### La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 8, 2023

# Índice

Índice		2
1	Repaso de álgebra homológica	3
2	Más álgebra homológica	7

## 1. Repaso de álgebra homológica

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir R-ch-comp, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , es decir,  $\operatorname{img} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$ . y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas,  $C_{\bullet} \xrightarrow{f} D_{\bullet}$ , que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}} \qquad \downarrow^{f_n} \qquad \downarrow^{f_{n-1}}$$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\delta_n} D_n \xrightarrow{\delta_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Y definimos

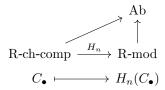
$$H_n(C_{\bullet}) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

#### Definición.

- Decimos que  $C_{\bullet}$  es acíclico si  $H_n(C_{\bullet}) = 0$  para toda n.
- La sucesión  $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$  es **exacta** si img  $\varphi = \ker \psi$ .
- La sucesión  $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$  es una sucesión exacta corta.
- Y si se extiende infinitamente, es una sucesión exacta larga.

**Proposición.** En una sucesión exacta corta,  $\varphi$  es inyectiva,  $\psi$  es suprayectiva y  $C_3 \approx C_2/\ker \psi$ . Abusando de notación, podemos pensar que  $C_3 \approx C_2/C_1$ , pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de  $C_1$  en  $C_2$  puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces



Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que  $(fg)_* = f_*g_*$  y  $id_{C_{\bullet *}} = id_{H_n(C_{\bullet})}$ . Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama funtor covariante.

**Definición.** Dos homomorfismos

$$f,g:(C_{\bullet},\partial)\to(C'_{\bullet},\partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos  $h_n:C_n\to C'_{n+1}$  para toda  $p\in\mathbb{Z}$  tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow^{f_{n+1}-g_{n+1}} \downarrow^{h_n} \downarrow^{f_n-g_n} \downarrow^{h_{n-1}} \downarrow^{f_{n-1}-g_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow C'_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C'_n \xrightarrow{\partial'_n} C'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que  $H_n(f) = H_n(g)$  para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \stackrel{\phi}{\longrightarrow} B_{\bullet} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

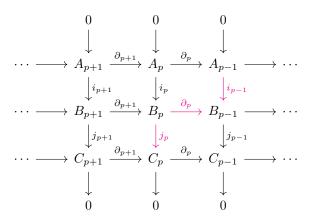
$$\delta_{*p}: H_p(C_{\bullet}) \to H_{p-1}(A_{\bullet})$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:



Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo  $c \in C_p(A)$ . Como  $j_p$  es suprayectiva, existe un  $a \in B_p$  tal que  $j_p(a) = c$ . Luego,  $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$ , ya que, como el diagrama conmuta,  $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$  y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta,  $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$ , así que existe  $a \in A_{p-1}$  tal que  $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$ . Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta,  $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$ , y la  $i_{p-2}$  es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos  $\delta_{*p}[c] = [a]$ .

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos.  $\Box$ 

**Teorema** (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{i} B_{\bullet} \xrightarrow{j} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow^{f} \qquad \downarrow^{g} \qquad \downarrow^{h}$$

$$0 \longrightarrow A'_{\bullet} \longrightarrow B'_{\bullet} \longrightarrow C'_{\bullet} \longrightarrow 0$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\cdots \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow H_p(B) \longrightarrow H_p(C) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(A) \longrightarrow H_{p-1}(B) \longrightarrow H_{p-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

$$\downarrow_{\bar{f}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}} \qquad \downarrow_{\bar{g}} \qquad \downarrow_{\bar{h}}$$

$$\cdots \longrightarrow H_p(A') \longrightarrow H_p(B') \longrightarrow H_p(C') \longrightarrow H_{p-1}(A') \longrightarrow H_{p-1}(B') \longrightarrow H_{p-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

*Demostración.* Salvo en los cuadrados donde está  $\bar{h}$  a la izquierda y  $\bar{f}$  a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad.

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$M_{5} \xrightarrow{f_{5}} M_{4} \xrightarrow{f_{4}} M_{3} \xrightarrow{f_{3}} M_{2} \xrightarrow{f_{2}} M_{1}$$

$$\downarrow h_{5} \qquad \downarrow h_{4} \qquad \downarrow h_{3} \qquad \downarrow h_{2} \qquad \downarrow h_{1}$$

$$N_{5} \xrightarrow{g_{5}} N_{4} \xrightarrow{g_{4}} N_{3} \xrightarrow{g_{3}} N_{2} \xrightarrow{g_{2}} N_{1}$$

Si  $h_5, h_4, h_2$  y  $h_1$  son isomorfismos, entonces  $h_3$  también.

## 2. Más álgebra homológica

Tomemos N,M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y f+g(m)=f(m)+g(m) que también es un morfismo, (-f)(m)=-f(m)). También tiene estructura de R-módulo con la operación (rf)(m)=rf(m)=f(rm).

Ahora construyamos un funtor:

$$\operatorname{Hom}(-,N):\operatorname{R-mod}\to\operatorname{Ab}$$
 
$$M\mapsto\operatorname{Hom}(M,N)$$
 
$$M\stackrel{\varphi}{\to}M'\mapsto\qquad ?$$

La flecha inducida será

$$\operatorname{Hom}(M,N) \xleftarrow{\varphi^*} \operatorname{Hom}(M',N)$$
$$\varphi^*(f) = f\varphi \longleftrightarrow f$$

De acuerdo a

$$M \downarrow \varphi \qquad f\varphi \downarrow M' \xrightarrow{f} N$$

Así que  $\operatorname{Hom}(-,N)$  es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

• Aditivo. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\operatorname{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \operatorname{Hom}(M_1, N) \oplus \operatorname{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

Donde  $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$ . Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a  $f \oplus g$ .

• Exacto Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} B \stackrel{\psi}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C,N) \stackrel{\psi_*}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(B,N) \stackrel{\varphi_*}{\longrightarrow} \operatorname{Hom}(A,N)$$

En general,  $\varphi_*$  no es suprayectiva.

### Ejercicio.

• Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha  $0 \to A$  no necesiamente va a dar a una flecha de la forma  ${\rm Hom}(A,N) \to 0.$ 

• ¿Qué pasa con el cokernel?

**Observación.** También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto).