PRIMER PARCIALITO

Los clientes que llegan a una heladería pueden elegir entre dos sabores: dulce de leche y chocolate. Se sabe que los que eligen dulce de leche llegan de acuerdo a un proceso de Poisson $N_d(t)$ con intensidad de 5 por hora y los que eligen chocolate siguen un proceso de Poisson $N_c(t)$ con intensidad de 3 por hora. Además, se sabe que ambos procesos son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 4hs hayan llegado exactamente 5 clientes?

b) Sabiendo que en 6hs entraron 12 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 hayan pedido dulce de leche?

$\lambda_d = 5 \quad , \quad \lambda_c = 3 \qquad \overbrace{\lambda = 8}^{\text{Conjunto}}$

a) $P(N(4) = 5) = e^{-8.4} \dfrac{(8.4)^5}{5!} = e^{-32} \dfrac{(32)^5}{5!}$

b) $P(N_d(6) \geq 2 \mid N(6) = 12)$

$= 1 - P(\underbrace{N_d(6) \leq 1}_{0,1} \mid \underbrace{N(6) = 12}_{11,\,12})$

$= 1 - \dfrac{P(N_d(6) \leq 1,\ N(6) = 12)}{P(N(6) = 12)}$

$= 1 - \dfrac{\left(P(N_d(6) = 0)\, P(N_c(6) = 12) + P(N_d(6) = 1) . P(N_c(6) = 11) \right)}{P(N(6) = 12)}$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{e^{-30}(30)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-18}(18)^{12}}{12} + \frac{e^{-30}(30)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-18}(18)^{11}}{11!} \right)}{\frac{e^{-32}(32)^{12}}{12!}}$$

$$1 - \left(\frac{\sum_{i=0}^{1} \frac{e^{-30}(30)^i}{i!} \cdot \frac{e^{-18}(18)^{12-i}}{(12-i)!}}{\frac{e^{-32}(32)^{12}}{12!}} \right)$$

$\frac{6}{18} + \frac{10}{18} = \frac{16}{18} = 8/9$

3) punto 3.

$1 \cdot 1/3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{10}{18}$

$(1 - 1/3) = 2/3$

a)

$$P(X_1 + X_2 \leq 2) \cdot P(U < 1/3) + P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 2) \cdot P(U \geq 1/3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(x-t)\,dt$$

Aqui tenemos que $f_{X_1}(t) > 0 \iff t > 0$
y $f_{X_2}(x-t) \iff x - t > 0 \iff t < x$

- Si $x \leq 0 \Rightarrow t < x \leq 0$ $\quad f_{X_1+X_2}(x) = 0$
- Si $0 < x \leq 1 \Rightarrow f_{X_1}(t) = 1$
  $f_{X_2}(x-t) = 1$
- Si $x > 1$
  entonces

Solo interesa hasta 1.

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x 1\,dt = x$$

y $F_{W_1+W_2}(2) = \int_0^2 x\,dx = \int_0^1 x\,dx + 0.$

$F_{W_1+W_2}(z) = 1/2$

Y $\quad F_{(W_1+W_2)+W_2}(z) = \int_{-\infty}^{1} f_{(X_1+X_2)+X_3}(x)$

$t > 0 \qquad x > t$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+X_2}(t) \cdot f_{X_3}(x-t)\, dt$$

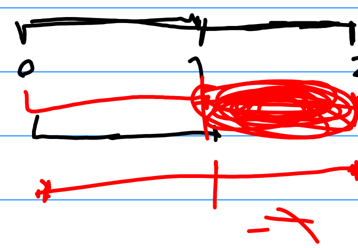
$x \le 0$ entonces $\Rightarrow 0$ $\qquad 0 < x \le 1$

$0 < x \le 1 \qquad \underbrace{0 < t < x}_{\in (0,1)} \le 1 \qquad \wedge\ -t < x-t \le 1-t$

$f_{X_1+X_2} = t \quad$ y $\quad f_{X_3}(x-t) = 1$

$$f_{X_1+X_2+X_3} = \int_0^x t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$0 < \cancel{x} < 1$ pero $0 < \cancel{x} < 2$



entonces

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+X_2}(x) \cdot f_{X_3}(x-1-t)\, \cancel{dt} = \int_1^x \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow 1 < t < 2$

$$F_{X_1+X_2+X_3}(z) = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 + \frac{x}{6} - \frac{x}{2}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} = 5/6$$

C_1 la elrgen 40% $\rightarrow \lambda = 1/3$ min

C_2 lu elrgen 32% $\rightarrow \lambda = 1/4$ min

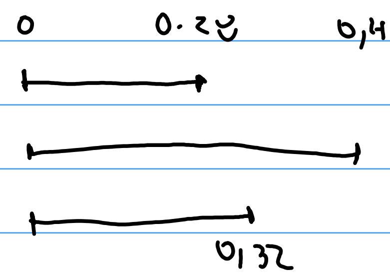
C_3 ln elgen 28% $\rightarrow \lambda = 1/5$ min

a) $0.4P(C_1 \le 4) + \overset{0.32}{P}(C_2 \le 4) + \overset{0.28}{P}(C_3 \le 4)$

$0.4(1 - P(C_1 > 4)) + 0.32(1 - p(C_2 > 4)) + 0.28(1 - p(C_3 > 4))$

$0.4(1 - e^{-4/3}) + 0.32(1 - e^{-1}) + 0.28(1 - e^{-4/5})$

$= 0.651028$



b) C_1)

$0.4 \cdot p(C_1 > 4) \cdot (1 - 0.32 \cdot p(C_2 > 4)) \cdot (1 - 0.28 \cdot p(C_3 > 4))$

Ejemplo 2.3. Supongamos que en una estación de tren llegan tres líneas de trenes: Naranja, Amarilla y Verde. Los arribos de estos trenes constituyen cada uno un proceso de Poisson homogéneo con tasas de llegada de un tren cada 15 minutos, un tren cada 10 minutos y un tren cada 20 minutos, respectivamente. Un pasajero llega a la estación de tren y puede tomar cualquiera de estos trenes para ir a su destino.

- ¿Cuál es el tiempo mínimo promedio que debe esperar hasta que llegue el primer tren?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el primer tren que llegue sea de la línea Naranja?

- $\lambda_N = 1/15 \qquad \lambda_A = 1/10 \qquad \lambda_V = 1/20$

$$\lambda = 1/15 + \left(1/10 + 1/20\right) = 1/15 + 3/20 = \frac{20+45}{300}$$

$$= \frac{65}{300} = 13/60$$

es la nueva tasa $\Rightarrow$ hay que esperar $60/13$ minutos

Ejercicio 10. A partir de las 6 de la mañana, los autos, colectivos y motos llegan a un peaje de autopista según procesos de Poisson independientes. Los autos llegan aproximadamente una vez cada 5 minutos. Los colectivos llegan aproximadamente una vez cada 10 minutos. Las motos llegan aproximadamente una vez cada 30 minutos.

a) Hallar la probabilidad de que en los primeros 20 minutos lleguen a la cabina exactamente tres vehículos: dos autos y una moto.

b) En el peaje, la probabilidad de que un conductor tenga el cambio exacto es de 1/4, independientemente del vehículo. Encontrar la probabilidad de que ningún vehículo tenga el cambio exacto en los primeros 10 minutos.

$\lambda_a = 1/5 \qquad \lambda_c = 1/10 \qquad \lambda_m = 1/30$

$\lambda = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{3}$

a) $P(N_a(20) = 2 \,,\, N_m(20) = 1)$

al ser independientes

$= \frac{e^{-4}(4)^2}{2!} \cdot e^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)$

b) $p = 1/4$

$P(N(10) = 0)$

$= e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10} \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10\right)^0}{0!}$

$= e^{-5/6}$

$1,6 \to 2 \times D$

9) $2,3,4,5 \to D_1 + D_2$

$$\frac{2}{6} P(D > 3) + \frac{4}{6} P(D_1 + D_2 > 6)$$

- Calculemos $P(D_1 + D_2 > 6)$
  son 36 convinaciones, de las cuales
  21 son > 6,

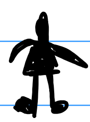
$(6,6) + ((1,6)\ (2,6)\ (3,6)\ (4,6)\ (5,6) \times 2)$ 11

$(5,5) + [(2,5)\ (3,5)\ (4,5)] \times 2$ 7 $\Rightarrow 21$

$(4,4)\ ((3,4)) \times 2$ 3

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{21}{36}$$

$$\frac{6}{36} + \frac{7}{18} = \frac{3}{18} + \frac{7}{18} = 5/9 \approx 0.\overline{555}$$



$(0,1) \cap (1,2) = 1$

$$P(N(t+s) - N(t) = j)$$

$$= e^{-m(t,t+s)} \cdot \frac{[m(t,t+s)]^{j}}{j!}$$

Ejemplo 2.5. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 2 \\ 4-t & 2 \le t \le 4, \end{cases}$$

donde t se mide en horas. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen dos clientes en las dos primeras horas y tres clientes en las dos horas siguientes?

$$P(N(2)=2,\ N(4)-N(2)=3)$$

• $P(N(2)=2)$

Calculamos

$$m(0,2) = \int_0^2 \lambda(s)\,ds = \int_0^1 2s\,ds + \int_1^2 2\,ds$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{s^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 + 2s\Big|_1^2$$

$$= 1 + (4-2) = 3$$

$$P(N(2)=2) = e^{-3}\cdot\frac{3^2}{2!}$$

$$m(2,4) = \int_2^4 \lambda(s)\,s = \int_2^4 4-s\,ds =$$

$$\left[4s - \frac{s^2}{2}\right]\Big|_2^4 = (16-8)-(8-2)$$

$$= 2$$

$$P(N(4)-N(2)=3) = e^{-2}\cdot\frac{2^3}{3!}$$

Y el res $e^{-3}\cdot\frac{9}{4}\cdot e^{-2}\cdot\frac{8}{6}$