

La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 8, 2023

Índice

Índice	2
1 Repaso de álgebra homológica	3
2 Más álgebra homológica	7

1. Álgebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R -módulos, $R\text{-mod}$, cuyos objetos son R -módulos y los morfismos son homomorfismos R -lineales. También podemos construir $R\text{-ch-comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\text{img } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta_n} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{img } \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que C_\bullet es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n .
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\text{img } \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2 / \ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2 / C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ab} \\ & \nearrow & \uparrow \\ \text{R-ch-comp} & \xrightarrow{H_n} & \text{R-mod} \\ C_\bullet & \longmapsto & H_n(C_\bullet) \end{array}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_*g_*$ y $id_{C_\bullet} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **functor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1}-g_{n+1} & \swarrow h_p & \downarrow f_n-g_n & \swarrow h_{n-1} & \downarrow f_{n-1}-g_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n . Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \text{img } i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. \square

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{i} & B_\bullet & \xrightarrow{j} & C_\bullet \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \longrightarrow & B'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está \bar{h} a la izquierda y \bar{f} a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. \square

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R -módulos, y el conjunto de homomorfismos R -lineales de M en N , que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morfismo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R -módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(-, N) : R\text{-mod} &\rightarrow \text{Ab} \\
 M &\mapsto \text{Hom}(M, N) \\
 M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto ?
 \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(M, N) &\xleftarrow{\varphi^*} \text{Hom}(M', N) \\
 \varphi^*(f) &= f\varphi \leftarrow f
 \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \downarrow \varphi & \searrow f\varphi & \\
 M' & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Así que $\text{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **functor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\text{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \text{Hom}(M_1, N) \oplus \text{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

$$\begin{array}{ccccc}
 M_1 & \hookrightarrow & M_1 \oplus M_2 & \hookleftarrow & M_2 \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! f \oplus g & \swarrow g & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(B, N) \xrightarrow{\varphi_*} \operatorname{Hom}(A, N)$$

En general, φ_* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha $0 \rightarrow A$ no necesariamente va a dar a una flecha de la forma $\operatorname{Hom}(A, N) \rightarrow 0$. \square

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto).