La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 8, 2023

Índice

1. Repaso de álgebra homológica

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, $R\text{-mod}$, cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir R-ch-comp, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\operatorname{img} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que $C_\bullet$ es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n.
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\operatorname{img} \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{tikzcd} & \text{Ab} \\ \text{R-ch-comp} \arrow[ur] \arrow[r, "H_n"] & \text{R-mod} \arrow[u] \\ C_\bullet \arrow[r, mapsto] & H_n(C_\bullet) \end{tikzcd}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_* g_*$ y $id_{C_\bullet *} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **funtor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n-g_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \to H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1}\partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. □

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.** Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar f"] & H_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar g"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\bar h"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar f"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar g"] & H_{p-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\bar h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(A') \arrow[r] & H_p(B') \arrow[r] & H_p(C') \arrow[r] & H_{p-1}(A') \arrow[r] & H_{p-1}(B') \arrow[r] & H_{p-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está $\bar h$ a la izquierda y $\bar f$ a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. □

Lema (de los cinco)**.** Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "h_5"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[d, "h_1"] \\ N_5 \arrow[r, "g_5"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_1 \end{tikzcd}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

2. Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y $f+g(m) = f(m)+g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R-módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-, N) : \text{R-mod} &\to \mathrm{Ab} \\ M &\mapsto \mathrm{Hom}(M, N) \\ M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto \qquad ? \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M, N) &\xleftarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N) \\ \varphi^*(f) = f\varphi &\leftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Así que $\mathrm{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

  $$\mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \mathrm{Hom}(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, N)$$

  Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

  $$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[d, dashed, "\exists! f\oplus g"] & M_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

  $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

  a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

  $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, N) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(B, N) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}(A, N)$$

  En general, φ_* no es suprayectiva.

  Ejercicio.

- Checar lo anterior.

  Solución. Basta ver que la flecha $0 \to A$ no necesiamente va a dar a una flecha de la forma $\mathrm{Hom}(A, N) \to 0$. □

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto).