sonlu Çizgisel Yükün Potansiyeli

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

ℓ uzunluklu bir çubuk, x eksenini boyunca yerleştiriliyor. Çubuktaki toplam yük Q 'dur ve yük, birim uzunluk başına düzgün olarak dağılmıştır. Y -ekseni boyunca, orijinden d uzaklıktaki bir P noktasında elektriksel potansiyeli bulunuz.



$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V = k_e \lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$V = \frac{k_e Q}{\ell} \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a} \right)$$

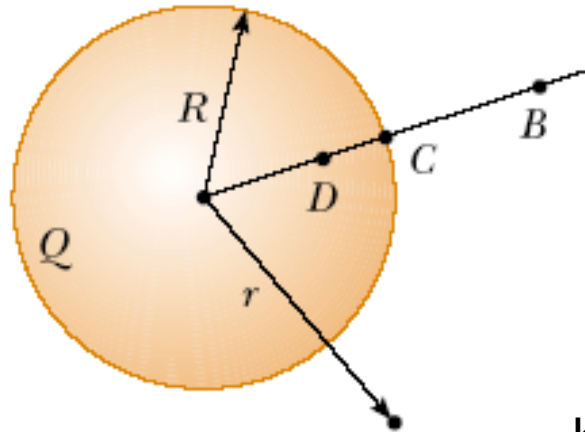
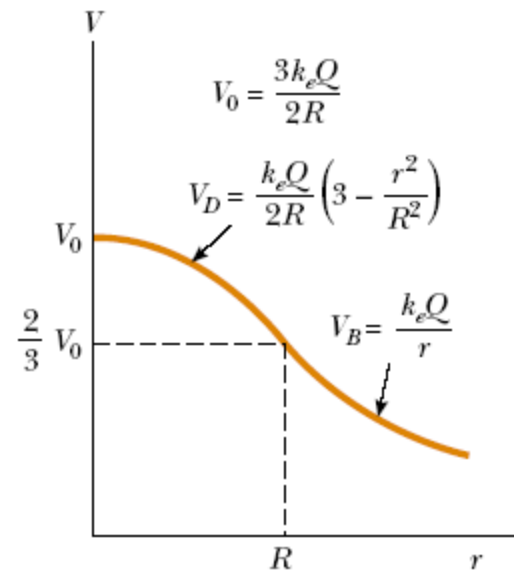
$$\cos \theta = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

Not: İntegrali çözmek için ilk önce $x = a \tan \theta$ dönüşümü yapılır. Sonra çıkan sonuçta $t = \tan(\theta/2)$ dönüşümü yapılır. $\cos \theta = (1+t^2)/(1-t^2)$ ve $\sin \theta = 2t/(1-t^2) = x/a$ trigonometrik ifadeler kullanılır.

Örnek

Düzgün dağılmış pozitif bir yük yoğunluğuna sahip, toplam yükü Q olan R yarıçaplı yalıtılmış bir küre veriliyor. a) Kürenin dışındaki bir noktada, yani $r > R$ de elektriksel potansiyeli bulunuz. ($r = \infty$ da potansiyeli sıfır olarak alınız)
b) Yüklü kürenin içindeki bir noktada elektriksel potansiyeli bulunuz.

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner



$$(a) \quad E_r = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (\text{for } r > R)$$

$$V_B - V_A = k_e Q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

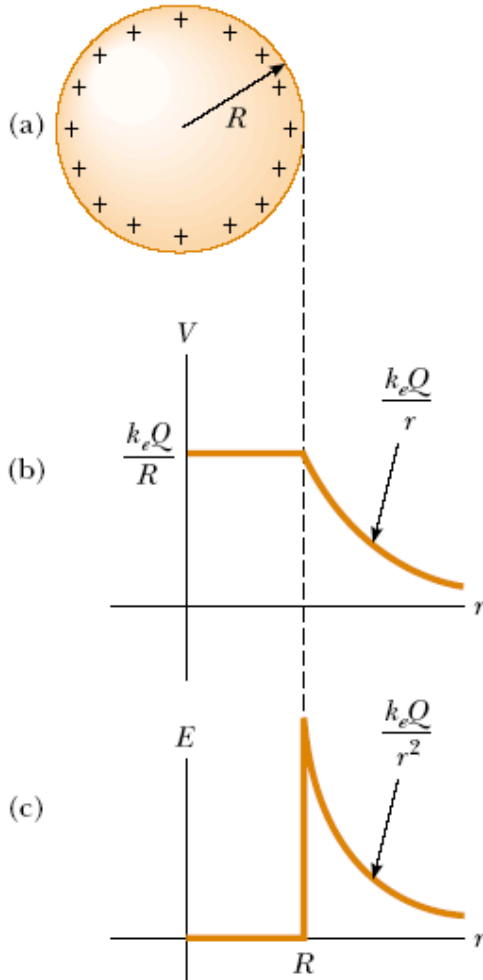
$$V_B - 0 = k_e Q \left[\frac{1}{r_B} - 0 \right]$$

$$V_B = k_e \frac{Q}{r} \quad (\text{for } r > R)$$

Kürenin yüzeyinde ise $V_C = k_e \frac{Q}{R}$ (for $r = R$) olur.

$$(b) \quad E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r \quad (\text{for } r < R) \quad V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{k_e Q}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{k_e Q}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

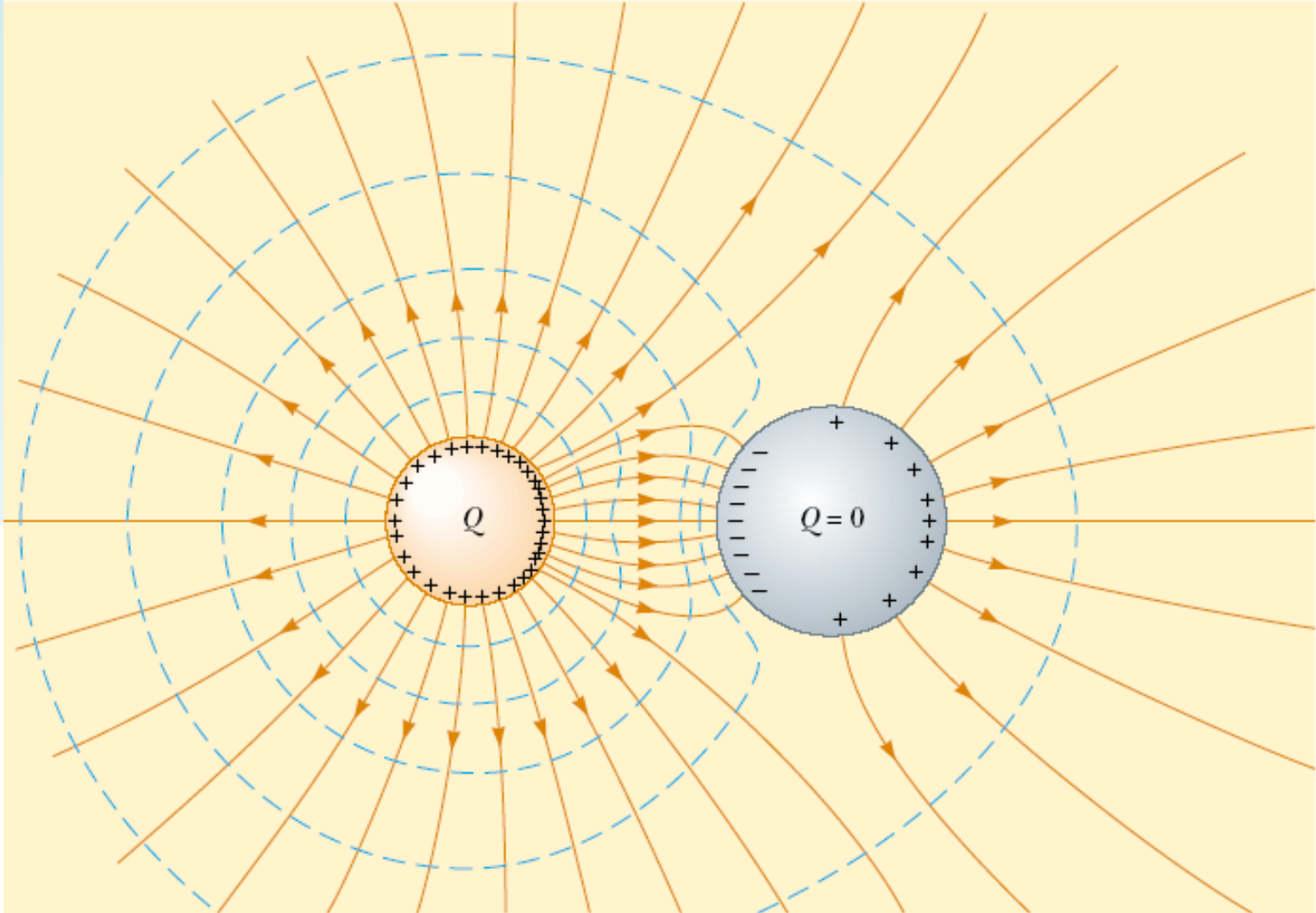
Yüklü Bir İletkenin Potansiyeli



- Elektrostatik denge durumundaki bir iletkenin taşıdığı net yük daima dış yüzeyinde toplanır.
- Denge durumundaki herhangi bir yüklü iletkenin yüzeyi, eşpotansiyel yüzeydir.
- İletkenin içindeki her yerde $E_r = -dV/dr$ bağıntısından, potansiyel sabit ve yüzeydeki değere eşittir.

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

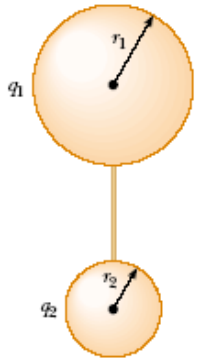
İki iletken küre etrafındaki elektrik alan ve eşpotansiyel çizgileri



Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

Örnek

Yarıçapları r_1 ve r_2 olan iki iletken küre, her ikisinin yarıçapından daha büyük bir uzaklıkta, birbirlerinden ayrılmıştır. Küreler şekildeki gibi, bir iletken telle birbirlerine bağlıdır. Denge durumunda küreler üzerindeki düzgün dağılmış yükler sırayla q_1 ve q_2 ise, kürelerin yüzeyindeki elektrik alan şiddetinin oranını bulunuz.



Ref: Fen ve
Mühendislik
için Fizik 2,
Serway &
Beichner

Her iki küre aynı elektrik potansiyele sahip olmalıdır. Çünkü bir iletken tel ile bağlıdırlar.

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

Bu yüzden, yüklerin oranı

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (1)$$

olur. Yüzeylerindeki yük dağılımları düzgün olduğu için yüzeylerindeki elektrik alanların büyüklükleri

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{ve} \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2}$$

bulunur. Bu iki alanın oranından

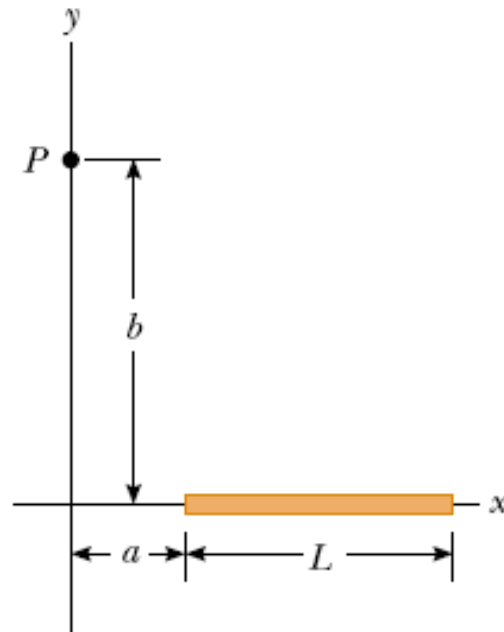
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (2) \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek

Şekilde görüldüğü gibi düzgün yüklü ince çubuğun çizgisel yük yoğunluğu λ dır. P noktasında elektriksel potansiyel için bir ifade bulunuz.

Ref: Fen ve Mühendislik için Fizik 2, Serway & Beichner

$$V = k_e \int_a^{a+L} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} = k_e \lambda \ln \left[x + \sqrt{x^2 + b^2} \right] \Big|_a^{a+L} = \boxed{k_e \lambda \ln \left[\frac{a + L + \sqrt{(a + L)^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right]}$$



Örnek (2.yol): Düzgün dağılmış pozitif yük yoğunluğuna sahip toplam yükü Q olan R yarıçaplı izole edilmiş bir kürenin

a) $r = \infty$ 'da potansiyeli sıfır alarak dışındaki bir noktada, yani $r > R$ 'de

b) içindeki bir noktada, yani $r < R$ 'de elektriksel potansiyelini bulunuz.

Çözüm:

$$a) \Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = \frac{q_{ik}}{\epsilon_0}$$

Gauss yüzeyi olarak kürenin yüzeyini seçersek $\int dA = 4\pi r^2$ olur.

$$E \oint dA = \frac{q_{ik}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = k \frac{Q}{r^2}$$

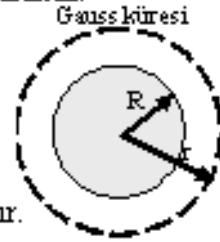
$$V_B = - \int_{\infty}^r E_r dr = -kQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = kQ \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r$$

$$V_B = k \frac{Q}{r} \quad (r > R \text{ için})$$

$$V_c = k \frac{Q}{R} \quad (r = R \text{ için})$$

$$V_D - V_c = - \int_R^r E_r dr = - \frac{kQ}{R^3} \int_R^r r dr = - \frac{kQ}{R^3} \left(\frac{r^2}{2} \right)_R^r \Rightarrow V_D - V_c = \frac{kQ}{2R^3} (R^2 - r^2) \Rightarrow V_D - V_c = \frac{kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3}$$

$$V_c = k \frac{Q}{R} \Rightarrow V_D = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R} - \frac{kQr^2}{2R^3} = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (r < R \text{ için})$$

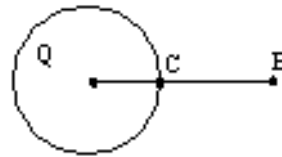


$$b) \Phi_c = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = \frac{q_{ik}}{\epsilon_0}$$

$$q_{ik} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$E \oint dA = \frac{q_{ik}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{3} \frac{\rho r}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \quad \text{olduğundan} \quad E = k \frac{Qr}{R^3} \text{ bulunur.}$$



SORULAR

- 1) Dört tane yük şekildeki gibi bir dikdörtgenin köşelerine yerleştirilmiştir. İki tane $4 \mu\text{C}$ 'luk yükü yerlerinden ayararak sonsuza götürmek için ne kadarlık bir enerji harcanır?

Çözüm:

$4 \mu\text{C}$ 'luk yükün birini sonsuza götürmek için ΔU_1 :

$$\Delta U_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_1 q_4}{r_{14}}$$

$$\Delta U_1 = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{-12}}{0,03} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{45} \cdot 10^{-1}} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-12}}{0,06} \right)$$

$$\Delta U_1 = 12,95 \text{ J}$$

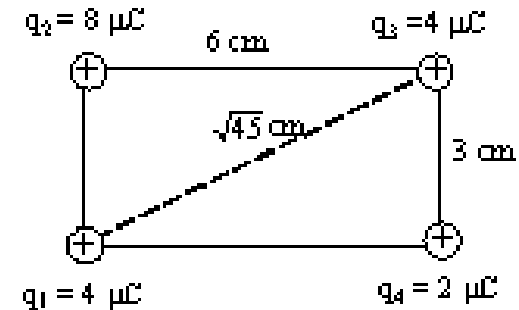
$4 \mu\text{C}$ 'luk yükün diğerini sonsuza götürmek için ΔU_2 :

$$\Delta U_2 = k \frac{q_3 q_4}{r_{34}} + k \frac{q_3 q_2}{r_{32}}$$

$$\Delta U_2 = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-12}}{0,03} + \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^{-12}}{0,06} \right)$$

$$\Delta U_2 = 7,2 \text{ J}$$

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 20,15 \text{ J}$$



- 2) Sol ucu orijinde olan x eksenini boyunca uzanmış L uzunluklu bir çubuğun üzerinde düzgün olmayan $\lambda = \alpha x$ yük yoğunluğu bulunmaktadır. Çubuğun sol ucundan d uzaklıktaki bir A noktasında elektriksel potansiyeli hesaplayınız.

Çözüm:

$$V = k \int \frac{dq}{r} = k \int \frac{\lambda dx}{r}$$

$$V = k \int_0^L \frac{\alpha x dx}{d + x}$$

$$V = k\alpha \int_0^L \frac{x dx}{d + x} \quad d + x = u \quad \Rightarrow \quad x = u - d \quad \Rightarrow \quad dx = du$$

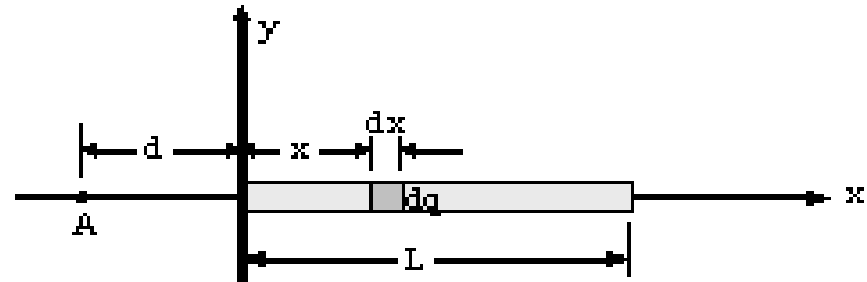
$$V = k\alpha \int_0^L \frac{u - d}{u} du = k\alpha \left(\int_0^L du - d \int_0^L \frac{du}{u} \right)$$

$$V = k\alpha \left(u \Big|_0^L - d \left(\ln u \Big|_0^L \right) \right)$$

$$V = k\alpha \left((d + x) \Big|_0^L - d \left(\ln(d + x) \Big|_0^L \right) \right)$$

$$V = k\alpha \left((d + L - d) - d \left(\ln(d + L) - \ln d \right) \right)$$

$$V = k\alpha \left(L - d \left(\ln \frac{d + L}{d} \right) \right)$$



3)

R yarıçaplı düzgün yüklü yalıtkanın içindeki elektriksel potansiyel $V = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$, dışındaki potansiyel $V = \frac{kQ}{r}$ ifadeleriyle veriliyor. Kürenin içinde ve dışında elektrik alan ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

Kürenin içinde; $V = \frac{kQ}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ $E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{kQr}{R^3}$

Kürenin dışında; $V = \frac{kQ}{r}$ $E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{kQ}{r^2}$

4)

Yarıçapı 0,25 m olan içi dolu bir kürenin merkezinden 0,5 uzaklıktaki potansiyel 1800 V ise, içi dolu kürenin σ (C/m²) yüzeyte yük yoğunluğu hesaplayınız.

Çözüm:

$$V = k \frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{Vr}{k} = \frac{1800 \cdot 0,5}{9 \cdot 10^9} = 10^{-7} \text{ C}$$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\sigma = \frac{10^{-7}}{4\pi(0,25)^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{\pi} \text{ C/m}^2$$