11.00 Final:

12.00
$$M\ddot{q} + C\dot{q} + g + D\dot{q} + F_c = \tau$$

13.00 $D$ - diagonal viscous friction matrix, unknown

$F_c$ - Unknown Columb friction vector

14.00

1) - design sliding mode controller

15.00 - present Lyapunov stability analysis

I will ~~choose~~ create a controller for model:

16.00
$$M\ddot{q} + C\dot{q} + g = \tau$$
, where $M, C, g$ - are uncertain.

17.00 $\ddot{q} = \frac{\tau}{M} - \frac{C}{M}\dot{q} - \frac{g}{M}$, $n = 2$, second order D.E

18.00 $s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} q$;

$s = \dot{q} + \lambda q$; $\dot{s} = \ddot{q} + \lambda\dot{q}$

19.00

Докажем, что $s \to 0$ через ф-ю Ляпунова

20.00 пусть $V = \frac{1}{2}s^2$; $\dot{V} = s\dot{s}$

$$\dot{V} = s(\ddot{q} + \lambda\dot{q}) = \underline{(\dot{q} + \lambda q)\left(\frac{\tau}{M} - \frac{C}{M}\dot{q} - \frac{g}{M} + \lambda\dot{q}\right)} < 0$$

$$\underbrace{(\dot q + \lambda q)}_{s}\underbrace{\left(\frac{\tau}{M} - \frac{C}{M}\dot q - \frac{g}{M} + \lambda \dot q\right)}_{\dot s} < 0$$

подберем такое $\tau$, что $\dot s = -s$.

$$\frac{\tau}{M} - \frac{C}{M}\dot q - \frac{g}{M} + \lambda \dot q = -s = -\dot q \mp \lambda q$$

$$\frac{\tau}{M} = \dot q\left(\frac{C}{M} + 1 \mp \lambda\right) - \frac{g}{M} + \lambda q$$

$$\tau = M\dot q\left(\frac{C}{M} - \lambda + 1\right) - g + M\lambda q$$

тогда $\dot V = -s^2$ ✓ доказано!

условие скольжения:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(s^2) \le -\eta|s|$$

$$s\dot s \le -\eta|s|$$

$$s\left(\frac{\tau}{M} - \frac{C}{M}\dot q - \frac{g}{M} + \lambda \dot q\right) \le -\eta|s| \quad (*)$$

$\tau = \tau_n + \tau^*$, $\tau_n$ – включает в себя $\hat M$, типа знаем ее

$\tau_n = \hat M \dot q\left(\frac{C}{\hat M} - \lambda + 1\right) - g + \hat M \lambda q$, выберу $m>1$; $M = I$ для начала

~~введем~~ $\cancel{\tilde M = \hat M - M}$

$\frac{\hat M}{M} \le$ [illegible]

тогда (*) $s\left(\frac{\tau_n}{M} + \frac{\tau^*}{M} - \frac{C}{M}\dot q - \frac{g}{M} + \lambda \dot q\right) \le -\eta|s|$

будет выглядеть

~~ещё раз~~ $s = \dot q + \lambda q$

$$\dot s = (M^{-1}\tau - M^{-1}C\dot q - M^{-1}g + \lambda \dot q) \text{ и если } \dot s = -s;$$

$$\| $$

$$-\dot q - \lambda q$$

$$M^{-1}\tau = M^{-1}C\dot q + M^{-1}g - \lambda\dot q - \dot q - \lambda q$$

$$\tau = C\dot q + g - M\lambda\dot q - M\dot q - M\lambda q \checkmark$$

$\tau = \tau_n + \tau^*$

давайте сразу добавлю $D$ и $F_c$,

$$\dot q = M^{-1}\tau - M^{-1}C\dot q - M^{-1}g - M^{-1}D\dot q - M^{-1}F_c$$

тогда $\dot s = M^{-1}\tau - M^{-1}C\dot q - M^{-1}g - M^{-1}D\dot q - M^{-1}F_c + \lambda\dot q$

$$\| $$

$$-\dot q - \lambda q$$

$$\tau - C\dot q - g - D\dot q - F_c = -M\lambda\dot q - M\dot q - M\lambda q$$

$$\tau = C\dot q + g + D\dot q + F_c \underbrace{- M\lambda\dot q - M\dot q - M\lambda q}_{-M(\lambda\dot q + \dot q + \lambda q)}$$

$\tau = \tau^* + \tau_n$

$$\tau_n = \hat C\dot q + \hat g + \hat D\dot q + \hat F_c - \hat M(\lambda\dot q + \dot q + \lambda q)$$

тогда $M^{-1}\tau = M^{-1}\tau_n + M^{-1}\tau^*$

→ I будет стремиться к I

$$s(M^{-1}\hat C\dot q + M^{-1}\hat g + M^{-1}\hat D\dot q + M^{-1}\hat F_c - M^{-1}\hat M(\lambda\dot q + \overbrace{\dot q + \lambda q}^{s}) + M^{-1}\tau^*$$

$$- M^{-1}C\dot q - M^{-1}C\dot q - M^{-1}g + \lambda\dot q) \le -\eta|s|;$$

$\tilde C = \hat C - C$ $\quad \tilde F_c = \hat F_c - F_c$

$\tilde g = \hat g - g$

$\tilde D = \hat D - D$

$$S(\overbrace{M^{-1}\tilde{C}\dot{q} + M^{-1}\tilde{g} + M^{-1}\tilde{D}\dot{q} + M^{-1}\tilde{F}_c}^{P} - S + M^{-1}\tau^*) \le -\eta|S|$$

$$\tau^* = -k\,\mathrm{sign}\,S$$

$$S(P - S + M^{-1}(-k\,\mathrm{sign}\,S)) \le -\eta|S|$$

$$SP - S^2 - M^{-1}k|S| \le -\eta|S|$$ – ну и отсюда подберем коэф-ты.

Smoothing the control:

$$B(t) = \{x : |s(x,t)| \le \Phi\} \quad \Phi > 0$$

$\Phi$ – thickness of boundary layer.

будем сходиться не к $S \to 0$

а $|S| < \Phi$, чтобы избежать chattering колебаний

потребую как в лекции ф-ию saturation

$$\tau^* = \begin{cases} -k\,\mathrm{sign}\,S, & |S| > \Phi, \text{ где } |S| \text{ – взять норму от } S \\ -\dfrac{kS}{\Phi}, & \text{иначе} \end{cases}$$