

La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 17, 2023

Índice

| | |
|-----------------------------|----------|
| Índice | 2 |
| 1 Álgebra homológica | 3 |
| 1.1 Repaso | 3 |
| 1.2 Más álgebra homológica | 6 |
| 1.3 Funtores derivados | 7 |
| 1.4 Grupos de cohomología | 13 |
| 1.4.1 Cohom y Hom | 14 |

1. Álgebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R -módulos, $R\text{-mod}$, cuyos objetos son R -módulos y los morfismos son homomorfismos R -lineales. También podemos construir $R\text{-ch-comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\text{img } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta_n} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{img } \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que C_\bullet es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n .
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\text{img } \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ab} \\ & \nearrow & \uparrow \\ \text{R-ch-comp} & \xrightarrow{H_n} & \text{R-mod} \\ C_\bullet & \longmapsto & H_n(C_\bullet) \end{array}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_*g_*$ y $id_{C_\bullet} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **functor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1}-g_{n+1} & \swarrow h_p & \downarrow f_n-g_n & \nwarrow h_{n-1} & \downarrow f_{n-1}-g_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n . Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \text{img } i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. \square

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{i} & B_\bullet & \xrightarrow{j} & C_\bullet \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \longrightarrow & B'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está \bar{h} a la izquierda y \bar{f} a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. \square

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R -módulos, y el conjunto de homomorfismos R -lineales de M en N , que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morfismo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R -módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(-, N) : R\text{-mod} &\rightarrow \text{Ab} \\
 M &\mapsto \text{Hom}(M, N) \\
 M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto ?
 \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(M, N) &\xleftarrow{\varphi^*} \text{Hom}(M', N) \\
 \varphi^*(f) &= f\varphi \leftarrow f
 \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \downarrow \varphi & \searrow f\varphi & \\
 M' & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Así que $\text{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\text{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \text{Hom}(M_1, N) \oplus \text{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

$$\begin{array}{ccccc}
 M_1 & \hookrightarrow & M_1 \oplus M_2 & \hookleftarrow & M_2 \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! f \oplus g & \swarrow g & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, N) \xrightarrow{\psi^*} \text{Hom}(B, N) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Hom}(A, N)$$

En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha $0 \rightarrow A$ no necesariamente va a dar a una flecha de la forma $\text{Hom}(A, N) \rightarrow 0$. \square

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto izquierdo).

Observación. Denotaremos $\text{Hom}_R(M, N) := M^*$, y, por si acaso $\text{Hom}(N, M) := M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R -módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un **R -módulo libre** es uno de la forma $\bigoplus_{i \in I} R_i$ donde $R_i = R$. Los elementos canónicos son $e_j := (\delta_{ij})_{i \in I}$, y $\beta := \{e_j\}_{j \in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R -módulo M y para toda función $f : \beta \rightarrow M$ existe un único $\bar{f} : L = \bigoplus_{i \in I} R_i \rightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ L & & \end{array}$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R -módulo es cociente de un R -módulo libre.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} L = \bigoplus_{i \in M} R_i & \xrightarrow{\bar{f}} & M \\ \uparrow & \nearrow & \\ M & & \end{array}$$

Como \bar{f} es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos. \square

Definición. Sea M un R -módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j .

Teorema. Todo R -módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow f_1 & \uparrow & & \\ & & & & \ker f_0 & & \end{array}$$

□

Teorema. Sea $\alpha : M \rightarrow M'$ un homomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f_2} & F'_1 & \xrightarrow{f_1} & F'_0 & \xrightarrow{f_0} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i : F_i \rightarrow F'_i$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \beta_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0 . Lo mandamos mediante f_0 a M , luego con α . Pero como f'_0 es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F'_0$ que le pega.

Ahora

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \text{img } f_1 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
 & & & & \text{img } f'_1 & & & &
 \end{array}$$

Hay una flecha desde $\text{img } f_1$ hasta $\text{img } f'_1$ que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado). \square

Definición. Sea M un R -módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M :

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\text{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{f_1} F_1^* \longrightarrow F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$$

Definimos

$$\text{Ext}_R^n(M, N) := H_n(0 \rightarrow F^*)$$

Teorema. $\text{Ext}_R^n(M, N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow Id \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f_2} & F'_1 & \xrightarrow{f_1} & F'_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_0 & & \downarrow Id \\
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i \alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & F_1^* & \longleftarrow & F_0^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0 \\
 & & \alpha_1^* \uparrow & & \alpha_0^* \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0 \\
 & & \beta_1^* \uparrow & & \beta_0^* \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^* \alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$\begin{array}{c}
 H_1(F^*) \\
 \alpha_1^\# \uparrow \\
 H_1(F'^*) \\
 \beta_1^\# \uparrow \\
 H_1(F^*)
 \end{array}$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^\#$ y $\beta_1^\#$ son inversas una de la otra. \square

Proposición. $\text{Ext}_R^0(M, N) \approx \text{Hom}_R(M, N)$.

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \text{img } f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \text{img } f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \text{img } f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\text{Ext}_R^0(M, N) = \ker f_1^* \approx M^* = \text{Hom}(M, N)$ \square

Lema (De la herradura). *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones.* Tomemos una sucesión exacta corta y dos resoluciones libres de los

extremos. Entonces existe lo rojo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & F'_0 \oplus F''_0 & \longrightarrow & F''_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y hay que hacer todo lo de rutina. □

Ahora apliquemos $\text{Hom}(-, N)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & P'^*_0 & \longleftarrow & P^*_0 & \longleftarrow & P''^*_0 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & P'^*_1 & \longleftarrow & P^*_1 & \longleftarrow & P''^*_1 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P'^*_\bullet \longleftarrow P^*_\bullet \longleftarrow P''^*_\bullet \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M'', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Y ahora supongamos que tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Que inducen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & P_{\bullet}'^* & \longleftarrow & P_{\bullet}^* & \longleftarrow & P_{\bullet}''^* & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & Q_{\bullet}'^* & \longleftarrow & Q_{\bullet}^* & \longleftarrow & Q_{\bullet}''^* & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Y por fin obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M'', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(M'', N) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A'', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(M'', N) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será \mathbb{Z} .

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}\text{-mod}$ y el functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A ?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir,

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A, B) = 0 \text{ para cualesquiera } \mathbb{Z}\text{-módulos } A, B \text{ y } n \geq 2.$$

Proposición.

- $\text{Ext}_R^n(-, N)$ es un functor aditivo para toda n , es decir,

$$\text{Ext}_R^n(M' \oplus M'', N) \approx \text{Ext}_R^n(M', N) \oplus \text{Ext}_R^n(M'', N)$$

Demostración. Consideremos

$$P'_\bullet \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_\bullet \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_\bullet \oplus P''_\bullet \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

Y la homología abre sumas: $(P''_\bullet \oplus P'_\bullet)^* \approx P''_\bullet^* \oplus P'_\bullet^*$. □

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A, B) = 0$ si A es libre.

Demostración. Simplemente tomamos $0 \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0$. □

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \xleftarrow{n^*} & \text{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \xleftarrow{n} & B & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Así que $B/nB = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n, B)$. □

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, B) \approx B/m_1B \oplus \dots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \dots$$

Y apliquemos el $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ para obtener

$$\dots \longrightarrow C_n^* \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} C_{n+1}^* \xrightarrow{\partial_{n+2}^*} C_{n+2}^* \longrightarrow \dots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_\bullet, G) = \ker \partial_n^* / \text{img } \partial_{n-1}^*$$

que llamaremos el n -ésimo grupo de cohomología de C_\bullet con coeficientes en G .

Consideremos

$$\text{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \text{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_n^*} \text{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$\begin{array}{ccc} C_{n-2} & \xrightarrow{f} & G \\ \partial_{n-1} \uparrow & \nearrow f\partial_{n-1} & \\ C_{n-1} & & \end{array}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C; G)$ para alguna $g : C_{n-1} \rightarrow G$ tal que

$$\begin{aligned} f\partial_{n-1} : C_{n-1} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g\partial_n = 0 \end{aligned}$$

1.4.1 Cohom y Hom

Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_\bullet; G)$ y $\text{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$C_\bullet \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

comparando $H^n(C_\bullet; \mathbb{Z})$ con $\text{Hom}(H_n(C_\bullet), \mathbb{Z})$. Para calcular la cohomología lo primero que hago es dualizar:

$$C_\bullet^* \quad 0 \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

De manera que $H^0(C_\bullet; \mathbb{Z}) = 0$ y $H^1(C_\bullet; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\text{Hom}(H_n(C_\bullet), \mathbb{Z}) = 0$ para toda n .

Aún así, podemos construir una función

$$\begin{aligned} h : H^n(C_\bullet; G) &\rightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \\ [g] &\mapsto Z_n/B_n = H_n(C_\bullet) \rightarrow G \end{aligned}$$

donde $g : C_n \rightarrow G$ con $g|_{B_n} = 0$. Así que simplemente enviamos a $[g]$ a la restricción $g|_{Z_n} : Z_n/B_n \rightarrow G$.

Proposición. h es suprayectiva. Más aún, existe una función

$$\varphi : \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \rightarrow H^n(C_\bullet; G)$$

tal que $h\varphi = \text{id}$.

Demostración. Sea $\bar{g} : H_n(C_\bullet) \rightarrow G$. Como $H_n(C_\bullet) = Z_n/B_n$, lo que queremos hacer es extender \bar{g} a una función en todo C_\bullet . Observemos que tenemos esta sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Como $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ y C_n es libre porque **estamos suponiendo que C_\bullet es un complejo de cadenas de grupos abelianos libres**. Luego, esta sucesión exacta corta se escinde así que $C_n = Z_n \oplus B_n$, y la proyección a Z_n es un mapeo $C_n \rightarrow Z_n$. En fin,

$$\begin{array}{ccccc} Z_n & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\bar{g}} & G \\ \uparrow & & & \nearrow g & \\ C_n & & & & \end{array}$$

Y de hecho g sí representa un elemento en la cohomología, ya que $g|_{B_n} = 0$ porque la flecha de $Z_n \rightarrow H_n(C) = Z_n/B_n$ es el paso al cociente, así que se pierden los elementos de B_n . Además, φ es un homomorfismo. Ya además $\varphi h = id$ por la forma en la que fue contruida: no hemos hecho más que extender y luego restringir una función. \square

Corolario. $H^n(C_\bullet, G) \approx \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \oplus \ker h$.

Proposición. $\ker h \approx \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}, G)$.

Demostración. Esta prueba tiene un truco. Comenzamos por definir el complejo de cadenas de los ciclos,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ Z_\bullet & \cdots \longrightarrow & Z_n & \xrightarrow{0} & Z_{n-1} & \xrightarrow{0} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_\bullet & \cdots \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B_{\bullet-1} & \cdots \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{0} & B_{n-1} & \xrightarrow{0} & \cdots \\ \downarrow & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array}$$

Los homomorfismos frontera son 0 cuando vemos este complejo de cadenas como sub-complejo de cadenas de C_\bullet . Y algo parecido para $B_{\bullet-1}$. Ahora, la sucesión exacta corta de complejos de cadenas se escinde y al dualizar obtenemos

$$0 \longrightarrow B_{\bullet-1}^* \longrightarrow C_\bullet^* \longrightarrow Z_\bullet^* \longrightarrow 0$$

Ahora sí, aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$\cdots \longrightarrow B_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \longrightarrow Z_n^* \longrightarrow B_n^* \longrightarrow H^{n+1}(C_\bullet, G) \longrightarrow \cdots$$

Afirmación. $Z_n^* \xrightarrow{i_n^*} B_n^*$ dado por $g \mapsto g|_{B_n}$ es el dual de $B_n \hookrightarrow Z_n$.

Observación. El dual de una inclusión es una restricción.

En la prueba simplemente mostramos que el mapeo $g \mapsto \bar{g}\partial_{n+1} : B_n \rightarrow G$ es una restricción.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & Z_{\bullet} & \cdots \longrightarrow & Z_n^* & \xrightarrow{\text{0}} & Z_{n-1}^* \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & C_{\bullet} & \cdots \longrightarrow & C_n^* & \xrightarrow{\partial_n^*} & C_{n-1}^* \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & B_{\bullet-1} & \cdots \longrightarrow & B_n^* & \xrightarrow{0} & B_{n-1}^* \xrightarrow{0} \cdots \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Perseguimos ese diagrama para construir el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_n & \xrightarrow{g} & G \\
 & \nearrow & \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\
 B_n & \longrightarrow & C_n & & \\
 & \nwarrow & \uparrow & & \\
 & & C_{n+1} & &
 \end{array}$$

Parece que la \bar{g} cambió de ser una restricción a una extensión...

Luego

$$0 \longrightarrow \text{coker } i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_{\bullet}; G) \xrightarrow{h} \ker i_n^* \longrightarrow 0$$

Afirmación. $\ker i_n^* = \text{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G)$

Afirmación. $\ker h = \text{coker } i_{n-1}^*$.

Entonces,

$$Z_{n-1}^* \xrightarrow{i_{n-1}^*} B_{n-1}^* \longrightarrow \text{coker } i_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Y ahora nada más tomamos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & \nearrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B_{n-1} & \hookrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & H_{n-1}(C_{\bullet}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y de aquí que

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & 0 \\
 & \searrow & & & & \nearrow & \\
 & & Z_{n-1}^* & \xrightarrow{i_{n-1}^*} & B_{n-1}^* & \longrightarrow & \text{coker } i_{n-1}^* \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y esa de cuatro no es exacta pero sí concluimos que $\text{coker } i_{n-1}^* = \text{Ext}^1(H_n(C_\bullet), G)$. \square

Teorema. Tenemos

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$