La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 21, 2023

Índice

Ín	ndice	2
1	Ágebra homológica 1.1 Repaso	
	1.2 Más álgebra homológica1.3 Funtores derivados	
	1.4 Grupos de cohomología	13
2	Cohomología	19

1. Ágebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir R-ch-comp, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1}\circ\partial_n=0$, es decir, $\operatorname{img}\partial_n\subseteq\ker\partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_{\bullet}\stackrel{f}{\longrightarrow}D_{\bullet}$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}} \qquad \downarrow^{f_n} \qquad \downarrow^{f_{n-1}}$$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\delta_n} D_n \xrightarrow{\delta_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Y definimos

$$H_n(C_{\bullet}) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que C_{\bullet} es **acíclico** si $H_n(C_{\bullet}) = 0$ para toda n.
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si img $\varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ es una sucesión exacta corta.
- Y si se extiende infinitamente, es una sucesión exacta larga.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Ab} \\
& \uparrow \\
\text{R-ch-comp} & \longrightarrow & \text{R-mod} \\
C_{\bullet} & \longmapsto & H_n(C_{\bullet})
\end{array}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_*g_*$ y $id_{C_{\bullet *}} = id_{H_n(C_{\bullet})}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama funtor covariante.

Definición. Dos homomorfismos

$$f,g:(C_{\bullet},\partial)\to(C'_{\bullet},\partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n:C_n\to C'_{n+1}$ para toda $p\in\mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}-g_{n+1}} \downarrow^{h_n} \downarrow^{f_n-g_n} \downarrow^{h_{n-1}} \downarrow^{f_{n-1}-g_{n-1}} \downarrow^{h_{n-1}-g_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow C'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial'_n} C'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \stackrel{\phi}{\longrightarrow} B_{\bullet} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p}: H_p(C_{\bullet}) \to H_{p-1}(A_{\bullet})$$

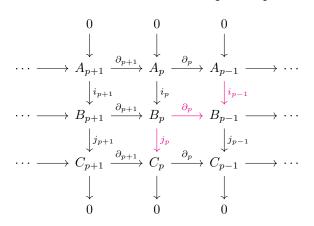
tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

1.1. REPASO 5

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:



Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. \Box

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{i} B_{\bullet} \xrightarrow{j} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{f} \qquad \downarrow^{g} \qquad \downarrow^{h}$$

$$0 \longrightarrow A'_{\bullet} \longrightarrow B'_{\bullet} \longrightarrow C'_{\bullet} \longrightarrow 0$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow H_p(B) \longrightarrow H_p(C) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow H_{p-1}(B) \longrightarrow H_{p-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow_{\bar{f}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}}$$

$$\cdots \longrightarrow H_p(A') \longrightarrow H_p(B') \longrightarrow H_p(C') \longrightarrow H_{p-1}(A') \longrightarrow H_{p-1}(B') \longrightarrow H_{p-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está \bar{h} a la izquierda y \bar{f} a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad.

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$M_{5} \xrightarrow{f_{5}} M_{4} \xrightarrow{f_{4}} M_{3} \xrightarrow{f_{3}} M_{2} \xrightarrow{f_{2}} M_{1}$$

$$\downarrow h_{5} \qquad \downarrow h_{4} \qquad \downarrow h_{3} \qquad \downarrow h_{2} \qquad \downarrow h_{1}$$

$$N_{5} \xrightarrow{g_{5}} N_{4} \xrightarrow{g_{4}} N_{3} \xrightarrow{g_{3}} N_{2} \xrightarrow{g_{2}} N_{1}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y f+g(m)=f(m)+g(m) que también es un morfismo, (-f)(m)=-f(m)). También tiene estructura de R-módulo con la operación (rf)(m)=rf(m)=f(rm).

Ahora construyamos un funtor:

$$\operatorname{Hom}(-,N):\operatorname{R-mod}\to\operatorname{Ab}$$

$$M\mapsto\operatorname{Hom}(M,N)$$

$$M\stackrel{\varphi}{\to}M'\mapsto\qquad ?$$

La flecha inducida será

$$\operatorname{Hom}(M,N) \xleftarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}(M',N)$$
$$\varphi^*(f) = f\varphi \hookleftarrow f$$

De acuerdo a

$$M \downarrow \varphi \qquad f\varphi \downarrow M' \xrightarrow{f} N$$

Así que $\operatorname{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

• Aditivo. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\operatorname{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \operatorname{Hom}(M_1, N) \oplus \operatorname{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

• Exacto Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} B \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C,N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(B,N) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}(A,N)$$

En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

• Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha $0 \to A$ no necesiamente va a dar a una flecha de la forma $\operatorname{Hom}(A,N) \to 0$.

• ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto *izquierdo*).

Observación. Denotaremos $\operatorname{Hom}_R(M,N):=M^*$, y, por si acaso $\operatorname{Hom}(N,M):=M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R-módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un R-módulo libre es uno de la forma $\bigoplus_{i\in I} R_i$ donde $R_i=R$. Los elementos canónicos son $e_j:=(\delta_{ij})_{i\in I}$, y $\beta:=\{e_j\}_{j\in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R-módulo M y para toda función $f:\beta\to M$ existe un único $\bar f:L=\bigoplus_{i\in I} R_i\to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.

Demostración.

$$L = \bigoplus_{i \in M} R_i \xrightarrow{\bar{f}} M$$

Como \bar{f} es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos.

Definición. Sea M un R-módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j.

Teorema. Todo *R*-módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\ker f_0$$

Teorema. Sea $\alpha: M \to M'$ un homomorfismo.

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\alpha_2} \qquad \downarrow^{\alpha_1} \qquad \downarrow^{\alpha_0} \qquad \downarrow^{\alpha}$$

$$\cdots \longrightarrow F'_2 \xrightarrow{f_2} F'_1 \xrightarrow{f_1} F'_0 \xrightarrow{f_0} M' \longrightarrow 0$$

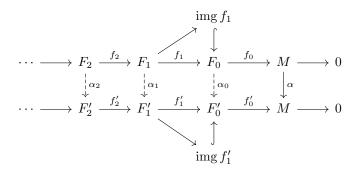
entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i: F_i \to F_i'$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0 . Lo mandamos mediante f_0 a M, luego con α . Pero como f_0' es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F_0'$ que le pega.

Ahora



Hay una flecha desde img f_1 hasta img f'_1 que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado).

Definición. Sea M un R-módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\operatorname{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \stackrel{f_1}{\longrightarrow} F_1^* \longrightarrow F_2^* \stackrel{f_3^*}{\longrightarrow} \cdots$$

Definimos

$$\operatorname{Ext}_R^n(M,N) := H_n(0 \to F^*)$$

Teorema. $\operatorname{Ext}_R^n(M,N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α :

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\alpha_2} \qquad \downarrow^{\alpha_1} \qquad \downarrow^{\alpha_0} \qquad \downarrow^{Id}$$

$$\cdots \longrightarrow F'_2 \xrightarrow{f_2} F'_1 \xrightarrow{f_1} F'_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\beta_2} \qquad \downarrow^{\beta_1} \qquad \downarrow^{\beta_0} \qquad \downarrow^{Id}$$

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i \alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\cdots \longleftarrow F_1^* \longleftarrow F_0^* \longleftarrow M^* \longleftarrow 0$$

$$\alpha_1^* \uparrow \qquad \alpha_0^* \uparrow$$

$$\cdots \longleftarrow F_1^{'*} \longleftarrow F_0^{'*} \longleftarrow M^* \longleftarrow 0$$

$$\beta_1^* \uparrow \qquad \beta_0^* \uparrow$$

$$\cdots \longleftarrow F_1^{'*} \longleftarrow F_0^{'*} \longleftarrow M^* \longleftarrow 0$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^*\alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$H_{1}(F^{*})$$

$$\alpha_{1}^{\#} \uparrow$$

$$H_{1}(F'^{*})$$

$$\beta_{1}^{\#} \uparrow$$

$$H_{1}(F^{*})$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^\#$ y $\beta_1^\#$ son inversas una de la otra.

Proposición. $\operatorname{Ext}^0_R(M,N) \approx \operatorname{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. Tenemos:

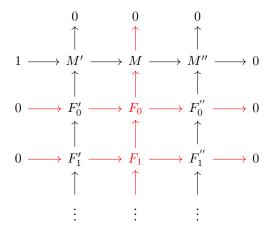
$$0 \longrightarrow \operatorname{img} f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \operatorname{img} f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \operatorname{img} f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) = \ker f_1^* \approx M^* = \operatorname{Hom}(M,N)$

Lema (De la herradura). *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones*. Tomemos una sucesión exacta corta y dos resulciones libres de los

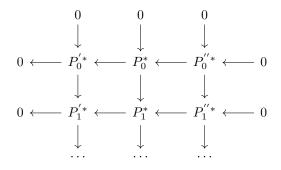
extremos. Entonces existe lo rojo:



Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

Y hay que hacer todo lo de rutina.

Ahora apliquemos Hom(-, N):



O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P_{\bullet}^{'*} \longleftarrow P_{\bullet}^{*} \longleftarrow P_{\bullet}^{''*} \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^0_R(M',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Y ahora supongamos que tenemos

Que inducen

$$0 \longleftarrow P_{\bullet}^{'*} \longleftarrow P_{\bullet}^{*} \longleftarrow P_{\bullet}^{''*} \longleftarrow 0$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$0 \longleftarrow Q_{\bullet}^{'*} \longleftarrow Q_{\bullet}^{*} \longleftarrow Q_{\bullet}^{''*} \longleftarrow 0$$

Y por fin obtenemos

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(M'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(M,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(M',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(A'',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(A,N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^0(A',N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será \mathbb{Z} .

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}$ -mod y el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \stackrel{f_0}{\longrightarrow} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir,

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A,B)=0$$
 para cualesquiera \mathbb{Z} -módulos A,B y $n\geq 2$.

Proposición.

• $\operatorname{Ext}_R^n(-,N)$ es un funtor aditivo para toda n, es decir,

$$\operatorname{Ext}_R^n(M' \oplus M'', N) \approx \operatorname{Ext}_R^n(M', N) \oplus \operatorname{Ext}_R^n(M'', N)$$

Demostración. Consideremos

$$P'_{\bullet} \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_{ullet} \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_{\bullet} \oplus P''_{\bullet} \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

Y la homología abre sumas: $(P''_{ullet} \oplus P''_{ullet})^* \approx P''_{ullet} \oplus P'^*_{ullet}$.

• $\operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ si A es libre.

Demostración. Simplemente tomamos $0 \to A \to A \to 0$.

• $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

Demostración.

$$0 \longleftarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, B) \xleftarrow{n^*} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, B) \longleftarrow 0$$

$$\downarrow \approx \qquad \qquad \downarrow \approx$$

$$0 \longleftarrow B \longleftarrow B \longleftarrow 0$$

Así que
$$B/nB = \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n, B)$$
.

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A,B) \approx B/m_1B \oplus \ldots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Y apliquemos el $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,G)$ para obtener

$$\cdots \longrightarrow C_n^* \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} C_{n+1}^* \xrightarrow{\partial_{n+2}^*} C_{n+2}^* \longrightarrow \cdots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_{\bullet},G) = \ker \partial_n^* / \operatorname{img} \partial_{n-1}^*$$

que llamaremos el n-ésimo grupo de cohomología de C_{ullet} con coeficientes en G.

Consideremos

$$\operatorname{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \operatorname{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_n^*} \operatorname{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$C_{n-2} \xrightarrow{f} G$$

$$\partial_{n-1} \uparrow \qquad f \partial_{n-1}$$

$$C_{n-1}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C;G)$ para alguna $g:C_{n-1}\to G$ tal que

$$f\partial_{n-1}: C_{n-1} \to G$$

 $g \mapsto g\partial_n = 0$

1.5 Teorema de coeficientes universales

Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_{\bullet}; G)$ y $\operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$C_{\bullet} \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{2}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

comparando $H^n(C_{\bullet}; \mathbb{Z})$ con $\operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}); \mathbb{Z})$. Para calcular la cohomología lo primero que hago es dualizar:

$$C^*_{\bullet}$$
 $0 \leftarrow 2 \times \mathbb{Z} \leftarrow 0$

De manera que $H^0(C_{\bullet}; \mathbb{Z}) = 0$ y $H^1(C_{\bullet}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), \mathbb{Z}) = 0$ para toda n.

Aún así, podemos construir una función

$$h: H^n(C_{\bullet}; G) \to \operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G)$$

 $[g] \mapsto Z_n/B_n = H_n(C_{\bullet}) \to G$

donde $g:C_n\to G$ con $g|_{B_n}=0$. Así que simplemente enviamos a [g] a la restricción $g|_{Z_n}:Z_n/B_n\to G$.

Proposición. *h* es suprayectiva. Más aún, exste una función

$$\varphi: \operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G) \to H^n(C_{\bullet}; G)$$

tal que $h\varphi = id$.

Demostración. Sea $\bar{g}: H_n(C_{\bullet}) \to G$. Como $H_n(C_{\bullet}) = Z_n/B_n$, lo que queremos hacer es extender \bar{g} a una función en todo C_{\bullet} . Observemos que tenemos esta sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

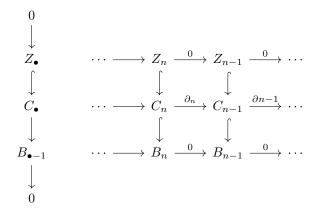
Como $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ y C_n es libre porque **estamos suponiendo que** C_{\bullet} **es un complejo de cadenas de grupos abelianos libres**. Luego, esta sucesión exacta corta se escinde así que $C_n = Z_n \oplus B_n$, y la proyección a Z_n es un mapeo $C_n \to Z_n$. En fin,

Y de hechog sí representa un elemento en la cohomología, ya que $g|_{B_n}=0$ porque la flecha de $Z_n\to H_n(C)=Z_n/B_n$ es el paso al cociente, así que se pierden los elementos de B_n . Además, φ es un homomorfismo. Ya además $\varphi h=id$ por la forma en la que fue contruida: no hemos hecho más que extender y luego restringir una función. \square

Corolario. $H^n(C_{\bullet}, G) \approx \operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G) \oplus \ker h$.

Proposición. $\ker h \approx \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}, G).$

Demostración. Esta prueba tiene un truco. Comenzamos por definir el complejo de cadenas de los ciclos,



Los homomorfismos frontera son 0 cuando vemos este complejo de cadenas como subcomplejo de cadenas de \mathbb{C}_{\bullet} . Y algo parecido para $B_{\bullet-1}$. Ahora, la sucesión exacta corta de complejos de cadenas se escinde y al dualizar obtenemos

$$0 \longrightarrow B_{\bullet-1}^* \longrightarrow C_{\bullet}^* \longrightarrow Z_{\bullet}^* \longrightarrow 0$$

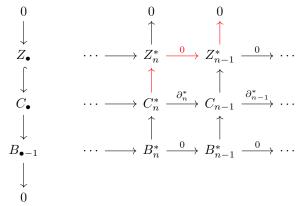
Ahora sí, aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$\cdots \longrightarrow B_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_{\bullet},G) \longrightarrow Z_n^* \longrightarrow B_n^* \longrightarrow H^{n+1}(C_{\bullet},G) \longrightarrow \cdots$$

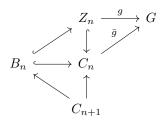
Afirmación. $Z_n^* \xrightarrow{i_n^*} B_n^*$ dado por $g \mapsto g|_{B_n}$ es el dual de $B_n \hookrightarrow Z_n$.

Observación. El dual de una inclusión es una restricción.

En la prueba simplemente mostramos que el mapeo $g\mapsto \bar{g}\partial_{n+1}:B_n\to G$ es una restricción.



Perseguimos ese diagrama para construir el diagrama conmutativo



Parece que la \bar{g} cambió de ser una restricción a una extensión...

Luego

$$0 \, \longrightarrow \, \operatorname{coker} i_{n-1}^* \, \longrightarrow \, H^n(C_\bullet;G) \stackrel{h}{\longrightarrow} \, \ker i_n^* \, \longrightarrow \, 0$$

Afirmación. $\ker i_n^* = \operatorname{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G)$

Afirmación. $\ker h = \operatorname{coker} i_{n-1}^*$.

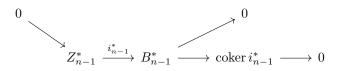
Entonces,

$$Z_{n-1}^* \xrightarrow{i_{n-1}^*} B_{n-1}^* \longrightarrow \operatorname{coker} i_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Y ahora nada más tomamos

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C_{\bullet}) \longrightarrow 0$$

Y de aquí que



Y esa de cuatro no es exacta pero sí concluimos que coker $i_{n-1}^* = \operatorname{Ext}^1(H_n(C_{\bullet}), G)$.

Teorema (de coeficientes universales). Sean G un grupo abeliano y C un \mathbb{Z} -complejo de cadenas de grupos abelianos libres, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^{1}(H_{n-1}(C_{\bullet}), G) \longrightarrow H^{n}(C_{\bullet}, G) \stackrel{h}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n}(C), G) \longrightarrow 0$$

que se escinde.

Además, esta sucesión es **natural** en C_{\bullet} , es decir, si $\alpha: C_{\bullet} \to C'_{\bullet}$, entonces el siguiente diagrma conmuta:

donde estamos abusando de notación con las flechas inducidas por α , que son distintas, pero se obtienen usando que H_n y Ext son funtores.

Observación. El nombre *coeficientes universales* tiene que ver con que la homología con coeficientes en \mathbb{Z} determina la cohomología con cualesquiera coeficientes.

Demostración. Ahora demostremos la naturalidad. Comenzamos con el siguiente diagrama:

$$0 \longrightarrow Z_{\bullet} \longrightarrow C_{\bullet} \xrightarrow{\partial} B_{\bullet,-1} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\alpha} \qquad \downarrow^{\alpha} \qquad \downarrow^{\alpha}$$

$$0 \longrightarrow Z'_{\bullet} \longrightarrow C'_{\bullet} \longrightarrow B'_{\bullet-1} \longrightarrow 0$$

Luego dualizamos:

$$0 \longrightarrow Z_{\bullet}^{*} \longrightarrow C_{\bullet}^{*} \longrightarrow B_{\bullet-1}^{*} \longrightarrow 0$$

$$\alpha^{*} \uparrow \qquad \alpha^{*} \uparrow \qquad \alpha^{*} \uparrow$$

$$0 \longrightarrow Z_{\bullet}^{'*} \longrightarrow C_{\bullet}^{'*} \longrightarrow B_{\bullet,-1}^{'*} \longrightarrow 0$$

Y por último

Corolario. Supongamos que $H_n(C_{\bullet})$ y $H_{n-1}(C_{\bullet})$ son finitamente generados. Podemos expresarlos así:

$$H_n(C_{\bullet}) = \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n$$
 $H_{n-1}(C_{\bullet}) = \mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}$

Con T_n y T_{n-1} finitos. Entonces,

$$H^n(C_{\bullet},\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}$$

Demostración.

$$H^{n}(C_{\bullet}, \mathbb{Z}) \approx \operatorname{Hom}(H_{n}(C_{\bullet}, \mathbb{Z})) \oplus \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^{1}(H_{n-1}(C_{\bullet}), \mathbb{Z})$$

$$\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r} \oplus T_{n}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}, \mathbb{Z})$$

$$\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r_{n}}, \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Hom}(T_{n}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(T_{n-1}, \mathbb{Z}))$$

$$\approx \mathbb{Z}^{r_{n}} \oplus T_{n-1}$$

Corolario. Si $\alpha:C_{ullet}\to C'_{ullet}$ induce isomorfismos en homología, entonces induce isomorfismos en cohomología.

Demostración. En la prueba de la naturalidad del teorema de coeficientes universales, los α_* de los extremos son isomorfismos. Por el lema de los cinco, α_* también lo es.

2. Cohomología

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Podemos definir el complejo de cadenas singulares de X,

$$C_{\bullet}(X) \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i | m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\} \approx \bigoplus_{n \text{ sim. sing.}} \mathbb{Z}$$

Y definimos

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(C_{\bullet}(X))$$

$$C^{\bullet}(X; G) = \text{Hom}(C_{\bullet}(X), G)$$

$$H^n(X; G) = H_n(C^{\bullet}(X, G))$$

de donde

$$\cdots \longleftarrow \operatorname{Hom}(C_{n+1}, G) \stackrel{\partial_{n+1}^*}{\longleftarrow} \operatorname{Hom}(C_n, G) \stackrel{\partial_n^*}{\longleftarrow} \operatorname{Hom}(C_{n-1}, G) \longleftarrow \cdots$$

Y las fronteras están definidas mediante

$$\begin{array}{c}
C_n & \xrightarrow{\varphi} G \\
\downarrow \partial_{n+1} & & \\
C_{n+1} & & \\
\end{array}$$

Y definimos los ciclos y las cofronteras.

Y el teorema de coeficientes universales en este contexto nos dice que:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \stackrel{h}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

20 2: Cohomología

También podemos definir los **grupos de cohomología reducidos** comenzando con el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dualizando, y calculando homología. Como con la homología reducida, $\tilde{H}^n(X;G) = H^n(X;G)$, y $H^0(X) \approx \operatorname{Hom}(H_0(X),G) \approx \bigoplus_{\pi_0(X)} G$. Para verlo, usamos el teorema de coeficientes universales. Y si X es arco-conexo, por la propiedad universal del abelianizado y usando el homomorfismo de Hurewics, $H^n(X) \approx \operatorname{Hom}(\pi_1(X),G)$.