

# Notas de aula: Análise Funcional

Prof. Bruno Braga

[github.com/dan-gc/analysis-impa](https://github.com/dan-gc/analysis-impa)

Este documento contém as notas das aulas do curso ministrado pelo Prof. Bruno Braga no Programa de Verão do IMPA, 2024.

## Índice

<b>1</b>	<b>Espaços de Banach</b>	<b>3</b>
1.1	Transformações lineares . . . . .	6
1.2	Normas equivalentes . . . . .	9
1.3	Espaços duais . . . . .	10
1.4	Completamentos . . . . .	14
1.5	Cardinalidades de bases de Hamel . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Espaços cocientes</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Teorema de Hahn-Banach</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Reflexividade</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Topologia fraca e fraca*</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Formas geometricas de Hahn-Banach</b>	<b>31</b>
<b>7</b>	<b>Teorema de Banach-Steinhaus</b>	<b>35</b>
<b>8</b>	<b>Krein-Milman</b>	<b>41</b>
<b>9</b>	<b>Teorema da aplicação aberta</b>	<b>43</b>
<b>10</b>	<b>Teorema do gráfico fechado</b>	<b>45</b>
<b>11</b>	<b>Espaços complementados</b>	<b>45</b>
<b>12</b>	<b>Operadores adjuntos</b>	<b>47</b>
<b>13</b>	<b>Universalidade</b>	<b>48</b>
<b>14</b>	<b>Teorema de representação</b>	<b>49</b>
<b>15</b>	<b>Teorema de convexidade de Lyapunov</b>	<b>56</b>
<b>16</b>	<b>Grupos amenos</b>	<b>60</b>

<b>17 Espaços de Hilbert</b>	<b>61</b>
17.1 Desigualdade de Bessel . . . . .	63
17.2 Igualdade de Parseval . . . . .	66
17.3 Teorema de representação . . . . .	67
17.4 Exemplo e conjuntos ortonormais em $L_2$ . . . . .	69
17.5 Projeções em espaços de Hilbert . . . . .	70
<b>18 Bases de Schauder</b>	<b>74</b>
18.1 Construindo sequências básicas . . . . .	78
<b>19 Técnica de decomposição de Pełczyński</b>	<b>80</b>
<b>20 Algebras de Banach</b>	<b>80</b>
<b>21 Teoria espectral</b>	<b>82</b>
<b>22 Exponencial de elementos em álgebras de Banach</b>	<b>89</b>
<b>23 Teorema espectral para operadores compactos</b>	<b>90</b>
<b>24 Teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos</b>	<b>101</b>
<b>25 As melhores coisas na matemática</b>	<b>104</b>

## Plano do curso

Provas:

- 29 de fevereiro.
- 1 de março.

Tópicos:

1. Espaços de Banach
2. Operadores.
3. Espaço dual
4. Topologia fraca e fraca\*.
5. 4 teoremas:
  - (a) Hahn-Banach.
  - (b) Banach-Alaoglu.
  - (c) Banach-Steinhouse.
  - (d) Aplicação aberta.
6. Espaços de Hilbert.

7. Teoria espectral de operadores compactos.

## 1 Espaços de Banach

**Definição.** Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Uma função  $\| \cdot \| : X \rightarrow [0, \infty)$  é uma **norma** se

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ .

O par  $(X, \| \cdot \|)$  é um **espaço normado**.  $(X, \| \cdot \|)$  é um espaço métrico normado com a métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

No caso em que  $(X, \| \cdot \|)$  é completo, chama-se um **espaço de Banach**.

**Exemplo.**

1.  $\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$  com a norma  $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$  é um espaço de Banach.
2.  $\ell_{\infty} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup |x_n| < \infty\}$  com a norma  $\|(x_n)\|_{\infty} = \sup |x_n|$ .
3.  $c_0 = \{(x_n) \in \ell_{\infty} : \lim_n x_n = 0\}$ , com a norma de  $\ell_{\infty}$ .
4. Seja  $K$  um compacto Hausdorff,  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}$ , com a norma  $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ . Então  $(C(K), \| \cdot \|)$  é de Banach.
5. Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida. O conjunto das classes de equivalência de funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  tais que

$$\|f\| = \left( \int_K |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

é Banach.

**Exercício 1.0.1.** Vamos mostrar que  $\ell_p$  é Banach.

**Demonstração.**  $\| \cdot \|_p$  é uma norma. Se  $p = 1$  já está. Suponha que  $1 \in (0, \infty)$ .

**Afirmção 1.1 (Desigualdade de Young).** Sejam  $a, b$  números reais no negativos e  $p, q$  números reais maiores que 1 tais que  $1/p + 1/q = 1$ . Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Demonstração.** (Prova por figura disponível em Narici p. 110.) A ideia é que as integrais da função  $f(x) = x^{p-1}$  e da sua inversa somam uma área maior do que a área do rectângulo de lados  $a, b$ .  $\square$

**Afirmção 1.2 (Desigualdade de Hölder).** Sejam  $p, q \in (1, \infty)$  tais que  $1/p + 1/q = 1$ ,  $(x_n) \in \ell_p$ ,  $(y_n) \in \ell_q$ . Temos que  $(xy) \in \ell_1$ .

$$\|(x_n y_n)\|_1 \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$$

*Demonstração.* Suponha  $\|(x_n)\| = \|(y_n)\|_q = 1$ . Aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\sum_{n=1}^N |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^N \frac{|x_n|^p}{p} + \frac{|y_n|^q}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

E se os vetores não são de norma 1 também está tranquilo pois podemos tomar  $\tilde{x}_m = \frac{x_m}{\|x\|_p}$  é  $\tilde{y}_m = \frac{y_m}{\|y\|_q}$ . Nesse caso podemos factorizar os números  $\|(x_n)\|_p$  e  $\|(y_n)\|_p$  para obter que  $\|(\tilde{x}_n)\|_p = \|(\tilde{y}_n)\|_q = 1$  e aplicar o passo anterior.  $\square$

**Afirmção 1.3 (Desigualdade de Minkowsky).** Sejam  $(x_n), (y_n) \in \ell_p$ . Então  $(x_n) + (y_n) \in \ell_p$  e

$$\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p.$$

*Demonstração.* Em geral, se  $a, b > 0$ , então  $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ ?. De fato,  $(a + b)^p \leq (2 \max\{a, b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ . Logo  $\|(x_n + y_n)\|_p \leq 2^p(\|x_n\|_p + \|y_n\|_p)$ , assim  $(x_n + y_n) \in \ell_p$ .

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \\ &= \|(x_n)(x_n + y_n)^{p/q}\|_1 + \|(y_n)(x_n + y_n)^{p/q}\|_1 \quad \left(p-1 = \frac{p}{q}\right) \\ &\leq \|(x_n)\|_p \|(x_n + y_n)^{p/q}\|_q + \|(y_n)\|_p \|(x_n + y_n)^{p/q}\|_q \quad (\text{Hölder}) \\ &= (\|x_n\|_p + \|y_n\|_p) \|(x_n + y_n)\|_q^{p/q} \\ &= (\|x_n\|_p + \|y_n\|_p) \frac{\|(x_n + y_n)\|_p^p}{\|(x_n + y_n)\|_p^q} \end{aligned}$$

Usando que  $(p-1)q = pq - q = p$ . **Dividindo entre  $\|?\|$  obtemos**

$$\|(x_n + y_n)\|_p^q \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p$$

**Finalmente,**

$$\|(x_n + y_n)\|_p \leq \|x_n\|_p + \|y_n\|_p.$$

$\square$

**Afirmção 1.4.**  $\|\cdot\|_p$  é completa.

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\ell_p$ .

Note que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \|x_m - x_n\|$$

Assim,  $(x_n^k)_k$  é Cauchy para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Defina

$$x = (x^k) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k \right)$$

Objetivo:  $x \in \ell_p$  e  $x_n \rightarrow x$ . Defina  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$  pois  $(x_n)$  é Cauchy, assim é limitada. Temos para  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^N |x_n^k|^p \right)^{1/p} &\leq \left( \sum_{n=1}^N |x_n^k|^p + |x_m^k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=1}^N |x_n^k|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^N |x_n^k - x_m^k|^p \right)^{1/p} + M \end{aligned}$$

isto é, “uniformemente finito”. Tomando  $m \gg 1$ ,

$$\left( \sum_{n=1}^N |x_n|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon + M \quad \forall N, \forall$$

Logo  $\|x\| \leq M$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |x_n - x_m|^p &= \lim_m \sum_{n=1}^N |x_m(c) - x_m(x)|^p \\ &\leq \lim \|x_m - x_n\|^p \end{aligned}$$

**A partir daqui está bem:** Como  $(x_n)$  é Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.q.  $m, n > n_0$  implica  $\|x_n - x_m\|^p < \varepsilon^p$ .

Logo, seja  $n > n_0$ ,

$$\sum_{k=1}^N |x^k - x_n^k|^p \leq \varepsilon^p \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Isso é,  $\|x - x_n\| < \varepsilon \quad \forall m > n_0$ . □

□

### Observação 1.1.

1.  $\ell_p \leq \ell_q, p \leq q$ .
2.  $(X, \mu)$  medida finita,  $L_q \leq L_p, p \leq q$ .
3.  $c_{00} = \{(x_n) \in K^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n = 0, \forall m > n_0\}$ .

## 1.1 Transformações lineares

Sejam  $X, Y$  espaços normados. Uma função  $T : X \rightarrow Y$  é **linear** se

$$1. T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}, x, y \in X.$$

**Observação 1.2.** Num espaço linear de dimensão finita os operadores lineares sempre são contínuos.

**Proposição 1.1.** Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  linear. São equivalentes:

1.  $T$  é contínua em  $x_0 \in X$ .
2.  $T$  é contínua.
3.  $T$  é **limitada**, isto é,

$$\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|Tx\| < \infty$$

onde  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ .

4.  $\exists C > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq C\|x\|$  para todo  $x \in X$ . Além disso,

$$\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X\}.$$

5.  $T$  é uniformemente contínua.

*Demonstração.* (1  $\implies$  2). Seja  $x_n \rightarrow x$ . Note que

$$(x_n - x + x_0)_n \rightarrow x_0,$$

de forma que

$$T(x_0) = \lim_n T(x_n - x + x_0) = \lim_n T(x_n) - T(x) + T(x_0).$$

(2  $\implies$  3) Caso contrário,  $\exists (x_n) \subset B_X$  tal que  $\lim \|Tx_n\| \rightarrow \infty$ . Logo

$$\left( \frac{x_n}{\|Tx_n\|} \right)_n \rightarrow 0.$$

então,

$$\left\| T \left( \frac{x_n}{\|Tx_n\|} \right) \right\| \rightarrow 0,$$

que é impossível já que

$$\left\| T \left( \frac{x_n}{\|Tx_n\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|Tx_n\|} \|T(x_n)\| = 1.$$

(3  $\implies$  4). Pegue  $C = \|T\|$ . De fato, se  $x \neq 0$ ,

$$\frac{x}{\|x\|} \in B_X \implies T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \leq \|T\| \implies \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Isso mostra que  $\|T\| \in \{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$ , de forma que

$$\inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\} \leq \|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Para ver a outra desigualdade, basta ver que  $\inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$  é uma cota superior do conjunto  $\{\|Tx\| : x \in B_X\}$ . De fato, se  $x \in B_X$ , para qualquer  $C \in \{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$  temos que  $\|Tx\| \leq C\|x\| \leq C$ , pois  $\|x\| \leq 1$ . Isso implica que  $\|Tx\|$  é uma cota inferior do conjunto  $\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$ , porém

$$\|Tx\| \leq \inf\{C \geq 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\} \quad \forall x \in B_X.$$

(4  $\implies$  5) Lembre que  $T$  é uniformemente contínua se

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \implies \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Tendo (4), observe que tomando  $\delta = \varepsilon/C$  temos a continuidade em 0, que podemos trasladar a todo ponto de  $X$  como em (1  $\implies$  2).

(5  $\implies$  1) Imediato. □

**Definição.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Denotamos por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ limitado}\}$$

**Exercício 1.1.1 (Tarefa).**

1.  $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|$  é uma norma em  $\mathcal{L}(X, Y)$ .
2. Se  $Y$  for Banach, então  $\mathcal{L}(X, Y)$  é Banach.
3.  $\|T\| = \sup_{x \in \partial B_X} \|Tx\|$  onde  $\partial B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ .

**Teorema 1.2.** Todo espaço de dimensão finita é Banach.

Para isto vamos provar um lemma muito importante para muitas coisas.

**Lema 1.3 (Riesz).** Seja  $X$  um espaço normado,  $Y \subset X$  subespaço próprio fechado,  $a \in (0, 1)$ . Então existe um  $x \in \partial B_X$  tal que  $d(x, Y) \geq a$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in X \setminus Y$ . Como  $\frac{d(x, Y)}{a} > d(x, Y)$ , podemos pegar um  $y \in Y$  tal que  $\|x - y\| \leq \frac{d(x, Y)}{a}$ . Defina  $z = \frac{x - y}{\|x - y\|}$ . Seja  $w \in Y$

$$\begin{aligned} \|w - z\| &= \left\| w - \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - y\|} \| \|x - y\| w + y - x \| \\ &\geq \frac{d(x, Y)}{\|x - y\|} \\ &\geq a \end{aligned}$$

pois  $\|x - y\|w + y \in Y$  por ser  $Y$  um espaço vetorial. □

*Prova de que todo espaço de dimensão finita é Banach. Incompleta!* Seja  $n = \dim X$ . Se  $X = \mathbb{K}$  terminamos. Fazendo indução, suponha certo para  $n$  e mostraremos para  $n + 1$ . Seja  $Y \subseteq X$  espaço de dimensão  $n$ . Por hipótese de indução,  $Y$  é fechado. Pegamos  $x \in X \setminus Y$  com  $d(x, Y) > 1/2$ . Para todo  $y \in Y$  e para todo  $z \in X$  no  $\text{span}\{x\}$ .

$$\begin{aligned}\|y + z\| &= \|y + \left\|z\right\| \frac{1}{\|y\|} y\| \\ &= \|z\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|y\|} \right\| \\ &\geq \frac{\|z\|}{2}\end{aligned}$$

O que estou falando aqui? Temos que  $X = Y \oplus Z$ ,  $\pi_Y : Y \rightarrow Y$ ,  $\pi_Z : X \rightarrow Z$ . Logo

$$\|\pi_Z(x_n)\| \leq \|x_n\|$$

Logo  $\pi_Y \text{Id} - \pi_Z$  ?

Ahora seja  $(x_n)_n \subseteq X$  de Cauchy. Logo  $(\pi_Y(x_n))_n, (\pi_Z(x_n))_n$  são Cauchy, logo  $x_Y = \lim \pi_Y(x_n)$  e

$$x_Z = \lim \pi_Z(x_n)$$

existe, logo

$$\pi_Z(x_n) + \pi_Y(y_n) \rightarrow x_Z + x_Y.$$

□

**Proposição 1.4.** Seja  $T : X \rightarrow Y$  um operador entre espaços normados. Se  $\dim(X) < \infty$  então  $T$  é contínua.

*Demonstração.* Fazemos indução. Caso  $n = 0$  é fácil. Suponha verdade para  $n \in \mathbb{N}$ . Pegue  $Z \subseteq X$  com  $\dim Z = n - 1$  e  $w \in X \setminus Z$ . Seja  $W = \text{span}\{w\}$ . Então temos que  $X = Z \oplus W$ .

Se

$$\pi_Y : X \rightarrow Z \quad \text{e} \quad \pi_W : X \rightarrow W$$

são as projeções canônicas, então

$$\text{Id}_X = \pi_Z + \pi_W$$

e ambas são contínuas, terminamos. Como  $T = T \circ \pi_Z + T \circ \pi_W$ . □

**Teorema 1.5.** Um espaço normado  $X$  tem dimensão finita se e somente se  $B_X$  for compacto.

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Defina  $n = \dim X$ . Fixe um isomorfismo algébrico  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ . Munindo  $\mathbb{K}^n$  com sua norma, é imediato que  $B_{\mathbb{K}^n}$  é compacto. Em consequência,  $T(B_{\mathbb{K}^n})$  é compacto.



Note que  $B_X \subseteq N$ .  $T(B_{\mathbb{K}^n})$  para  $N$  grande. Seja  $e_1, \dots, e_n \in X$  uma base, e para cada  $i \leq n$  seja um mapa

$$\begin{aligned} f_i : X &\mapsto \mathbb{K}^n \\ \sum_{j=1}^n a_j e_j &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} \left\| T^{-1} \left( \sum_{j=1}^n a_j e_j \right) \right\| &\leq \|T^{-1}\| \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\| \\ &\leq \max_j \|e_j\| \|T^{-1}\| \left( \sum |a_j| \right) \\ &\leq \max \|e_j\| \|T^{-1}\| \left( \sum_j \|f_j\| \right) \left\| \sum_j e_j \right\|. \end{aligned}$$

De forma que  $\exists L > 0$  tal que  $\|T^{-1}(x)\| \leq L\|x\|$  para toda  $x \in X$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\dim X = \infty$ . Por indução, existe (usando o lema de Riesz muitas vezes e o fato de que qualquer subespaço linear de dimensão finita é fechado)  $(x_n)_n \subseteq \partial B_X$  tal que  $\|x_n - x_m\| > 1/2$ .  $\square$

## 1.2 Normas equivalentes

**Definição.** Seja  $X$  um espaço vetorial e  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  normas em  $X$ . Diremos que  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  são *equivalentes* se existe  $L > 0$  tal que

$$\frac{1}{L} \|x\| \leq \|x\|_1 \leq L \|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Equivalentemente, se

$$\text{Id} : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$$

for um homeomorfismo.

### Observação 1.3.

1. Se  $X$  tiver dimensão finita todas as normas são equivalentes.
2. Seja  $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$  limitado. Então

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$$

nos dá uma norma equivalente, pois  $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq (1 + \|T\|)\|x\|$ .

### Definição.

1. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : X \rightarrow Y$  um operador bijetivo.  $T$  é um *isomorfismo* se  $T$  e  $T^{-1}$  forem contínuas.

2. Se  $T$  for contínuo, injetivo e  $T^{-1} : \text{img}(X) \rightarrow X$  for contínua,  $T$  é um *mergulho isomórfico*.

3. Se  $T$  for uma bijeção linear e

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X, \quad (1)$$

$T$  é uma *equivalência isomórfica*.

4. Se  $T$  for linear e eq. (1) vale,  $T$  é uma *isometria*.

**Observação 1.4.**  $T$  é um mergulho isomórfico se e somente se  $\exists L > 0$  tal que

$$\frac{1}{L} \|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq L \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

### 1.3 Espaços duais

Relembrando, anteriormente definimos

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ linear e contínuo}\}$$

com a norma

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

Denotamos  $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$  e  $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ .

**Definição.**  $X^*$  é o *dual (topológico)* de  $X$ .

**Duais de  $\ell_p$  e  $c_0$  ( $p < \infty$ )**

**Teorema 1.6.** Se  $p, q \in (1, \infty)$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\ell_p^* = \ell_q$ .

*Demonstração.* Definamos  $\phi : \ell_q \rightarrow \ell_p^*$  por

$$\phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para  $y = (y_n) \in \ell_q$  e  $x = (x_n) \in \ell_p$ . Observe que, pela desigualdade de Hölder,  $\phi(y)(x)$  é uma série convergente, pois a convergência absoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

implica a convergência em espaços completos.

**( $\phi$  é uma isometria.)** Temos que  $\|\phi(y)\|_{\ell_p^*} \leq \|y\|_{\ell_q}$  usando Hölder novamente:

$$\|\phi(y)\|_{\ell_p^*} = \sup_{x \in B_{\ell_p}} |\phi(y)(x)| = \sup_{x \in B_{\ell_p}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \|y\|_q.$$

$$\mathbb{E} \|\phi(y)\|_{\ell_q^*} \geq \|y\|_{\ell_q}.$$

Defina  $x \in \ell_p$  como

$$x_n = \text{sign}(y_n) \frac{|y_n|}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_p}^p &= \sum |x_n|^p \\ &= \sum \frac{|y_n|^{pq-p}}{\|y\|_{\ell_q}^q}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi(y)(x) &= \sum \frac{\text{sign}(y_n) |y_n|^{q-1}}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}} y_n \\ &= \frac{\|y\|_{\ell_q}^q}{\|y\|_{\ell_q}^{q/p}}. \end{aligned}$$

**( $\phi$  é sobrejetiva.)** Seja  $f \in \ell_p^*$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$y = f(e_n) \quad \text{é} \quad y = (y_n)_n.$$

Vamos ver que  $y \in \ell_q$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , defina

$$z_n = \sum_{n=1}^k y_n e_n = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0, \dots)$$

Para  $n \leq k$ ,  $x_n = \text{sign}(y_n) |y_n|^{q-1}$ ,

$$\begin{aligned} \|z_k\|_{\ell_q}^p &= \sum_{n=1}^k |y_n|^q \\ &= \sum_{n=1}^k y_n \text{sign}(y_n) |y_n|^{q-1} \\ &= f \left( \sum_{n=1}^k x_n e_n \right) \\ &\leq \|f\| \left\| \sum_{n=1}^k x_n e_n \right\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

Agora computamos a norma desse cara:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{n=1}^k x_n e_n \right\|_{\ell_p} &= \sum_{n=1}^k |y_n|^{(q-1)p} \\
 &= \left( \sum_{n=1}^k |y_n|^q \right)^{1/p} \\
 &\leq \left( \|y\|_{\ell_q}^q \right)^{1/p} \\
 &\leq \|z_k\|_p^{q/p}
 \end{aligned}$$

Assim que a desigualdade anterior termina em que

$$\|z_k\|_{\ell_q}^q \leq \|f\| \|z_k\|_{\ell_q}^{q/p}$$

de forma que  $\|z_k\|_{\ell_q} \leq \|f\|$ . □

**Teorema 1.7.** Sejam  $p, q \in (1, \infty)$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . O mapa  $\phi : \ell_p \rightarrow \ell_q^*$  dado por

$$\phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para  $y = (y_n)_n \in \ell_q$  e todo  $x = (x_n)_n \in \ell_p$  é uma isometria sobrejetiva.

**Exemplos.**

1.  $c_0^* \equiv \ell_1$ .
2.  $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$ .
3.  $\ell_\infty^* \not\equiv \ell_1$  (entenda o problema na prova).
4. Se  $p \in (1, \infty)$ ,  $\ell_p^{**} \equiv \ell_p$ .

Lembre que  $c_0 \subseteq \ell_\infty$ , e que  $\ell_p \subseteq \ell_q$  quando  $p \leq q$ .

**Pergunta.** Considere a inclusão  $I : \ell_p \rightarrow \ell_q$ . Será que existe  $L > 0$  tal que

$$\frac{1}{L} \leq \|I(x)\|_q \leq L\|x\| \text{ ?}$$

Observe que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = e_q + \dots + e_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$  é tal que  $\|s_n\|_p = n^{1/p}$  e que  $\|I(s_n)\|_q = \|s_n\|_q = n^{1/q}$  assim que essa inclusão boba não é uma isometria.

**Teorema 1.8 (Pitt).** Sejam  $p, q \in (1, \infty)$  com  $p \neq q$ . Não existe um mergulho isomórfico  $\ell_p \rightarrow \ell_q$ .

**Definição.** Seja  $X$  um espaço normado. Uma sequência  $(x_n)_n \subseteq X$  *converge fracamente* a  $x \in X$  se  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  para todo  $f \in X^*$ .

**Exemplo.**  $(e_n)_n \subseteq \ell_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ ,  $e_n \xrightarrow{w} 0$ . Quando pegamos  $f \in \ell_p^*$ , sabemos que  $f = \phi(y)$  para algum  $y \in \ell_q$ . Logo  $f(e_n) = y_n$ .

**Observação 1.5.** Se  $T : X \rightarrow Y$  é limitado e  $(x_n)_n \subseteq X$  tal que  $x_n \xrightarrow{w} x$ ,  $x \in X$ , então  $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar que para qualquer  $f \in Y^*$ , temos que  $f(T(x_n)) \rightarrow f(T(x))$ . Seja  $f \in Y^*$  qualquer e considere o seu *pullback* baixo  $T$ , ie. o funcional

$$\begin{aligned} T^*f : X &\rightarrow \mathbb{K} \\ (T^*f)(x) &= f(T(x)) \end{aligned}$$

De fato,  $T^*f$  é linear e contínuo se  $T$  é linear e contínuo. Como  $x_n \xrightarrow{w} x$ , é concluímos que  $f(T(x_n)) \rightarrow f(T(x))$ .  $\square$

**Definição.** Dado  $p \in [1, \infty]$ , o funcional

$$\begin{aligned} e_n^* : \ell_p^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j &\mapsto x_n \end{aligned}$$

é tal que  $\|e_n^*\| = 1$  e que  $e_n^*(e_m) = \delta_{nm}$ .

*Prova do teorema de Pitt.* Suponha que  $T : \ell_p \rightarrow \ell_q$  é um mergulho isomórfico. Suponha  $p > q$ . Como  $e_n \xrightarrow{w} 0$  em  $\ell_p$ ,  $T(e_n) \xrightarrow{w} 0$  em  $\ell_q$ .

Passando para uma subsequência podemos supor que  $(\text{supp}(T(x_n)))_n$  são “disjuntos”.  
**Pode tentar, lembre que  $\text{supp} = \{i \in \mathbb{N} | y_i \neq 0\}$ .**

Note que se  $(y_n)_n \subseteq \ell_q$  é tal que  $\text{supp}(y_n) \cap \text{supp}(y_m) = \emptyset$  quando  $n \neq m$ , então

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \right\|_q = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^q \right)^{1/q}$$

**É para vocês analisar quais são os épsilons.**

Logo, escolhendo a subsequência de  $(T(x_n))_n$  de forma apropriada, podemos escolher  $L \geq 1$  tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^k T(x_n) \right\|_q &\geq \frac{1}{L} \left( \sum_{n=1}^k \|T(e_n)\|^q \right)^{1/q} \\ &\geq \frac{a}{L} n^{1/q}. \end{aligned}$$

onde  $a = \inf_n \|T(e_n)\|$ .

Por outro lado

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^k T(e_n)\right\| &= \left\|T\left(\sum_{n=1}^k e_n\right)\right\|_q \\ &\leq \|T\| \left\|\sum_{n=1}^k e_n\right\|_p \\ &= \|T\| k^{1/p}.\end{aligned}$$

Em conclusão,

$$\frac{a}{L} k^{1/q} \leq \|T\| k^{1/p} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

que não é possível. □

**Observação 1.6.** Vamos ver que

1.  $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty$  para toda  $p \in [1, \infty)$ .
2.  $\ell_p \not\hookrightarrow \ell_1$  para toda  $p \neq 1$ .
3. Nossa prova não serve para ver que  $\ell_1 \not\hookrightarrow \ell_p$ ,  $p > 1$ . O problema tá no momento de escolher a sequência  $e_n$ , que converge fracamente em  $\ell_p$ . O enunciado é verdadeiro, só precisa mais um pouco de cuidado.
4. Por curiosidade, tem o seguinte resultado:

**Teorema 1.9.** Se  $X \not\hookrightarrow \ell_q$ .

## 1.4 Completamentos

**Definição.** Sejam  $(X, d)$  e  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  espaços métricos.  $\tilde{X}$  é um *completamento* de  $X$  se

1.  $X$  é um subespaço métrico de  $\tilde{X}$ , ie.,  $X \subseteq \tilde{X}$  e  $d = \tilde{d}|_{X \times X}$ .
2.  $\tilde{X}$  é completo, ie.  $\bar{\tilde{X}} = \tilde{X}$ .

Se  $(X, \|\cdot\|)$  e  $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$  forem espaços normados,  $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$  é um *completamento* de  $(X, \|\cdot\|)$  se

1.  $(X, \|\cdot\|) \subseteq (\tilde{X}, \|\cdot\|)$ .
2.  $\bar{X} = \tilde{X}$ .

**Teorema 1.10.** Os completamentos existem e são únicos. Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado. Existe  $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$  Banach tal que

1.  $(X, \|\cdot\|) \subseteq (\tilde{X}, \|\cdot\|)$ .
2.  $\bar{X}^{\|\cdot\|} = \tilde{X}$ .
3.  $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$  é Banach.

(Equivalentemente, existe uma isometria  $I : X \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $I(X) = \tilde{X}$ .)

*Demonstração.* Considere

$$\tilde{X} = \{(x_n) \in X^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ é Cauchy}\},$$

que têm uma estrutura vetorial bacana. Defina uma relação de equivalência em  $\tilde{X}$ , como

$$(x_n) \sim (y_m) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Defina

$$\tilde{X} = \tilde{X} / \sim$$

e ainda defina as operações

$$\alpha[(x_n)] + \beta[(y_n)] = [(\alpha x_n + \beta y_n)],$$

que estão bem definidas. Finalmente defina a norma

$$\|[(x_n)]\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

que também está bem definida.

Para mostrar 1., basta notar que o mapa que manda cada ponto para a sequência constante,

$$x \in X \mapsto [(x)] \in \tilde{X},$$

é uma isometria linear.

Para ver 2., fixe  $[(x_n)] \in \tilde{X}$  e  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n, m \geq n_0$ , temos  $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ . Logo

$$\|[(x_{n_0})] - [(x_n)]\| < \varepsilon.$$

Ahora vejamos que  $\tilde{X}$  é Banach. Pegue uma sequência de Cauchy  $((x_n^k))_k$  em  $\tilde{X}$ . Passando para uma subseqüência se é necessário, podemos pegar  $(x^k)$  em  $X$  tal que

$$\|[(x_n^m)] - [(x^k)]\| < 1/k$$

para  $m \geq k$ . Isso é, usando a densidade de  $X$  podemos avançar na sequência e achar para cada  $k \in \mathbb{N}$  um elemento de  $X$  que fique muito perto. Queremos que a sequência resultante seja de Cauchy e ainda que seja o limite da sequência com a qual começamos.

Note que  $(x^k)$  é Cauchy em  $X$ , pois

$$\begin{aligned} \|x^k - x^m\| &= \|[(x^k)] - [(x^m)]\| \quad (\text{seqüências constantes}) \\ &\leq \|[(x^k)] - [(x_n^m)]\| + \|[(x_n^m)] - [(x^m)]\| \\ &\leq 1/k + 1/m \leq 2/k \end{aligned}$$

escolhendo  $m \geq k$ .

Finalmente note que

$$[(x^n)] = \lim_{m \rightarrow \infty} [(x_n^m)],$$

pois

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|[(x^n)] - [(x_n^m)]\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x_n^m\| = 0.$$

Deixamos provar a unicidade como exercício.  $\square$

## 1.5 Cardinalidades de bases de Hamel

**Proposição 1.11.** Seja  $X$  um espaço de Banach com dimensão infinita. Então sua base de Hamel é não numerável.

**Observação 1.7.** É necessário pedir que espaço seja Banach na proposição anterior.

*Demonstração.* Seja  $X$  um espaço de Banach separável de dimensão infinita. Então a cardinalidade de suas bases de Hamel é a mesma de  $\mathbb{R}$ . Além disso,  $\dim X = \#X$ .  $\square$

## 2 Espaços cocientes

Dado um espaço vetorial  $X$ , qualquer subespaço  $Y$  é um subgrupo normal do grupo aditivo  $(X, +)$ . Gente quer ver que o espaço cociente é normado se  $X$  for normado, e é Banach se  $X$  for Banach.

Seja  $(X, \|\cdot\|)$  normado e  $Y \subseteq X$  subespaço. Denotemos  $[x] = x + Y$ , e temos a relação de equivalência no cociente dada por  $x \sim y \iff x - y \in Y$ . As operações de soma e produto escalar estão bem definidas. Defina uma norma em  $X/Y$  como

$$\|x + Y\|_{X/Y} = d(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}.$$

que está bem definida pois a distancia de qualquer ponto na classe de  $x$  para o kernel é igual. Para ver-o note que  $\forall z \in x + \ker T$ , temos que  $z - x + y \in \ker T$ , de modo que

$$d(z, K) = \inf_{y \in K} \|z - y\| \leq \|z - (z - x + y)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

e a desigualdade contrária é análoga.

Vejamos que de fato  $\|\cdot\|_{X/Y}$  é uma norma:

1.  $\|\lambda x + Y\| = |\lambda| \|x + Y\|$  é clara.
2.  $\|x + z + Y\| = \inf\{\|x + z + y\| : y \in Y\}$ . Pegue sequências  $(x_n)$  e  $(z_n)$  em  $Y$  tais que

$$\|x + Y\| = \lim_n \|x + x_n\| \quad \|z + Y\| = \lim_n \|z + z_n\|.$$

Então,  $\|x + z + Y\| \leq \|x + x_n\| + \|z + z_n\|$  para toda  $n$ , e de fato  $\|x + z + Y\| \leq \|x + Y\| + \|z + Y\|$ .



3. Para provar que  $\|x + Y\| = 0 \implies x + Y = 0 \iff x \in Y$ , temos que supor que  $Y$  é fechado. Então,  $\exists (y_n) \subseteq Y$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = 0$ , assim,  $y_n \rightarrow x$  e  $x \in Y$ .
4. Finalmente suponhamos que  $X$  é Banach e  $Y$  fechado, e peguemos  $(x_n + Y)$  uma sequência de Cauchy em  $X/Y$ . Queremos achar outra sequência em  $X$  na mesma classe de equivalência, mais que seja Cauchy. Pegue uma subsequência tal que

$$\|x_n - x_{n+1} + Y\| < 2^{-n}.$$

Pegue  $(w_n) \subseteq Y$  tal que

$$\|x_n - x_{n+1} - w_n\| < 2^{-n}.$$

Defina  $(z_n)$  como

- $z_1 = x_1$ .
- $z_2 = x_2 + w_1$ .
- $\vdots$
- $z_n = x_n + w_{n-1} + \dots + w_1$ .

Temos então que

$$\|z_n - z_{n+1}\| = \|x_n - x_{n+1} - w_n\| < 2^{-n}.$$

Logo  $(z_n)$  é Cauchy e  $z_n \in x_n + Y$ . Defina  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Agora vejamos que  $\|z - x_n + Y\| \rightarrow 0$ . Temos que

$$\|z - x_n + Y\| = \|z - z_n + Y\| \leq \|z - z_n\| \rightarrow 0.$$

Temos mostrado que

**Teorema 2.1.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado e  $Y \subseteq X$  um subespaço fechado. Então  $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$  é um espaço normado e se  $X$  for Banach,  $X/Y$  também.

Ahora vamos mostrar que a projeção canônica é um operador de norma 1. De fato, escolhendo o vetor 0 pode ver que  $\|Q\| \leq 1$ , e usando o Lema de Riesz pode ver pegar uma sequência  $(x_n) \subset B_X$  tal que  $d(x_n, Y) \geq 1 - \frac{1}{n}$ , o que implica que  $\|Q\| = \sup_{x \in B_X} d(x, Y) \geq 1$ .

**Teorema 2.2 (Primer teorema de isomorfismo).** Existe um único  $T' : X/T \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow Q & \nearrow T' \\ & X/\ker T & \end{array}$$

comuta, ou seja,  $T = T' \circ Q$ .

**Exercício.**  $\|T'\| = \|T\|$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned}\|T'\| &= \sup \{ \|T(x + \ker T)\| : x + \ker T \in B_{X/\ker T} \} \\ &= \sup \{ \|Tz\| : z \in x + \ker T \text{ para algum } x + \ker T \in B_{X/\ker T} \}\end{aligned}$$

de tal forma que fixando  $x + \ker T \in B_{X/\ker T}$ , temos para qualquer  $z \in x + \ker T$  que

$$\|T'\| \leq \|T\| \|z\|,$$

assim que bastaria achar um representante  $z$  em  $B_X$ . Note que como  $\|x + \ker T\| = d(x, \ker T) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  podemos achar  $y_n \in \ker T$  tal que

$$\|x - y_n\| < \inf_{y \in Y} \|x - y\| + \frac{1}{n}$$

tomando o limite obtemos um ponto  $y \in Y$  tal que  $\|x - y\| \leq \|x + \ker T\| \leq 1$ . Notemos que  $z = x - y \in x + \ker T$ , pois  $T(x - y - x) = Ty = 0$ , assim que de fato  $\|T'\| \leq \|T\|$ .

A desigualdade contrária é quasi imediata:

$$\|Tx\| = \|T'(x + \ker T)\| \leq \|T'\| \|x + \ker T\| = \|T'\| \inf_{y \in \ker T} \|x - y\| \leq \|T'\| \|x\|.$$

□

**Observação 2.1.** Se  $f \in X^*$ ,  $X/\ker f$  tem dimensão 1, pois  $X/\ker f \approx \mathbb{K}$ .

**Teorema 2.3** (Spoiler, precisa o Teorema da Aplicação Aberta). Se  $T$  for sobrejetiva,

$$T' : X/\ker T \rightarrow Y$$

é um isomorfismo algébrico. Se  $X$  e  $Y$  forem Banach, é um isomorfismo.

Vimos que  $X/Y$  é um espaço de Banach.

**Pergunta.** Quais espaços de Banach podem ser obtidos como  $X/Y$ ?

**Teorema 2.4.** Seja  $X$  um espaço de Banach separável (existe um conjunto numerável que é denso). Então existe um subespaço fechado  $Y \subseteq \ell_1$  tal que  $X$  é linearmente isométrico a  $\ell_1/Y$ .

*Demonstração.* Basta ver que existe  $T : \ell_1 \rightarrow X$  linear e surjetiva para obter  $T' : \ell_1/\ker T \rightarrow X$ . Seja  $X$  separável. Pegue  $(x_n) \subseteq B_X$  denso e defina  $T : \ell_1 \rightarrow X$  como

$$T((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

Note que como  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$ , segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$  converge.

Veamos que  $\|T\| \leq 1$ :

$$\begin{aligned}\|T((\lambda_n))\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n x_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \\ &= \|(\lambda_n)\|_{\ell_1}\end{aligned}$$

Veamos que  $T$  é sobrejetiva. Fixe  $x \in B_X$  e  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Como  $(x_n)$  é denso em  $B_X$ , **existe**  $y_1 \in B_{\ell_1}$  tal que

$$\|x - T(y_1)\| < \varepsilon.$$

Como  $\left\| \frac{x - T(y_1)}{\varepsilon} \right\| < 1$ , pegue  $\tilde{y}_2 \in B_{\ell_1}$  com

$$\left\| \frac{x - T(y_1)}{\varepsilon} - T(\tilde{y}_2) \right\| < \varepsilon.$$

Logo  $\|x - T(y_1 + \varepsilon \tilde{y}_2)\| < \varepsilon^2$ . Agora defina

$$y_2 = \varepsilon \tilde{y}_2.$$

Por indução, pegamos  $(y_n)$  tal que

1.  $\|y_n\| \leq \varepsilon^{n-1}$ .
2.  $\|x - T(y_1 + \dots + y_n)\| < \varepsilon^n$ .

Como  $\|y_n\| < \varepsilon^{n-1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$  existe. Como  $T$  é contínuo,

$$\|T(y) - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n T(y_i) - x \right\| = 0$$

Seja  $T' : \ell_1 / \ker(T) \rightarrow X$  tal que  $\|T'\| = \|T\|$  e tal que

$$\begin{array}{ccc} \ell_1 & \xrightarrow{T} & X \\ & \searrow Q & \nearrow T' \\ & \ell_1 / \ker T & \end{array}$$

conmuta, ie.  $T = T' \circ Q$ .

Para concluir falta mostrar que  $T'$  é isometria. Para isso lembre que

$$\|y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} = \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

por se tratar de uma série geométrica. Agora provaremos que  $\forall x \in B_X$  e  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$  existe  $y_{x,\varepsilon} \in \ell_1$  tal que

1.  $\|y_{x,\varepsilon}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$ .
2.  $T(y_{x,\varepsilon}) = x$ .

Pegue  $x \in B_X$  e  $y \in \ell_1$  com  $T'(y + \ker T) = x$ . Logo

$$\|y + \ker T\| = \inf\{\|y + w\| : w \in \ker T\} = \inf_{\varepsilon > 0} \|y - y + y_{x,\varepsilon}\| = 1.$$

□

**Observação 2.2.**  $\ell_\infty$  não é separável. Considere para  $A \subset \mathbb{N}$  a sequência  $\chi_A \in \ell_\infty$ . Note que se  $B \neq A$ ,  $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$ , de forma que  $\mathcal{B} = \{B(\chi_A, 1/2) : A \subseteq \mathbb{N}\}$  é uma coleção não numerável de conjuntos abertos *disjuntos*. Como qualquer conjunto denso de  $\ell_\infty$  deve interseccionar cada bola em  $\mathcal{B}$ , não pode ser numerável.

### 3 Teorema de Hahn-Banach

Por agora tomemos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Definição.** Seja  $X$  um espaço vetorial e  $p : X \rightarrow [0, \infty)$ . Dizemos que  $p$  é um *funcional sublinear* se

1.  $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$ .
2.  $p(x, y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .

**Teorema 3.1.** Seja  $X$  um espaço vetorial e  $Y \subseteq X$  subespaço. Seja  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  linear e  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional sublinear tal que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Então existe  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\tilde{f}|_Y = f$ .
2.  $\tilde{f}(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Lema 3.2.** Suponha as mesmas hipóteses que no teorema. Seja  $x_0 \in X \setminus Y$ . Então existe  $\tilde{f} : E = \text{span}\{Y \cup \{x_0\}\} \rightarrow \mathbb{R}$  linear tal que

1.  $\tilde{f}|_Y = f$ .
2.  $\tilde{f}(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.* Começamos por ver quais são as condições que tiver que satisfazer  $\tilde{f}$  se existese, e logo definimos de acordo a isso.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) + \tilde{f}(x_0) &= \tilde{f}(y + x_0) \leq p(y + x_0) \quad \forall y \in Y \\ \implies \tilde{f}(y) + \tilde{f}(x_0) &= \tilde{f}(y + x_0) \leq p(y + x_0) \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

então

$$\tilde{f}(x_0) \leq p(y + x_0) - f(y) \quad \forall y \in Y.$$

Defina

$$\tilde{f}(x_0) = \inf_{y \in Y} p(y + x_0) - f(y).$$

Temos que ver que está bem definido, ie. que  $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$ . Tome  $y_1, y_2 \in Y$ , assim

$$\begin{aligned} f(y_1) - f(y_2) &= f(y_1 - y_2) \\ &\leq p(y_1 - y_2) \\ &= p(y_1 + x_0 - y_2 - x_0) \\ &\leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0) \end{aligned}$$

Assim,

$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in Y,$$

e como definimos  $\tilde{f}(x)$  como o ínfimo dos termos na direita desta desigualdade, temos que

$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq \tilde{f}(x_0) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1) \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Definamos  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \quad \forall y \in Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para mostrar 2. queremos ver que

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0) \quad \forall y \in Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se  $\alpha = 0$  tá. Se  $\alpha > 0$ , podemos fazer

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \alpha x_0) &= f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \\ &\leq f(y) + \alpha (p(y_1 + x_0) - f(y_1)) \quad \forall y_1 \in Y. \end{aligned}$$

Pegando  $y_1 = \frac{y}{\alpha}$  temos

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq f(y) + \alpha \left( p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \right) = p(y + \alpha x_0).$$

Finalmente se  $\alpha < 0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y + \alpha x_0) &= f(y) + \alpha \tilde{f}(x_0) \\ &\leq f(y) + |\alpha| (p(-y_2 - x_0) - f(y_2)) \quad \forall y_1 \in Y. \end{aligned}$$

Fazendo  $y_2 = -\frac{y}{\alpha}$  obtemos

$$\tilde{f}(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0).$$

□

**Lema 3.3 (de Zorn).** Seja  $(\mathbb{P}, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado no vazio. Se toda cadeia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$  tem um supremo  $\sup \mathcal{C} \in \mathbb{P}$ , então  $(\mathbb{P}, \leq)$  possui um elemento maximal.

*Demonstração de Hahn-Banach.* Defina

$$\mathbb{P} = \{(E, g) : Y \subseteq E \subseteq X, g : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ é linear}, g|_Y = f, g(x) \leq p(x) \forall x \in E\}$$

Defina  $(E, g) \leq (E', g')$  se “ $(E', g')$  é uma extensão mais próxima de resolver o nosso problema”, isto é, quando  $E \subseteq E'$  e  $g'|_E = g$ . Claramente as cadeias de  $\mathbb{P}$  tem supremos em  $\mathbb{P}$ :

$$F = \bigcup_{g \in \mathcal{C}} g$$

como definem-se as funções em teoria de conjuntos (como conjuntos). Peguemos então pelo lema de Zorn um elemento maximal  $(E, F)$ .

**Afirmação.**  $F$  é o que procuramos.

*Demonstração.* De fato, temos que  $E = X$ , pois caso contrário o lema anterior gera uma contradição a maximalidade de  $(E, F)$ . □

□

**Corolário 3.4.** Seja  $X$  espaço normado,  $Y \subseteq X$  subespaço e  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear contínuo. Então existe  $F \in X^*$  tal que

1.  $F|_Y = f$ .
2.  $\|F\| = \|f\|$ .

*Demonstração.* Defina

$$p(x) = \|f\| \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Por Hahn-Banach, existe um funcional  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $F|_Y = f$ .
2.  $|F(x)| \leq \|f\| \|x\|$  para todo  $x \in X$ .

Então,  $\|F\| \leq \|f\|$ . A outra desigualdade tá dada por ser  $F$  uma extensão:  $|f(x)| = |F(x)| \leq \|F\| \|x\|$  quando  $x \in Y$ . □

**Corolário 3.5.** Seja  $X$  espaço normado e  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ . Então existe  $F \in X^*$  tal que

1.  $F(x_0) = \|x_0\|$ .
2.  $\|F\| = 1$ .

*Demonstração.* Defina  $Y = \text{span}\{x_0\}$  e  $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$  para toda  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Note que  $\|f\| = 1$ , pois

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\|,$$

logo  $\|f\| \leq 1$ . Como  $f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = 1$ , segue-se que  $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)| \geq 1$  e que  $f(x_0) = \|x_0\|$ . O resultado se obtém aplicando o corolário anterior.  $\square$

**Corolário 3.6.** Seja  $X$  espaço normado e  $Y \subseteq X$  subespaço vetorial fechado e  $x_0 \in X \setminus Y$ . Existe  $f \in X^*$  tal que

1.  $f|_Y = 0$ .
2.  $f(x_0) = d(x_0, Y)$ .
3.  $\|f\| = 1$ .

*Demonstração.* Tome  $E = \text{span}\{Y \cup \{x_0\}\}$ . Defina  $f(y + \alpha x_0) = \alpha d$  com  $d = d(x_0, Y)$ . Por Hahn-Banach, precisamos só mostrar que  $\|f\| = 1$ .

( $\|f\| \leq 1$ ) Note que

$$\begin{aligned} |f(y + \alpha x_0)| &= |\alpha|d \\ &= |\alpha| \inf\{\|x_0 - z\| : z \in Y\} \\ &\leq |\alpha| \left\|x_0 - \frac{y}{\alpha}\right\| \quad (z = -y/\alpha) \\ &= \|\alpha x_0 + y\|. \end{aligned}$$

( $\|f\| \geq 1$ ) Pegue  $(y_n) \subseteq Y$  tal que  $d = \lim_n \|x_0 - y_n\|$ . Logo

$$f\left(\frac{x_0 - y_n}{\|x_0 - y_n\|}\right) = \frac{d}{\|x_0 - y_n\|} \rightarrow 1.$$

$\square$

**Teorema 3.7.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Se  $X^*$  for separável,  $X$  é separável.

*Demonstração.* Pegue  $(f_m) \subseteq \partial B_{X^*}$  denso. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pegue  $x_m \in \partial B_X$  tal que  $f_n(x_m) \geq 1 - \frac{1}{m}$  (a gente não pode garantir que é 1). Defina  $Y = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ .

**Afirmção.**  $Y = X$ .

*Demonstração.* Suponha falso, ie. existe  $x \in X \setminus Y$ . Pegue  $f \in \partial B_{X^*}$  tal que

1.  $f|_Y = 0$ .
2.  $f(x) \neq 0$ . (De fato, esta propriedade não é usada na prova.)

Pegue uma subsequência  $(f_{m_k})_k$  de  $(f_n)$  tal que  $f_{m_k} \xrightarrow{k} f$ . Então

$$|f(x_{n_k})| = |f_{n_k}(x_{m_k}) - f_{n_k}(x_{n_k} + f)|$$

logo

$$|f(x_{n_k})| \geq |f_{n_k}(x_{m_k})| - f_{n_k}(x_{n_k} + f)$$

que converge a 1, pois

$$|f_{m_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| = |(f_{n_k} - f)(x_{m_k})| \leq \|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0$$

mais isso não é possível pois  $x_n$  está em  $Y$ . □

□

**Teorema 3.8 (Hahn-Banach complexo).** Seja  $X$  um espaço vetorial complexo,  $Y \subseteq X$  subespaço,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  linear e  $p : X \rightarrow [0, \infty)$  tal que

1.  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$  para todos  $x \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
2.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para todos  $x, y \in X$ .
3.  $|f(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in X$ .

Então existe  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

1.  $F|_Y = f$ .
2.  $|F(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstração.*

**Exercício.** Existem funcionais  $\mathbb{R}$ -lineares  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Note que a relação entre  $f_1$  e  $f_2$  é que

$$\begin{aligned} if_1(x) - f_2(x) &= if(x) \\ &= f(ix) \\ &= f_1(ix) + if_2(ix) \end{aligned}$$

Logo

$$f_2(x) = -f_1(ix), \quad \forall x \in Y.$$

Como  $|f_1(x)| \leq p(x)$  para toda  $x \in Y$ , podemos usar Hahn-Banach real para pegar  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1.  $\tilde{f}|_Y = f_1$ .
2.  $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ .



Defina  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$F(x) = \tilde{f}(x) + i\tilde{f}(ix) \quad \forall x \in X.$$

( $F$  é linear) De fato, temos que  $F$  é  $\mathbb{R}$ -linear. Resta ver que  $F(ix) = iF(x)$  (Exercício).

( $F|_Y = f$ ) Tá certo.

( $|F(x)| \leq p(x)$ ) Fixe  $x \in X$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$$|F(x)| = e^{i\theta} F(x).$$

Note que, denotando  $\tilde{f}(x) = F$  e  $-\tilde{f}(ix) = F_2$  para que  $F = F_1 + iF_2$ , temos que  $F_2(e^{i\theta}) = 0$ . Finalmente

$$\begin{aligned} |F(x)| &= F_1(e^{i\theta}x) \\ &= \tilde{f}(e^{i\theta}x) \\ &\leq p(e^{i\theta}x) \\ &= p(x). \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.9.** Seja  $X$  um espaço normado separável.  $X$  mergulha-se linearmente e isometricamente em  $\ell_\infty$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_n) \subseteq X$  denso. Pelo teorema de Hahn-Banach existe uma sequência de funcionais  $(f_n) \subseteq \partial B_{X^*}$  tal que  $f_n(x_n) = \|x_n\|$ . Logo, o mapa

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow \ell_\infty \\ x &\mapsto (f_n(x)) \end{aligned}$$

está bem definido e é tal que  $\|T\| \leq 1$ . Então,  $\|Tx\| \leq \|x\|$ .

Para ver que  $T$  é uma isometria note que, como  $(x_n)$  é denso, para qualquer  $x \in X$  podemos pegar uma subsequência  $(x_{n_k})$  de  $(x_n)$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Então

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \\ &\geq |f_n(x)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\geq |f_{n_k}(x_{n_k})| - |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)| \\ &= \|x_{n_k}\| - |f_{n_k}(x_{n_k} - x)| \xrightarrow{k} \|x\|. \end{aligned}$$

□

## 4 Reflexividade

Notemos que, entre aspas,  $X \subseteq X^{**}$ . Considere o mapa  $J : X \rightarrow X^{**}$  como  $(Jx)f = fx$  para toda  $x \in X$  e  $f \in X^*$ .

**Proposição 4.1.**  $J$  é uma isometria.

*Demonstração.* Por um lado,

$$\|J\| = \sup_{x \in B_X} \|Jx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{X^*}} |fx| \leq 1.$$

Seja agora  $x \in X \setminus \{0\}$ . Pegue  $f \in X^*$  com  $\|f\| = 1$  e  $f(x) = \|x\|$ . Logo

$$\|Jx\| \geq |(Jx)f| = |fx| = \|x\|.$$

□

**Definição.** Se  $J$  for sobrejetiva, então  $X$  é *reflexivo*.

**Exemplos.**

1. Dimensão finita.
2.  $\ell_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ . Para comprovar isso tem que comprovar que na nossa prova da dualidade de  $\ell_p$  de fato usamos o mapa  $J$ . Considere os mapas

$$\varphi : \ell_p \rightarrow \ell_q^* \quad \psi : \ell_p^* \rightarrow \ell_q \quad \varphi^* : \ell_q^* \rightarrow \ell_p^{**}$$

para obter

$$\begin{array}{ccc} \ell_p & \xrightarrow{J} & \ell_p^{**} \\ & \searrow \varphi & \nearrow \psi^* \\ & \ell_q^* & \end{array}$$

**Definição.** Seja  $T : X \rightarrow Y$  operador contínuo entre espaços normados. O *adjunto* de  $T$  é  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  dado por

$$(T^*y^*)x = y^*(Tx).$$

**Exemplos.** Não são reflexivos:  $C[0, 1]$ ,  $c_0$ ,  $\ell_\infty$  usando que se o dual de um espaço é reflexivo, então o espaço é reflexivo.

**Exercício.** Seja  $X$  reflexivo e  $Y$  isomórfico a  $X$ . Então  $Y$  é reflexivo.

*Demonstração.* Primeiro mostramos que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ X^{**} & \xrightarrow{(\varphi^*)^*} & Y^{**} \end{array}$$

e logo que, em geral, o operador adjunto de um isomorfismo é um isomorfismo, assim  $(\varphi^*)^*$  é um isomorfismo.  $\square$

**Proposição 4.2.** Seja  $X$  reflexivo e  $Y \subseteq X$  subespaço fechado. Então  $Y$  é reflexivo.

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $J_Y : Y \rightarrow Y^{**}$  é sobrejetivo. Pegue  $\xi \in Y^{**}$  e defina  $\bar{\xi} \in X^{**}$  como

$$\bar{\xi}f = \xi f|_Y \quad \forall f \in X^*.$$

Como  $X$  é reflexivo, existe  $x \in X$  tal que  $J_X x = \bar{\xi}$ .

( $x \in Y$ ). Caso contrário, como  $Y$  é fechado, existe um funcional  $f \in X^*$  tal que

1.  $fx \neq 0$ . (De acordo com o corolário de Hahn-Banach,  $fx = d(x, Y)$ .)
2.  $f|_Y = 0$ .

Logo

$$\bar{\xi}f = \xi f|_Y = \xi 0 = 0.$$

Mais,

$$\bar{\xi}f = (Jx)f = fx \neq 0.$$

( $J_Y x = \xi$ ). Pegue  $g \in Y^*$  e usando Hahn-Banach defina  $\bar{g} \in X^*$  extensão de  $g$ . Logo

$$\begin{aligned} (J_Y x)g &= gx \\ &= \bar{g}x \\ &= (J_X x)\bar{g} \\ &= \bar{\xi}\bar{g} \\ &= \xi g \end{aligned}$$

$\square$

**Exercício.** Se  $X$  é reflexivo e  $Y \subseteq X$  fechado, então  $X/Y$  é reflexivo.

## 5 Topologia fraca e fraca\*

Considere  $X$  um conjunto e uma família de mapas  $\mathcal{F}$  de  $X$  para alguns espaços topológicos,  $X \rightarrow (Y, \tau)$ . A **topologia fraca** de  $X$  em relação a  $\mathcal{F}$ , denotada por  $\sigma(X, \mathcal{F})$ , é a menor topologia em  $X$  que faz todos elementos de  $\mathcal{F}$  contínuos. Em outras palavras, é a topologia gerada por os conjuntos da forma  $f^{-1}(U)$  para  $f \in \mathcal{F}$  e  $U \subseteq \text{codom } f$  aberto.

Lembre que uma **base** um espaço topológico é uma coleção de abertos tal que todo aberto da topologia pode se-expressar como união arbitrária de abertos da base. (E ainda, que todo elemento do espaço tem uma **base local**, (todo aberto que contém o ponto contém um aberto da base local) de abertos da base.) Uma base para  $\sigma(X, \mathcal{F})$  é

$$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(U_i)$$

para  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$  e  $U_i \subseteq \text{codom } f_i$  aberto.

Voltando para espaços vetoriais,

**Definição.** Se  $X$  é um espaço normado,  $\sigma(X, X^*)$  é a *topologia fraca de  $X$* . Uma base para  $\sigma(X, X^*)$  é

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |f_i x_i - f_i x| < \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1} B(f x_i, \varepsilon) \stackrel{?}{=} \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1} B(f x_i, \varepsilon_i)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_n \in X^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$  e  $\varepsilon > 0$ .

**Exercício.** Seja  $x_0 \in X$ . Mostre que

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |f_i x_0 - f_i x| < \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1} B(f x_0, \varepsilon)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_n \in X^*$  é uma base local para essa topologia em  $x_0$ .

*Demonstração.* Pega um conjunto da forma da primeira base e mostra que dentro dele tem um elemento da base local. Consideremos primeiro o caso  $n = 1$ . Supongamos que

$$x_0 \in f^{-1} B(f x_1, \varepsilon), \quad f \in X^*, \quad x_1 \in X, \quad \varepsilon > 0.$$

Defina

$$d = d(f x_0, \partial B(f x_1, \varepsilon)) = \min\{|f x_0 - (f x_1 + \varepsilon)|, |f x_0 - (f x_1 - \varepsilon)|\}.$$

**Afirmção.**  $f^{-1} B(f x_0, d/2) \subseteq f^{-1} B(f x_1, \varepsilon)$

De fato, para qualquer  $x \in f^{-1} B(f x_0, d/2)$ ,

$$|f x - f x_1| \leq |f x - f x_0| + |f x_0 - f x_1| < d/2$$

□

O conceito de rede ajuda-nos a caracterizar propriedades de espaços topológicos arbitrários:

**Definição.**

1. Lembre que dado  $(I, \leq)$  um conjunto parcialmente ordenado,  $I$  é *direcionado* se para todos  $i, j \in I$  existe  $k \in I$  tal que  $i \leq k$  e  $j \leq k$ . Esa definição implica a existencia de um elemento maior do que qualquer quantidade finita de elementos, mais não para uma quantidade infinita.
2.  $(x_i)_{i \in I}$  é uma *rede* se  $I$  é direcionado.

3. Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico,  $(x_i)_{i \in I}$  uma rede e  $x \in X$ . Decimos que  $x_i \rightarrow x$  se para todo  $O \in \tau$  como  $x \in O$  existe  $i_0 \in I$  tal que se  $i \geq i_0$  então  $x_i \in O$ .
4. Uma rede  $(x_i)_{i \in I}$  **converge fracamente** se para todo  $f \in X^*$ ,  $f x_i \rightarrow f x$ .

k

**Definição.** Seja  $X$  um espaço normado. A topologia  $\sigma(X^*, J(X)) := \sigma(X^*, X)$  é a **topologia fraca\*** de  $X^*$ . Trata-se da menor topologia de  $X^*$  tal que  $Jx$  é contínuo para todo  $x \in X$ .

**Observação 5.1.** Se  $X$  for reflexivo,  $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$ .

Uma base de topologia fraca\* é

$$\begin{aligned} & \bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |f x_i - f_i x_i| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |(J x_i) f - (J x_i) f_i| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_n \in X^*$  e  $x_1, \dots, x_n \in X$ .

$(f_i)$  converge fracamente para  $f$  se  $f_i x \rightarrow f x$  para toda  $x \in X$ .

Denotamos

1.  $x_i \xrightarrow{w} x$  se  $(x_i)$  converge fracamente para  $x$ .
2.  $f_i \xrightarrow{w^*}$  se  $(f_i)$  converge fraca\* para  $f$ .

**Exemplo.**

1. Sejam  $p \in (1, \infty)$  e  $(e_m) \subseteq \ell_p$ . Então  $e_n \xrightarrow{w} 0$ .
2. Mesmo para  $c_0$ .
3. Se  $p = 1$ , não converge a zero.
4. Se  $f_n \xrightarrow{w} f$  em  $X^*$  então  $f_n \xrightarrow{w} ?$ . O recíproco não é certo, pois.

**Teorema 5.1.** Seja  $X$  um espaço normado.  $X$  é reflexivo se e somente se  $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ .

**Proposição 5.2.** Seja  $\xi \in X^{**}$ . Se  $\xi$  for contínuo para a topologia  $\sigma(X^*, X)$ , então  $\xi \in X$ .

**Lema 5.3.** Sejam  $f, f_1, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineares. Se

$$\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$$

então  $f \in \text{span}\{f_i | i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

*Demonstração.* Tem um truço—defina a seguinte função auxiliar:

$$L : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como  $L(x) = (f_1x, \dots, f_nx)$  para  $x \in X$ . Como  $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$ , podemos definir  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mediante o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & \searrow L & \nearrow g \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

que fica bem definida e é linear pela propriedade dos kernels. Logo, existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

E assim,

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i.$$

□

*Prova da proposição.* Queremos achar funcionais  $\xi_i \approx x_i$  que satisfaiz a condição dos kernels. Como  $\xi$  é  $\sigma(X^*, X)$ -contínuo,

$$\xi^{-1}((-1, 1)) \in \sigma(X^*, X).$$

Logo  $\xi^{-1}((-1, 1))$  é uma vizinhanza de zero na topologia fraca\*. Logo existe  $\varepsilon > 0$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$  tais que

$$\bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |f_i x_i| < \varepsilon\} \subseteq ((-1, 1))$$

pois

**Exercício.** Se  $f_0 \in X^*$  então

$$\bigcap_{i=1}^n \{f \in X^* : |f x_i - f_i x_i| < \varepsilon\}$$

$x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0$  é uma base de abertos locais para  $f_0$ . (É o mesmo exercício que o da base local para a topologia fraca.)

Logo,

$$\bigcap \ker(x_i) \subseteq \xi^{-1}((-1, 1)).$$

E pela linearidade do kernel e do operador  $\xi$ , temos que

$$\bigcap \ker(x_i) \subseteq \ker \xi$$

assim, pelo lema

$$\xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

com  $x_1, \dots, x_n \in X$ . □

*Prova do teorema.*

( $\implies$ ). Se  $X$  é reflexivo,  $X = X^{**}$  e  $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ .

( $\impliedby$ ). Suponha  $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ .

$$\begin{aligned} X^{**} &= \{\xi : X^* \rightarrow \mathbb{R} : \xi \text{ é linear e contínuo para } \sigma(X^*, X^{**})\} \\ &= \{\xi : X^* \rightarrow \mathbb{R} : \xi \text{ é linear e contínuo para } \sigma(X^*, X)\} \\ &= X \end{aligned}$$

□

## 6 Formas geométricas de Hahn-Banach

**Definição.** Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $\tau$  uma topologia em  $X$ .  $(X, \tau)$  é um *espaço vetorial topológico (EVT)* se

1.  $+$  e  $\cdot$  são  $\tau$ -contínuas.
2. Os pontos são fechados.

**Exemplo.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(X, \sigma(X, X^*))$  e  $(X, \sigma(X^*, X))$  são EVT.

**Definição.** Para  $(X, \tau)$  EVT,

$$X^* := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear e contínuo}\}.$$

**Observação 6.1.**  $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X = JX$ .

**Definição.** Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $A \subseteq X$  um subconjunto. O *funcional de Minkowski de  $A$*  é

$$\mu_A(x) = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in A \right\}.$$

É que tão longe posso ir na direção de  $x$  sem sair de  $A$ .

**Definição.** Seja  $A \subseteq X$ .

1.  $A$  é *absorvente* se  $\forall x \in X \exists t > 0$  tal que  $\frac{x}{t} \in A$ . (Note que essa condição implica que  $0 \in A$ .)

2.  $A$  é **balanceado** se  $\forall x \in A \forall \lambda \in B_{\mathbb{K}}$  temos que  $\lambda x \in A$ .

**Proposição 6.1.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  normado e  $A = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ . Então  $A$  é convexo, balanceado, absorvente e  $\mu_A = \|\cdot\|$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\mu_A = \|\cdot\|$ . Pegue  $x \in X$  e  $t > \|x\|$ , assim  $\frac{x}{t} \in A$ . Logo,  $\mu_A(x) \leq t$  e de fato  $\mu_A(x) \leq \|x\|$ .

Se  $0 < t < \|x\|$ ,  $\frac{x}{t} \notin A$ , e logo  $t \leq \mu_A(x)$ . □

**Proposição 6.2.** Sejam  $X$  um EVT e  $A \subseteq X$  absorvente e conexo. Então  $\mu_A$  é sublinear e

$$B := \{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\} := C$$

e

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C.$$

Se  $A$  também for balanceado,  $\mu_A$  é uma pseudonorma.

*Demonstração.* (Sublinearidade). Sejam  $x, y \in X$ . Pegue  $t > \mu_A(x)$  e  $s > \mu_A(y)$ . Como

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s} t^{-1}x + \frac{s}{t+s} s^{-1}y,$$

$\frac{x}{t} \in A$  e  $\frac{y}{s} \in A$  pois  $A$  é convexo. Logo  $\mu_A(x+y) \leq t+s$ .

(Homogenidade).  $\mu_A(\lambda x) = \lambda \mu_A(x)$ ,  $\lambda > 0$ . Logo se  $A$  for balanceado,

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x).$$

( $B \subseteq A$ ). Sai como  $A$  é convexo e  $0 \in A$ .

( $A \subseteq C$ ). Imediato

( $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ ) Como  $B \subseteq A \subseteq C$ , segue que

$$\mu_C \leq \mu_A \leq \mu_B.$$

Para ver que  $\mu_B \leq \mu_C$ , pegue  $t > \mu_C(x)$ . Logo  $t^{-1}x \in C$ . Logo  $\mu_A(t^{-1}x) \leq 1$ . Logo, se  $s > t$ ,

$$\begin{aligned} \mu_A(s^{-1}x) &= \mu_A(s^{-1}tt^{-1}x) \\ &= s^{-1}t\mu_A(t^{-1}x) \\ &< 1, \end{aligned}$$

de modo que  $s^{-1}x \in B$ , e assim  $\mu_B(x) \leq s$ . □

**Teorema 6.3 (Primeira forma geométrica de Hahn-Banach.).** Sejam  $X$  EVT real,  $A, B \subseteq X$  convexos e disjuntos. Se  $A$  é aberto, existe  $f \in X^*$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que

$$fx < \gamma \leq fy \quad \forall x \in A \text{ e } y \in B.$$

(Interpretamos  $f^{-1}\gamma$  como um hiperplano, assim, o conjunto  $A$  fica num lado desse hiperplano, e o conjunto  $B$  do outro lado. Observe que o fecho deles pode se intersectar.)



*Demonstração.* Pegue  $a \in A$  e  $b \in B$ . Defina  $x_0 = a - b$  e

$$C = x_0 + A - B.$$

( $C$  é aberto). De fato, pois  $C$  é uma união de traslações de  $A$  por elementos de  $B$ .

( $C$  é absorvente). Por ser um aberto que contém zero.

( $C$  é convexo). Por ser soma de convexos.

Considere  $\mu_C$ . Note que  $x_0 \notin C$  e  $E = \text{span}\{x_0\}$ . Defina  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(\alpha x_0) = \alpha \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Temos  $f(\alpha x_0) \leq \mu_C(\alpha x_0) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $\alpha < 0$ , terminamos. Se  $\alpha \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f(\alpha x_0) &= \alpha \cdot 1 \\ &\leq \alpha \mu_C(x_0) \\ &= \mu_C(\alpha x_0) \end{aligned}$$

Por Hahn-Banach, existe  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear tal que

1.  $\tilde{f}|_E = f$ .
  2.  $\tilde{f}(x) \leq \mu_C(x) \forall x \in X$ .
- ( $\tilde{f}$  é contínuo). Por 2.,

$$\tilde{f}(x) \leq \mu_C(x) \leq 1 \quad \forall x \in C \cap \{-C\}.$$

**Exercício.** Sejam  $X$  EVT e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear e limitado em um aberto. Então  $f$  é contínuo.

Assim,  $\tilde{f}$  é contínuo. Pegue  $y \in A$  e  $x \in B$ . Temos:

$$\begin{aligned} 1 + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) &= \tilde{f}(x_0) + \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \\ &= \tilde{f}(x_0 + y + x) \\ &= \mu_C(x_0 + y + x) < 1 \end{aligned}$$

Logo  $f(y) < \tilde{f}(x)$  para todo  $y \in A$  e toda  $x \in B$ . Defina

$$\gamma = \inf_{x \in B} \tilde{f}(x)$$

Nota que  $\tilde{f}(A)$  e  $\tilde{f}(B)$  são conexos e, pelo exercício 1 da Lista II,  $\tilde{f}(A)$  é aberto. Logo

$$\tilde{f}y < \gamma \quad \forall y \in A.$$

□

**Teorema 6.4 (Segunda forma geometrica de Hahn-Banach).** Sejam  $X$  EVT,  $A, B \subseteq X$  convexos disjuntos,  $A$  compacto e  $B$  fechado. Então existe  $f \in X^*$  tal que

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x).$$

(Mais uma vez, a  $f$  divide o espaço em dois hiperespaços, em cada um dos quais reside um dos conjuntos  $A$  ou  $B$ . Porém, agora ficam mais distantes um do outro, e seus fechados não irão se intersectar.)

Alternativamente, existem  $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B.$$

**Exercício.** Construa um conjunto convexo e absorvente  $C \subseteq c_0$  com  $(\lambda_n) \subseteq (0, \infty)$   $\lambda_n \rightarrow 0$  tal que

1.  $(\lambda_n c_n, 0) \subseteq C$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Para todo  $x \in c_0$  existe  $\lambda_x$  tal que  $\lambda x \notin C$  para toda  $\lambda > \lambda_x$ .

**Lema 6.5.** Sejam  $A, B \subseteq X$  com  $A$  compacto e  $B$  fechado. Então existe um aberto  $V$  contendo zero tal que

$$(A + V) \cap (B + V) = \emptyset.$$

*Prova do lemma.* Como  $B^c$  é aberto e ainda  $+$  é contínua,  $\forall x \in B^c \exists V_x \subseteq X$  aberto,  $0 \in V_x$  tal que

$$v + V_x + V_x + V_x \subseteq B^c.$$

Trocando  $V_x$  por  $V_x \cap (-V_x)$ ,  $V_x$  é simétrico. Como  $A$  é compacto, existem  $x_1, \dots, x_n \in A$  tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i}.$$

Defina

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}.$$

Vamos mostrar que  $(A + V) \cap (B + V) = \emptyset$ . Suponha  $x \in (A + V) \cap (B + V)$ . Como

$$A + V \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i + V_{x_i} + V_{x_i}.$$

Então existe  $i \leq n$  tal que

$$x \in (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (B + V_{x_i}).$$

Isso implica que  $x \in (x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap B$ , o que contradiz a nossa escolha de  $V_x$ .  $\square$

*Prova do teorema.* Exercício.  $\square$

**Corolário 6.6.** Sejam  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado e  $X \subseteq X$  convexo. Temos

$$\overline{C}^{\|\cdot\|} = \overline{C}^w.$$

*Demonstração.* Como  $\sigma(X, X') \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$ ,  $\overline{C}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{C}^w$ . Pegue  $x \notin \overline{C}^{\|\cdot\|}$  e defina

$$A = \{x\}, \quad B = \overline{C}^{\|\cdot\|}.$$

Por Hahn-Banach, existe  $f \in X^*$  tal que

$$f(x) < \inf_{y \in \overline{C}^{\|\cdot\|}} f(y) = \gamma.$$

Logo

$$x \in f^{-1}((-\infty, \gamma)) \subseteq C^c,$$

e assim  $x \notin \overline{C}^w$ . □

**Pergunta.**  $\overline{C}^w = \overline{C}^{\|\cdot\|} = \overline{C}^{w*}$ ?

Não,  $c_0 \subseteq \ell_\infty$  é convexo. Defina para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n = e_1 + \dots + e_n.$$

**Exercício.**  $s_n \xrightarrow{w^*} (1, 1, \dots) \notin \overline{C}^{\|\cdot\|}$ .

## 7 Teorema de Banach-Steinhaus

**Teorema 7.1 (Baire).** Seja  $(M, d)$  um espaço métrico completo. Considere  $\{F_n\}$  uma família de fechados em  $M$  tais que

$$M = \bigcup_{i=1}^n F_n.$$

Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{int } F_{n_0} = \emptyset.$$

*Demonstração.* Ver Elon. □

**Teorema 7.2 (Banach-Steinhaus).** Sejam  $(X, \|\cdot\|_X)$  um espaço de Banach,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  um espaço normado e  $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  tais que para cada  $x \in X$  existe  $0 < c = c_x < \infty$  tal que

$$\|T_n x\|_Y \leq c_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então existe  $c > 0$  tal que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Comencemos definindo os conjuntos

$$\begin{aligned} X_m^n &:= \{x \in X : \|T_n x\|_Y \leq m\} \\ &= (\|\cdot\| \circ T_n)^{-1}([0, m]). \end{aligned}$$

Segue-se que  $X_m^n$  é fechado. Com isso, conjunto

$$X_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_m^n \subseteq X$$

é fechado.

**Afirmção.**  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_m$ .

*Demonstração.*  $\subseteq$  é imediato. Recíprocamente, seja  $x \in X$ . Então existe  $c_x > 0$  tal que

$$\|T_n x\| \leq c_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pegue  $m_x \in \mathbb{N}$  com  $m_x > C$

$$\|T_n x\|_Y < m_x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja  $x \in X_{m_x}^n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Logo

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{m_x}^i = X_{m_x} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} X_m$$

□

Logo, pelo teorema de Baire, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{int } X_{m_0} \neq \emptyset.$$

Considere  $y \in \text{int } X_{m_0}$  e  $r > 0$  tal que

$$B_r^x[y] \subseteq \text{int } X_{m_0}.$$

Seja  $x \in X$  com  $\|x\| \leq 1$ . Logo,  $z = y + rx \in B_r^x[y]$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|T_m(z - y)\| &= \|T_m z - T_m y\| \\ &\leq \|T_n z\| + \|T_n y\| \\ &\leq m_0 + m_0 = 2m_0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &= \|T_n \left( \frac{rx}{r} \right)\| \\ &= \frac{1}{r} \|T_n(rx)\| \\ &= \frac{1}{r} \|T_n(z - y)\| \\ &\leq \frac{2m_0}{r} \end{aligned}$$

Assim,  $\|T_n x\| \leq \frac{2m_0}{r}$  para toda  $x \in X$  e  $\|x\| \leq 1$ .

□

**Exemplo** (Limitação uniforme “ótimo”). Considere

$$X = \{(x_n) \subseteq c_0 : \exists k_0 \in \mathbb{N}, x_k = 0 \forall k > k_0\}$$

**Exercício.**  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  não é completo.

Tome  $Y = \mathbb{R}$  e defina a sequência de operadores

$$\begin{aligned} f_n : X &\mapsto \mathbb{R} \\ x = (x_n) &\mapsto f_n(x) = nx_n \end{aligned}$$

Note que  $f_n$  é limitado. Pegando a sequência que vale 1 na  $n$ -ésima entrada vemos que  $\|f_n\| = 1$ .

Seja  $x = (x_k) \subseteq X$ , assim existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k = 0$  para  $k > k_0$ . Desse modo

$$f_n(x) = nx_n = 0 \quad \forall n > k_0.$$

Isso é,  $|f_n x| \leq c_x$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , mas,

$$\|f_n\| = n \rightarrow \infty,$$

assim que a completude é essencial no teorema.

**Corolário 7.3.** Sejam  $X$  um espaço Banach,  $Y$  normado e  $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

existe para todo  $x \in X$ . Então o operador

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \end{aligned}$$

é contínuo.

*Demonstração.* De fato,

1.  $T$  é linear: para  $x \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha T_n x + T_n y) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y \\ &= \alpha Tx + Ty \end{aligned}$$

2.  $T$  é contínuo. Seja  $x \in X$ . Como  $(T_n x)$  converge em  $Y$ , então  $\|T_n x\|$  converge em  $\mathbb{R}$ , assim que é um conjunto limitado. Por Banach-Steinhaus, existe  $c > 0$  tal que  $\|T_n\| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq c \|x\|.$$

Tomando limite como  $\| \cdot \|$  é contínua, terminamos. □

**Corolário 7.4.** Seja  $X$  espaço Banach,  $Y$  normado e  $(f_n) \subseteq X^*$  tal que  $f_n \xrightarrow{w^*} f \in X^*$ . Então  $(f_n)$  é limitada.

**Teorema 7.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki).** Seja  $X$  um espaço de Banach. Então  $B_{X^*}$  é compacta na topologia fraca\*.

*Demonstração.* Para cada  $x \in X$  defina

$$I_x = [-\|x\|, \|x\|],$$

que é compacto em  $\mathbb{R}$ . Pelo teorema de Tychonoff, o conjunto

$$I = \prod_{x \in X} I_x$$

é compacto em  $\mathbb{R}^X$ . Considere o mapa

$$\begin{aligned} \varphi : X^* &\rightarrow \mathbb{R}^X \\ f &\mapsto \varphi f = (f(x))_{x \in X} \end{aligned}$$

Dado  $f \in B_{X^*}$ ,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\| \implies |f(x)| \in I_x.$$

Logo

$$\varphi(B_{X^*}) \subseteq I.$$

**Afirmção.**  $\varphi$  é um homeomorfismo (sobre sua imagem) da topologia fraca\* para a topologia produto.

*Demonstração.* A injetividade é clara: se  $\varphi g = \varphi f$ , então  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Para a continuidade, considere a projeção

$$\begin{aligned} \pi_X : \mathbb{R}^X &\rightarrow \mathbb{R} \\ y = (y_\alpha)_{\alpha \in X} &\mapsto \pi_x(y) = y_x \end{aligned}$$

Daí, observe que para toda  $f \in X^*$ ,

$$\begin{aligned} (\pi_X \circ \varphi)f &= \pi_X(\varphi f) \\ &= \pi_X((f(y))_{y \in X}) \\ &= f(x) \\ &= J_x f, \end{aligned}$$

e como  $J_x$  é contínua, também  $\pi_X \circ \varphi$  para todo  $x \in X$ .  $\square$

Agora vamos mostrar que  $\varphi^{-1} : \varphi(X^*) \rightarrow X^*$  é contínua em  $\sigma(X^*, X)$ . Lembremos que  $\varphi : Y \rightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$  linear é contínuo se é só se

$$J_x \circ \varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua para todo  $x \in X$ . Assim, mostraremos que

$$(J_x \circ \varphi) = \pi_x|_{\varphi(X^*)}$$

é contínuo.

Com isso, temos que  $\varphi$  é homeomorfismo. Com isso, vamos mostrar que

$$\varphi(B_{X^*}) \subseteq I$$

é fechado. De fato, seja  $F = (F_x) \in \overline{\varphi(B_{X^*})}$ . Vamos mostrar que existe  $f \in B_{X^*}$  tal que  $F_x = f(x)$  para todo  $x \in X$ . Defina

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = F_x \end{aligned}$$

1.  $f$  é linear. Sejam  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considere a vizinhança aberta de  $F$  dada por

$$V := \{(w_z)_{z \in X} : |w_x - F_x| < \varepsilon, |w_y - F_y| < \varepsilon, |w_{\alpha x + y} - F_{\alpha x + y}| < \varepsilon\}.$$

Como  $F \in \overline{\varphi(B_{X^*})}$ , temos  $V \cap \varphi(B_{X^*}) \neq \emptyset$ . Seja  $g \in B_{X^*}$  tal que  $\varphi g \in V$ . Logo,  $(g(w))_{w \in X} \in V$ , ou seja,

$$|g(x) - F_x| < \varepsilon, \quad |g(y) - F_y| < \varepsilon, \quad |g(\alpha x + y) - F_{\alpha x + y}| < \varepsilon$$

Dai,

$$\begin{aligned} |f(\alpha x + y) - (\alpha f(x) + f(y))| &= |F_{\alpha x + y} - (\alpha F_x + F_y)| \\ &< (|\alpha| + 2)\varepsilon \end{aligned}$$

2.  $f \in B_X$ , pois

$$|f(x)| = |F_x| \leq \|x\|$$

pois  $F \in I$ .

Por tanto,

$$\overline{\varphi(B_{X^*})} = \varphi(B_{X^*}) \subseteq I$$

é compacto. Como  $\varphi$  é um homeomorfismo, temos que  $B_{X^*} \subseteq X^*$  é compacto na topologia fraca\*.  
□

**Corolário 7.6.** Seja  $X$  Banach. Se  $X$  é reflexivo,  $B_X$  é compacta na topologia fraca.

*Demonstração.* De fato, como  $X$  é reflexivo, então  $J(B_X) = B_{X^{**}}$ . (De fato, isso caracteriza o espaço ser reflexivo.) Por BAB,  $B_{X^{**}}$  é compacto na fraca\*, basta mostrar que

$$J^{-1} : X^{**} \rightarrow X$$

é contínua da topologia fraca\* para fraca. De fato, basta mostrar que

$$f \circ J^{-1} : X^{**} \rightarrow \mathbb{R}$$

é contínua para todo  $f \in X^*$ . Seja  $F \in X^{**}$ ,

$$J^{-1}(F) = x$$

então,

$$(f \circ J^{-1})(F) = f(x) = J_X(f) = f(x) := F(f)$$

Mais a aplicação

$$X^{**} \ni F \mapsto F(f)$$

é contínua para todo  $f \in X^*$ . Logo,  $J^{-1}$  é contínua.  
□

**Teorema 7.7 (Goldstine).** Seja  $X$  Banach. Então  $J(B_X) \subseteq X^{**}$  é denso em  $B_{X^{**}}$  na topologia fraca\*.

*Demonstração.* Suponha que

$$\overline{B_X}^{w*} \neq B_{X^{**}}.$$

Então, existe  $\xi \in B_{X^{**}} \setminus \overline{B_X}^{w*}$ . Por Hahn-Banach, existe  $f \in X^*$  tal que

$$f(\xi) < \inf_{z \in \overline{B_X}^{w*}} f(z) \leq -\|f\|.$$

Logo,

$$\|f\| < |f(\xi)| \leq \|f\| \|\xi\|.$$

□

**Corolário 7.8.**  $X$  é reflexivo se e só se  $(B_X, \sigma(X, X^*))$  é compacto.



## 8 Krein-Milman

**Definição.** Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $K \subseteq X$  um convexo.

1. Um subconjunto de  $L \subseteq K$  é **extremo** em  $K$  se para todos  $x, y \in K$  e  $\lambda \in (0, 1)$ ,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in L \implies x, y \in L$$

2. Um ponto  $x \in K$  é **extremo** se  $\{x\}$  for extremo em  $K$ . Denotamos por  $E(K) := \{x \in K : x \text{ é extremo em } K\}$ .

Isso é, não posso escrever um ponto extremo como combinação convexa de dois pontos em  $K$ . (O unico jeito de fazer-o é a combinação convexa trivial.)

**Exemplos.**

1.  $X = c_0$ , então  $e_1$  não é extremo. De fato,  $E(B_{c_0}) = \emptyset$ .
2.  $E(B_{\ell_\infty}) = \{(\varepsilon_n) \in \ell_\infty : \varepsilon_n \in \{-1, 1\} \forall n\}$ . Só note que  $\pm 1$  são pontos extremos do intervalo  $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . Assim, quando  $z_n = \pm 1$  é necessário que  $x_n = y_n = z_n$ . Pedindo para toda  $n$ , os vetores são iguais.
3.  $E(B_{\ell_1}) = \{\pm e_n : n \in \mathbb{N}\}$ . A contenção  $\supseteq$  é análoga ao anterior.
4.  $E(B_{\ell_p}) = \partial B_{\ell_p}$ . Comença com  $z, x, y \in \partial B_{\ell_p}$ , suponha  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Meta:  $x, y = z$ . Faiz:

$$1 = \|z\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| = 1,$$

de fato, basta compreender que a desigualdade triangular no  $\ell_p$  é igualdade se e só se um é múltiplo do outro.

**Teorema 8.1 (Krein-Milman).** Sejam  $X$  um EVT e  $K \subseteq X$  compacto e convexo. Então,

$$K = \overline{\text{conv}}(E(K)).$$

**Observação 8.1.** Lembre que

$$\begin{aligned} \text{conv } A &= \bigcap_{\substack{A \subseteq B \\ B \text{ é convexo}}} B \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \lambda_i \in [0, 1], \sum_i \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Como  $K$  é convexo, a contenção  $(\supseteq)$  é clara. Considere

$$\mathbb{P} = \{L \subseteq K : L \neq \emptyset, L \text{ é extremo em } K\}.$$

Meta:

$$\forall L \in \mathbb{P} \exists x \in E(K) : x \in L,$$

em outras palavras, procuramos  $x \in L$  e  $\{x\} \in \mathbb{P}$ .

Note que  $\mathbb{P}$  é um conjunto parcialmente ordenado com a inclusão inversa:

$$L \leq L' \iff L' \subseteq L.$$

Pelo lema de Zorn aplicado a

$$\mathbb{P}_L = \{L' \in \mathbb{P} : L' \subseteq L\}.$$

Obtemos que  $\forall L \in \mathbb{P} \exists S_L \subseteq L$  tal que  $S_L \in \mathbb{P}$ .

**Afirmção.**  $S_L$  só tem um elemento.

Suponha  $|S_L| \geq 2$ , então, por Hahn-Banach existe  $f \in X^*$  tal que  $f|_{S_L}$  não é constante (pegando dos pontos, cada um como um conjunto compacto). Defina

$$\mu = \sup_{x \in S_L} f(x) = \max_{x \in S_L} f(x)$$

e

$$S_L = \{x \in S_L : f(x) = \mu\}.$$

Note que como  $f$  não é constante em  $S_L$ , temos que  $S_L \subsetneq S_L$ .

Ainda, note que  $S_f$  é extremo em  $K$ . Para ver isso, suponha que  $x, y \in K$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_f$ . Como  $S_f \subseteq S_L$  e  $S_L$  é extremo em  $K$ , então  $x, y \in S_L$ . Como

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \mu = \max_{z \in S_L} f(z),$$

segue que  $f(x) = f(y) = \mu$ , logo  $x, y \in S_f$ . Isso contradiz a minimilidade de  $S_L$  em  $\mathbb{P}_L$ , assim  $|S_L| = 1$ .

Suponha que existe  $x_0 \in K \setminus \overline{\text{conv}}(E(K))$ . Por Hahn-Banach, existe  $f \in X^*$  tal que

$$\sup_{x \in \overline{\text{conv}}(E(K))} f(x) < f(x_0).$$

Vamos mostrar que

$$K_f = \{x \in K : f(x) = \max_{z \in K} f(z)\}$$

é um conjunto extremo em  $K$ .

Note que  $K_f \in \mathbb{P}$ , logo  $E(K) \cap K_f \neq \emptyset$ . Se  $y \in E(K) \cap K_f$ ,

$$f(y) \leq \sup_{x \in E(K)} f(x) < f(x_0) \leq f(y).$$

Contradição. □

**Corolário 8.2.** Se  $X$  é um espaço de Banach,  $E(B_{X^*}) \neq \emptyset$ .

**Corolário 8.3.** Como  $E(B_{c_0}) = \emptyset$ ,  $c_0$  não é dual de um espaço de Banach.

**Corolário 8.4.**  $C[0, 1]$  não é um dual, pois  $E(C[0, 1]) = \{-1, 1\}$ .

## 9 Teorema da aplicação aberta

**Definição.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico e  $Y \subseteq X$  um subconjunto.

1.  $Y$  é *denso em lugar nenhum* se  $\overset{\circ}{\overline{Y}} = \emptyset$ .
2. Se  $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_n$  e cada  $Y_n$  é denso em lugar nenhum, então  $Y$  é de *primeira categoria* ou *magro*.
3.  $Y$  é de *segunda categoria* se não for de primeira categoria.

**Teorema 9.1 (da aplicação aberta).** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados com  $X$  Banach,  $T : X \rightarrow Y$  linear e limitado e  $T(X)$  de segunda categoria. Então  $T$  é uma aplicação aberta. Em particular, se  $T$  é sobrejetiva, é aberta.

*Demonstração.* Meta:  $T(U)$  é aberto se  $U \subseteq X$  é aberto. Note que é suficiente mostrar que

$$0 \in \text{int}(T(rB_X)) \quad \forall r > 0.$$

Pegue  $x \in U$ , assim existe  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \subseteq U$ . Como  $0 \in \text{int } T(rB_X)$ , pode pegar  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon B_Y \subseteq T(rB_X)$ . Assim,  $T(x) + \varepsilon B_Y \subseteq T(x + rB_X) \subseteq T(U)$ .

**Afirmção.**

$$\text{int } \overline{T(rB_X)} \neq \emptyset \quad \forall r > 0.$$

*Demonstração.* Como  $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X)$ , como  $T(X)$  não é magro, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  com  $\text{int}(\overline{T(n_0 B_X)}) \neq \emptyset$ . □

**Afirmção.**

$$0 \in \text{int}(\overline{T(rB_X)}) \quad \forall r > 0.$$

*Demonstração.* Note que

$$\overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} - \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} \subseteq \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right) - T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} \subseteq \overline{T(rB_X)}.$$

Pela afirmação anterior, existe um aberto magro não vazio com  $U \subseteq \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)}$ . Logo

$$0 \in U - U \subseteq \overline{T(rB_X)}$$

□

**Afirmção.**

$$\overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)} \subseteq T(rB_X) \quad \forall r > 0.$$

*Demonstração.* Fixe  $y \in \overline{T\left(\frac{r}{2}B_X\right)}$ . Vamos construir uma sequência  $(x_n)$  em  $X$  e  $(y_n)$  em  $Y$  tais que

1.  $y_1 = y$ .
2.  $y_n \in \overline{T\left(\frac{r}{2^n}B_X\right)}$ .
3.  $x_n \in \frac{r}{2^n}B_X$ .
4.  $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$ .

Suponha  $y_1, \dots, y_n$  e  $x_1, \dots, x_{n+1}$  foram escolhidos. Note que

$$y_n - \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}}B_X\right)}$$

é uma vizinhança de  $y_n$ . Isso é,  $y_n \in \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}}B_X\right)}$ , assim existe  $x_n$  que aproxima  $y_n$  do seguinte jeito:

$$\exists x_n \in \frac{r}{2^n}B_X : \quad T(x_n) \in y_n - \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}}B_X\right)}.$$

Logo,

$$y_{n+1} = y_n - T(x_n) \in \overline{T\left(\frac{r}{2^{n+1}}B_X\right)}.$$

Como  $X$  é Banach,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge. Mais ainda,  $x \in rB_X$ . Como  $T$  é contínuo,

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(x_n)$$

Para calcular isso a gente calcula somas parciais:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N T(x_n) &= \sum_{n=1}^N y_n - y_{n+1} \\ &= y_1 - y_{N+1}. \end{aligned}$$

Como  $y_n \rightarrow 0$ , concluímos que  $T(x) = y$ . □

Assim, zero tem uma vizinhança em  $T(r, B_X)$ . □

**Corolário 9.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach,  $T : X \rightarrow Y$  operador limitado sobrejetivo. Então  $T$  é aberto. Logo, existe  $c > 0$  tal que  $\forall y \in Y$  existe  $x \in X$  tal que

$$Tx = y \quad \text{e} \quad \|x\| \leq c\|y\|.$$

*Demonstração.* Teorema de categoria de Baire. □

**Corolário 9.3.** Se ainda  $T$  for injetivo, então  $T^{-1}$  é limitado.

**Corolário 9.4.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  espaço de Banach e  $(\|\cdot\|)$  uma norma Banach em  $X$ . Se  $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$  for contínua, então  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ .

**Definição.** Sejam  $X, Y$  espaços de Banach e  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .  $T$  é *compacto* se  $\overline{T(B_X)}$  for compacto.

**Exemplos.**

1. Se  $\dim Y < \infty$ ,  $T$  é compacto.
2.  $K(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ é compacto}\}$  é um espaço de Banach.
3. Note que " $\ell_\infty \subseteq \mathcal{L}(\ell_2)$ " de forma canônica: para  $a \in \ell_\infty$ ,

$$(Ta)x = (a_n x_n)_n$$

Note que  $Ta$  é compacto se e só se  $a \in c_0$ .

**Corolário 9.5.** Se  $X$  e  $Y$  forem Banach e  $\dim Y = \infty$ , então nenhum operador compacto  $X \rightarrow Y$  é sobrejetivo.

## 10 Teorema do gráfico fechado

**Teorema 10.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $T : X \rightarrow Y$  linear (não necessariamente contínuo). Se

$$\text{graph}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

for fechado, então  $T$  é limitado.

*Demonstração.* Definimos uma norma  $\|\cdot\|$  em  $X \times Y$  como

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Como todas as normas são equivalentes no produto (pois ele é "dimensão 2"),  $\text{graph } T$  é fechado em  $(X \times Y, \|\cdot\|)$ . Logo, como  $T$  é linear  $\text{graph } T$  é um espaço vetorial e por ser fechado, é Banach. Para usar o teorema da aplicação aberta precisamos um mapa contínuo: usaremos as projeções.

Note que a projeção  $\pi_1 : \text{graph } T \rightarrow X$  dada por  $(x, Tx) \mapsto x$  é contínuo. De fato, trata-se de um operador sobrejetivo, injetivo e contínuo, é um isomorfismo de espaços de Banach, ie.  $\pi_1^{-1}$  é contínua.

Como  $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ , onde  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  é a projeção canônica,  $T$  é contínuo.  $\square$

## 11 Espaços complementados

**Definição.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $Y \subseteq X$  um subespaço fechado.  $Y$  é *complementado* em  $X$  se existe  $Z \subseteq X$  subespaço fechado tal que

$$X = Y \oplus Z,$$

ie.,  $X = Y + Z$  e  $Z \cap Y = \{0\}$ .

**Proposição 11.1.**

1. Se  $\dim Y < \infty$ ,  $Y$  é complementado.
2. Se  $Y$  é fechado e  $\operatorname{codim} Y < \infty$ ,  $Y$  é complementado.

*Demonstração.*

1. Seja  $y_1, \dots, y_n$  uma base de  $Y$ . Defina  $\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^* \in Y^*$  por  $\tilde{y}_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ . Por Hahn-Banach, existem  $y_1, \dots, y_n \in X^*$  extensões. Defina

$$Z = \bigcap_{i=1}^n \ker y_i^*.$$

Logo  $Z$  é fechado. Mais ainda,  $X = Y \oplus Z$ . De fato, dado  $x \in X$ , defina

$$y = \sum_{i=1}^n y_i^*(x) y_i.$$

2.  $\operatorname{codim} Y = \dim(X/Y) < \infty$ . Seja

$$y_1 + Y, \dots, y_n + Y$$

uma base para  $X/Y$ . Pegue  $f_1, \dots, f_n \in (X/Y)^*$  tais que  $f_i(y_i + Y) = \delta_{ij}$ . Então, se  $\pi : X \rightarrow X/Y$  é o mapa quociente, temos

$$Y = \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i \circ \pi).$$

Defina  $Z = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$ .  $Z$  é fechado. Como  $y_1 + Y, \dots, y_n + Y$  é base de  $X/Y$ ,  $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \in Y \implies \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$ . Logo,  $Y \cap Z = \{0\}$ .

Para ver que  $X = Y + Z$ , faça:  $x \in X$ , escreva

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^n f_i(\pi x)(y_i + Y),$$

defina

$$z = \sum_{i=1}^n f_i(\pi x) y_i \in Z,$$

e obtenha  $y = x - z$ .

□

**Observação 11.1.** Nem todos os subespaços fechados são complementados:  $c_0 \subseteq \ell_\infty$  não é complementado.

**Definição.** Seja  $X$  um espaço de Banach, um operador linear limitado  $p : X \rightarrow X$  é uma *projeção* se  $p^2 = p$ .

**Proposição 11.2.**  $X$  Banach,  $Y \subseteq X$  é complementado se e só se  $Y = \text{img } p$  para alguma projeção  $p : X \rightarrow X$ .

*Demonstração.*

( $\Leftarrow$ ) Defina  $Z = \text{img}(\text{Id} - p)$ . Então  $Y = \ker(\text{Id} - p)$  e  $Z = \ker p$ , que são fechados.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $Z \subseteq X$  fechado tal que

$$X = Y \oplus Z.$$

Definamos  $p : X \rightarrow X$  como

$$px = y_x$$

onde  $y_x$  é o único elemento de  $Y$  tal que  $x - y_x \in Z$ .

$p$  é linear.

$p$  é contínuo. Considere o quociente

$$\pi : X = Y \oplus Z \rightarrow X/Z.$$

Note que

$$\pi|_Y : Y \rightarrow X/Z$$

é uma bijeção. Pelo teorema da aplicação aberta,  $(\pi|_Y)^{-1}$  é contínuo. Como  $p = (\pi|_Y)^{-1} \circ \pi$ ,  $p$  é contínuo.  $\square$

## 12 Operadores adjuntos

**Definição.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $T : X \rightarrow Y$  um operador. O *adjunto* de  $T$  é o operador

$$T^* : Y^* \rightarrow X^*$$

dado por

$$(Tf)x = f(Tx) \quad \forall f \in Y^*, \forall x \in X.$$

**Exercício.**  $\|T\| = \|T^*\|$ .

*Demonstração.* content...  $\square$

**Proposição 12.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e considere  $T : X \rightarrow Y$  linear.

$$T \text{ é contínuo} \iff T^* \text{ é fracamente contínuo.}$$

*Demonstração.* Exer.  $\square$

**Proposição 12.2.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e considere  $S : Y^* \rightarrow X^*$  linear.

$$S \text{ é fraco}^* \text{ contínuo} \iff \exists T \in \mathcal{L}(X, Y) : S = T^*.$$

*Demonstração.* (  $\Leftarrow$  ). Já está.

(  $\Rightarrow$  ). Queremos:  $(Sf)x = f(Tx)$ . Para cada  $x \in X$ , defina

$$\begin{aligned}\xi_x : Y^* &\mapsto \mathbb{R} \\ f &\mapsto (Sf)x\end{aligned}$$

Como  $S$  é contínua\*, cada  $\xi_x$  é contínuo\*.

Logo  $\forall x \in X$ , existe um único  $y \in Y$  tal que

$$\xi_x = J_Y y.$$

Defina  $Tx = y$ .

( $T$  é linear.)

$$\begin{aligned}J_Y(T(\lambda x + y)) &= \xi_{\lambda x + y} \\ &= \lambda \xi_x + \xi_y \\ &= \lambda J_Y(Tx) + J_Y(Ty) \\ &= J_Y(\lambda Tx + Ty)\end{aligned}$$

( $T$  é limitado)

$$\|Tx\| = \|J_Y(Tx)\| = \|\xi_{Tx}\| \leq \|\xi\| \|x\|$$

( $S = T^*$ )

$$(T^*f)x = f(Tx) = J_Y(Tx)f = \xi_x f = (Sf)x$$

□

## 13 Universalidade

Sabemos que para qualquer espaço separável  $X$  existe uma isometria de  $X \hookrightarrow \ell_\infty$ . Seria bom ter um mergulho num espaço mais pequeno do que  $\ell_\infty$ , um que fosse separável.

**Teorema 13.1 (Banach-Mazur).** Seja  $X$  um espaço de Banach separável. Então existe uma isometria (não necessariamente surjetiva)

$$X \rightarrow C(\Delta)$$

onde  $\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

**Observação 13.1.** Relembre. Seja  $K$  um espaço métrico compacto. Então existe uma sobrejeção contínua  $\Delta \rightarrow K$ .



*Demonstração.* Seja  $X$  separável. Por Banach-Alaouglu,  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  é compacto. Defina para  $x \in X$ ,  $\varphi x \in C(B_{X^*})$  dada por  $(\varphi x)f = fx$ . Então  $\varphi$  é uma isometria linear.

Como  $X$  é separável,  $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  é metrizável e podemos pegar  $\alpha : \Delta \rightarrow B_{X^*}$  uma sobrejeção contínua. Defina

$$\psi : C(B_{X^*}) \rightarrow C(\Delta)$$

como

$$(\psi\xi)x = \xi(\alpha x) \quad \forall \xi \in C(B_{X^*}) \quad \forall x \in \Delta.$$

Então,  $\psi$  é uma isometria e em conclusão,  $\psi \circ \varphi : X \rightarrow C(\Delta)$  é a isometria procurada.  $\square$

**Exercício.** Se  $X$  é um espaço metrico compacto,  $C(X)$  é separável.

*Demonstração.* Como  $X$  é compacto, ele é separável. Seja  $(x_n) \subset X$  denso. Defina para cada  $n \in \mathbb{N}$  a função  $f_n(x) = d(x, x_n)$ . Ela é contínua, pois

$$|d(x, x_n) - d(x_n, y)| < d(x, y)$$

pela desigualdade triangular inversa. Ainda, o conjunto de funções geradas por  $(f_n)$  e identidade em  $X$  é um álgebra que separa pontos **pela densidade de  $(x_n)$**  e contém as constantes. Logo, pelo teorema de Weierstrass,  $(f_n)$  é denso em  $C(K)$ .  $\square$

## 14 Teorema de representação

**Teorema 14.1.** Sejam  $K$  compacto e Hausdorff e  $F \in C(K)^*$ . Então existe uma medida de Borel com signal de variação limitada  $\mu$  em  $K$  tal que

$$Ff = \int_K f d\mu$$

e

$$\|F\| = |\mu|(K).$$

Daqui em diante  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Uma  **$\sigma$ -álgebra de Borel** sobre  $X$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todos os abertos de  $X$ . Uma medida definida sobre  $(X, \mathcal{B})$  é chamada **medida Boreliana**. Diremos que uma medida de Borel  $\mu$  é **regular** se

$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ \text{compacto}}} \{\mu(K)\}.$$

Uma medida é dita ter **signal** se assume valores negativos. Definimos a **variação total** de  $\mu$  como  $|\mu| : \mathcal{B} \rightarrow [-\infty, \infty]$  dada por

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_n)| : \{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B} \text{ que particionam a } B \right\}.$$

Sabemos que  $|\mu|$  é uma medida positiva finita em  $(X, \mathcal{B})$ . Definimos o seguinte conjunto:

$$M(X) := \{\mu : \mu \text{ é Boreliana, finita e com signal}\}.$$

Definimos  $\|\cdot\|_M : M(X) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|\mu\|_M = |\mu|(X).$$

Note que  $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$ .

**Exercício.**  $(M, \|\cdot\|_M)$  é Banach.

**Exemplo.** Considere  $C(X)$ ,  $\mu \in M(X)$ . Defina

$$\begin{aligned} \varphi : C(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_X f(x) \mu(X) \end{aligned}$$

Então  $\varphi$  é linear e

$$|\varphi f| = \left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \leq \int |f(x)| d|\mu|(x) \leq \|f\|_\infty \int d|\mu|(x) = \|f\|_\infty |\mu|(X) = \|f\|_\infty \|\mu\|_M.$$

Isso é

$$|\varphi f| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_M.$$

Daí  $\|\varphi\| \leq \|\mu\|_M$ . De fato, escolhendo  $f$  adequada, obtemos que  $\|\varphi\| = \|\mu\|_M$ .

**Definição.** Seja  $\varphi \in C(X)^*$ . Dizemos que  $\varphi$  é **positivo** se  $\varphi f \geq 0$  sempre que  $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ .

Observe que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty,$$

assim definimos

$$g_\pm(x) = \|f\|_\infty \pm f(x) \in C(X)$$

de forma que

$$g_\pm(x) \geq 0.$$

Assim,  $\varphi g_\pm$ . Daí

$$\|f\|_\infty \varphi(1) \pm \varphi f \geq 0.$$

Ou seja

$$|\varphi f| \leq \varphi(1) \|f\|_\infty \quad \forall f \in C(X).$$

Além disso,  $\|f\|_* = \varphi(1)$ .

**Teorema 14.2.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $\varphi \in C(X)^*$ . Se  $\varphi$  é positivo, então existe uma medida  $\mu \in M(X)$  positiva tal que

$$\varphi f = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

*Demonstração.* Fixe  $\varphi \in C(X)^*$ . Seja  $A \subseteq X$  aberto. Deje a função

$$r_\varphi(A) = \sup\{\varphi f : \text{supp } f \subseteq A, 0 \leq f(x) \leq 1\}.$$

Com isso defina a aplicação

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [-\infty, \infty]$$

dada por

$$\mu_*(B) = \inf\{r_\varphi(A) : B \subseteq A \text{ e } A \text{ é aberto}\}.$$

Vamos mostrar que  $\mu_*$  é uma medida exterior em  $X$ , ie.,

1.  $\mu_*(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu_*(B_1) \leq \mu_*(B_2)$  sempre que  $B_1 \subseteq B_2$ .
3. Se  $(B_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$ , então

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu_*(B_n).$$

1. Já está. Para 2. considere  $B_1 \subseteq B_2$ . Para  $A$  aberto tal que  $B_2 \subseteq A$  temos

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq A,$$

logo

$$\{r_\varphi(A) : B \subseteq A \text{ aberto}\} \subseteq \{r_\varphi(A) : B_1 \subseteq A, \text{ aberto}\}.$$

Assim,  $\mu_*(B_1) \leq \mu_*(B_2)$ .

Para 3. considere  $(B_n)_{n=1}^\infty$  uma coleção de abertos e

$$B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n.$$

Considere  $f \in C(X)$  tal que

$$\text{supp } f \subseteq B, \quad \text{e} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Como  $X$  é compacto e  $\text{supp } f$  é fechado (por definição), temos que  $\text{supp } f$  é compacto. Como  $\text{supp } f \subseteq B$ , a menos de reordenação existem  $B_1, \dots, B_N$  tais que

$$\text{supp } f \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_n.$$

Considere  $\{\eta_n\}_{n=1}^N$  uma partição da unidade para  $\{B_1, \dots, B_N\}$ . Isso é, as  $\eta_i$  são funções contínuas em  $\text{supp } f$  tais que

1.  $0 \leq \eta_i(x) \leq 1 \quad \forall i$ .
2.  $\text{supp } \eta_i \subseteq B_i \quad \forall i$ .

$$3. \sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1 \quad \forall x \in \text{supp } f.$$

Com isso,

$$\varphi f = \varphi(f * 1) = \varphi\left(f \sum_{i=1}^N \eta_i(x)\right) = \varphi(f \eta_i(x)) = \sum_{i=1}^N \varphi(f \eta_i) \leq \sum_{i=1}^N r_\varphi(B_i) \leq \sum_{i=1}^\infty r_\varphi(B_i).$$

Pois,  $\text{supp}(f \eta_i) \subseteq B_i$  e  $0 \leq f \eta_i \leq 1$  para toda  $i = 1, \dots, N$ . Logo,

$$\begin{aligned} r_\varphi(B) &\leq \sum_{i=1}^N r_\varphi(B_i) \\ \implies r_\varphi\left(\bigcup_i B_i\right) &\leq \sum_i r_\varphi(B_i). \end{aligned}$$

Como cada  $B_i$  é aberto,

$$\mu_*\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i \mu_*(B_i).$$

Agora seja  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$  uma coleção de conjuntos. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  escolha  $B_k$  aberto tal que

$$X_k \subseteq B_k \quad \text{e que} \quad \mu_*(B_k) \leq \mu_*(X_k) + \varepsilon 2^{-k}$$

que é possível pela definição dada por um infimo.

Como  $\bigcup_{k=1}^\infty X_k \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ , pela propriedade 2., temos que

$$\mu_*\left(\bigcup_k X_k\right) \leq \mu_*\left(\bigcup_k B_k\right) \leq \sum_k \mu_*(B_k) \leq \sum_k (\mu_*(x_k) + \varepsilon 2^{-k}) = \sum_k \mu_*(x_k) + \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Logo,  $\mu_*\left(\bigcup_{k=1}^\infty X_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu_*(X_k)$ . Portanto,  $\mu_*$  é uma medida exterior. Vamos provar que  $\mu_*$  é métrica, ou seja, se  $X_1, X_2 \subseteq X$  com  $d(X_1, X_2) > 0$ , então

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

De fato, sejam  $X_1, X_2 \subseteq X$  com  $d(X_1, X_2) > 0$ . Como  $X$  é métrico, existem abertos  $B_1, B_2$  tais que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  e  $X_i \subseteq B_i$  para  $i = 1, 2$ . Daí, considerando  $B$  um aberto com  $X_1 \cup X_2 \subseteq B$ , então

$$(B \cap B_1) \sqcup (B \cap B_2) \subseteq B.$$

Desde que  $X_i \subseteq B \cap B_i$  para  $i = 1, 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \mu_*(B) &\geq \mu_*((B \cap B_1) \sqcup (B \cap B_2)) \\ &= \mu_*(B \cap B_1) + \mu_*(B \cap B_2) \\ &\geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_*(B) \geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2) \quad \forall \text{aberto } B \supseteq X_1 \cup X_2.$$

assim,

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) \geq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Como  $\mu_*$  é exterior,

$$\mu_*(X_1 \cup C_2) \leq \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Portanto,

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) = \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

Em conclusão,  $\mu_*$  é uma medida métrica exterior em  $X$ . Desse modo, existe uma medida  $\mu$  em  $(X, B)$  finita, tal que  $\mu_*|_B = \mu$ . Como  $\mu(X) = \mu_*(X) = \|\varphi\|_* = \varphi(1)$ . Nos resta mostrar que  $\mu$  representa  $\varphi$ . Considere  $f \in C(X)$ . Desde que  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ , onde  $f^+$  e  $f^-$  são as partes positivas e negativas de  $f$ . Assuma sem perda de generalidade que  $0 \leq f(x) \leq 1$  (usando ainda que  $f$  é limitada por ser definida num compacto).

Vamos descompor  $f$  da seguinte maneira. Fixe  $N \in \mathbb{N}$  e denote  $B_0 = X$ . Para cada  $n \geq 1$ , seja

$$B_n = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{n-1}{n} \right\}.$$

Temos  $B_{n+1} \subseteq B_n$  e  $B_{N+1} = \emptyset$ . Defina

$$f_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & x \in B_{n+1} \\ f(x) - \frac{n-1}{N}, & x \in B_n \setminus B_{n+1} \\ 0, & x \in X \setminus B_n \end{cases}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $f_n \in C(X)$ , vale

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x).$$

Pela definição de  $f_n$ , temos

- $Nf_n(x) = 1$  em  $B_{n+1}$ .
- $\text{supp}(Nf_n) \subseteq \overline{B_n} \subseteq B_{n+1}$ .
- $0 \leq Nf_n(x) \leq 1$ .

Como cada  $B_n$  é aberto,

$$\mu(B_{n+1}) \leq \varphi(Nf_n) \leq \mu(B_{n-1})$$

Por linearidade,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(B_{n+1}) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(N \cdot f_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(B_{n-1}) \quad (2)$$

É possível mostrar que

$$\mu(B_{n+1}) \leq \int_X Nf_n(x) d\mu(x) \leq \mu(B_n).$$

Basta observar que

$$\int_X N f_n(x) d\mu(x) = N \int_{B_n \setminus B_{n+1}} f(x) d\mu(x) - (n-1)\mu(B_n \setminus B_{n+1}) + \mu(B_{n+1}).$$

Daí,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(B_{n+1}) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_X N f_n(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) \quad (3)$$

Juntando eqs. (2) and (3) podemos obter

$$\left| \varphi f \int_x f(x) d\mu(x) \right| \leq \frac{2\mu(x)}{N} \quad \forall N > 0.$$

Tomando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Para unicidade, considere  $\mu' \in M(X)$  positiva e finita tal que

$$\varphi f = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

Como  $\mu, \mu'$  são Borelianas, basta verificar que

$$\mu = \mu' \text{ em abertos.}$$

Considere  $B$  aberto e  $f \in C(X)$  com  $0 \leq f(x) \leq 1$  e  $\text{supp } f \subseteq B$ . Então

$$\varphi f = \int_X f(x) d\mu'(x) = \int_B f(x) d\mu'(x) \leq \int_B d\mu'(x) = \mu'(B).$$

Tomando o supremo sobre  $f$ ,

$$\mu(B) = \mu_*(B) = r_\varphi(B) \leq \mu'(B).$$

Recíprocamente, como  $\mu$  é Boreliana e finita,  $\mu$  é regular. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $K \subseteq B$  compacto tal que

$$\mu'(B) = \mu'(K) + \varepsilon$$

por definição de supremo.

Como  $K \cap (X \setminus B) = \emptyset$ , considere  $f \in C(X)$ , com  $0 \leq f(x) \leq 1$ ,  $\text{supp } f \subseteq B$  e  $f(x) = 1 \quad \forall x \in K$ . Daí

$$\begin{aligned} \mu'(B) &\leq \mu'(K) + \varepsilon \\ &= \int_X 1 d\mu'(x) + \varepsilon \\ &= \int_X f(x) d\mu'(x) + \varepsilon \\ &\leq \int_X f(x) d\mu(x) + \varepsilon \\ &= \varphi f + \varepsilon \\ &\leq \mu(B) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mu'(B) \leq \mu(B)$ . □

**Proposição 14.3.** Sejam  $(X, d)$  espaço métrico compacto e  $\varphi \in C(X)^*$ . Então existem funcionais  $\varphi^+ \in C(X)^*$  positivos tais que

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$$

além disso,

$$\|\varphi\|_* = \varphi^+(1) + \varphi^-(1).$$

**Teorema 14.4.** Seja  $(X, d)$  espaço métrico compacto e  $\varphi \in C(X)^*$ . Então existe  $\mu \in M(X)$  única tal que

$$\varphi f = \int_X f(x) \mu(x) \quad \forall f \in C(X).$$

Além disso,

$$\|\varphi\|_* = \|\mu\|_M \quad (M(X) \cong C(X)^*).$$

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in C(X)^*$ . Pela proposição anterior, existem funcionais contínuos positivos  $\varphi^\pm \in C(X)^*$  tais que  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ . Pelo teorema anterior existem medidas positivas  $\mu_\pm \in M(X)$  tais que

$$\varphi^\pm f = \int_X f(x) \mu_\pm(x).$$

Defina

$$\mu = \mu_+ - \mu_-.$$

Então  $\mu \in M(X)$  é tal que

$$\varphi f = \varphi^+ f - \varphi^- f = \int_X f(x) d\mu_+(x) - \int_X f(x) d\mu_-(x) = \int_X f(x) d(\mu_+ - \mu_-)(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\varphi f| &= \left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_X |f(x)| d|\mu|(x) \\ &\leq \|f\|_\infty |\mu|(X) \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\varphi\| \leq \|\mu\|(X) = \|\mu\|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\mu|(X) &\leq |\mu_+|(X) + |\mu_-|(X) \\ &= \varphi^+(1) + \varphi^-(1) \\ &= \|\varphi\|_* \\ \implies \|\varphi\|_* &= |\mu|(X) = \|\mu\|_M. \end{aligned}$$

Para provar unicidade, seja  $\mu' \in M(X)$  tal que

$$\int_X f(x) d\mu(X) = \varphi f = \int_X f(x) d\mu'(x).$$

Definindo

$$\nu = \mu - \mu'$$

obtemos

$$\int_X f(x) d\nu(x) = 0. \quad (4)$$

Definindo

$$\nu = \frac{1}{2}(|\nu| + \nu) - \frac{1}{2}(|\nu| - \nu) = \nu^+ - \nu^-,$$

são medidas positivas. Definindo  $\psi^\pm \in C(X)^*$ ,

$$\psi^\pm f = \int_X f(x) d\nu^\pm(x).$$

Por eq. (4) temos que

$$\psi^+ f = \psi^- f, \quad \forall f \in C(X).$$

Pela unicidade da medida  $\nu^+ = \nu^-$ . Então,

$$\nu = \nu^+ - \nu^- = 0 \implies \mu = \mu'.$$

□

## 15 Teorema de convexidade de Lyapunov

**Definição.** Uma medida com sinal  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  é *não atômica* se para todo  $A \in \mathcal{A}$  com  $|\mu|(A) > 0$  existe  $B \in \mathcal{A}$  com  $B \subseteq A$  e  $|\mu|(B) < |\mu|(A)$ .

**Teorema 15.1.** Sejam  $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  medidas com sinal não atômicas. Então a imagem de  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\mu(A) = (\mu_1(A), \dots, \mu_n(A))$$

é compacta e convexa. (Isso é, uma medida vetorial de dimensão finita não atômica tem imagem compacta e convexa.)

**Observação 15.1.** Relembre. Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida  $\sigma$ -finito. Considere  $L_1(\mu)$  e  $L_\infty(\mu)$ . Onde  $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ . Temos que

$$f \in L_1 \text{ se } \|f\|_1 = \int |f| d\mu < \infty.$$

A norma em  $L_\infty$  é o *supremo essencial*,

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) = 0\}.$$



O dual de  $L_1(\mu)$  é  $L_\infty(\mu)$  pois associamos a  $f \in L_\infty(\mu)$  e  $g \in L_1(\mu)$  o número  $f(g) = \int fg d\mu$ . O dual de  $L_\infty(\mu)$  são as medidas com sinal **finitamente aditivas** (na verdade não são medidas pois não são numeravelmente aditivas), **absolutamente contínuas** em relação a  $\mu$  com a norma da variação limitada.

Existe uma correspondência entre funções contínuas  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  limitadas com funções contínuas na compactificação de Stone-Čech dos naturais  $\beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim  $\ell_\infty \approx C(\beta\mathbb{N})$ . Assim, o seu dual pode ser interpretado mediante o teorema de representação da seção anterior.

*Demonstração.* Defina

$$\nu = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|.$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda : L_\infty(0) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto \left( \int f d\mu_1, \dots, \int f d\mu_n \right), \end{aligned}$$

que é um operador legal entre espaços de Banach.

**Afirmção.**  $\Lambda$  é fracamente\* contínua.

Lembre que

**Teorema 15.2 (Radon-Nikodym).** Como cada  $\mu_i$  é absolutamente contínua em relação a  $\nu$ , existem  $f_i \in L_1(\nu)$  tais que

$$\int f d\mu_i = \int f f_i d\nu.$$

A afirmação segue de que ao tomar funcionais e avaliar em elementos de uma rede e simplesmente integrar, assim aplicamos o teorema de Radon-Nikodym.

Para aplicar Krein-Milman, considere o conjunto convexo e fracamente\* fechado:

$$K = \{f \in L_\infty(\nu) : 0 \leq f \leq 1\}.$$

**Exercício.** De fato,  $K$  é fracamente\* fechado. (Pegue uma rede convergente. Ao aplicar um funcional (integrar), se esse funcional não converge vai obter um conjunto de medida positiva onde os valores de  $f$  estão por arriba de 1, assim comparando as integrais, vai obter uma contradição).

Por B-A,  $K$  é convexo e fracamente\* compacto. Assim,  $\Lambda(K)$  é convexo e compacto.

**Afirmção.** A imagem da nossa medida é  $\Lambda(K)$ .

( $\subseteq$ ). Fixe  $A \in \mathcal{A}$ . Então,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= (\mu_1(A), \dots, \mu_n(A)) \\ &= \left( \int \chi_A d\mu_1, \dots, \int \chi_A d\mu_n \right) \\ &= \Lambda(\chi_A)\end{aligned}$$

e  $\chi_A \in K$ .

( $\supseteq$ ). Fixe  $\xi \in \Lambda(K)$  e considere

$$K_\xi = \Lambda^{-1}(\{\xi\}) \cap K.$$

Como  $K_\xi$  é convexo e fraco\*-compacto, existem pontos extremos, ie.  $E(K_\xi) \neq \emptyset$ .

Seja  $f \in E(K_\xi)$  e vamos mostrar que  $f = \chi_A$  para algum  $A \in \mathcal{A}$ . Caso contrário, existe  $A \in \mathcal{A}$  com  $\nu(A) > 0$  e  $r > 0$  tal que

$$r \leq f(x) \leq 1 - r \quad \forall x \in A.$$

Vamos mostrar que é possível “perturbar”  $f$  em  $A$ . Defina

$$X = L_\infty(A, \mu) \subseteq L_\infty(\mu).$$

Como  $\nu$  é não atômica (pois é uma soma de medidas não atômicas), temos que  $\dim(X) = \infty$ . Como  $\text{codim}(\ker \Lambda) < \infty$ , temos que  $X \cap \ker \Lambda \neq \emptyset$ . Pegue  $g \in X \cap \ker \Lambda \setminus \{0\}$  com

$$\|g\|_\infty < r.$$

Logo  $f \pm g \in K_\xi \setminus \{f\}$ . Como

$$f = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}(f - g),$$

$f$  não está em  $E(K_\xi)$ . □

**Teorema 15.3 (Markov-Kakutani).** Seja  $X$  um espaço de Banach,  $K \subseteq X$  convexo e (fracamente) compacto. Considere  $\mathcal{T}$  uma família de mapas (w) contínuos  $K \rightarrow K$  tais que

1.  $T \in \mathcal{T}$  é *afim*, ie.

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Tx + (1 - \lambda)Ty \quad \forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

2.  $TS = ST \quad \forall S, T \in \mathcal{T}$ .

Então existe  $x \in K$  tal que  $Tx = x$  para toda  $T \in \mathcal{T}$ .

*Demonstração.* Seja  $T \in \mathcal{T}$ . Vamos mostrar que  $T$  tem um ponto fixo. Defina

$$\begin{aligned}A &= \{(x, x) : x \in K\} \\ B &= \{(x, Tx) : x \in K\}\end{aligned}$$

Note que  $T$  tem um ponto fixo se e só se  $A \cap B \neq \emptyset$ . Suponha  $A \cap B = \emptyset$ . Considere  $X \times X$  com a norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Como  $T$  é afim,  $B$  é convexo.  $A$  também, assim, como  $T$  é contínua,  $A$  e  $B$  são compactos. Por Hahn-Banach, existe  $f \in (X \times X)^*$  e  $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(x, x) < \alpha < \beta < f(x, Tx) \quad \forall x \in K.$$

Logo,

$$f(x, Tx) - f(x, x) > \beta - \alpha \quad \forall x \in K.$$

Que pode ser escrito como

$$f(0, Tx) - f(0, x) > \beta - \alpha \quad \forall x \in K.$$

Logo, para toda  $n$  e para toda  $x \in K$ , temos

$$f(0, T^n(x)) - f(0, T^{n-1}(x)) > \beta - \alpha.$$

Usando uma soma telescópica, obtemos que

$$f(0, T^n x) - f(0, x) > n(\beta - \alpha)$$

ou seja, que  $f$  não pode ser limitado em  $K$ . Mais  $f$  é contínuo em  $K$  compacto.

Para o caso de muitos funcionais, consideramos para todo  $T \in \mathcal{T}$

$$K_T = \{x \in K : Tx = x\}.$$

que são compactos e não vazios. Basta mostrar que a interseção deles é não vazia. Por compacidade, basta mostrar que qualquer quantidade finita deles tem interseção não vazia, ie.

$$\bigcap_{T \in S} K_T \neq \emptyset \quad \forall S \subseteq \mathcal{T} \text{ finito.}$$

Pegue  $S = \{T_1, \dots, T_n\}$ . Fazemos assim:

Aplica o teorema a  $T_1 : K \rightarrow K$ .

Aplica o teorema a  $T_2 : K_{T_1} \rightarrow K_{T_1}$   $T_1 T_2 = T_2 T_1$ .

$\vdots$

$$\emptyset = ((K_{T_1})) \subseteq \bigcap K_T.$$

□

## 16 Grupos amenos

**Definição.** Uma *média* em um conjunto  $X$  é um elemento  $f \in \ell_\infty(X)^*$  tal que  $f$  é *positivo* ( $F = (F_x)_{x \in X} \in \ell_\infty(X)$  com  $F_x \geq 0 \forall x \implies f(F) \geq 0$ ) e  $\|f\| = 1$ .

**Exercício.**  $f$  é simplesmente uma *medida finitamente aditiva de probabilidade* em  $X$ .  $\mu$  medida de probabilidade de  $X$ ,  $\mu(F) = \int F d\mu$ .

**Definição.**

1. Se  $G$  é um grupo,  $G$  age em  $\ell_\infty(G)$  com

$$g \cdot a(h) = a(g^{-1}h),$$

$$\forall a \in \ell_\infty(G) \forall h \in G.$$

2. Uma média  $f \in \ell_\infty(G)^*$  é *invariante* se

$$f(a) = f(g \cdot a) \quad \forall a \in \ell_\infty(G) \forall g \in G.$$

Isso é,

$$f(\chi_A) = f(g(\chi_A)) = f(\chi_{gA}).$$

3. Um grupo  $G$  é *ameno* se existe uma média invariante  $f$  em  $G$ .

**Exemplos.**

1. Grupos finitos com a medida de contagem promediada.
2.  $\mathbb{F}_n$  não é ameno para  $n > 1$ .

**Afirmção.**  $\mathbb{F}_2$  não é ameno.

Suponha  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ . Para cada  $c \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ ,  $\mathbb{F}_2^c = \{x \in \mathbb{F}_2 : x = c \dots (\text{começa com } c)\}$ . Note que

$$a^{-1}\mathbb{F}_2^a = \mathbb{F}_2^a \sqcup \mathbb{F}_2^b \sqcup \mathbb{F}_2^{b^{-1}} \sqcup \{e\}.$$

Logo,

$$\mu(\mathbb{F}_2^b \sqcup \mathbb{F}_2^{b^{-1}} \sqcup \{e\}) = 0.$$

de forma análoga

$$\mu(\mathbb{F}_2^a \sqcup \mathbb{F}_2^{a^{-1}}) = 0,$$

mais então  $\mu(\mathbb{F}_2) = 0$ , que não é possível.

3.  $\mathbb{Z}$  é ameno.

**Teorema 16.1.** Grupos abelianos são amenos.

**Demonstração.** Seja  $M(G) \subseteq \ell_\infty(G)^*$  o espaço das médias.

**Exercício.**  $M(G)$  é convexo e fracamente\* compacto.

Para aplicar o teorema de Markov-Kakutani precisamos uma família de operadores, cujo ponto fixo será a média invariante. Defina para cada  $g \in G$ , o operador  $T_g : G \rightarrow G$  como

$$T_g f = f(g \cdot -),$$

**Exercício.**  $T_g$  está bem definido, é fraco\* contínuo, afim e  $(T_g)_{g \in G}$  comutam.

Por Markov-Kakutani, existe uma média  $f \in M(G)$  tal que

$$T_g f = f \quad \forall g \in G.$$

**Exercício.**  $f$  é invariante.

□

## 17 Espaços de Hilbert

**Definição.** Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

é um produto interno se

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$ .
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
4.  $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x, y, z \in X$ .

**Exemplos.**

1.  $\mathbb{R}^n$ . Se  $(x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  com o produto interno  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .
2.  $\mathbb{C}^n$ . Se  $(x_i)_{i=1}^n, y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$  com o produto interno  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ .
3.  $\ell_2$  com  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$  que é finito por Hölder.
4.  $C([0, 1])$  com  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \overline{g}$ .
5.  $L_2$  com  $\int f \overline{g}$ .

**Definição.**

1. Em um espaço  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço com produto interno, dois elementos  $x, y \in X$  são *ortogonais* se  $\langle x, y \rangle = 0$  e escrevemos  $x \perp y$ .
2. Definimos  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{K}$  como

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

**Proposição 17.1 (Pitágoras).** Se  $x \perp y$ ,  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**Proposição 17.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).** Para todos  $x, y \in X$ , temos

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Mais ainda, a igualdade acontece se e só se  $x$  e  $y$  forem linearmente dependentes.

*Demonstração.* Consideramos a projeção de  $x$  em  $y$ . Supondo que  $y \neq 0$ , temos que

$$y \perp \left( x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y + \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\|^2 \\ &= \left\| x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\|^2 + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \|y\|^2 \\ &\geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

□

**Corolário 17.3.**  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  é uma norma.

**Observação 17.1.**

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua.
2. Se  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  e  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  foram espaços de produto interno,  $X \times Y$  também é munido de

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_{X \times Y} = \langle x, x' \rangle_X + \langle y, y' \rangle_Y.$$

E de fato, a norma induzida por esse produto interno é  $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ .

**Definição.** Um espaço de produto interno  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço de Hilbert se  $(X, \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$  for Banach.

**Exercício 17.0.1.** Formule e prove o teorema de completção adequado para espaços de produto interno.

**Pergunta.** Quando um espaço normado é um espaço de produto interno disforçado? Isso é, quando existe um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $X$  tal que  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ ?

**Teorema 17.4 (Lei do paralelogramo).** Uma norma  $\|\cdot\|$  em um espaço vetorial  $X$  é proveniente de um produto interno se e só se

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X.$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ). Escreva.

( $\impliedby$ ). Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , defina

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2).$$

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , defina

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

□

**Definição.** Seja  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço de produto interno.

1. Um subconjunto  $S \subseteq X$  é **ortogonal** se para todos  $x, y \in S$  distintos,  $x \perp y$ .
2. Um subconjunto  $S \subseteq X$  é **ortonormal** se for ortogonal e  $S \subseteq \partial B_X$ .

**Proposição 17.5.** Se  $S \subseteq X$  é ortogonal (ortonormal), então existe  $S' \subseteq X$  ortogonal (ortonormal) maximal tal que  $S \subseteq S'$ .

*Demonstração.* Zorn:

$$\mathbb{P} = \{S' \subseteq X : S' \text{ é ortogonal e } S \subseteq S'\}.$$

□

**Exercício.** Seja  $S \subseteq X$  ortogonal.  $S$  é maximal se e só se para todo  $x \in X$  vale

$$\forall y \in S, x \perp y \implies x = 0.$$

## 17.1 Desigualdade de Bessel

Provaremos que se  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço de produto interno e  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  um conjunto ortogonal, para todo  $x \in X$ ,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Definição.** Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço normado,  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $(x_i)_{i \in I}$  é **somável a  $x$**  e escrevemos  $\sum_{i \in I} x_i = x$  se  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $I_0 \subseteq I$  finito tal que para todo  $J \subseteq I$  finito com  $I_0 \subseteq J$  temos

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Ou seja, se a rede

$$\left( \sum_{i \in J} x_i \right)_{J \in \mathcal{F}}$$

com  $\mathcal{F} = \{J \subseteq I : J \text{ finito}\}$  converge.

**Observação 17.2.** No caso dos números reais podemos definir

$$x = \sup_{\substack{F \subseteq I \\ F \text{ finito}}} \sum_{i \in F} x_i.$$

**Exercício.**

1. Se  $\sum_{i \in I} x_i = x$  e  $\sum_{i \in I} y_i = y$  então

$$\sum_{i \in I} \alpha x_i + y_i = \alpha x + y.$$

2. Seja  $(x_n)_n \subseteq X$  uma sequência, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Considere  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Então  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  existe mais  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$  não existe. Considere  $I_k = \{2j : j \leq k\}$ : resulta que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_k} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$ .

3. Se  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  existe, então  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ .

4. O conjunto

$$\{1, \sqrt{2} \cos n\pi x, \sqrt{2} \sin n\pi x\}_{n \in \mathbb{N}}$$

é um **sistema ortonormal maximal** (um conjunto ortonormal maximal) em  $L^2(0, 1)$ .

**Proposição 17.6.** Se  $(x_i)_{i \in I}$  é somável, então

$$|\{i \in I : x_i \neq 0\}| \leq \aleph_0.$$

*Demonstração.* Note que

$$\{i \in I : x_i \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i \in I : \|x_n\| > 1/n\}.$$

Vamos mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$|\{i \in I : \|x_i\| > \varepsilon\}| < \infty.$$

Como  $(x_i)_{i \in I}$  é somável, pegue  $x \in X$  com  $x = \sum_{i \in I} x_i$ . Pegue  $I_0 \subseteq I$  finito tal que para todo  $I_1 \subseteq I_0$  finito com  $I_1 \supseteq I_0$ ,

$$\left\| x - \sum_{i \in I_1} x_i \right\| < \varepsilon/2.$$

Logo, se  $i_0 \notin I_0$ ,

$$\|x_{i_0}\| \leq \left\| x - \sum_{i \in I_0 \cup \{i_0\}} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i \in I_0} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Logo,  $\{i \in I : \|x_i\| > \varepsilon\} \subseteq I_0$ . □



**Teorema 17.7 (Bessel).** Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$  um subconjunto ortonormal.

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X.$$

*Demonstração.* Exercício. É suficiente mostrar que

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall J \subseteq I \text{ finito.}$$

**Exercício.** Seja  $a > 0$  e  $(x_i)_{i \in I} \subseteq [0, \infty)$ . Se  $\sum_{i \in J} x_i \leq a$  para todo  $J \subseteq I$  finito, então  $(x_i)_{i \in I}$  é somável e  $\sum_{i \in I} x_i \leq a$ .

*Demonstração.* Considere

$$x = \sup_{J \subseteq \mathcal{F}} \sum_{i \in J} x_i \leq a$$

onde  $\mathcal{F} = \{J \subseteq I : J \text{ é finito}\}$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $I_0 \in \mathcal{F}$  tal que

$$x - \varepsilon < \sum_{i \in I_0} x_i \leq x.$$

Mais ainda, se  $J \supseteq I_0$  é finito, como  $(\sum_{i \in J} x_i)_{J \in \mathcal{F}}$  é uma rede crescente e limitada,

$$x - \varepsilon < \sum_{i \in I_0} x_i \leq \sum_{i \in J} x_i \leq x \implies x - \sum_{i \in J} x_i < \varepsilon.$$

□

Fixe  $J \subseteq I$  finito.

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 &= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle x_i, x \right\rangle + \left\langle \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle x_i, \sum_{i \in J} \langle x_i, x \rangle x_i \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i \in J} \overline{\langle x, x_i \rangle} \langle x, x_i \rangle - \sum_{i \in J} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle x, x_j \rangle} \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

## 17.2 Igualdade de Parseval

Agora vamos estudar em qué casos tem a igualdade.

**Teorema 17.8.** Seja  $X$  um espaço de Hilbert e  $S \subseteq X$  ortonormal. Então

1.  $\sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$  existe para todo  $x \in X$ .
2. São equivalentes:

$$\begin{aligned} S \text{ é maximal} &\iff \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y = x \quad \forall x \in X \\ &\iff \overline{\text{span}}\{S\} = X \\ &\iff \|x\|^2 = \sum_{y \in S} |\langle x, y \rangle|^2 \quad \forall x \in X \quad (\text{Parseval}) \end{aligned}$$

*Demonstração.*

- 1.

**Exercício (Critério de Cauchy).** É suficiente mostrar que  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $S_0$  tal que para todo  $S_1 \subseteq S \setminus S_0$  finito temos que

$$\left\| \sum_{y \in S_1} \langle x, y \rangle y \right\| < \varepsilon$$

Nesse caso, por Pitágoras,

$$\left\| \sum_{y \in S_1} \langle x, y \rangle y \right\|^2 = \sum_{y \in S_1} |\langle x, y \rangle|^2.$$

Por Bessel,

$$(|\langle x, y \rangle|^2)_{y \in S}$$

e uma família somável, logo o critério de Cauchy vale.

2. Suponha  $S$  maximal. Temos

$$x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \perp S$$

Logo, pelo exercício passado,  $x = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$ .

Para a seguinte, note que se  $S$  não é maximal, existe  $y_0 \in \partial B_X$  tal que  $y_0 \perp S$ . Logo,  $y_0 \in \perp \overline{\text{span}}\{S\}$ , e logo  $y_0 \notin \overline{\text{span}}\{S\}$ .

Em particular,

$$1 = \|y_0\|^2 \neq \sum_{y \in S} |\langle y_0, y \rangle|^2 = 0.$$

Note que se

$$x = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y$$

então

$$\|x\|^2 = \sum_{y \in S} |\langle x, y \rangle|^2.$$

□

**Proposição 17.9.** Se  $S \subseteq X$  é ortonormal, então

$$\|x - y\| = \sqrt{2} \quad \forall x, y \in S \text{ distintos.}$$

Logo se  $X$  é separável,  $S$  é enumerável.

**Corolário 17.10.** Sejam  $H$  e  $H'$  espaços de Hilbert e  $S \subseteq H$ ,  $S' \subseteq H'$  ortonormais maximais. Seja  $j : S \rightarrow S'$  uma injeção. Então  $T : H \rightarrow H'$  dado por

$$T \left( \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \right) = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle j y$$

é uma isometria. Se  $j$  for sobrejetiva,  $T$  é uma isometria sobrejetiva.

*Demonstração.* Escreva. □

**Corolário 17.11.** Todo espaço de Hilbert é da forma  $\ell_2(S)$  para algum conjunto  $S$ , onde  $|S|$  é a cardinalidade de um subconjunto ortonormal maximal de  $H$ .

### 17.3 Teorema de representação

**Definição.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Definimos o *conjugado de  $H$* , denotado  $\overline{H}$  como sendo  $H$  com a ação de  $H$  e produto

$$\lambda.x = \bar{\lambda}x \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in H.$$

Definimos o produto interno

$$\langle x, y \rangle_{\overline{H}} = \langle y, x \rangle_H.$$

**Proposição 17.12.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Então o mapa

$$\phi : \overline{H} \rightarrow H^*$$

dado por

$$(\phi x)y = \langle y, x \rangle_H \quad \forall x, y \in \overline{H}$$

é uma isometria.

*Demonstração.* ( $\phi$  é linear).

[content...]

( $\|\phi x\| \leq \|x\| \forall x \in X$ ). Por Cauchy-Schwarz.

( $\|\phi x\| \geq \|x\| \forall x \in X$ ). Quem é de norma 1?

( $\phi$  é injetiva).  $\langle \cdot, y_1 \rangle = \langle \cdot, y_2 \rangle \implies \|x - y\| = 0$ .

( $\phi$  é sobrejetiva). Seja  $f \in H^*$ . Por Zorn, pegue  $S \subseteq H$  ortonormal maximal. Defina

$$x = \sum_{y \in S} \overline{f(y)} y.$$

Se  $x$  está bem definido, então

$$\phi(x) = f,$$

pois

$$\begin{aligned} \phi(x)(y) &= \left\langle z, \sum_{y \in S} \overline{f(y)} y \right\rangle_H \\ &= \sum_{y \in S} f(y) \langle z, y \rangle_H \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} f(z) &= f \left( \sum_{y \in S} \langle z, y \rangle y \right) \\ &= \sum_{y \in S} f(y) \langle z, y \rangle. \end{aligned}$$

Para ver que de fato trata-se de uma família somável, considere  $S_0 \subseteq S$  finito, então

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \left| \frac{f \left( \sum_{y \in S_0} \overline{f(y)} y \right)}{\left\| \sum_{y \in S_0} \overline{f(y)} y \right\|} \right| \\ &= \frac{\sum_{y \in S_0} |f(y)|^2}{\left( \sum_{y \in S_0} |f(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left( \sum_{y \in S_0} |f(y)|^2 \leq \|gf\| \right).$$

□

**Corolário 17.13.**  $H^*$  é Hilbert.

$$\langle f, g \rangle_{H^*} = \langle \phi^{-1}(f), \phi^{-1}(g) \rangle_{\overline{H}} = \langle \phi^{-1}(g), \phi^{-1}(f) \rangle_H.$$

Ou seja

$$\langle \langle \cdot, x \rangle, \langle \cdot, y \rangle_{H^*} \rangle = \langle y, x \rangle_H.$$

**Corolário 17.14.** Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

*Demonstração.* Queremos mostrar que

$$J : H \rightarrow H^{**}$$

é sobrejetivo. Fixe isometrias sobrejetivas

$$\phi : \overline{H} \rightarrow H^*, \quad \psi : \overline{H^*} \rightarrow H^*.$$

Defina

$$\overline{\phi} : H \rightarrow H^*$$

como

$$\overline{\phi}(x) = \phi(x) \quad \forall x \in H.$$

Queremos mostrar que  $J = \psi \circ \overline{\phi}$ .

Fixe  $x \in H$ ,  $f \in H^*$  e  $y \in H$  com  $f = \langle \cdot, y \rangle_H$ . Logo

$$\begin{aligned} \psi(\overline{\phi}(x))(f) &= \langle f, \langle \cdot, x \rangle_H \rangle_{H^*} \\ &= \langle \langle \cdot, y \rangle_H, \langle \cdot, x \rangle_H \rangle_{H^*} \\ &= \langle x, y \rangle_H \\ &= f(x) \\ &= J(x)(f). \end{aligned}$$

□

## 17.4 Exemplo e conjuntos ortonormais em $L_2$

**Proposição 17.15.**

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

é ortonormal maximal em  $L_2[0, 2\pi]$ .

*Demonstração.* Só veremos maximalidade. Seja  $f \in L_2[0, 2\pi]$  tal que

$$f \perp S.$$

Vamos mostrar que  $f = 0$ .

Primero sustituimos  $f$  por uma função contínua. Defina

$$G(x) = \int_0^x f d\mu.$$

Logo, **ela é absolutamente contínua**, assim  $G' = f$ . Daí,

$$(G + k)' \perp S \quad \forall k.$$

Vamos computar

$$\begin{aligned} 0 &= \int (G + k)' e^{int} d\mu \\ &= G(2\pi) - G(0) - \int_0^{2\pi} (G + k)(in) e^{int} d\mu \\ &= - \int_0^{2\pi} (G + k)(in) e^{int} d\mu \end{aligned}$$

assim

$$\int (G + k) e^{int} d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Escolha  $k \in \mathbb{C}$  tal que

$$H = G + k \perp S.$$

Como  $H$  é contínuo, pelo teorema de Weierstrass, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $T \in \text{span}\{s\}$  tal que

$$\sup_{t \in [0,1]} |H(t) - T(t)| < \varepsilon.$$

Logo  $H \in \overline{\text{span}}\{s\}$ . Como  $H \perp S$ ,  $H = 0$ . Mais como  $H = f$ , então  $f = 0$ . □

## 17.5 Projeções em espaços de Hilbert

**Definição.** Um espaço de Banach  $X$  é *estritamente convexo* se para todo  $x, y \in \partial B_X$ ,

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1.$$

**Exemplos.**

1.  $\ell_p$  para  $p \in (1, \infty)$  é estritamente convexo.
2. Se  $X$  for Hilbert, sabemos que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{x}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{y}{2} \right\|^2 = 1$$

para  $x, y \in \partial B_X$  distintos. Logo,

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 < 1.$$

**Proposição 17.16.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $H' \subseteq H$  um subespaço fechado. Para todo  $x \in H$ , existe um único  $y \in H'$  tal que

$$d(x, H') = \|x - y\|.$$

Mais ainda,  $x - y \perp H'$ .

*Demonstração.* Fixe  $x \in H$ . Como  $H$  é reflexivo,  $y$  existe. Suponha que  $z \neq y$  em  $H'$  tal que

$$\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, H').$$

Então

$$\left\| x - \frac{y + z}{2} \right\| = \left\| \frac{x - y + x - z}{2} \right\| < d(x, H').$$

Agora vejamos que  $x - y \perp H'$ . Suponha que existe  $h \in H' \setminus \{0\}$  que não seja ortogonal, ie.  $\langle x - y, h \rangle \neq 0$ .

Sem perda de generalidade, assuma que

$$\langle x - y, h \rangle > 0.$$

Para contradizer que  $y$  minimiza, buscamos um múltiplo de  $h$  que faça uma menor distância. Pegue  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\|x - y + \lambda h\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\langle x - y, \lambda h \rangle + |\lambda|^2 \|h\|^2.$$

Pegue  $\lambda < 0$  tal que

$$2\langle x - y, \lambda h \rangle + |\lambda|^2 \|h\|^2 > \|x - \lambda h\|^2 - \|x - y\|^2.$$

□

**Definição.** O resultado anterior nos dá um mapa

$$\begin{aligned} P : H &\rightarrow H' \\ x &\mapsto y_x \end{aligned}$$

chamado a **projeção de  $H$  sobre  $H'$**  tal que

1.  $\|x - P(x)\| = d(x, H')$ .
2.  $x - P(x) \perp H'$ .

**Proposição 17.17.** Seja  $H$  Hilbert,  $H' \subseteq H$  fechado,  $S \subseteq H'$  ortonormal maximal. Então

$$P(x) = \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \quad \forall x \in H.$$

Em particular,  $P$  é linear e  $\|P\| = 1$  (o não ser que  $H' = 0$ , caso em que a norma é 0).

*Demonstração.* Note que

$$H' \oplus (H')^\perp = H$$

Onde

$$(H')^\perp = \{x \in H : x \perp H'\}.$$

Então, como

$$P(x), \sum_{y \in S} \langle y, x \rangle y \in H'.$$

Mais ainda,

$$x - P(x), x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \in (H')^\perp.$$

Como

$$\begin{aligned} x &= x - P(x) + P(x) \\ x &= x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y + \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y. \end{aligned}$$

Então, para todo  $y \in H'$ ,

$$\begin{aligned} \langle x - Px + Px, y \rangle &= \left\langle x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y + \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \Rightarrow \langle x - Px, y \rangle + \langle Px, y \rangle &= \left\langle x - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle + \left\langle \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \Rightarrow \langle Px, y \rangle &= \left\langle \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle \\ \Rightarrow \left\langle Px - \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y, y \right\rangle &= 0 \\ \Rightarrow Px &= \sum_{y \in S} \langle x, y \rangle y \end{aligned}$$

□

**Corolário 17.18.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $H' \subset H$  um subespaço fechado. Então  $H'$  é complementado em  $H$ .

De fato,

**Teorema 17.19 (Lindestrauss-Tzafrini, 71).** Se todo subespaço fechado de um espaço de Banach  $X$  for complementado, então  $X$  é isomorfo a um espaço de Hilbert.

**Teorema 17.20.**  $c_0$  não é complementado em  $\ell_\infty$ .



**Definição.** Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos de um conjunto  $X$ . Dizemos que  $(A_i)_{i \in I}$  é *quase-disjunto* se

$$|A_i \cap A_j| < \infty \quad \forall i, j \in I \text{ disjuntos.}$$

**Proposição 17.21.** Existe uma família  $(A_i)_{i \in I}$  quase-disjunta de subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  tal que  $|I| = 2^{\aleph_0}$ .

*Demonstração.* Para cada  $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  escolha  $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$  tal que  $q_n^i \rightarrow i$ .

Fixe uma bijeção  $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  e defina

$$A_i = \{\varphi(q_n^i) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

□

**Proposição 17.22.** Seja  $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  um operador limitado tal que  $T|_{c_0} = 0$ . Então existe  $A \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que  $T|_{\ell_\infty(A)} = 0$  (extendedo com zeros para ver  $\ell_\infty(A)$  como subconjunto de  $\ell_\infty$ ).

*Demonstração.* Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família quase-disjunta de subconjuntos infinitos de  $\mathbb{N}$  tal que  $|I| = 2^{\aleph_0}$ .

**Afirmção.** Existe  $i \in I$  tal que  $T|_{\ell_\infty(A)} = 0$ .

Para cada  $i \in I$ , pegue  $x_i \in \partial B_{\ell_\infty(A_i)}$  tal que

$$T(x_i) \neq 0.$$

Como  $|I| = 2^{\aleph_0}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\{i \in I : e_n^*(Tx_i) \neq 0\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Sem perda de generalidade, assumamos que

$$|\{i \in I : e_n^*(Tx_i) > 0\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Mais ainda, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\{i \in I : e_n^*(Tx_i) > \delta\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Se  $F \subseteq I$  for finito,

$$\begin{aligned} \left\| T \left( \sum_{i \in F} x_i \right) \right\| &= \left\| \sum_{i \in F} T(x_i) \right\| \\ &\geq \sum_{i \in F} e_n^*(Tx_i) \\ &\geq |F|\delta \end{aligned}$$

Como  $(A_i)_{i \in I}$  é quase-disjunto, podemos escrever

$$\sum_{i \in F} x_i = x + y$$

onde

$$|\text{supp } x| < \infty \quad \text{e} \quad \|y\| \leq 1$$

Logo

$$\left\| T \left( \sum_{i \in I} x_i \right) \right\| = \|Ty\| \leq \|T\|$$

Alesindo. □

*Prova de que  $c_0$  não é complementado.* Suponha que existe uma projecção  $p : \ell_\infty \rightarrow c_0$  (limitada). Logo,  $(\text{Id} - p)|_{c_0} \equiv 0$ . Pela proposição, existe  $A \subseteq \mathbb{N}$  infinito tal que

$$(\text{Id} - p)|_{\ell_\infty(A)} = 0,$$

assim  $p|_{\ell_\infty(A)} = \text{Id}_{\ell_\infty(A)}$ , que é absurdo. □

## 18 Bases de Schauder

**Definição.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $(x_n)_n \subseteq X$ . Dizemos que  $(x_n)_n$  é uma **base de Schauder** de  $X$  se para todo  $x \in X$  existe uma única sequência  $(\alpha_n)_n \subseteq \mathbb{K}$  tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

**Exemplos.**

1.  $(e_n)$  é uma base de  $\ell_p$  para todo  $p \in [1, \infty)$ , e de  $c_0$ .
2. Para  $\ell_\infty$  não, pois todo espaço com base é separável.
3. Existem espaços de Banach separáveis sem base (Enflo, '73).

**Teorema 18.1.** Seja  $X$  Banach e  $(x_n) \subseteq X$ . São equivalentes

1.  $(x_n)$  é uma base de  $X$ .
2. Existe  $(x_n^*) \subseteq X^*$  tal que

$$x_n^*(x_m) = \delta_{nm} \quad \text{e} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n \quad \forall x \in X.$$

*Demonstração.* (2  $\implies$  1). Só baste ver unicidade. Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n,$$

então

$$\alpha_k = x^* \left( \sum \alpha_n x_n \right) = x^* \left( \sum \beta_n x_n \right) = \beta_k$$

(1  $\implies$  2). Note segue da unicidade da representação da base que existe uma sequência  $(x_n^*)_n$  de funções lineares  $x_n^* : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  tais que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n \quad \forall x \in X.$$

Resta mostrar que  $x_n^* \in X^*$  é contínuo para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Defina para cada  $N \in \mathbb{N}$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N x_n^*(x) x_n.$$

Como

$$x_n^*(x) x_n = S_n(x) - S_{n-1}(x),$$

basta mostrar que cada  $S_n$  é contínuo.

Defina uma norma  $\| \cdot \|$  em  $X$  como

$$\|x\| = \sup_n \|S_n(x)\|.$$

Note que

1. Como  $S_n(x) \rightarrow x$ ,  $\|x\| < \infty$ .
2.  $\|x\| \leq \|x\|$  para todo  $x \in X$ .
3. Se  $(X, \| \cdot \|)$  é Banach,  $\| \cdot \| \sim \| \cdot \|$  e a prova segue.

**Afirmção.**  $(X, \| \cdot \|)$  é Banach.

Seja  $(y_n) \subset X$  de Cauchy para  $\| \cdot \|$ . Como  $\| \cdot \| < \| \cdot \|$ ,  $(y_n)$  é Cauchy para  $\| \cdot \|$ . Defina

$$y = \| \cdot \| - \lim_n y_n.$$

Queremos mostrar que  $y_n \xrightarrow{\| \cdot \|} y$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  defina

$$z_k = \| \cdot \| - \lim_n S_k(y_n).$$

**Afirmção.**  $z_k \xrightarrow{\| \cdot \|} y$ .

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Como  $(y_n)$  são  $\|\cdot\|$ -Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$  para todo  $n, m > n_0$ .

Fixe  $m = n_0$ . Pegue  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|S_k(y_m) - y_m\| < \varepsilon$  para toda  $k > k_0$ . Então,

$$\begin{aligned}\|z_k - y\| &= \lim_n \|S_k(y_n) - y_n\| \\ &\leq \lim_n \|S_k(y_n) - S_k(y_m)\| + \|S_k(y_m) - y_m\| + \lim_n \|y_m - y_n\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\end{aligned}$$

**Afirmção.** Para todo  $n \geq k$ , temos

$$S_k(z_m) = z_k.$$

Como operadores lineares são contínuos em subespaços de dimensão finita, temos

$$\begin{aligned}z_k &= \|\cdot\| - \lim_n S_k(y_n) \\ &= \|\cdot\| - \lim_n S_k(S_m(y_k)) \\ &= \|\cdot\| - \lim_n S_k|_{\text{span}\{x_i : i \leq n\}} \\ &= S_k(z_m)\end{aligned}$$

Em conclusão,  $S_k(y) = z_k$ , ie. temos unicidade.

Por fim,

$$\begin{aligned}\|y - y_n\| &= \sup_k \|S_k(y) - S_k(y_n)\| \\ &= \sup_k \|z_k - S_k(y_n)\| \\ &= \sup_k \limsup_m \|S_k(y_n) - S_k(y_m)\| \\ &\leq \limsup_n \sup_k \|S_k(y_m) - S_k(y_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

□

**Observação 18.1.**

1.  $\sup_n \|S_n\| < \infty$
2.  $k = \sup_n \|S_n\|$  é a **constante básica** da base  $(x_n)$ .
3. Se  $k = 1$ , dizemos que a base  $(x_n)$  é **monótona**.

**Definição.** Uma sequência  $(x_n) \subseteq X$  é **básica** se  $(x_n)$  for de Schauder para  $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Proposição 18.2.**  $(x_n) \subseteq X \setminus \{0\}$  é básica se e só se existe  $L \geq 0$  tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n \right\|$$

para todo  $k \geq m$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ .

*Demonstração.*

( $\Rightarrow$ ) Segue.

( $\Leftarrow$ ) Defina

$$Y = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina  $S_n : Y \rightarrow Y$  como

$$S_n \left( \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\min\{n,k\}} \alpha_n x_n.$$

Por hipótese, temos que

$$\|S_n\| \leq L \quad \forall n.$$

Podemos então estender cada  $S_n$  para  $\bar{Y}$ .

Note:

1.  $S_n$  é limitado.
2.  $\dim \text{img } S_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .
3.  $S_n \circ S_m = S_m \circ S_n = S_{\min\{m,n\}}$ .
4.  $S_n(x) \rightarrow x \quad \forall x \in X$ .

Esas observações **implicam** que  $(x_n)$  é base de  $\bar{Y}$ . □

**Teorema 18.3.** Sejam  $(x_n) \subset X$  e  $(y_n) \subset Y$  básicas. São equivalentes

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$  converge em  $X$  se e somente se  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$  em  $Y$ .
2. Existe um isomorfismo

$$T : \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \overline{\text{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tal que

$$Tx_n = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ). Segue

( $\implies$ ). Por 1,  $T$  está bem definido e é uma bijeção. Falta mostrar que  $T$  e  $T^{-1}$  são contínuas. Sejam  $(z_n) \subset \text{dom } T$  tal que  $z_n \rightarrow z$  e  $Tz_n \rightarrow w$ . Queremos mostrar que  $Tz = w$ . Se  $j \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} y_j^*(w) &= \lim_n y_j^*(Tz_n) \\ &= \lim_n x_j^*(z_n) \\ &= x_j^*(z) \\ &= y_j^*(Tz) \end{aligned}$$

□

**Definição.** Os funcionais  $(x_n^*)$  são os *funcionais biortogonais* de  $(x_n)$ .

**Corolário 18.4.** Se  $(x_n), (y_n)$  são básicas, existe  $L > 0$  tal que

$$\frac{1}{L} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq L \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\|$$

para todos  $n$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

## 18.1 Construindo sequências básicas

**Teorema 18.5.** Se  $\dim(X) = \infty$ , existe uma sequência básica em  $X$ .

**Teorema 18.6.** Se  $S \subseteq X$  tal que  $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$  e  $0 \in \overline{S}^w$  então existe uma sequência básica em  $S$ .

**Lema 18.7.** Seja  $X$  Banach,  $E \subseteq X^*$  um subespaço de dimensão finita e  $S \subseteq X^*$  tal que  $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$  e  $0 \in \overline{S}^w$ . Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x^* \in X^*$  tal que

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq (1 - \varepsilon) \|e^*\| \quad \forall e^* \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

*Demonstração.* Fixe  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ . Como  $\dim E < \infty$ , por compacidade a bola é totalmente limitada, assim existe  $e_1^*, \dots, e_n^* \in \partial B_E$  tal que para qualquer  $e^* \in \partial B_E$  existe  $c \leq n$  tal que  $\|e^* - e_i^*\| < \delta$ .

Para cada  $i \leq n$  pegue  $e_i \in X$  tal que

$$e_i^*(e_i) > 1 - \delta.$$

Como  $0 \in \overline{S}^w$ , existe  $x^* \in S$  tal que

$$|x^*(e_i)| < \delta \quad \forall i \leq n.$$

Vamos estimar

$$\|e^* + \lambda x^*\|.$$

Fixe  $e^* \in \partial B_E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Defina  $\alpha = \inf_{y^* \in \overline{S}} \|y^*\|$ , que é positivo porque  $0 \notin \overline{S}$ .

1. Se  $|\lambda| > 2/\alpha$ , temos  $\|e^* + \lambda x^*\| \geq |\lambda|\|x^*\| - 1 \geq 1 - \frac{1}{|\lambda|} \geq \frac{1}{2}\|e^*\|$ .
2. Se  $|\lambda| > 2/\alpha$ , temos

$$\|e^* + \lambda x^*\| \geq \|e_i^* + \lambda x^*\| - \delta \geq 1 - \delta - |\lambda|\delta - \delta \geq 1 - 2\delta - \frac{2\delta}{\alpha}.$$

O resultado segue se  $2\delta + \frac{2\delta}{\alpha} < \varepsilon$ .

□

*Prova do teorema 18.6.* Seja  $S \subseteq X$  com  $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$  e  $0 \in \overline{S}^w$ . Então, vendo  $S \subseteq X^{**}$ , temos  $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$  e  $0 \in \overline{S}^w$ . Fixe  $\varepsilon > 0$ . Pegue uma sequência  $(\delta_n)$  de números positivos tais que

$$\prod_n (1 - \delta_n) > \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Pelo lema, existe  $(e_n^*) \subseteq S$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,

$$(1 - \delta_n) \left\| \sum_{n=1}^m a_n e_n^* \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{m+1} a_n e_n^* \right\| \approx \left\| \sum_{n=1}^m a_n e_n^* + a_{m+1} e_{m+1}^* \right\|.$$

Assim, para toda  $m \leq k$  e  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\| \sum_{n=1}^m a_n e_n^* \right\| \leq \frac{1}{\prod_{n=1}^m (1 - \delta_n)} \left\| \sum_{n=1}^k a_n e_n^* \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{n=1}^k a_n e_n^* \right\|.$$

□

**Corolário 18.8.** Se  $(x_n) \subseteq X$  é tal que  $x \xrightarrow{w}$  mas  $\inf \|x_n\| > 0$ , então  $(x_n)$  possui uma subsequência básica.

*Prova do teorema 18.5.* Note que  $0 \notin \overline{\partial B_X}^{\|\cdot\|}$  e  $0 \in \overline{\partial B_X}^w$ . Para comprovar o segundo, suponha o contrário, ie. que existe  $\varepsilon > 0$  e  $x_1^*, \dots, x_2^* \in X^*$  tal que

$$\{x \in X : |x_i^*(x_i)|\} \cap \partial B_X = \emptyset.$$

Como  $\bigcap \ker x_i^* \neq \{0\}$ , pegue  $x \in \bigcap \ker(x_i^*) \setminus \{0\}$ . Logo

$$\frac{x}{\|x\|} \in \{y \in X : |x_i^*(y)| < \varepsilon\} \cap \partial B_X \quad \forall i \leq n,$$

que é absurdo.

□

**Pergunta.**  $X, Y$  espaços de Banach, se  $X \hookrightarrow Y$  e  $Y \hookrightarrow X$  mergulhos isomórficos, então  $X \stackrel{\text{isomor}}{\approx} Y$ . Falso. E se pedimos que a sejam mergulhos de espaços complementados?

Gouees. Existe espaço de Banach tal que  $X \approx X^3$  mais  $X \not\approx X^2$ .

## 19 Técnica de decomposição de Pełczyński

**Teorema 19.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $X \overset{\perp}{\hookrightarrow} Y$  e  $Y \overset{\perp}{\hookrightarrow} X$ .

1. Se  $X \approx X^2$  e  $Y \approx Y^2$  então  $X \approx Y$ .
2. Se  $X \approx \ell_p(X)$ , então  $X \approx Y$ . ( $X \approx c_0(X)$ .)

**Definição.** Seja  $X$  um espaço de Banach.

1.  $p \in [1, \infty)$ .

$$\ell_p(X) = \left\{ (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \sum \|x_n\|^p < \infty \right\}$$

onde

$$\|(x_n)\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- 2.

$$c_0(X) = \left\{ (x_n) \in \ell_{\infty}(X) : \lim_n \|x_n\| = 0 \right\}$$

com a norma

$$\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|.$$

*Demonstração.* Por hipótese existe um subespaço fechado  $E \subseteq X$  e  $F \subseteq Y$  tais que

$$X = Y \oplus E \quad \text{e} \quad Y = X \oplus F.$$

- 1.

$$X \approx Y \oplus E \approx Y \oplus Y \oplus E \approx X \oplus F \oplus Y \oplus E \approx X \oplus F \oplus X \approx X \oplus F \approx Y.$$

2. Suponha  $X \approx \ell_p(X)$ .

$$Y \approx X \oplus F \approx X \oplus \ell_p(X) \oplus F \approx Y \oplus X.$$

Logo

$$X \approx \ell_p(X) \approx \ell_p(Y \oplus E) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y.$$

□

## 20 Algebras de Banach

**Definição.**

1. Um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  munido de um produto associativo é uma *álgebra*.



2. Se  $A$  é uma álgebra,  $\| \cdot \|$  uma norma em  $A$  e

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A,$$

$A$  é uma *álgebra normada*.

3. Se uma álgebra normada for completa, é uma *álgebra de Banach*.  
 4. Se existe um elemento  $1 \in A$  tal que

$$a1 = 1a = a \quad \forall a \in A,$$

$1$  é a *unidade* de  $A$  e  $A$  é uma *álgebra com unidade*.

### Exemplos (bobos).

1. Seja  $K$  compacto Housdorff,  $C(K)$  é uma álgebra de Banach com unidade onde

$$(fg)x = f(x)g(x) \quad \forall x \in K.$$

2. Se  $K$  é localmente compacto e Housdorff,

$$C_0(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{K} : \forall \varepsilon > 0 \exists K' \subseteq K \text{ tal que } |f(x)| \leq \varepsilon \forall x \notin K'\}$$

não tem unidade a não ser que  $K$  for compacto.

3.  $\ell_\infty$ .

4.  $c_0$ .

5.  $L_\infty$ .

6. Se  $X$  for Banach,  $\mathcal{L}(X)$  é uma álgebra de Banach com unidade (a identidade) que não é comutativa.

$$\|ab\| = \sup_{x \in B_X} \|ab(x)\| \leq \|a\|\|b\|.$$

7.  $K(X) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ compacto}\}$  **eles são fechados com a composição (de fato a composição com qualquer outro operador)**, é uma álgebra de Banach não comutativa e sem unidade se  $\dim(X) = \infty$ .

8.  $L_1(-\infty, \infty)$  com

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx$$

**prove que satisfaz as propriedades.**

**Definição.** Seja  $A$  uma álgebra e  $I \subseteq A$  um subespaço vetorial.

1.  $I$  é um *ideal à direita* de  $A$  se  $ab \in I$  para todos  $a \in A$  e  $b \in I$ .
2.  $I$  é um *ideal à esquerda* de  $A$  se  $ab \in I$  para todos  $a \in I$  e  $b \in A$ .
3. Se ambos valem,  $I$  é um *ideal* de  $A$ .

### Exemplos.

1. Se  $x_0 \in K$ ,

$$I_0 = \{f \in C(K) : f(x_0) = 0\}$$

é um ideal de  $C(K)$ .

2.  $K(X)$  é um ideal de  $\mathcal{L}(X)$ .

3.  $c_0$  é ideal de  $\ell_\infty$ .

**Proposição 20.1.** Se  $A$  é uma álgebra normada e  $I \subseteq A$  é um ideal fechado de  $A$ , então  $A/I$  é uma álgebra normada com produto

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

*Demonstração.* (O produto está bem definido.) Seja  $a + I = a' + I$  e  $b + I = b' + I$ . Temos

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= ab - ab' + ab' - a'b' \\ &= a(b - b') + (a - a')b' \in I \end{aligned}$$

( $\| \cdot \|$  é compatível como o produto.)

$$\begin{aligned} \|ab + I\| &= \inf_c \|ab + c\| \\ &= \inf_{a', b' \in I} \|ab + ab' + a'b + a'b'\| \\ &= \inf_{a', b' \in I} \|(a + a')(b + b')\| \\ &= \inf_{a', b' \in I} \|a + a'\| \|b + b'\| \\ &= \inf_{a' \in I} \|a + a'\| \inf_{b' \in I} \|b + b'\|. \end{aligned}$$

□

### Exemplos.

1.  $\ell_\infty/c_0$ . Lembre que  $\ell_\infty \approx c(\beta\mathbb{N})$  onde  $\beta\mathbb{N}$  é o espaço dos ultrafiltros nos naturais.
2.  $\mathcal{L}(\ell_2)/K(\ell_2)$ , a álgebra de Calkin.

**Definição.** Se  $A$  e  $B$  são álgebras, um operador linear  $T : A \rightarrow B$  é um *homomorfismo* se  $T(aa') = TaTa'$ .

**Exemplo.** Em  $C(K)$ , o mapa que manda  $f \mapsto f(x_0)$  é um homomorfismo.

**Observação 20.1.** Núcleos de homomorfismos são ideais.

## 21 Teoria espectral

**Definição.** Seja  $A$  uma álgebra de Banach sobre  $\mathbb{C}$  com unidade  $1_A \in A$ .

1.  $\text{Inv } A = \{a \in A : a^{-1} \text{ existe}\}.$

2. Se  $a \in A$ , o *espectro de  $a$*  é

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ não é inversível}\}$$

isto é,

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin \text{Inv } A\}$$

### Exemplos.

1.  $\text{Inv}(A)$  é um grupo.
2. Se  $K$  compacto Hausdorff e  $f \in C(K)$ , então  $\sigma(f) = f(K)$ .
3. Se  $f \in \ell_\infty$ , então  $\sigma(f) = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ . [Ver aqui.](#)
4. [Ache  \$\sigma\(f\)\$  para  \$f \in L\_\infty\$ .](#) [Acredito que](#)

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : f|_E \equiv \lambda \text{ para algum } E \notin N(\mu)\}.$$

**Proposição 21.1.** Seja  $a \in A$  e  $p$  um polinômio em  $\mathbb{C}$ , então

$$p(\sigma(a)) = \sigma(p(a)).$$

*Demonstração.* Se  $p$  for constante, segue. Caso contrário, para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  podemos escrever

$$p(z) - \lambda = \lambda_0(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n)$$

onde  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  e  $\lambda_0 \neq 0$ . Logo

$$p(a) - \lambda = \lambda_0(a - \lambda_1) \dots (a - \lambda_n).$$

Como  $a - \lambda_1, \dots, a - \lambda_n$  conmutam,  $p(a) - \lambda$  é inversível se e somente se cada  $a - \lambda_i$  é inversível. Ou bem,

$$\lambda \in \sigma(p(a)) \iff \exists i \leq n \text{ tal que } \lambda_i \in \sigma(a) \iff \exists \mu : \lambda_i \in \mathbb{C} : p(\mu) = \lambda \text{ e } \mu \in \sigma(a).$$

□

**Proposição 21.2.** Se  $a \in A$  e  $\|a\| < 1$ , então  $1 - a \in \text{Inv } A$  e  $(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m}^k a^n \right\| &\leq \sum_{n=m}^k \|a^n\| \\ &\leq \sum_{n=m}^k \|a\|^n \\ &\leq \frac{\|a\|}{1 - \|a\|} \end{aligned}$$

Logo, como  $A$  é completo,

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \in A.$$

Segue que

$$\begin{aligned} (1-a)b &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1-a) \left( \sum_{n=0}^k a^n \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + a + \dots + a^k - a - a^2 - \dots - a^{k+1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - a^{k+1} = 1 \end{aligned}$$

□

**Corolário 21.3.**  $\text{Inv } A$  é aberto.

*Demonstração.* Fixe  $a \in \text{Inv } A$ . Seja  $\|a - b\| <$

$$\begin{aligned} \|1 - ba^{-1}\| &= \|(a - b)a^{-1}\| \\ &\leq \|a - b\| \|a^{-1}\| \\ &< 1 \end{aligned}$$

logo  $b^{-1}a \in \text{Inv}(A) \dots, b \in \text{Inv}(A)$ .

□

**Teorema 21.4.** A função

$$\text{Inv } a \in \text{Inv}(A) \mapsto a^{-1} \in \text{Inv}(A)$$

é diferenciável.

**Observação 21.1 (Relembre).** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  é *diferenciável* em  $x \in X$  se existe  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que

$$\text{Inv}'(a)(b) = a^{-1}ba^{-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(a+b)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\| &= \|(1 - a^{-1}b)^{-1}a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\| \\
&\leq \|(1 + a^{-1}b) - a^{-1} - a^{-1}b\| \|a^{-1}\| \quad (\|a^{-1}b\| < 1) \\
&= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a^{-1}b)^n - 1 + a^{-1}b \right\| \|a^{-1}\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|a^{-1}b\|^n \|a^{-1}\| \\
&= \frac{\|a^{-1}b\|^2}{1 - \|a^{-1}b\|} \|a^{-1}\| \\
&\quad (\|a^{-1}b\| < 1/2) \\
&\leq 2\|a^{-1}\|^3 \|b\|^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\|(a+b)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ba^{-1}\|}{\|b\|} = 0.$$

□

**Teorema 21.5 (Gelfand).**  $\sigma(a)$  é um compacto não vazio para todo  $a \in A$ . Mais ainda,

$$\sigma(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\} = \|a\|B_{\mathbb{C}}.$$

*Demonstração.* ( $\subseteq$ ) Suponha que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é tal que  $|\lambda^{-1}| > \|a\|$ . Logo  $\|\lambda^{-1}a\| < 1$  e portanto

$$1 - \lambda^{-1}a$$

é inversível. Portanto,

$$a - \lambda \text{ é inversível}$$

e  $\lambda \notin \sigma(a)$ .

( $\sigma(a)$  é fechado) Como  $\text{Inv}(A)$  é aberto em  $A$ ,

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \in \text{Inv } A\}$$

é aberto em  $\mathbb{C}$ .

( $\sigma(a) \neq \emptyset$ ) Suponha  $\sigma(a) = \emptyset$ . Podemos definir

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{C} &\rightarrow A \\
\lambda &\mapsto (a - \lambda)^{-1}.
\end{aligned}$$

Como  $\varphi$  é diferenciável, segue que  $f \circ \varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função inteira para todo  $f \in A^*$ .

Pelo teorema de Liouville, se  $\varphi$  for limitada, então  $f \circ \varphi$  seria constante para todo  $f \in A^*$ .

Em particular, teríamos

$$f(\varphi(0)) = f(\varphi(1)) \quad \forall f \in A^*,$$

ou bem,

$$f(a^{-1}) = f((a-1)^n) \quad \forall f \in A^*.$$

Por Hahn-Banach,

$$a^{-1} = (a-1)^{-1} \implies a = a-1$$

que é absurdo.

( $\varphi$  é limitada) Seja  $\lambda$  com  $|\lambda| > 2\|a\|$ . Note que

$$\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda^{-1}a\| < 1.$$

Logo,

$$\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2.$$

Portanto,

$$\|(a - \lambda)^{-1}\| = \|(\lambda^{-1}a - 1)\| \|\lambda^{-1}\| \leq \frac{2 \cdot 1}{2\|a\|} = \frac{1}{\|a\|}.$$

□

**Corolário 21.6.** Seja  $A$  uma álgebra de Banach com unidade tal que

$$\text{Inv}(A) = A \setminus \{0\}.$$

Então

$$A \cong \mathbb{C}.$$

**Definição.** Seja  $a \in A$ . O *raio espectral de  $a$*  é

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

(O radio do menor circulo centrado em zero que contém o espectro.)

**Exemplos.**

1.  $f \in C(K), r(f) = \|f\|_{\infty}.$
2.  $r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$
3.  $r(a) \leq \|a\|.$

**Teorema 21.7.**

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n}.$$

*Demonstração.* Se  $\lambda \in \sigma(a)$ ,  $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ . Logo  $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Temos

$$\lambda \leq \|a^n\|^{1/n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Resta mostrar que

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$

Vamos mostrar que se  $|\lambda| > r(a)$ , então

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda|.$$

Defina

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r(a)\}.$$

**Afirmção.** Para todo  $\lambda \in A$ ,

$$(\lambda^n a^n)_n$$

é limitada.

*Demonstração.* Dado  $f \in A^*$ , defina

$$\lambda \in \Delta \mapsto f((1 - \lambda a)^{-1})$$

que está bem definido, pois

$$\lambda < 1/k \iff \lambda^{-1} > k \quad (...?).$$

Logo existe  $(\lambda_n) \in \Delta$  tal que

$$f((a - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^n.$$

Se  $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ , então

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$

Logo,

$$f((1 - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a^n) \lambda^n.$$

Assim, temos dos séries iguais, de modo que os coeficientes são iguais (usando análise complexa). Logo,

$$f(a^n) = \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $(f(a^n) \lambda^n)_n$  é limitada para toda  $\lambda \in \Delta$  e para todo  $f \in A^*$ . Pelo teorema de Banach-Steinhaus,  $(\lambda^n a^n)_n$  é limitado. Com isso provamos a afirmação.  $\square$

Seja  $|\lambda| > R(A)$ . Logo,  $\lambda \in \Delta$ . Pela afirmação  $(\lambda^n a^n)_n$  é limitada. Pegue  $M > 0$  tal que

$$\|\lambda^n a^n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\|a^n\|^{1/n} \leq M^{1/n} |\lambda|^{-1} \longrightarrow |\lambda|^{-1}.$$

Logo

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda|^{-1}.$$

Por fim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a).$$

□

**Exemplo.** Considere

$$A = \{f \in C[0, 1] : f \text{ é } C^1\}$$

normado de

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

A norma está bem definida e é completa. Então, considerando

$$z : z \in [0, 1] \mapsto z \in \mathbb{C}.$$

Temos que

$$\|z^n\| = 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim

$$r(z) = \lim_n (1 + n)^{1/n} = 1 < 2 = \|z\|.$$

**Teorema 21.8.** Seja  $A$  uma álgebra de Banach com unidade e  $B \subseteq A$  subálgebra fechada com  $1_A \in B$ .

1.  $\text{Inv } B$  é fechado e aberto em  $B \cap \text{Inv } A$ .

2. Se  $b \in B$ , então

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b) \quad \text{e} \quad \partial \sigma_B(b) \subseteq \partial \sigma_A(b).$$

3. Se  $b \in B$  e  $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$  é conexo então

$$\sigma_A(b) = \sigma_B(b).$$

*Demonstração.*

1.  $\text{Inv } B$  é aberto em  $B$  e  $\text{Inv } A$  é aberto em  $A$ , assim,  $\text{Inv } B$  é aberto em  $B \cap \text{Inv } A$ .

Para ver que é fechado pegue  $(b_n) \subseteq \text{Inv } B$  tal que  $b_n \rightarrow b \in B \cap \text{Inv } B$ . Logo,

$$b_n^{-1} \rightarrow b^{-1}.$$

Como  $B$  é fechada,  $b^{-1} \in B$ , assim  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b^{-1} \in B$ , e  $b \in \text{Inv } B$ .



2. Como  $\text{Inv } B \subseteq \text{Inv } A$ ,

$$\sigma_A(b) \subseteq \sigma_B(b).$$

Se  $\lambda \in \partial\sigma_B(b)$  pegue  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ . Logo  $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ .

Precisamos mostrar que  $\lambda \in \sigma_A(b)$ . Suponha que não. Então  $(b - \lambda_n) \subseteq \text{Inv}(A)$  e  $b - \lambda_n \rightarrow b - \lambda \in B \cap \text{Inv } A$ . Por 1.,  $b - \lambda \in \text{Inv } B$ , contradição.

3. Por 1. e 2.,

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$$

e  $\mathbb{C} \setminus \sigma_B(b)$  é fechado e aberto em  $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(b)$ .

□

**Exercício.** Mostre que existe uma álgebra de Banach com unidade  $A$  e uma subálgebra  $B$  com  $1_A \in B$  e  $b \in B$  tal que  $b^{-1} \in A \setminus B$ .

**Exemplo.** Seja  $A$  a álgebra do disco,

$$A = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C(\mathbb{D}) \text{ e } f \text{ é analítica em } \mathbb{D}\}.$$

Considere o mapa

$$\phi : f \in A \mapsto f|_{\partial\mathbb{D}} \in C(\partial\mathbb{D}).$$

Seja  $B = \text{img } \phi$ . Note que  $B$  = subálgebra de Banach de  $C(\partial\mathbb{D})$  gerada por 1 e  $z$ .

Temos que

$$\sigma_{C(\partial\mathbb{D})}(z) = \partial\mathbb{D}$$

e

$$\sigma_A(z) = \sigma_B(z) = \mathbb{D}.$$

## 22 Exponencial de elementos em álgebras de Banach

**Definição.** Seja  $A$  um álgebra de Banach com unidade. Se  $a \in A$ , escrevemos

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

**Teorema 22.1.** A álgebra de Banach com unidade.

1. Seja  $a \in A$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f'(t) = af(t) \forall t$ . Então,

$$f(t) = e^{ta} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.  $(e^a)^{-1} = e^{-a}$ , ie.  $(e^a)^{-1}$  é inversível e a sua inversa é  $e^{-a}$ .

3.  $e^{ab} = e^a e^b$  se  $ab = ba$ .

*Demonstração.*

1. Primeramente note que  $g(t) = e^{ta}$  satisfaz as mesmas propriedades de  $f$ . **Exercício** (*e converge uniformemente, assim pode diferenciar...*).

Defina

$$h(t) = g(-t)f(t).$$

A regra da cadeia função igual... usar Hahn-Banach para estender todos os funcionais... ?.

Note que

$$h'(t) = -g'(t)f(t) + g(-t)f'(t) = -ae^{-ta}f(t) + e^{-ta}af(g) = a$$

pois as potências de  $a$  comutam.

Logo,

$$e^{-ta}f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$e^{-ta}e^{ta} = e^{ta}e^{-ta} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mais ainda,

$$= e^{ta}.$$

2. Contido no anterior argumento.
3. Defina  $g(t) = e^{ta}e^{tb}$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Então

- $g(0) = 1$ .
- 

$$\begin{aligned} g'(t) &= ae^{ta}e^{tb} + e^{ta}be^{tb} \\ &= (a+b)e^{ta}e^{tb} \\ &= (a+b)g(t) \end{aligned}$$

Por 1,  $g(t) = e^{t(a+b)}$ .

□

## 23 Teorema espectral para operadores compactos

A nossa meta é provar o seguinte:

**Teorema 23.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach,  $T \in \mathcal{L}(X)$  compacto. Então

1.  $\sigma(T)$  é enumerável.
2. Se  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ,  $\lambda$  é um ponto isolado de  $\sigma(T)$ .
3. Se  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ,  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ .

Assim, o único ponto de acumulação de um operador compacto é zero.

### Exemplos.

1. Operadores de posto finito.
2. Seja  $k \in C([0, 1]^2)$ . Defina

$$T_k : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$$

$$(T_k f)x = \int_0^1 k(x, t)f(t)dt \quad \forall x \in [0, 1]$$

**( $T_k$  está ben definido)**  $x, y \in [0, 1]$ ,  $f \in C[0, 1]$ , temos

$$|(T_k f)x - (T_k f)y| \leq \int_0^1 |k(x, t) - k(y, t)| |f(t)| dt$$

$$\leq \|f\| \sup_t |k(x, t) - k(y, t)|.$$

Como  $k$  é uniformemente contínua, isso implica que  $T_k(f)$  também é.

**( $T_k$  é limitado)**  $|(T_k f)x| \leq \|f\| \sup_{x,t} |k(x, t)|.$

**( $T_k$  é compacto)**  $T_k(B_{C[0,1]}) \subseteq C[0, 1]$  é para compacto. Por Arzelá-Ascoli, basta que  $T_k(B_{C[0,1]})$  é equicontínua e pontoalmente limitado. De fato, já mostramos ambas.

### Exercício.

1.  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ . Se  $T$  ou  $S$  forem compactos, a composição deles  $S \circ T$  também é compacto.
2.  $K(X)$  é um ideal fechado de  $\mathcal{L}(X)$ .
3.  $K(X) = \mathcal{L}(X)$  se e somente se  $\dim X < \infty$ .
4.  $T \in K(X, Y)$  se e somente se  $T^* \in K(Y^*, X^*)$ .

**Teorema 23.2.** Seja  $T \in K(X)$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

1.  $\ker(T - \lambda)$  tem dimensão finita.
2.  $\text{img}(T - \lambda)$  é fechado e  $\text{codim img}(T - \lambda) = \dim \ker(T^* - \lambda)$ . Em particular  $\text{img}(T - \lambda)$  tem codimensão finita.

*Demonstração.*

1.  $T|_{\ker(T - \lambda)} = \lambda \text{Id}|_{\ker(T - \lambda)}$ . Como  $T$  é compacto e  $\lambda \neq 0$ ,  $\text{Id}_{\ker(T - \lambda)}$  é compacta, assim  $\dim \ker(T - \lambda) < \infty$ .
2. Como  $Z = \ker(T - \lambda)$  tem dimensão finita,  $\exists Y \subseteq X$  subespaço fechado tal que  $X = Z \oplus Y$ .

Note que

$$\text{img}(T - \lambda) = \text{img}(T - \lambda)|_Y.$$

**Exercício 23.0.1.** Suponha  $E \rightarrow F$ ,  $\delta > 0$  e  $\|Sx\| \geq \delta\|x\|$ , então  $\text{img}(S)$  é fechado.

Para obter uma contradição, suponha que as hipóteses do exercício não estão satisfeitas. Então existe uma sequência  $(x_n) \subseteq \partial B_Y$  tal que

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0.$$

Como  $T$  é compacto, podemos supor que  $(Tx_n)$  é Cauchy. Como  $\lambda \neq 0$ , podemos escrever

$$x_n = \frac{1}{\lambda}(Tx_n - (T - \lambda)x_n)$$

e concluir que  $(x_n)$  é Cauchy. Defina

$$x = \lim_n x_n.$$

Portanto,  $Tx = \lambda x$ , e assim  $x \in \ker(T - \lambda) = Z$ .

Por outro lado, como  $(x_n) \subseteq Y$  e  $Y$  fechado,  $x \in Y$ . Assim,  $x = 0$ , absurdo pois a sequência está contida em  $\partial B_Y$ .

Para comprovar a seguinte afirmação em 2., considere o quociente

$$\pi : X \rightarrow X / \text{img}(T - \lambda).$$

**Afirmação.**

$$\text{img } \pi^* = \ker(T^* - \lambda).$$

*Demonstração.*

( $\subseteq$ ) Só note que

$$\begin{aligned} (T^* - \lambda)\pi^*\xi(y) &= \pi^*\xi(Ty - \lambda y) \\ &= \xi(\pi(Ty - \lambda y)). \end{aligned}$$

( $\supseteq$ ) Seja  $x^* \in \ker(T^* - \lambda)$ . Então

$$x^*|_{\text{img}(T - \lambda)} = 0.$$

Logo, podemos definir um funcional  $\xi \in X / \text{img}(T - \lambda)^*$  tal que

$$\pi^*(\xi) = x^*.$$

□

Como  $\pi^*$  é injetiva,

$$\dim \operatorname{img} \pi^* = \dim(X / \operatorname{img}(T - \lambda)).$$

Portanto,

$$\dim(X / \operatorname{img}(T - \lambda)) = \dim \ker(T^* - \lambda).$$

□

**Definição.** Seja  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que

1.  $\dim \ker T < \infty$ .
2.  $\operatorname{codim} \operatorname{img} T < \infty$ .

Então  $T$  é chamado de um *operador Fredholm*.

**Lema 23.3.** Seja  $T \in K(X)$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Então

1. Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\ker(T - \lambda)^n = \ker(T - \lambda)^{n+1}.$$

2. Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\operatorname{img}(T - \lambda)^n = \operatorname{img}(T - \lambda)^{n+1}$$

**Observação 23.1.**  $\ker T^n \subseteq \ker T^{n+1}$  e  $\operatorname{img} T^n \supseteq \operatorname{img} T^{n+1}$ .

*Demonstração.* Suponha falso, ie.

$$\ker(T - \lambda)^n \subsetneq \ker(T - \lambda)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo lema de Riesz, existe  $(x_n) \subseteq \partial B_X$  tal que

1.  $x_n \in \ker(T - \lambda)^n$ .
2.  $d(x_{n+1}, \ker(T - \lambda)^n) > 1/2$ .

**Afirmção.**  $(Tx_n)$  não possui uma subsequência convergente.

Note que

$$Tx_n - Tx_m = \lambda x_n + (T - \lambda)x_n - (T - \lambda)x_m - \lambda x_m.$$

Defina

$$z := (T - \lambda)x_n - (T - \lambda)x_m - \lambda x_m.$$

Se  $n > m$ ,

$$z \in \ker(T - \lambda)^{n-1}.$$

Como  $d(x_n, \ker(T - \lambda)^{n-1}) > 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tx_m\| &= \|\lambda x_n + z\| \\ &= |\lambda| \left\| x_n + \frac{z}{\lambda} \right\| \\ &> |\lambda|/2 \end{aligned}$$

O item 2, exercício. □

**Exercício.** Se  $S$  é Fredholm, o lema anterior vale substituindo  $T - \lambda$  por  $S$ ? Considere o shift.

**Definição.** Seja  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  Fredholm. O *índice* de  $T$  é dado por

$$\text{ind}(T) = \dim \ker T - \text{codim } \text{img } T.$$

**Teorema 23.4.** Se  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$  são Fredholm, então

1.  $S \circ T$  é Fredholm.
2.  $\text{ind}(ST) = \text{ind } S + \text{ind } T$ .

Primeiro vamos provar:

**Proposição 23.5.** Seja  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que existe  $Z \subseteq Y$  fechado tal que

$$Y = Z \oplus \text{img } T \quad (\text{algebricamente}).$$

Então  $\text{img } T$  é fechado.

*Demonstração.* Substituindo  $T$  por

$$\tilde{T} : [x] \in X / \ker T \mapsto Tx \in Y,$$

podemos supor que  $T$  é injetivo. Para usar o Teorema da Aplicação Aberta, defina

$$S : X \oplus Z \rightarrow Y$$

como

$$S(x, y) = Tx + y.$$

Agora  $S$  é uma bijecção contínua, assim pelo Teorema da Aplicação Aberta ele é contínua. Logo, se  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|S^{-1}Tx\| \\ &\leq \|S^{-1}\| \|Tx\| \end{aligned}$$

Pelo exercício 23.0.1,  $\text{img } T$  é fechada. □

*Prova do teorema 23.4.* Usando as hipóteses e a proposição anterior, sabemos que existem subespaços fechados  $Y_1, Y_2, Y_3 \subseteq Y$  tal que

- $\text{img } T = (\ker S \cap \text{img } T) \oplus Y_1$ .
- $\ker S = (\ker S \cap \text{img } T) \oplus Y_2$ .
- $Y = \text{img } T \oplus Y_2 \oplus Y_3$ .

Logo,

$$\dim \ker(ST) = \dim \ker T + \dim S \cap \text{img } T.$$

(Isso segue de que

$$x \in \ker(ST) \mapsto Tx \in \ker S \cap \text{img } T$$

é sobrejetiva.)

Note que

$$\text{img } S = S(Y) = S(Y_1) + S(Y_3)$$

e  $\dim Y_3 < \infty$ .

Logo

$$S(Y) = S(T(X)) + S(Y_3)$$

e como  $\text{codim } S(Y) < \infty$ , segue que

$$\text{codim } ST(X) < \infty.$$

**Observação 23.2.** Nossa meta é mostrar que

$$\text{ind } ST = \text{ind } T + \text{ind } S,$$

ou seja

$$\begin{aligned} \dim \ker(ST) + \text{codim img } T + \text{codim img } T \\ = \text{codim img}(ST) + \dim \ker T + \dim \ker S. \end{aligned}$$

O que temos até agora é que

$$\begin{aligned} \dim \ker(ST) + \text{codim img } T + \text{codim img } T \\ &= \dim \ker T + \dim \ker S \cap \text{img } T + \text{codim img } T + \text{codim img } S \\ &= \dim \ker T + \dim \ker S \cap \text{img } T + \dim Y_2 + \dim Y_3 + \text{codim img } S \\ &= \dim \ker T + \dim Y_2 + \dim Y_3 + \text{codim img } S \\ &= \dim \ker T + \dim Y_2 + \dim Y_3 + \dim S(Y_3) + \text{codim img } S \\ &= \dim \ker T + \dim \ker S + \text{codim img}(ST) \\ &= \text{codim img}(ST) + \dim \ker T + \dim \ker S. \end{aligned}$$

□

**Corolário 23.6.** Se  $T \in \mathcal{L}(X)$  é Fredholm e  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$\text{ind}(T^n) = n \text{ ind } T.$$

**Teorema 23.7.** Sejam  $T \in K(X)$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

1.  $\text{ind}(T - \lambda) = 0$ .

2. **(Alternativa de Fredholm.)**  $T - \lambda$  é injetivo se e somente se  $T - \lambda$  for sobrejetivo.

3. Seja  $n \in \mathbb{N}$  o menor natural tal que

$$\ker(T - \lambda)^n = \ker(T - \lambda)^{n+1},$$

então

$$X = \ker(T - \lambda)^n \oplus \operatorname{img}(T - \lambda)^n.$$

*Demonstração.*

1. Fixe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\operatorname{ind}(T - \lambda)^m = \operatorname{img}(T - \lambda)^{m+1}.$$

Pegue  $i, j$  distintos e maiores que  $\max\{n, m\}$ .

Logo,

$$\ker(T - \lambda)^i = \ker(T - \lambda)^j$$

e

$$\operatorname{img}(T - \lambda)^i = \operatorname{img}(T - \lambda)^j,$$

assim

$$\operatorname{ind}(T - \lambda)^i = \operatorname{ind}(T - \lambda)^j$$

e

$$\operatorname{ind}(T - \lambda) = j \operatorname{ind}(T - \lambda).$$

Como  $i \neq j$ ,

$$\operatorname{ind}(T - \lambda) = 0.$$

2. Imediato.

3.

**Exercício.**  $\operatorname{img}(T - \lambda)^n$  é fechado para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção.**  $\ker(T - \lambda)^n \cap \operatorname{img}(T - \lambda)^n = \{0\}$ .

Sponha que  $x$  está nessa interseção. Logo existe  $y \in X$  tal que

$$x = (T - \lambda)^n y.$$

Mas  $(T - \lambda)^n x = 0$ , logo

$$(T - \lambda)^{2n} y = 0.$$

Como

$$\ker(T - \lambda)^{2n} = \ker(T - \lambda)^n,$$

e assim  $(T - \lambda)^n y = 0$  e  $x = 0$ .

Por 1, e pelo corolário anterior,

$$\operatorname{ind}(T - \lambda)^n = 0.$$



Logo

$$\dim \ker(T - \lambda)^n = \text{codim } \text{img}(T - \lambda)^n.$$

Como

$$\ker(T - \lambda)^n \cap \text{img}(T - \lambda)^n = \{0\}.$$

Segue que

$$X = \ker(T - \lambda)^n + \text{img}(T - \lambda)^n.$$

□

Finalmente,

**Teorema 23.8 (espectral de operadores compactos).** Seja  $X$  Banach e  $T \in K(X)$ .

1. Se  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ , então  $\lambda$  é autovalor de  $T$ .
2. Se  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ,  $\lambda$  é ponto isolado de  $\sigma(T)$ .
3.  $\sigma(T)$  é enumerável.

**Exercício.** Sejam  $Y$  e  $Z$  Banach e  $S_1 \in \mathcal{L}(Y)$  e  $S_2 \in \mathcal{L}(Z)$ . Defina  $X := Y \oplus Z$  e um operador

$$T : (y, z) \in Y \oplus Z = X \mapsto (S_1 y, S_2 z) \in Y \oplus Z = X.$$

Então

$$\sigma_{\mathcal{L}(X)}(T) = \sigma_{\mathcal{L}(Y)}(S_1) \cup \sigma_{\mathcal{L}(Z)}(S_2).$$

*Demonstração.*

1. Como  $\lambda \in \sigma(T)$ ,  $T - \lambda$  é não inversível. Como  $T$  é compacto e  $\lambda \neq 0$ , se  $T - \lambda$  é injetivo, é também bijetivo. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, ele é inversível, que não é possível. Logo  $T - \lambda$  não é injetivo, ou seja,  $\lambda$  é autovalor de  $T$ .
2. Pegue  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$X = \underbrace{\ker(T - \lambda)^n}_Y \oplus \underbrace{\text{img}(T - \lambda)^n}_Z.$$

Note que  $T(Y) \subseteq Y$  e  $T(Z) \subseteq Z$ .

Logo,

$$T = (T|_Y, T|_Z) : (y, z) \in Y \oplus Z \mapsto (T|_Y y, T|_Z z) \in Y \oplus Z.$$

**Afirmção.**  $\sigma_{\mathcal{L}(Y)}(T|_Y) = \{\lambda\}$ .

Por definição de  $Y$ ,

$$(T|_Y - \lambda \text{Id}_Y)^n = 0.$$

Como o espectro comuta com polinômios, ie., " $\sigma(p) = p\sigma$ ", considerando

$$p(z) = (z - \lambda)^n,$$

obtemos que

$$p(\sigma(T|_Y)) = \sigma(p(T|_Y)) = \sigma(0) = \{0\},$$

e assim

$$\sigma(T|_Y) = \{\lambda\}.$$

Note que  $(T|_Z - \lambda \text{Id}_Z)^n$  é inversível: segue da definição de  $X = Y \oplus Z$  e do Teorema da Aplicação Aberta.

Logo  $T|_Z - \lambda \text{Id}_Z$  é inversível, ie.

$$\lambda \notin \sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z).$$

Pelo exercício,

$$\sigma(T) \setminus \{\lambda\} = \sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z).$$

Como  $\sigma_{\mathcal{L}(Z)}(T|_Z)$  é fechado,  $\{\lambda\}$  é aberto em  $\sigma(T)$ .

3. Considere a coberta aberta

$$\sigma(T) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \{\lambda\} \cup (B_{1/n} \cap \sigma(T)).$$

Concluir.

□

**Teorema 23.9 (Atkinson).** Seja  $X$  um espaço de Banach de dimensão infinita e

$$\pi : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)/K(X)$$

a projeção na álgebra de Calkin. Então  $T \in \mathcal{L}(X)$  é Fredholm se e somente se  $\pi(T) \in \text{Inv}(X/K(X))$ .

**Lema 23.10.** Seja  $T \in \mathcal{L}(X)$  Fredholm. Existe  $S \in \mathcal{L}(X)$  tal que

1.  $1 = ST, 1 - TS$  tem posto finito.
2.  $\text{ind } S = -\text{ind } T$ .
3.  $TST = S$

*Demonstração.* Como  $T$  é Fredholm, existem  $X_1, X_2 \subseteq X$  tais que

$$X = X_1 \oplus \ker T \quad \text{e} \quad X = \text{img } T \oplus X_2$$

Defina  $S : X \rightarrow X$  como

$$S(x_0, x_1) = ((T|_{X_1})^{-1}(x_1), 0) \quad \forall (x_1, x_2) \in \text{img } T \oplus X_2.$$

□

*Prova do teorema 23.9.* Suponha  $T \in \mathcal{L}(X)$  é Fredholm. Pegue  $S$  como no lema. Logo,

$$0 = \pi(1) - \pi(S)\pi(T) \quad \text{e} \quad 0 = \pi(1) - \pi(T)\pi(S),$$

ou seja,

$$\pi(T)^{-1} = \pi(S).$$

Suponha  $\pi(T) \in \text{img}(\mathcal{L}(X)(K(X)))$ . Logo existe  $S \in \mathcal{L}(X)$  tal que

$$\pi(S)\pi(T) = \pi(T)\pi(S) = \pi(1).$$

Portanto,

$$W = 1 - ST \quad \text{e} \quad W' = 1 - TS$$

são compactos.

Note que

$$\ker T \subseteq \ker(W - 1).$$

Como  $W$  é compacto,  $\ker(W - 1)$  tem dimensão finita, logo,  $\dim \ker T < \infty$ .

Por outro lado, como

$$\text{img}(W - 1) \subseteq \text{img } T,$$

segue que

$$\text{codim}(\text{img } T) < \infty.$$

□

**Teorema 23.11.** Seja  $X$  Banach de dimensão infinita e denote o conjunto de operadores Fredholm em  $X$  por  $\Phi$ .

1.  $\Phi$  é aberto.
2.  $T \in \Phi \rightarrow \text{ind } T \in \mathbb{Z}$  é contínuo.

*Demonstração.*

1. Seja  $\pi : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)/K(X)$  o quociente. Então

$$\Phi = \pi^{-1}(\text{Inv}(\mathcal{L}(X)/K(X))).$$

2. Sejam  $T \in \Phi$ ,  $S \in \Phi$  tais que  $TST = T$  e  $\text{ind } S = -\text{ind } T$ , e  $T' \in \Phi$  tal que  $\|T - T'\| < \|S\|^{-1}$ .

Como  $\|TS - T'S\| < 1$ ,

$$W = 1 - TS + T'S$$

é inversível. Como  $T = TST$ ,

$$WT = T'ST.$$

Portanto,

$$\text{ind } W + \text{ind } T = \text{ind } T' + \text{ind } S + \text{ind } T.$$

Como  $\text{ind } W = 0$ , temos que

$$\text{ind } T' = \text{ind } S = \text{ind } T.$$

□

**Corolário 23.12.** Seja  $T \in \mathcal{L}(X)$  Fredholm e  $S \in K(X)$ . Então  $\text{ind}(T + S) = \text{ind } T$ .

*Demonstração.* Primeiro notemos que perturbar um operador de Fredholm por um compacto é Fredholm, ie.

**( $T + S \in \Phi$ )** Como  $T \in \Phi$ ,  $\pi(T)$  é inversível. Como  $\pi(T) = \pi(T + S)$ ,  $T + S \in \Phi$ .

Como  $S \in K(X)$ ,  $tS \in K(X) \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo, como

$$t \in \mathbb{R} \mapsto T + tS \in \Phi$$

e

$$W \in \Phi \mapsto \text{ind}(W) \in \mathbb{Z}$$

são contínuas,

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \text{ind}(T + ts) \in \mathbb{Z}$$

é constante. □

**Observação 23.3 (Relembre).** A álgebra de Banach com unidade, então  $e^a$  existe para todo  $a \in A$ , ie.

$$e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

**Pergunta.** Quais elementos são a exponencial de alguém? Ou seja, o que é

$$\{e^a : a \in A\}?$$

Será que é  $\text{Inv}(A)$ ? Em  $\mathbb{C}$  é verdade, mais em geral, não.

**Corolário 23.13.** Seja  $X = \ell_p, c_0$  e considere o operador shift:

$$\begin{aligned} S : X &\mapsto X \\ e_n &\mapsto e_{n+1}. \end{aligned}$$

Seja

$$\pi : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)/K(X)$$

o quociente. Então

$$\pi(S) \notin \{e^a : a \in \mathcal{L}(X)/K(X)\}.$$

*Demonstração.* ( **$S$  é Fredholm**)  $\ker S = \{0\}$  e  $\text{img } S = \{(x_n) \in X : x_1 = 0\}$ . Logo  $\text{ind}(S) = -1$ .

**Afirmção 23.1.** Se  $T \in \text{Inv}(X)$ , então  $\pi(S) \neq \pi(T)$ .

Caso contrário,  $S - T \in K(X)$ . Logo

$$-1 = \text{ind } S = \text{ind } T = 0.$$

Suponha  $\pi(S) = e^a$  para algum  $a \in \mathcal{L}(X)/K(X)$ . Logo  $a = \pi(T)$ ,  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Portanto

$$\pi(S) = e^{\pi(T)} = \pi(e^T).$$

□

## 24 Teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos

Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Para cada  $x \in H$ , considere

$$y \in H \mapsto \langle Ty, x \rangle \in \mathbb{K}.$$

Note que esse mapa é um funcional linear. Logo, existe um único  $z_x \in H$  tal que

$$\langle y, z_x \rangle = \langle Ty, x \rangle \quad \forall y \in H.$$

**Definição.** O *adjunto* de  $T$  é o operador  $T^* : H \rightarrow H$  dado por

$$Tx = z_x \quad \forall x \in H.$$

**Exercício.**

1.  $T^* \in \mathcal{L}(X)$ .
2. Qual é a relação entre esse adjunto e o adjunto já introduzido anteriormente?

**Proposição 24.1.** Seja  $T \in \mathcal{L}(H)$  autoadjunto.

1. Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor de  $T$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Sejam  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$  autovalores distintos com autovetores  $x$  e  $x'$  respectivamente. Então  $x \perp x'$ .

**Proposição 24.2.** Seja  $T \in \mathcal{L}(H)$  autoadjunto. Então

$$f(T) = \|T\|.$$

*Demonstração.* Exercício.

□

**Corolário 24.3.** Se  $\sigma(T) = \{0\}$ ,  $T = 0$ .

*Demonstração.* Sabemos que

$$r(T) = \lim_n \|T^*\|^{1/n}.$$

Note que  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ , pois

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{x \in B_X} \langle Tx, Tx \rangle \\ &= \sup_{x \in B_X} \langle T^*Tx, Tx \rangle \\ &\leq \|T^*T\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_n \|T^{2n}\|^{1/2n} \\ &= \lim_n \|(T^*)^n - T^n\|^{1/2n} \\ &= \lim_n \|T^{2n}\|^{1/2n} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

□

**Teorema 24.4 (Espectral para Operadores Auto-adjuntos Compactos).** Se  $T \in K(H)$  é auto-adjunto então existe um conjunto maximal ortonormal composto por autovetores de  $T$ .

Em particular, existe  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  e  $(x_n) \subset \partial B_X$  tais que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n \quad \forall x \in H.$$

*Demonstração.* Para cada  $\lambda \in \sigma(T)$ , escreva

$$H_\lambda \in \ker(T - \lambda).$$

Então,

1.  $\dim H_\lambda < \infty$  se  $\lambda \neq 0$ .
2.  $H_\lambda \perp H_{\lambda'}, \lambda \neq \lambda'$ .
3.  $\sigma(T)$  é enumerável.

Defina

$$H' = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} H_\lambda.$$

**Observação 24.1.** O produto interno na soma de espaços de Hilbert é soma dos produtos internos.

Resta mostrar que  $H = H'$ .

**Afirmção.**  $T(H') \subseteq H'$ .

Isso segue pois

$$T(H_\lambda) \subseteq H_\lambda \quad \forall \lambda \in \sigma(T).$$

**Afirmção.**  $T((H')^\perp) \subseteq (H')^\perp$ .

Seja  $y \in (H')^\perp$  e  $x \in H'$ . Então

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0.$$

O que podemos falar sobre

$$T|_{(H')^\perp} : (H')^\perp \rightarrow (H')^\perp.$$

Como  $T$  é compacto e auto-adjunto,  $T|_{(H')^\perp}$  é compacto e auto-adjunto,

$$\sigma(T|_{(H')^\perp}) = \{0\}.$$

Logo

$$T|_{(H')^\perp} = 0.$$

Portanto,

$$(H')^\perp \subseteq H_0 = \ker T.$$

Logo,  $(H')^\perp = \{0\}$ , ie.  $H = H'$ .

□

## 25 As melhores coisas na matemática

1. Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Definimos a **transformada de Fourier** de  $f$  como

$$\mathcal{F}_f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx.$$

- Mostre que  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  é contínuo.
  - $\mathcal{F}(L^1) \subseteq C_0(\mathbb{R})$ .
  - $\mathcal{F}$  é injetiva.  $\mathcal{F}$  é surjetiva? Não. Supor que sí, usa aplicação aberta.
2. Considere  $f \in L^1_{\text{loc}}(0, 1)$ . (Seguindo a Brezis,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  quando  $f\chi_K \in L^1(\Omega)$  para todo  $K \subseteq \Omega$  compacto.) Dizemos que  $g$  é a **derivada fraca** de  $f$  se

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1.$$

- Mostre que se a derivada fraca de  $f$  existe, ela é única. (Notação:  $g = f'$ .)
- Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos

$$W^{1,p}(0, 1) = \{f \in L^p : f' \text{ existe e } f' \in L^p\}.$$

Então,

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p.$$

Mostre que  $(W^{1,p}, \|\cdot\|_{1,p})$  é um espaço de Banach. Se  $1 < p < \infty$ , é reflexivo.

3. Dado  $x = (x_n)_n$ , definimos a **distribuição de  $x$**  como

$$\begin{aligned} \gamma_x : (0, \infty) &\mapsto [0, \infty] \\ t &\mapsto \gamma_x(t) = \#\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > t\} \end{aligned}$$

Prove que:

- $\gamma_{x+y}(t) \leq \gamma_x\left(\frac{t}{2}\right) + \gamma_y\left(\frac{t}{2}\right)$ .
- $\gamma_x(t) \leq t^{-p} \|x\|_{\ell^p}$  para todo  $x \in \ell^p$ .
- Se  $x \in \ell^p$ , então

$$\|x\|_{\ell^p} = p \int_0^\infty \gamma_x(t) t^{p-1} dt.$$

Com isso, definimos o  $\ell_w^p$  como sendo as sequências  $x = (x_n)_n$  tais que

$$\sup\{\gamma_x(t) t^p : t > 0\} < \infty.$$

Prove que

- $\ell^p \not\subseteq \ell_w^p$ .
- $\ell_w^p \subseteq \ell^q + \ell^r$  para  $q < p < r$ . **Esqueça.**



4. Seja  $\varphi(t)$  contínua, convexa e crescente em  $[0, \infty)$  com  $\varphi(0) = 0$ . Defina o espaço

$$L^\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{mesruable e } \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{C}\right) dx < \infty, \text{ para alguma } C > 0 \right\}$$

e a norma

$$\|f\|_\varphi = \inf_{C>0} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{C}\right) dx.$$

Mostre que

- $(L^\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$  é Banach. (Espaço vetorial, normado, completo.)
- $\varphi(t) = t^p$  para  $1 \leq p < \infty$ ,

$$L^\varphi = L^p.$$

5. Seja  $F \leq C^0([0, 1])$  fechado. A suma que  $F \subseteq C^1([0, 1])$ . Prove que

- $\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ , para toda  $f \in F$  e para algum  $C > 0$ .
- $\dim F = 0$ .