Damoun Ayman
aymandamoun.com

kalmooc
October 13, 2021

Mooc on the kalman filter

0.1 Method of least squares

exercice 1 Représentation d'une fonction quadratique
On considère la fonction quadratique $f(x,y) = x \cdot y$.
1) Donner le gradient de f au point (x_0, y_0).
2) Mettre f sous la forme $(xy) \cdot \mathbf{Q} \cdot (xy)^{\mathrm{T}} + \mathbf{L}(xy)^{\mathrm{T}} + b$, où $\mathbf{Q}$ est une matrice symétrique. Vérifier que le gradient trouvé au 1) est donné par $2(xy)$ Q. Tracer sous MATLAB le champ de vecteurs associé à ce gradient à l'aide de l'instruction quiver. Interpréter.
3) En utilisant l'instruction contour de MATLAB, tracer les courbes de niveaux de f puis tracer le graphe de f. La fonction f admet-elle un minimum ? Si oui, donner le.
4) Reprendre cet exercice avec la fonction $g(x,y) = 2x^2 + xy + 4y^2 + y - x + 3$.

solution:
1) Calcul du gradient de f au point (x_0, y_0).
on a :

$$f(x,y) = x \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0 \quad \frac{\partial f_0}{dy}(x_{0s}y_0) = x_0$$

$$\vec{g}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

2) a-

$$f(x,y) = (x \quad y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 0$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$$

b-

$$\nabla_f = 2(x,y)Q + L = (y \quad x)$$

$$\nabla_f(x_0, y_0) = (y_0 \quad x_0)$$

```
x, y = np.meshgrid(np.linspace(-1, 1, 20), np.linspace(-1, 1, 20))
Gx, Gy = gradient(x, y)
plt.title("Le Gradient de la fonction f")
plt.quiver(x, y, Gx, Gy) #Plot a 2D field of arrows.
```

Interprétation: La figure 1 représente la variation du vecteur gradient. On peut voir qu'au centre de la figure le gradient est nul.
3) Les courbes de niveau correspondent à des hyperboles. La fonction n'admet pas de minimum puisqu'il s'agit d'une fonction point-selle.
4) Reprendre cet exercice avec la fonction $g(x,y) = 2x^2 + xy + 4y^2 + y - x + 3$.

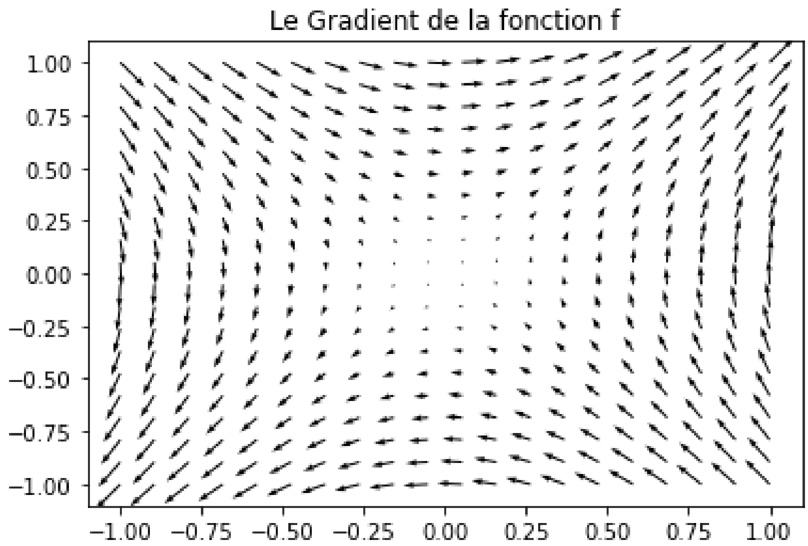
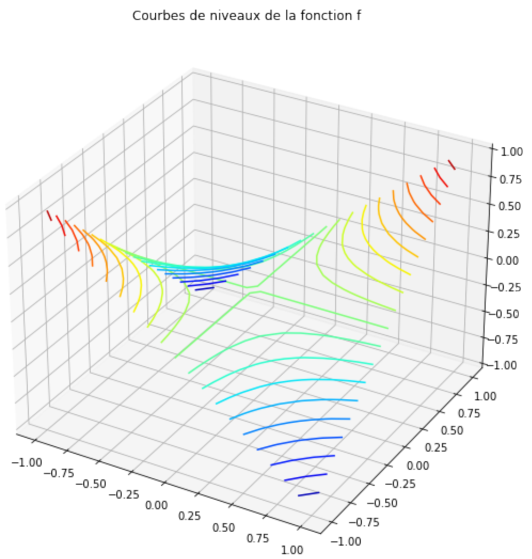
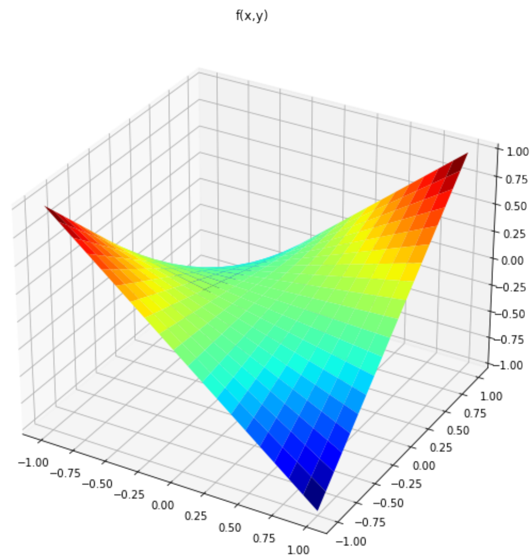


Figure 1: Le gradient de la fonction f





exercice 2 Identification d'une parabole
On cherche à trouver une parabole $p_1t^2 + p_2t + p_3$ qui passe par n points donnés dans le tableau suivant:

t	-3	-1	0	2	3	6
y	17	3	1	5	11	46

1) Donner au sens des moindres-carrés une estimation des paramètres p_1, p_2, p_3
2) Quelles sont les mesures filtrées correspondantes.

solution:
1)- l'estimation des paramètres p_1, p_2, p_3 au sens des moindres-carrés est donné par:

$$\hat{p} = (M^T M)^{-1} M^T y$$

avec

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 11 \\ 46 \end{pmatrix}$$

```
estimator= np.dot(np.linalg.inv(np.dot(M.T, M)), M.T)
p_hat = np.dot(estimator, y)
```

- p1: [1.41421569]
- p2: [-0.98284314]
- p3: [1.08823529]

2) Les mesures filtrées:
[[16.76470588] [3.48529412] [0.] [4.77941176] [10.86764706] [46.10294118]]
Vecteur résiduel:
[[-0.23529412] [0.48529412] [-1.] [-0.22058824] [-0.13235294] [0.10294118]]

exercice 3 Identification des paramètres d'un moteur à courant continu
La vitesse angulaire Ω d'un moteur à courant continu en régime permanent dépend linéairement de la tension d'alimentation U et du couple résistant T_r :

$$\Omega = p_1 U + p_2 T_r$$

On effectue une série d'expériences sur un moteur particulier. On mesure :

U(V)	4	10	10	13	15
T_r(Nm)	0	1	5	5	3
Ω(rad/sec)	5	10	8	14	17

1) Donner au sens des moindres-carrés une estimation des paramètres p_1, p_2.
2) En déduire une estimation de la vitesse angulaire du moteur $U = 20$ V et $T_r = 10$Nm.

solution:
1)- l'estimation des paramètres p_1, p_2 au sens des moindres-carrés est donné par:

$$\hat{p} = (M^T M)^{-1} M^T y$$

avec

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 1 \\ 10 & 5 \\ 13 & 5 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}$$

p1: [1.18831169]
p2: [-0.51688312]
2) [18.5974026]

exercice 4 Estimation d'une fonction de transfert
Consider the system described by the recurrence equations :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2)$$

We perform noisy measurements on the input $u(k)$ and output $y(k)$ of this system for k varying from 0 to 7 . We obtain :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u(k)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$y(k)$	0	-1	-2	3	7	11	16	36

Estimate the vector of parameters p $= (a_1, a_0, b_1, b_0)$ by the least squares method. Discuss.

solution: on a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ -7 & -3 & 1 & -1 \\ -11 & -7 & -1 & 1 \\ -16 & -11 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a1 [[-2.09031623]
a0 [0.35148271]
b1 [6.16217546]
b0 [3.12624585]]