La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 21, 2023

Índice

1. Ágebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir $\mathrm{R\text{-}ch\text{-}comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\operatorname{img} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que $C_\bullet$ es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n.
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\operatorname{img} \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker\psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{tikzcd} & \text{Ab} \\ \text{R-ch-comp} \arrow[ur] \arrow[r, "H_n"] & \text{R-mod} \arrow[u] \\ C_\bullet \arrow[r, mapsto] & H_n(C_\bullet) \end{tikzcd}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_* g_*$ y $id_{C_{\bullet *}} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **funtor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1}\partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "f_n-g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \to H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar\phi_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar\psi_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar\phi_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1}\partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. $\square$

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.** Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\bar{h}"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_{p-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(A') \arrow[r] & H_p(B') \arrow[r] & H_p(C') \arrow[r] & H_{p-1}(A') \arrow[r] & H_{p-1}(B') \arrow[r] & H_{p-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está $\bar{h}$ a la izquierda y $\bar{f}$ a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. $\square$

Lema (de los cinco)**.** Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "h_5"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[d, "h_1"] \\ N_5 \arrow[r, "g_5"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_1 \end{tikzcd}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R-módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-, N) : \text{R-mod} &\to \mathrm{Ab} \\ M &\mapsto \mathrm{Hom}(M, N) \\ M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto \quad ? \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(M, N) \xleftarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N) \\ &\varphi^*(f) = f\varphi \leftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Así que $\mathrm{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

  $$\mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \mathrm{Hom}(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, N)$$

  Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

  $$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[d, dashed, "\exists! f\oplus g"] & M_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

  Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

  a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(B, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(A, N)$$

  En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

  Solución. Basta ver que la flecha $0 \to A$ no necesiamente va a dar a una flecha de la forma $\mathrm{Hom}(A, N) \to 0$. □

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto *izquierdo*).

Observación. Denotaremos $\mathrm{Hom}_R(M, N) := M^*$, y, por si acaso $\mathrm{Hom}(N, M) := M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R-módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un R**-módulo libre** es uno de la forma $\bigoplus_{i \in I} R_i$ donde $R_i = R$. Los elementos canónicos son $e_j := (\delta_{ij})_{i \in I}$, y $\beta := \{ej\}_{j \in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R-módulo M y para toda función $f : \beta \to M$ existe un único $\bar{f} : L = \bigoplus_{i \in I} R_i \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \\ L \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.

Demostración.

$$\begin{tikzcd} L = \bigoplus_{i \in M} R_i \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M \\ M \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Como $\bar{f}$ es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos. □

Definición. Sea M un R-módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j.

Teorema. Todo R-módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & \ker f_0 \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema. Sea $\alpha : M \to M'$ un homomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2"] & F_1' \arrow[r, "f_1"] & F_0' \arrow[r, "f_0"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i : F_i \to F_i'$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
 & \beta_0 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0. Lo mandamos mediante f_0 a M, luego con α. Pero como f_0' es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F_0'$ que le pega.

Ahora

$$\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{img} f_1 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] \arrow[ur] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] \arrow[dr] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & \operatorname{img} f_1' \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Hay una flecha desde $\operatorname{img} f_1$ hasta $\operatorname{img} f_1'$ que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado). □

Definición. Sea M un R-módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\operatorname{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{f_1} F_1^* \longrightarrow F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$$

Definimos

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) := H_n(0 \to F^*)$$

Teorema. $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & F_1' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & F_0' \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i\alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & F_1^* & \longleftarrow & F_0^* & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_1^*}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\alpha_0^*}\Big\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1^{'*} & \longleftarrow & F_0^{'*} & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta_1^*}\Big\uparrow & & {\scriptstyle\beta_0^*}\Big\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1^{'*} & \longleftarrow & F_0^{'*} & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^*\alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$\begin{array}{c}
H_1(F^*) \\
{\scriptstyle\alpha_1^{\#}}\Big\uparrow \\
H_1(F'^*) \\
{\scriptstyle\beta_1^{\#}}\Big\uparrow \\
H_1(F^*)
\end{array}$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^{\#}$ y $\beta_1^{\#}$ son inversas una de la otra. □

Proposición. $\mathrm{Ext}_R^0(M,N) \approx \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathrm{img}\, f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \mathrm{img}\, f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \mathrm{img}\, f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\mathrm{Ext}_R^0(M,N) = \ker f_1^* \approx M^* = \mathrm{Hom}(M,N)$ □

Lema (De la herradura)**.** *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones.* Tomemos una sucesión exacta corta y dos resulciones libres de los extremos. Entonces existe lo rojo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[r] \arrow[u] & F_0 \arrow[r] \arrow[u] & F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r] \arrow[u] & F_1 \arrow[r] \arrow[u] & F_1'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[r] \arrow[u] & F_0' \oplus F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Y hay que hacer todo lo de rutina. □

Ahora apliquemos $\mathrm{Hom}(-, N)$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & P_0^{'*} \arrow[l] \arrow[d] & P_0^* \arrow[l] \arrow[d] & P_0^{''*} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & P_1^{'*} \arrow[l] \arrow[d] & P_1^* \arrow[l] \arrow[d] & P_1^{''*} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P_\bullet^{'*} \longleftarrow P_\bullet^* \longleftarrow P_\bullet^{''*} \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

Y ahora supongamos que tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Que inducen

$$\begin{tikzcd}
0 & P'^*_\bullet \arrow[l] & P^*_\bullet \arrow[l] & P''^*_\bullet \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & Q'^*_\bullet \arrow[l] \arrow[u] & Q^*_\bullet \arrow[l] \arrow[u] & Q''^*_\bullet \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Y por fin obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M'', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(A'', N) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^0_R(A, N) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^0_R(A', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será $\mathbb{Z}$.

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}\text{-mod}$ y el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir,

$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para cualesquiera $\mathbb{Z}$-módulos A, B y $n \geq 2$.

Proposición.

- $\mathrm{Ext}^n_R(-, N)$ es un funtor aditivo para toda n, es decir,

$$\mathrm{Ext}^n_R(M' \oplus M'', N) \approx \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M'', N)$$

Demostración. Consideremos

$$P'_\bullet \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_\bullet \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_\bullet \oplus P''_\bullet \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

Y la homología abre sumas: $(P''_\bullet \oplus P''_\bullet)^* \approx P''_\bullet \oplus P'^*_\bullet$. ☐

- $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ si A es libre.

  Demostración. Simplemente tomamos $0 \to A \to A \to 0$. ☐

- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

  Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \xleftarrow{n^*} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \xleftarrow[n]{} & B & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

  Así que $B/nB = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, B)$. ☐

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \approx B/m_1B \oplus \ldots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Y apliquemos el $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ para obtener

$$\cdots \longrightarrow C^*_n \xrightarrow{\partial^*_{n+1}} C^*_{n+1} \xrightarrow{\partial^*_{n+2}} C^*_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_\bullet, G) = \ker \partial^*_n / \operatorname{img} \partial^*_{n-1}$$

que llamaremos el **n-ésimo grupo de cohomología de $C_\bullet$ con coeficientes en G**.

Consideremos

$$\mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial^*_{n-1}} \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial^*_n} \mathrm{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$\begin{tikzcd} C_{n-2} \arrow[r, "f"] & G \\ C_{n-1} \arrow[u, "\partial_{n-1}"] \arrow[ur, "f\partial_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C; G)$ para alguna $g : C_{n-1} \to G$ tal que

$$\begin{aligned} f\partial_{n-1} : C_{n-1} &\to G \\ g &\mapsto g\partial_n = 0 \end{aligned}$$

1.5 Teorema de coeficientes universales

Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_\bullet; G)$ y $\operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$C_\bullet \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

comparando $H^n(C_\bullet; \mathbb{Z})$ con $\operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet); \mathbb{Z})$. Para calcular la cohomología lo primero que hago es dualizar:

$$C_\bullet^* \qquad 0 \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

De manera que $H^0(C_\bullet; \mathbb{Z}) = 0$ y $H^1(C_\bullet; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), \mathbb{Z}) = 0$ para toda n.

Aún así, podemos construir una función

$$\begin{aligned} h : H^n(C_\bullet; G) &\to \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \\ [g] &\mapsto Z_n/B_n = H_n(C_\bullet) \to G \end{aligned}$$

donde $g : C_n \to G$ con $g|_{B_n} = 0$. Así que simplemente enviamos a $[g]$ a la restricción $g|_{Z_n} : Z_n/B_n \to G$.

Proposición. h es suprayectiva. Más aún, exste una función

$$\varphi : \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \to H^n(C_\bullet; G)$$

tal que $h\varphi = id$.

Demostración. Sea $\bar{g} : H_n(C_\bullet) \to G$. Como $H_n(C_\bullet) = Z_n/B_n$, lo que queremos hacer es extender $\bar{g}$ a una función en todo $C_\bullet$. Observemos que tenemos esta sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Como $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ y C_n es libre porque **estamos suponiendo que $C_\bullet$ es un complejo de cadenas de grupos abelianos libres**. Luego, esta sucesión exacta corta se escinde así que $C_n = Z_n \oplus B_n$, y la proyección a Z_n es un mapeo $C_n \to Z_n$. En fin,

$$\begin{tikzcd} Z_n \arrow[r] & H_n(C) \arrow[r, "\bar{g}"] & G \\ C_n \arrow[u] \arrow[urr, dashed, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Y de hecho$g$ sí representa un elemento en la cohomología, ya que $g|_{B_n} = 0$ porque la flecha de $Z_n \to H_n(C) = Z_n/B_n$ es el paso al cociente, así que se pierden los elementos de B_n. Además, φ es un homomorfismo. Ya además $\varphi h = id$ por la forma en la que fue contruida: no hemos hecho más que extender y luego restringir una función. $\square$

Corolario. $H^n(C_\bullet, G) \approx \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \oplus \ker h$.

Proposición. $\ker h \approx \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}, G)$.

Demostración. Esta prueba tiene un truco. Comenzamos por definir el complejo de cadenas de los ciclos,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & & & \\ Z_\bullet \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & Z_{n-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & \cdots \\ C_\bullet \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, hook] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial n-1"] \arrow[d, hook] & \cdots \\ B_{\bullet-1} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & B_n \arrow[r, "0"] & B_{n-1} \arrow[r, "0"] & \cdots \\ 0 & & & & \end{tikzcd}$$

Los homomorfismos frontera son 0 cuando vemos este complejo de cadenas como subcomplejo de cadenas de $\mathbb{C}_\bullet$. Y algo parecido para $B_{\bullet-1}$. Ahora, la sucesión exacta corta de complejos de cadenas se escinde y al dualizar obtenemos

$$0 \longrightarrow B^*_{\bullet-1} \longrightarrow C^*_\bullet \longrightarrow Z^*_\bullet \longrightarrow 0$$

Ahora sí, aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$\cdots \longrightarrow B^*_{n-1} \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \longrightarrow Z^*_n \longrightarrow B^*_n \longrightarrow H^{n+1}(C_\bullet, G) \longrightarrow \cdots$$

Afirmación. $Z^*_n \xrightarrow{i^*_n} B^*_n$ dado por $g \mapsto g|_{B_n}$ es el dual de $B_n \hookrightarrow Z_n$.

Observación. El dual de una inclusión es una restricción.

En la prueba simplemente mostramos que el mapeo $g \mapsto \bar{g}\partial_{n+1} : B_n \to G$ es una restricción.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & 0 & 0 & \\
Z_\bullet \arrow[d, hook] & & \cdots \arrow[r] & Z_n^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & Z_{n-1}^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & \cdots \\
C_\bullet \arrow[d] & & \cdots \arrow[r] & C_n^* \arrow[u] \arrow[r, "\partial_n^*"] & C_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "\partial_{n-1}^*"] & \cdots \\
B_{\bullet-1} \arrow[d] & & \cdots \arrow[r] & B_n^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & B_{n-1}^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & \cdots \\
0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Perseguimos ese diagrama para construir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& Z_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & G \\
B_n \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & C_n \arrow[ur, "\bar{g}"] & \\
& C_{n+1} \arrow[ul] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Parece que la $\bar{g}$ cambió de ser una restricción a una extensión...

Luego

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_\bullet; G) \xrightarrow{h} \ker i_n^* \longrightarrow 0$$

Afirmación. $\ker i_n^* = \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$

Afirmación. $\ker h = \operatorname{coker} i_{n-1}^*$.

Entonces,

$$Z_{n-1}^* \xrightarrow{i_{n-1}^*} B_{n-1}^* \longrightarrow \operatorname{coker} i_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Y ahora nada más tomamos

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 & \\
0 \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, hook] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[ur] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y de aquí que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & 0 & \\
& Z^*_{n-1} \arrow[r, "i^*_{n-1}"] & B^*_{n-1} \arrow[ur] \arrow[r] & \operatorname{coker} i^*_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y esa de cuatro no es exacta pero sí concluimos que $\operatorname{coker} i^*_{n-1} = \operatorname{Ext}^1(H_n(C_\bullet), G)$. $\square$

Teorema (de coeficientes universales)**.** Sean G un grupo abeliano y C un $\mathbb{Z}$-complejo de cadenas de grupos abelianos libres, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

que se escinde.

Además, esta sucesión es **natural** en $C_\bullet$, es decir, si $\alpha : C_\bullet \to C'_\bullet$, entonces el siguiente diagrma conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \arrow[r] & H^n(C_\bullet, G) \arrow[r, "h"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & H^n(C_\bullet, G) \arrow[r, "h'"] \arrow[u, "\alpha^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & 0
\end{tikzcd}$$

donde estamos abusando de notación con las flechas inducidas por α, que son distintas, pero se obtienen usando que H_n y Ext son funtores.

Observación. El nombre *coeficientes universales* tiene que ver con que la homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ determina la cohomología con cualesquiera coeficientes.

Demostración. Ahora demostremos la naturalidad. Comenzamos con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C_\bullet \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] & B_{\bullet,-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & B'_{\bullet-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Luego dualizamos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^*_\bullet \arrow[r] & C^*_\bullet \arrow[r] & B^*_{\bullet-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'^*_\bullet \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & C'^*_\bullet \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & B'^*_{\bullet,-1} \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

Y por último

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i_{n-1}^* & \longrightarrow & H^n(C_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i_n^* & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle\alpha^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle\alpha^*}\big\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i_{n-1}'^* & \longrightarrow & H^n(C'_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i_n'^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

Corolario. Supongamos que $H_n(C_\bullet)$ y $H_{n-1}(C_\bullet)$ son finitamente generados. Podemos expresarlos así:

$$H_n(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n \qquad\qquad H_{n-1}(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}$$

Con T_n y T_{n-1} finitos. Entonces,

$$H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) &\approx \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet, \mathbb{Z})) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), \mathbb{Z}) \\ &\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r \oplus T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(Z^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}, \mathbb{Z}) \\ &\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r_n}, \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Hom}(T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(T_{n-1}, \mathbb{Z})) \\ &\approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1} \end{aligned}$$

□

Corolario. Si $\alpha : C_\bullet \to C'_\bullet$ induce isomorfismos en homología, entonces induce isomorfismos en cohomología.

Demostración. En la prueba de la naturalidad del teorema de coeficientes universales, los α_* de los extremos son isomorfismos. Por el lema de los cinco, α_* también lo es. □

2. Cohomología

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Podemos definir el complejo de cadenas singulares de X,

$$C_\bullet(X) \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i \sigma_i | m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\} \approx \bigoplus_{n \text{ sim. sing.}} \mathbb{Z}$$

Y definimos

$$\begin{aligned} H_n(X;\mathbb{Z}) &= H_n(C_\bullet(X)) \\ C^\bullet(X;G) &= \mathrm{Hom}(C_\bullet(X), G) \\ H^n(X;G) &= H_n(C^\bullet(X,G)) \end{aligned}$$

de donde

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\partial_{n+1}^*} \mathrm{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{\partial_n^*} \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \longleftarrow \cdots$$

Y las fronteras están definidas mediante

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\varphi"] & G \\ C_{n+1} \arrow[u, "\partial_{n+1}"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Y definimos los ciclos y las cofronteras.

Y el teorema de coeficientes universales en este contexto nos dice que:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X,G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

También podemos definir los **grupos de cohomología reducidos** comenzando con el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dualizando, y calculando homología. Como con la homología reducida, $\tilde{H}^n(X;G) = H^n(X;G)$, y $H^0(X) \approx \mathrm{Hom}(H_0(X), G) \approx \bigoplus_{\pi_0(X)} G$. Para verlo, usamos el teorema de coeficientes universales. Y si X es arco-conexo, por la propiedad universal del abelianizado y usando el homomorfismo de Hurewics, $H^n(X) \approx \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$.