## La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 10, 2023

# Índice

Índice			
1	Áge	ebra homológica	3
	$1.\overline{1}$	Repaso	3
	1.2	Más álgebra homológica	6
		Funtores derivados	

# 1. Ágebra homológica

### 1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir R-ch-comp, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que  $\partial_{n-1}\circ\partial_n=0$ , es decir,  $\operatorname{img}\partial_n\subseteq\ker\partial_{n-1}$ . y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas,  $C_{\bullet}\stackrel{f}{\longrightarrow}D_{\bullet}$ , que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}} \qquad \downarrow^{f_n} \qquad \downarrow^{f_{n-1}}$$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\delta_n} D_n \xrightarrow{\delta_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Y definimos

$$H_n(C_{\bullet}) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

#### Definición.

- Decimos que  $C_{\bullet}$  es **acíclico** si  $H_n(C_{\bullet}) = 0$  para toda n.
- La sucesión  $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$  es **exacta** si img  $\varphi = \ker \psi$ .
- La sucesión  $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$  es una sucesión exacta corta.
- Y si se extiende infinitamente, es una sucesión exacta larga.

**Proposición.** En una sucesión exacta corta,  $\varphi$  es inyectiva,  $\psi$  es suprayectiva y  $C_3 \approx C_2/\ker \psi$ . Abusando de notación, podemos pensar que  $C_3 \approx C_2/C_1$ , pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de  $C_1$  en  $C_2$  puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Ab} \\
& \uparrow \\
\text{R-ch-comp} & \longrightarrow & \text{R-mod} \\
C_{\bullet} & \longmapsto & H_n(C_{\bullet})
\end{array}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que  $(fg)_* = f_*g_*$  y  $id_{C_{\bullet *}} = id_{H_n(C_{\bullet})}$ . Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama funtor covariante.

Definición. Dos homomorfismos

$$f,g:(C_{\bullet},\partial)\to(C'_{\bullet},\partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos  $h_n:C_n\to C'_{n+1}$  para toda  $p\in\mathbb{Z}$  tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}-g_{n+1}} \downarrow^{h_n} \downarrow^{f_n-g_n} \downarrow^{h_{n-1}} \downarrow^{f_{n-1}-g_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow C'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial'_n} C'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que  $H_n(f) = H_n(g)$  para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \stackrel{\phi}{\longrightarrow} B_{\bullet} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p}: H_p(C_{\bullet}) \to H_{p-1}(A_{\bullet})$$

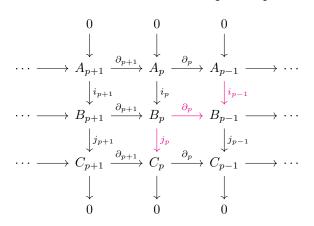
tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

1.1. REPASO 5

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:



Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo  $c \in C_p(A)$ . Como  $j_p$  es suprayectiva, existe un  $a \in B_p$  tal que  $j_p(a) = c$ . Luego,  $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$ , ya que, como el diagrama conmuta,  $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$  y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta,  $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$ , así que existe  $a \in A_{p-1}$  tal que  $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$ . Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta,  $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$ , y la  $i_{p-2}$  es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos  $\delta_{*p}[c] = [a]$ .

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos.  $\Box$ 

**Teorema** (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{i} B_{\bullet} \xrightarrow{j} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{f} \qquad \downarrow^{g} \qquad \downarrow^{h}$$

$$0 \longrightarrow A'_{\bullet} \longrightarrow B'_{\bullet} \longrightarrow C'_{\bullet} \longrightarrow 0$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow H_p(B) \longrightarrow H_p(C) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow H_{p-1}(B) \longrightarrow H_{p-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow_{\bar{f}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}}$$

$$\cdots \longrightarrow H_p(A') \longrightarrow H_p(B') \longrightarrow H_p(C') \longrightarrow H_{p-1}(A') \longrightarrow H_{p-1}(B') \longrightarrow H_{p-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

*Demostración.* Salvo en los cuadrados donde está  $\bar{h}$  a la izquierda y  $\bar{f}$  a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad.

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$M_{5} \xrightarrow{f_{5}} M_{4} \xrightarrow{f_{4}} M_{3} \xrightarrow{f_{3}} M_{2} \xrightarrow{f_{2}} M_{1}$$

$$\downarrow h_{5} \qquad \downarrow h_{4} \qquad \downarrow h_{3} \qquad \downarrow h_{2} \qquad \downarrow h_{1}$$

$$N_{5} \xrightarrow{g_{5}} N_{4} \xrightarrow{g_{4}} N_{3} \xrightarrow{g_{3}} N_{2} \xrightarrow{g_{2}} N_{1}$$

Si  $h_5, h_4, h_2$  y  $h_1$  son isomorfismos, entonces  $h_3$  también.

### 1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y f+g(m)=f(m)+g(m) que también es un morfismo, (-f)(m)=-f(m)). También tiene estructura de R-módulo con la operación (rf)(m)=rf(m)=f(rm).

Ahora construyamos un funtor:

$$\operatorname{Hom}(-,N):\operatorname{R-mod}\to\operatorname{Ab}$$
 
$$M\mapsto\operatorname{Hom}(M,N)$$
 
$$M\stackrel{\varphi}{\to}M'\mapsto\qquad ?$$

La flecha inducida será

$$\operatorname{Hom}(M,N) \xleftarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}(M',N)$$
$$\varphi^*(f) = f\varphi \hookleftarrow f$$

De acuerdo a

$$M \downarrow \varphi \qquad f\varphi \downarrow M' \xrightarrow{f} N$$

Así que  $\operatorname{Hom}(-, N)$  es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

• Aditivo. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\operatorname{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \operatorname{Hom}(M_1, N) \oplus \operatorname{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

Donde  $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$ . Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a  $f \oplus g$ .

7

• Exacto Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} B \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C,N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(B,N) \xrightarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}(A,N)$$

En general,  $\varphi^*$  no es suprayectiva.

Ejercicio.

• Checar lo anterior.

*Solución.* Basta ver que la flecha  $0 \to A$  no necesiamente va a dar a una flecha de la forma  $\operatorname{Hom}(A,N) \to 0$ .

• ¿Qué pasa con el cokernel?

**Observación.** También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto *izquierdo*).

**Observación.** Denotaremos  $\operatorname{Hom}_R(M,N) := M^*$ , y, por si acaso  $\operatorname{Hom}(N,M) := M_*$ .

#### 1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R-módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un R-módulo libre es uno de la forma  $\bigoplus_{i\in I} R_i$  donde  $R_i=R$ . Los elementos canónicos son  $e_j:=(\delta_{ij})_{i\in I}$ , y  $\beta:=\{ej\}_{j\in J}$  es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R-módulo M y para toda función  $f:\beta\to M$  existe un único  $\bar f:L=\bigoplus_{i\in I} R_i\to M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\beta \xrightarrow{f} M$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que  $P \oplus Q$  es libre.

Ejemplo.  $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$ 

**Proposición.** Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.

Demostración.

$$L = \bigoplus_{i \in M} R_i \xrightarrow{\bar{f}} M$$

Como  $\bar{f}$  es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos.

**Definición.** Sea M un R-módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que  $F_j$  es libre para toda j.

**Teorema.** Todo *R*-módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

*Demostración.*  $f_0$  sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo  $\ker f_0$ , lo incluimos en  $F_0$  escogemos  $F_1$  que cubre  $\ker f_0$  por la proposición anterior.

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\ker f_0$$

**Teorema.** Sea  $\alpha: M \to M'$  un homomorfismo.

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\alpha_2} \qquad \downarrow^{\alpha_1} \qquad \downarrow^{\alpha_0} \qquad \downarrow^{\alpha}$$

$$\cdots \longrightarrow F'_2 \xrightarrow{f_2} F'_1 \xrightarrow{f_1} F'_0 \xrightarrow{f_0} M' \longrightarrow 0$$

entonces existen los  $\alpha_i$  que hacen conmutar el diagrama.

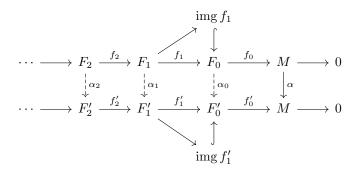
Más aún, si existen  $\beta_i: F_i \to F_i'$  que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son homotópicos.

Demostración.

Tomamos un elemento  $e \in \beta_0$  en la base de  $F_0$ . Lo mandamos mediante  $f_0$  a M, luego con  $\alpha$ . Pero como  $f_0'$  es supra, podemos escoger un elemento  $e' \in F_0'$  que le pega.

9

Ahora



Hay una flecha desde img  $f_1$  hasta img  $f'_1$  que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado).

**Definición.** Sea M un R-módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos  $\operatorname{Hom}_R(-, N)$ :

$$0 \longrightarrow F_0^* \stackrel{f_1}{\longrightarrow} F_1^* \longrightarrow F_2^* \stackrel{f_3^*}{\longrightarrow} \cdots$$

Definimos

$$\operatorname{Ext}_R^n(M,N) := H_n(0 \to F^*)$$

**Teorema.**  $\operatorname{Ext}_R^n(M,N)$  no depende de la resolución.

*Demostración.* Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como  $\alpha$ :

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\alpha_2} \qquad \downarrow^{\alpha_1} \qquad \downarrow^{\alpha_0} \qquad \downarrow^{Id}$$

$$\cdots \longrightarrow F'_2 \xrightarrow{f_2} F'_1 \xrightarrow{f_1} F'_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{\beta_2} \qquad \downarrow^{\beta_1} \qquad \downarrow^{\beta_0} \qquad \downarrow^{Id}$$

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Y aquí resulta que  $\{\beta_i \alpha_i\} \simeq \{Id\}$ . Y dualizamos:

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir,  $\{\beta_i^*\alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$ . Luego pasamos a los grupos de homología:

$$H_1(F^*)$$

$$\alpha_1^{\#} \uparrow$$

$$H_1(F'^*)$$

$$\beta_1^{\#} \uparrow$$

$$H_1(F^*)$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones  $\alpha_1^\#$  y  $\beta_1^\#$  son inversas una de la otra.

**Proposición.**  $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) \approx \operatorname{Hom}_R(M,N)$ .

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \operatorname{img} f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

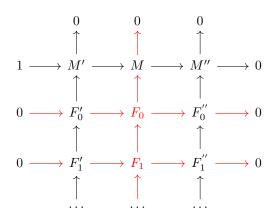
$$0 \longrightarrow M^* \stackrel{f_0^*}{\longrightarrow} F_0^* \stackrel{f_1^*}{\longrightarrow} \operatorname{img} f_1^*$$

Luego  $\ker f_1^* \approx \operatorname{img} f_0^* \approx M^*$ . Luego, por definición  $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) = \ker f_1^* \approx M^* = \operatorname{Hom}(M,N)$ 

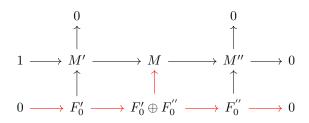
**Lema** (De la herradura). *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones*. Tomemos una sucesión exacta corta y dos resulciones libres de los

11

extremos. Entonces existe lo rojo:



Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:



Y hay que hacer todo lo de rutina.

El lunes: dualizar esto.