

La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

October 26, 2023

Índice

Índice	2
1 Álgebra homológica	3
1.1 Repaso	3
1.2 Más álgebra homológica	6
1.3 Funtores derivados	7
1.4 Grupos de cohomología	13
1.5 Teorema de coeficientes universales	14
2 Cohomología	19
2.1 Cohomología de espacios	19
2.2 Producto copa	24
2.3 Teorema de Künneth	26
2.4 Dualidad de Poincaré	32
2.4.1 Producto capa	36
2.5 Consecuencias de dualidad de Poincaré	37
2.6 Variedades con frontera	39
3 La conjetura de Poincaré	40
4 Exposiciones	43
4.1 K -teoría	43

1. Álgebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R -módulos, $R\text{-mod}$, cuyos objetos son R -módulos y los morfismos son homomorfismos R -lineales. También podemos construir $R\text{-ch-comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\text{img } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\delta_n} & D_n & \xrightarrow{\delta_n} & D_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\text{img } \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que C_\bullet es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n .
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\text{img } \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2 / \ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2 / C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ab} \\ & \nearrow & \uparrow \\ \text{R-ch-comp} & \xrightarrow{H_n} & \text{R-mod} \\ C_\bullet & \longmapsto & H_n(C_\bullet) \end{array}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_*g_*$ y $id_{C_\bullet} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **functor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1}-g_{n+1} & \swarrow h_p & \downarrow f_n-g_n & \swarrow h_{n-1} & \downarrow f_{n-1}-g_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n . Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \text{img } i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. \square

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión). Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{i} & B_\bullet & \xrightarrow{j} & C_\bullet \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \longrightarrow & B'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está \bar{h} a la izquierda y \bar{f} a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. \square

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R -módulos, y el conjunto de homomorfismos R -lineales de M en N , que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morfismo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R -módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(-, N) : R\text{-mod} &\rightarrow \text{Ab} \\
 M &\mapsto \text{Hom}(M, N) \\
 M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto ?
 \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(M, N) &\xleftarrow{\varphi^*} \text{Hom}(M', N) \\
 \varphi^*(f) &= f\varphi \leftarrow f
 \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \\
 \downarrow \varphi & \searrow f\varphi & \\
 M' & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Así que $\text{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **functor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

$$\text{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \text{Hom}(M_1, N) \oplus \text{Hom}(M_2, N)$$

Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

$$\begin{array}{ccccc}
 M_1 & \hookrightarrow & M_1 \oplus M_2 & \hookleftarrow & M_2 \\
 & \searrow f & \downarrow \exists! f \oplus g & \swarrow g & \\
 & & N & &
 \end{array}$$

Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, N) \xrightarrow{\psi^*} \text{Hom}(B, N) \xrightarrow{\varphi^*} \text{Hom}(A, N)$$

En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha $0 \rightarrow A$ no necesariamente va a dar a una flecha de la forma $\text{Hom}(A, N) \rightarrow 0$. \square

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto izquierdo).

Observación. Denotaremos $\text{Hom}_R(M, N) := M^*$, y, por si acaso $\text{Hom}(N, M) := M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R -módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un **R -módulo libre** es uno de la forma $\bigoplus_{i \in I} R_i$ donde $R_i = R$. Los elementos canónicos son $e_j := (\delta_{ij})_{i \in I}$, y $\beta := \{e_j\}_{j \in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R -módulo M y para toda función $f : \beta \rightarrow M$ existe un único $\bar{f} : L = \bigoplus_{i \in I} R_i \rightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \beta & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ L & & \end{array}$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R -módulo es cociente de un R -módulo libre.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} L = \bigoplus_{i \in M} R_i & \xrightarrow{\bar{f}} & M \\ \uparrow & \nearrow & \\ M & & \end{array}$$

Como \bar{f} es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos. \square

Definición. Sea M un R -módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j .

Teorema. Todo R -módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M \longrightarrow 0 \\ & & & \searrow f_1 & \uparrow & & \\ & & & & \ker f_0 & & \end{array}$$

□

Teorema. Sea $\alpha : M \rightarrow M'$ un homomorfismo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f_2} & F'_1 & \xrightarrow{f_1} & F'_0 & \xrightarrow{f_0} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i : F_i \rightarrow F'_i$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \beta_0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_0 & \xrightarrow{f'_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0 . Lo mandamos mediante f_0 a M , luego con α . Pero como f'_0 es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F'_0$ que le pega.

Ahora

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{img } f_1 & & \\
 & & & \nearrow & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 \xrightarrow{f'_0} M \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & & \uparrow \\
 & & & & \text{img } f'_1 & &
 \end{array}$$

Hay una flecha desde $\text{img } f_1$ hasta $\text{img } f'_1$ que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado). \square

Definición. Sea M un R -módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M :

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\text{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{f_1} F_1^* \longrightarrow F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$$

Definimos

$$\text{Ext}_R^n(M, N) := H_n(0 \rightarrow F^*)$$

Teorema. $\text{Ext}_R^n(M, N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f_2} & F'_1 & \xrightarrow{f_1} & F'_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_0 \\
 \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i \alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & F_1^* & \longleftarrow & F_0^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0 \\
 & & \alpha_1^* \uparrow & & \alpha_0^* \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0 \\
 & & \beta_1^* \uparrow & & \beta_0^* \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^* \alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$\begin{array}{c}
 H_1(F^*) \\
 \alpha_1^\# \uparrow \\
 H_1(F'^*) \\
 \beta_1^\# \uparrow \\
 H_1(F^*)
 \end{array}$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^\#$ y $\beta_1^\#$ son inversas una de la otra. \square

Proposición. $\text{Ext}_R^0(M, N) \approx \text{Hom}_R(M, N)$.

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \text{img } f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \text{img } f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \text{img } f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\text{Ext}_R^0(M, N) = \ker f_1^* \approx M^* = \text{Hom}(M, N)$ \square

Lema (De la herradura). *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones.* Tomemos una sucesión exacta corta y dos resoluciones libres de los

extremos. Entonces existe lo rojo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & F'_0 \oplus F''_0 & \longrightarrow & F''_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y hay que hacer todo lo de rutina. □

Ahora apliquemos $\text{Hom}(-, N)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & P'^*_0 & \longleftarrow & P^*_0 & \longleftarrow & P''^*_0 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & P'^*_1 & \longleftarrow & P^*_1 & \longleftarrow & P''^*_1 \longleftarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P'^*_\bullet \longleftarrow P^*_\bullet \longleftarrow P''^*_\bullet \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M'', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_R^0(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Y ahora supongamos que tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Que inducen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & P_{\bullet}'^* & \longleftarrow & P_{\bullet}^* & \longleftarrow & P_{\bullet}''^* \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & Q_{\bullet}'^* & \longleftarrow & Q_{\bullet}^* & \longleftarrow & Q_{\bullet}''^* \longleftarrow 0 \end{array}$$

Y por fin obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M'', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A'', N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^0(A', N) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \dots \end{array}$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será \mathbb{Z} .

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}\text{-mod}$ y el functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A ?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir,

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A, B) = 0 \text{ para cualesquiera } \mathbb{Z}\text{-módulos } A, B \text{ y } n \geq 2.$$

Proposición.

- $\text{Ext}_R^n(-, N)$ es un functor aditivo para toda n , es decir,

$$\text{Ext}_R^n(M' \oplus M'', N) \approx \text{Ext}_R^n(M', N) \oplus \text{Ext}_R^n(M'', N)$$

Demostración. Consideremos

$$P'_\bullet \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_\bullet \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_\bullet \oplus P''_\bullet \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

Y la homología abre sumas: $(P''_\bullet \oplus P'_\bullet)^* \approx P''_\bullet^* \oplus P'_\bullet^*$. □

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(A, B) = 0$ si A es libre.

Demostración. Simplemente tomamos $0 \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0$. □

- $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \xleftarrow{n^*} & \text{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \xleftarrow{n} & B & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Así que $B/nB = \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n, B)$. □

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, B) \approx B/m_1B \oplus \dots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \dots$$

Y apliquemos el $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ para obtener

$$\dots \longrightarrow C_n^* \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} C_{n+1}^* \xrightarrow{\partial_{n+2}^*} C_{n+2}^* \longrightarrow \dots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_\bullet, G) = \ker \partial_n^* / \text{img } \partial_{n-1}^*$$

que llamaremos el n -ésimo grupo de cohomología de C_\bullet con coeficientes en G .

Consideremos

$$\text{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \text{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_n^*} \text{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$\begin{array}{ccc} C_{n-2} & \xrightarrow{f} & G \\ \partial_{n-1} \uparrow & \nearrow f\partial_{n-1} & \\ C_{n-1} & & \end{array}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C; G)$ para alguna $g : C_{n-1} \rightarrow G$ tal que

$$\begin{aligned} f\partial_{n-1} : C_{n-1} &\rightarrow G \\ g &\mapsto g\partial_n = 0 \end{aligned}$$

1.5 Teorema de coeficientes universales

Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_\bullet; G)$ y $\text{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$C_\bullet \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

comparando $H^n(C_\bullet; \mathbb{Z})$ con $\text{Hom}(H_n(C_\bullet); \mathbb{Z})$. Para calcular la cohomología lo primero que hago es dualizar:

$$C_\bullet^* \quad 0 \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} 0$$

De manera que $H^0(C_\bullet; \mathbb{Z}) = 0$ y $H^1(C_\bullet; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\text{Hom}(H_n(C_\bullet), \mathbb{Z}) = 0$ para toda n .

Aún así, podemos construir una función

$$\begin{aligned} h : H^n(C_\bullet; G) &\rightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \\ [g] &\mapsto Z_n/B_n = H_n(C_\bullet) \rightarrow G \end{aligned}$$

donde $g : C_n \rightarrow G$ con $g|_{B_n} = 0$. Así que simplemente enviamos a $[g]$ a la restricción $g|_{Z_n} : Z_n/B_n \rightarrow G$.

Proposición. h es suprayectiva. Más aún, existe una función

$$\varphi : \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \rightarrow H^n(C_\bullet; G)$$

tal que $h\varphi = \text{id}$.

Demostración. Sea $\bar{g} : H_n(C_\bullet) \rightarrow G$. Como $H_n(C_\bullet) = Z_n/B_n$, lo que queremos hacer es extender \bar{g} a una función en todo C_\bullet . Observemos que tenemos esta sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Como $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ y C_n es libre porque **estamos suponiendo que C_\bullet es un complejo de cadenas de grupos abelianos libres**. Luego, esta sucesión exacta corta se escinde así que $C_n = Z_n \oplus B_n$, y la proyección a Z_n es un mapeo $C_n \rightarrow Z_n$. En fin,

$$\begin{array}{ccccc} Z_n & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\bar{g}} & G \\ \uparrow & & & \nearrow g & \\ C_n & & & & \end{array}$$

Y de hecho g sí representa un elemento en la cohomología, ya que $g|_{B_n} = 0$ porque la flecha de $Z_n \rightarrow H_n(C) = Z_n/B_n$ es el paso al cociente, así que se pierden los elementos de B_n . Además, φ es un homomorfismo. Ya además $\varphi h = id$ por la forma en la que fue contruida: no hemos hecho más que extender y luego restringir una función. \square

Corolario. $H^n(C_\bullet, G) \approx \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \oplus \ker h$.

Proposición. $\ker h \approx \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}, G)$.

Demostración. Esta prueba tiene un truco. Comenzamos por definir el complejo de cadenas de los ciclos,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & Z_\bullet & & \cdots \longrightarrow & Z_n & \xrightarrow{0} Z_{n-1} \xrightarrow{0} \cdots \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ & & C_\bullet & & \cdots \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \\ & & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ & & B_{\bullet-1} & & \cdots \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{0} B_{n-1} \xrightarrow{0} \cdots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Los homomorfismos frontera son 0 cuando vemos este complejo de cadenas como sub-complejo de cadenas de C_\bullet . Y algo parecido para $B_{\bullet-1}$. Ahora, la sucesión exacta corta de complejos de cadenas se escinde y al dualizar obtenemos

$$0 \longrightarrow B_{\bullet-1}^* \longrightarrow C_\bullet^* \longrightarrow Z_\bullet^* \longrightarrow 0$$

Ahora sí, aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$\cdots \longrightarrow B_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \longrightarrow Z_n^* \longrightarrow B_n^* \longrightarrow H^{n+1}(C_\bullet, G) \longrightarrow \cdots$$

Afirmación. $Z_n^* \xrightarrow{i_n^*} B_n^*$ dado por $g \mapsto g|_{B_n}$ es el dual de $B_n \hookrightarrow Z_n$.

Observación. El dual de una inclusión es una restricción.

En la prueba simplemente mostramos que el mapeo $g \mapsto \bar{g}\partial_{n+1} : B_n \rightarrow G$ es una restricción.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & Z_{\bullet} & \cdots \longrightarrow & Z_n^* & \xrightarrow{\text{0}} & Z_{n-1}^* \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & C_{\bullet} & \cdots \longrightarrow & C_n^* & \xrightarrow{\partial_n^*} & C_{n-1}^* \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & B_{\bullet-1} & \cdots \longrightarrow & B_n^* & \xrightarrow{0} & B_{n-1}^* \xrightarrow{0} \cdots \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Perseguimos ese diagrama para construir el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_n & \xrightarrow{g} & G \\
 & \nearrow & \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\
 B_n & \longrightarrow & C_n & & \\
 & \nwarrow & \uparrow & & \\
 & & C_{n+1} & &
 \end{array}$$

Parece que la \bar{g} cambió de ser una restricción a una extensión...

Luego

$$0 \longrightarrow \text{coker } i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_{\bullet}; G) \xrightarrow{h} \ker i_n^* \longrightarrow 0$$

Afirmación. $\ker i_n^* = \text{Hom}(H_n(C_{\bullet}), G)$

Afirmación. $\ker h = \text{coker } i_{n-1}^*$.

Entonces,

$$Z_{n-1}^* \xrightarrow{i_{n-1}^*} B_{n-1}^* \longrightarrow \text{coker } i_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Y ahora nada más tomamos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & \nearrow & & \\
 0 & \longrightarrow & B_{n-1} & \hookrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & H_{n-1}(C_{\bullet}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y de aquí que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & 0 \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & Z_{n-1}^* & \xrightarrow{i_{n-1}^*} & B_{n-1}^* & \longrightarrow & \text{coker } i_{n-1}^* & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Y esa de cuatro no es exacta pero sí concluimos que $\text{coker } i_{n-1}^* = \text{Ext}^1(H_n(C_\bullet), G)$. \square

Teorema (de coeficientes universales). Sean G un grupo abeliano y C_\bullet un \mathbb{Z} -complejo de cadenas de grupos abelianos libres, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

que se escinde.

Además, esta sucesión es **natural** en C_\bullet , es decir, si $\alpha : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) & \longrightarrow & H^n(C_\bullet, G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 \\ & & \alpha_* \uparrow & & \alpha^* \uparrow & & \alpha_* \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}(C'_\bullet), G) & \longrightarrow & H^n(C'_\bullet, G) & \xrightarrow{h'} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C'), G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde estamos abusando de notación con las flechas inducidas por α , que son distintas, pero se obtienen usando que H_n y Ext son funtores.

Observación. El nombre *coeficientes universales* tiene que ver con que la homología con coeficientes en \mathbb{Z} determina la cohomología con cualesquiera coeficientes.

Demostración. Ahora demostremos la naturalidad. Comenzamos con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_\bullet & \longrightarrow & C_\bullet & \xrightarrow{\partial} & B_{\bullet,-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & Z'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet & \longrightarrow & B'_{\bullet,-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Luego dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_\bullet^* & \longrightarrow & C_\bullet^* & \longrightarrow & B_{\bullet,-1}^* \longrightarrow 0 \\ & & \alpha^* \uparrow & & \alpha^* \uparrow & & \alpha^* \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_{\bullet}^{'*} & \longrightarrow & C_{\bullet}^{'*} & \longrightarrow & B_{\bullet,-1}^{'*} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Y por último

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i_{n-1}^* & \longrightarrow & H^n(C_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i_n^* \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha^* \uparrow & & \alpha^* \uparrow & & \alpha^* \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i'_{n-1} & \longrightarrow & H^n(C'_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i_n'^* \longrightarrow 0
 \end{array}$$

□

Corolario. Supongamos que $H_n(C_\bullet)$ y $H_{n-1}(C_\bullet)$ son finitamente generados. Podemos expresarlos así:

$$H_n(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n \quad H_{n-1}(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}$$

Con T_n y T_{n-1} finitos. Entonces,

$$H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) &\approx \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet, \mathbb{Z})) \oplus \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(C_\bullet), \mathbb{Z}) \\
 &\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}, \mathbb{Z}) \\
 &\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r_n}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Hom}(T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(T_{n-1}, \mathbb{Z}) \\
 &\approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}
 \end{aligned}$$

□

Corolario. Si $\alpha : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ induce isomorfismos en homología, entonces induce isomorfismos en cohomología.

Demostración. En la prueba de la naturalidad del teorema de coeficientes universales, los α_* de los extremos son isomorfismos. Por el lema de los cinco, α_* también lo es. □

2. Cohomología

2.1 Cohomología de espacios

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Podemos definir el complejo de cadenas singulares de X ,

$$C_{\bullet}(X) \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\} \approx \bigoplus_{n \text{ sim. sing.}} \mathbb{Z}$$

Y definimos

$$\begin{aligned} H_n(X; \mathbb{Z}) &= H_n(C_{\bullet}(X)) \\ C^{\bullet}(X; G) &= \text{Hom}(C_{\bullet}(X), G) \\ H^n(X; G) &= H_n(C^{\bullet}(X, G)) \end{aligned}$$

de donde

$$\cdots \longleftarrow \text{Hom}(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\partial_{n+1}^*} \text{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{\partial_n^*} \text{Hom}(C_{n-1}, G) \longleftarrow \cdots$$

Y las fronteras están definidas mediante

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \partial_{n+1} \uparrow & \nearrow & \\ C_{n+1} & & \end{array}$$

Y definimos los cociclos y las cofronteras.

Y el **teorema de coeficientes universales en cohomología** nos dice que:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

También podemos definir los **grupos de cohomología reducidos** comenzando con el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dualizando, y calculando homología. Como con la homología reducida, $\tilde{H}^n(X; G) = H^n(X; G)$, y $H^0(X) \approx \text{Hom}(H_0(X), G) \approx \bigoplus_{\pi_0(X)} G$. Para verlo, usamos el teorema de coeficientes universales. Y si X es arco-conexo, por la propiedad universal del abelianizado y usando el homomorfismo de Hurewics, $H^n(X) \approx \text{Hom}(\pi_1(X), G)$.

También hay un **teorema de coeficientes universales para la cohomología reducida**.

Ahora tratemos de definir la cohomología de la pareja. Todo comienza usando

$$0 \longrightarrow C_{\bullet}(A) \longrightarrow C_{\bullet}(X) \longrightarrow C_{\bullet}(A, X) \longrightarrow 0$$

Que se escinde ya que la base de $C_{\bullet}(A)$ es una sub-base de $C_{\bullet}(X)$. Aplicamos $\text{Hom}(-, G)$ para obtener

$$0 \longrightarrow C_{\bullet}^*(X, A) \longrightarrow C_{\bullet}^*(X) \longrightarrow C_{\bullet}^*(A) \longrightarrow 0$$

Y aquí calculamos los grupos de homología

$$H^n(X, A) := H_n(C_{\bullet}^*(X, A))$$

Aplicamos el teorema fundamental del álgebra para obtener

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, A) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Y también tenemos **naturalidad**, es decir, si tenemos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es decir, una función continua con $f(A) \subset B$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(A) & \longrightarrow & C_{\bullet}(X) & \longrightarrow & C_{\bullet}(A, X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}(B) & \longrightarrow & C_{\bullet}(Y) & \longrightarrow & C_{\bullet}(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Luego dualizamos,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(A) & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(X) & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(A, X) \longrightarrow 0 \\ & & f_{\#}^* \uparrow & & f_{\#}^* \uparrow & & f_{\#}^* \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(B) & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(Y) & \longrightarrow & C_{\bullet}^*(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Y también aquí todo conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^n(X, A) & \longrightarrow & H^n(X) & \longrightarrow & H^n(A) \longrightarrow H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & H^n(Y, B) & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & H^n(B) \longrightarrow H^{n+1}(Y, B) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Aprovechamos para decir que una función de parejas como ésta tiene una **función inducida**

$$f^* : H^n(Y, B) \rightarrow H^n(X, A)$$

y de hecho $(fg)^* = g^*f^*$, $id_{(X,A)}^* = id_{H^n(X,A)}$. O sea que de verdad tenemos un funtor.

También tenemos **invarianza homotópica**, es decir, si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homotópicas, entonces $f^* = g^*$. Recordemos un poco la demostración: si dos funciones de parejas son homotópicas, entonces las funciones inducidas en los complejos de cadenas son homotópicas con la definición algebraica, así que inducen iguales en la homología. Dualizando ese diagrama con flechas diagonales de colores, obtenemos que las funciones en cocadenas son homotópicas, así que serán iguales en cohomología.

También tenemos un **teorema de coeficientes universales para parejas**, que se enuncia así:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_n(X, A), G) \longrightarrow H^n(X, A; G) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, A), G) \longrightarrow 0$$

que se puede aplicar simplemente porque el complejo de cadenas $C_\bullet(X, A)$ es de grupos abelianos libres.

Y además el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}(X, A), G) & \longrightarrow & H^n(X, A; G) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, A), G) \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha_* \uparrow & & \alpha^* \uparrow & & \alpha_* \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}(Y, B), G) & \longrightarrow & H^n(Y, B; G) & \xrightarrow{h'} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(Y, B), G) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Y también hay **escisión**: si $Z \subseteq A \subseteq X$ tal que $\bar{Z} \subseteq A$, $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$, entonces $i^* : H^n(X - Z, A - Z) \xrightarrow{\cong} H^n(X, A)$, cuya demostración se puede dar con escisión homológica y coeficientes universales vía lema de los cinco.

Ahora tomemos la cuña de espacios tales que el punto de pegado tiene una vecindad contraíble, entonces:

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{H}_n \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right) \approx \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}) & \tilde{H}^n \left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha} \right) \approx \prod_{\alpha} \tilde{H}^n(X_{\alpha}) \\
 H_n \left(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha} \right) \approx \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}) & H^n \left(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha} \right) \approx \prod_{\alpha} H^n(X_{\alpha})
 \end{array}$$

Para complejos CW,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \approx H_n(X^n/X^{n-1}) \approx H_n\left(\bigvee_{n\text{-células}} S^n\right) \approx \bigoplus_{n\text{-células}} \mathbb{Z}$$

Recordemos que la homología celular se construye de acuerdo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\ \partial_n \nearrow & & \searrow j_{n-1} & & \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\ & & \searrow \partial_{n-1} & \nearrow j_{n-2} & \\ & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & \end{array}$$

Recordemos que los mapeos j_{n-1} y ∂_{n-1} son parte de la sucesión exacta larga de la pareja, de modo que su composición es cero, así que las d_i son cero porque factorizan ese cero.

Dualicemos esto:

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{n-1}(X^{n-1}) & & \\ \partial_n^* \swarrow & & \nwarrow j_{n-1}^* & & \\ H^n(X^n, X^{n-1}) & \xleftarrow{D^n} & H^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xleftarrow{D^{n-1}} & H^{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\ & & \nwarrow \partial_{n-1}^* & \swarrow j_{n-2}^* & \\ & & H^{n-2}(X^{n-2}) & & \end{array}$$

Obtenemos funciones D_n en vez de las d_n , y pues nada, tenemos **chomología celular**, y otra vez,

Proposición. Si X es un complejo CW, $H_n(C_{CW}^\bullet(X)) := H_{CW}^n(X) \approx H^\bullet(X)$, y además $C_{CW}^\bullet(X; G)$ es el dual de $C_{CW}^{CW}(X; G)$.

Demostración. Recordemos que

$$\begin{aligned} \text{Hom}\left(\bigoplus_{n\text{-células}} \mathbb{Z}, G\right) &= \prod_{n\text{-células}} \text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \\ &= \prod_{n\text{-células}} G \end{aligned}$$

De forma que los grupos de cohomología son

$$H^m(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \prod_{n\text{-células}} G & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Ya que los grupos de homología son libres.

Ahora observemos que $H^k(X^n) \approx H^k(X^{n-1})$ para $k \neq n, n-1$. Fijando k y bajando la n , esto implica que $H^k(X^n) \approx H^k(X^0) \approx 0$. De aquí que podemos poner algunos ceros en el diagrama de arriba:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \swarrow & \\
 & & & & H^{n-1}(X^n) & & \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 0 & \swarrow & & & H^{n-1}(X^{n-1}) & & \\
 & \swarrow & \partial_n^* & & \swarrow j_{n-1}^* & & \\
 & H^n(X^n, X^{n-1}) & \xleftarrow{D^n} & H^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xleftarrow{D^{n-1}} & H^{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & \\
 & & & \swarrow \partial_{n-1}^* & & \swarrow j_{n-2}^* & \\
 & & & H^{n-2}(X^{n-2}) & & & \\
 & & & \swarrow & & & 0
 \end{array}$$

Ahora notemos que para $k \leq n+1$, $H^k(X, X^{n+1}) = 0$ ya que

$$H^k(X, X^{n+1}) \approx \text{Hom}(H_k(X, X^{n+1})) \oplus \text{Ext}(H_{k-1}(X, X^{n+1}))$$

Luego, tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \approx H^n(X, X^{n+1}) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{\sim} H^n(X^{n+1}; G) \longrightarrow H^{n+1}(X, X^{n+1}) \approx 0$$

Así que ese $H^{n-1}(X^n)$ que agregamos en el diagrama de arriba es $\approx H^{n-1}(X)$.

Por fin, las flechas en la diagonal arriba-izquierda del diagrama son parte de la sucesión exacta de la pareja, de la cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
 H^{n-1}(X) &\approx \ker \partial_{n-1} \\
 &\approx \ker D^{n-1} / \text{img } \partial_{n-2} \\
 &\approx \ker D^{n-1} / \text{img } D^{n-2} \\
 &\approx \text{Hom}^{n-1}(X)
 \end{aligned}$$

Con lo que demostramos la primera parte. (Hay que recorrer la n en todos lados para que sea más claro, pero así está bien).

Para lo segundo, tomemos el siguiente diagrama, que resulta de dualizar otro

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{j_n} & H^n(X^n) & \xrightarrow{\partial_n} & H^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\
 \text{Hom}(H_n(X^n, X^{n-1})) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(X^n)) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_{n+1}(X^{n+1}, X^n))
 \end{array}$$

En primer lugar, por los Ext, las h de los extremos son isomorfismos. Además, por las sucesiones exactas largas de las parejas, los cuadrados conmutan, de forma que las composiciones de las flechas horizontales son isomorfas, que es justo lo que queríamos demostrar. \square

Por último,

Teorema. Mayer-Vietoris en cohomología.

2.2 Producto copa

Esto es que hace distinta la cohomología de la homología. En algún punto de esta sección necesitaremos que los coeficientes estén en un anillo conmutativo con unidad R . Construiremos el anillo

$$\left(\bigoplus_{n \geq 0} H^n(X), +, \smile \right)$$

Definición. Recordemos que $C^n(X) = \text{Hom}(C_n(X), R)$, y tomemos dos cocadenas $\varphi \in C^k(X, R)$ y $\psi \in C^\ell(X, R)$. El **producto copa** es

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}(X; R)$$

que debe ser una función definida en las $k + \ell$ cadenas:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma : \Delta^{k+\ell} \rightarrow X) := \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \cdot_R \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+\ell}]})$$

Que es como aplicar la ϕ en los primeros k vértices del simplejo y luego aplicar ψ en los últimos ℓ . Cada uno me da un elemento en R y los multiplico.

Ya con esto tenemos

$$\left(\bigoplus_{n \geq 0} C^n(X; R), +, \smile \right)$$

Ya que el producto copa es asociativo y distributivo casi por definición. Además, la cocadena $1 \in C^0(X; R)$ es una unidad.

Observación. Se trata de un **anillo graduado**, que es una estructura de la forma $(\bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_i, +, \cdot)$ tal que A_i es un grupo abeliano y para cualesquiera $a \in A_i$ y $b \in A_j$, $a \cdot b \in A_{i+j}$.

Para pasar a homología, lo único que debemos verificar es que este producto se restringe bien a ciclos y pasa bien al cociente:

Proposición. $\partial(\varphi \smile \psi) = \partial\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \partial\psi$

Demostración. Simplemente calcular cada componente. Parece que la alternancia viene del operador frontera. \square

De lo cual deducimos que

- ciclo \smile ciclo = ciclo.
- frontera \smile ciclo = frontera, ya que el término $\partial\varphi \smile \psi$ se anula.
- ciclo \smile frontera = frontera.

Y deducimos el producto copa en la homología no depende de los representantes para obtener el **anillo de cohomología**

$$\left(\bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R), +, \smile \right)$$

Denotaremos $H^*(X, R) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R)$.

Ahora debemos demostrar que el mapeo que asocia a un espacio X este anillo es functorial. Esto ya se tiene cuando vemos el anillo de cohomología como un grupo. Basta demostrar que

Proposición. $f^*(\varphi \smile \psi) = f^*\varphi \smile f^*\psi$.

Proposición (Anticonmutatividad). Si $\alpha \in H^k$ y $\beta \in H^\ell$,

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{k+\ell} \beta \smile \alpha$$

Observemos que $\alpha \smile \alpha := \alpha^2 = -\alpha^2 \implies 2\alpha^2 = 0$ no necesariamente implica que $\alpha = 0$, y que $H^*(X, \mathbb{Z}/2)$ sí es conmutativo.

Ejemplo (Anillo de cohomología de $\mathbb{R}P^n$). Calculamos la homología de $\mathbb{R}P^n$ con coeficientes en \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

y dualizamos con $\text{Hom}(-, \mathbb{Z}/2)$:

$$\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} 0$$

Así que la cohomología es $\mathbb{Z}/2$ si $0 \leq i \leq n$ y 0 en $i > n$. El producto de la clase de grado uno en el primer grupo de cohomología consigo misma me va dando los elementos no cero en cada nivel (esto es lo único que no está demostrado en este ejemplo). Es decir, $\alpha_1^i = \alpha_i$ para cualquier $2 \leq i \leq n$ y $\alpha_1^{n+1} = 0$

Entonces

$$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \approx \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2[X]/\langle X^{n+1} \rangle$$

usando la relación que pusimos arriba.

Proposición.

1. $H^*(\bigsqcup X_i, R) \approx \prod H^*(X_i, R)$.
2. $\widetilde{H}^*(\bigvee X_i, R) = \prod \widetilde{H}^*(X_i, R)$ ya que, como esperaríamos, existe un anillo de cohomología reducida, aunque no necesariamente tiene unidad.

Demostración. Rutina. □

Ejemplo. Ahora comparemos $S \vee S^2$ y $\mathbb{R}P^2$, cuyos anillos de cohomología son los dos $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Pero el elemento no trivial de grado 1, β_1 elevado al cuadrado es 0 porque estamos en el producto directo de los anillos, así que estamos en el producto del primer anillo, es decir

$$(\beta_1, 0)^2 = (\beta_1^2, 0) = (0, 0)$$

pero, como dijimos antes, el análogo en el proyectivo al cuadrado es el elemento no trivial en grado 2.

2.3 Teorema de Künneth

Recordemos que si X y Y son complejos CW, su producto $X \times Y$ también tiene estructura de complejo CW: su n -esqueleto es $C_n^{CW}(X \times Y) = \mathbb{Z}\{e^i \times e^j : i + j = n\}$.

Esto nos motiva a definir el producto tensorial. Sea R un anillo conmutativo con 1, y M, N R -módulos. Una función $f : M \times N \rightarrow A$ es **R -bilineal** si es lineal en cada entrada. El **producto tensorial** de M y N sobre R es un R -módulo $M \otimes_R N$ con una función bilineal tal que se cumple la siguiente propiedad universal

$$(m, n) \longmapsto m \otimes n$$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & \searrow \text{bilineal} & \downarrow \text{\textit{R-linear}} \\ & & A \end{array}$$

$$M \otimes_R N = R[m \otimes n | m \in M, n \in N] / \left\langle \begin{aligned} &(m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n, \\ &m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2, \\ &(rm) \otimes n - r(m \otimes n), \\ &m \otimes (rn) - r(m \otimes n) \end{aligned} \right\rangle$$

Proposición (Propiedades del producto tensorial).

- $R \otimes_R M \approx M$.
- $M \otimes_R N \approx N \otimes_R M$ (ésta podría tener detalles si R no es conmutativo).
- $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_R N \approx \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.
- Si $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ es R -lineal, la función $M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_N} M_2 \otimes_R N$ que manda $m_1 \otimes n \mapsto f(m_1) \otimes n$ es R -lineal.

- Para N fijo,

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Ab} \\ & \nearrow & \uparrow \\ - \otimes N : R\text{-mod} & \longrightarrow & R\text{-mod} \end{array}$$

es covariante exacto derecho, es decir, $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ induce $M'' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow 0$. Y también tenemos $\text{Tor}_R^i(-, N)$.

- Si L_1 y L_2 son R -módulos libres, entonces,

$$L_1 \otimes L_2 = \left(\bigoplus_{\alpha} R \right) \otimes \left(\bigoplus_{\beta} R \right) = \bigoplus_{\alpha \times \beta} R$$

que nos recuerda justamente a la construcción del producto de dos complejos CW.

- Si $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y $B = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} B_j$ son R -módulos graduados, su producto

$$A \otimes_R B = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$$

también tiene estructura de módulo graduado.

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & & & & \\ & A_0 \otimes B_n & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & A_0 \otimes B_2 & & & & & \\ A_0 \otimes B_1 & A_1 \otimes B_1 & & & & & \\ A_0 \otimes B_0 & A_1 \otimes B_0 & A_2 \otimes B_0 & \cdots & A_n \otimes B_0 & \cdots \end{array}$$

- Si X y Y son complejos CW,

$$C_*^{CW}(X \times Y) \approx C_*^{CW}(X) \otimes_R C_*^{CW}(Y)$$

como R -módulos graduados, es decir, $C_n^{CW}(X \times Y) \approx \bigoplus_{i+j=n} C_i^{CW}(X) \otimes C_j^{CW}(Y)$ para toda n .

Y la pregunta natural para complejos CW es ¿qué pasa en la homología? Tendremos la siguiente fórmula que recuerda al teorema de coeficientes universales.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} (H_i(X) \otimes H_j(Y)) \longrightarrow H_k(X \times Y; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k-1} \text{Tor}(H_i(X), H_j(Y)) \longrightarrow 0$$

Aunque no es cierto que $H^*(X) \times H^*(Y)$ es igual que $H^*(X \times Y; R)$, podemos definir una función llamada **producto cruz** de la siguiente forma

$$\begin{aligned} H^*(X) \times H^*(Y) &\rightarrow H^*(X \times Y; R) \\ (a, b) &\mapsto p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \end{aligned}$$

Donde $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$. Claramente es una función bilineal.

Podemos extender al producto tensorial:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \times H^*(Y) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times Y; R) \\ \downarrow & \nearrow \times & \\ H^*(X) \otimes H^*(Y) & & \end{array}$$

Definamos una estructura de anillo en $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ mediante

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}(ac) \otimes (bd)$$

con lo cual el mapeo de arriba \times es un homomorfismo de anillos.

Teorema (de Künneth). El mapeo \times es un isomorfismo de anillos si $H^*(Y, R)$ es un R -módulo libre.

Demostración. Checar en Hatcher. □

Ahora calculamos usando cohomología relativa el isomorfismo

$$H^*(X, A) \otimes H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$$

Proposición.

$$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \approx \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2[X]/\langle X^{n+1} \rangle$$

Demostración. Basta ver que el producto de los elementos no triviales en cada grado es el producto no trivial en la suma de los grados.

Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\} / x \sim \lambda y, \lambda \neq 0 \\ &= D^n / x \sim -x, x \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Denotemos $\mathbb{R}P^n$ por P^n . Queremos ver que el elemento no trivial en $0 \neq \alpha \in H^i(P^n)$ copa el elemento no trivial en $0 \neq \beta \in H^j(P^n)$ es igual al elemento no trivial en $0 \neq \alpha \smile \beta \in H^{i+j}(P^n)$.

Consideremos los encajes naturales para $i + j = n$

$$\begin{array}{ccc} P^i \hookrightarrow P^n & & P^j \hookrightarrow P^n \\ [x_0, \dots, x_i] \mapsto [x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0] & & [y_0, \dots, y_j] \mapsto [0, \dots, 0, y_0, \dots, y_j] \end{array}$$

Pensando en el modelo del disco, P^i y P^j son intersecciones de hiperplanos en el disco. Luego $P^i \cap P^j = \{p\}$.

Notemos además que $\partial P^n = P^{n-1}$, y que $P^n - P^{n-1}$ es una bola abierta que denotaremos por \mathbb{R}^n . Y también, $P^j - P^{j-1} \approx \mathbb{R}^j$ y $P^i - P^{i-1} \approx \mathbb{R}^i$.

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(P^n) \times H^j(P^n) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(P^n) \\
 \uparrow 1 & & \uparrow 2 \\
 H^i(P^n, P^n - P^j) \times (P^n, P^n - P^i) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(P^n, P^n - \{p\}) \\
 \downarrow 3 & & \downarrow 4 \\
 H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})
 \end{array}$$

Incluyendo las parejas usando (P^n, \emptyset) . El resultado se sigue de mostrar que las flechas verticales son isomorfismos y que en el renglón de hasta abajo, la copa de generadores va a dar al generador.

Es posible retraer la pareja $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j)$ en $(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$ de manera que

$$\begin{array}{ccc}
 H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\}) \times H^j(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^j - \{0\}) & \xrightarrow{\quad \times \quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
 \end{array}$$

Observemos que la cohomología de $H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$ es la misma que la de la esfera ya que podemos proyectar radialmente y la cohomología de \mathbb{R}^n se anula en la sucesión exacta larga de la pareja.

Luego, la cohomología del producto tensorial de $\tilde{H}^*(S^{j-1}) \otimes \tilde{H}^*(S^{i-1})$ es justamente $\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2$ ya que son los únicos que sobreviven en todos los grados. Finalmente aplicamos Künneth en el renglón de abajo: el generador de $H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$ copa el generador de $H^j(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^j - \{0\})$ me da el generador de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$.

Como dijimos, para terminar basta ver que las flechas verticales son isomorfismos. El 4 es una aplicación directa del teorema de escisión. Para el 2, como podemos retraer $P^n - \{p\}$ en P^{n-1} , tenemos que $H^n(P^n, P^n - \{p\}) \approx H^n(P^n, P^{n-1})$. Y éste último de hecho es la homología de una esfera, así que debe ser $\mathbb{Z}/2$, igual que $H^n(P^n)$.

Para el 3, veamos que todos aquí son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^i(P^n) & \xleftarrow{5} & H^i(P^n, P^{i-1}) & \xleftarrow{6} & H^i(P^n, P^n - P^j) & \xrightarrow{7} & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \\
 \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 3 & & \downarrow 4 \\
 H^i(P^i) & \xleftarrow{8} & H^i(P^i, P^{i-1}) & \xleftarrow{9} & H^i(P^i, P^i - \{p\}) & \xrightarrow{10} & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})
 \end{array}$$

La flecha 1 se sigue por inclusión y porque estamos con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$. 4 es la retracción que ya habíamos visto. 5,6,8,9 por inclusiones. Creo que 10 por escisión. 6 es porque $P^n - P^j$ se retrae o deformación a P^{i-1} , y las demás se siguen porque todo conmuta. \square

Observación. Podemos pensar que el producto copa mide cómo se intersectan dos sub-variedades.

Observación. Si existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}P^n$, entonces la función inducida $f^* : H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ está determinada por su acción en el polinomio x .

Observación.

- $H^*(\mathbb{R}P^\infty) \approx \mathbb{Z}/2[X]$ con una demostración análoga.
- Para $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$, $H^*(\mathbb{C}P^n; R) \approx R[X]/\langle X^{n+1} \rangle$ para cualquier anillo, con el generador de orden 2. Y también el caso de infinito sin dividir entre el ideal.
- Para los cuaternios, $H^*(\mathbb{H}P^n, R) \approx R[X]/\langle X^{n+1} \rangle$ con $|X| = 4$.
- $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}/2) \approx \mathbb{Z}/2[X] \otimes \mathbb{Z}/2[Y] \approx \mathbb{Z}/2[X, Y]$.
- Iterando el inciso anterior, agregamos más y más variables. Y creemos que el caso infinito da el anillo de polinomios en infinitas variables.

Para calcular $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$, tenemos por coeficientes universales la cohomología

$$\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \quad n \text{ par}$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \quad n \text{ impar}$$

Observemos que para cualquier espacio topológico X y $R \rightarrow S$ homomorfismo de anillos, siempre tenemos el homomorfismo $H^i(X; R) \rightarrow H^i(X; S)$ para toda i . Además, este homomorfismo respecta el producto copa, de manera que tendremos un morfismo

$$H^*(P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(P^n, \mathbb{Z}/2) \approx \mathbb{Z}/2[X]$$

Es decir tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \text{ o } \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

donde las flechas verticales resultaron ser inclusiones, al menos en todas salvo la última columna. En estos casos, multiplicamos el elemento no trivial de $\mathbb{Z}/2$ en el renglón de arriba consigo mismo, lo que nos manda dos grados arriba a algún elemento. Para ver que éste no es el trivial, usamos el producto copa que ya definimos en el caso de coeficientes en $\mathbb{Z}/2$ y la simple definición de morfismo de anillos.

Para el caso de dimensión impar sólo notemos que la potencia del elemento no trivial en dimensión 2 no puede caer en el grupo de grado impar, así que necesitamos otro generador para el anillo de cohomología. En resumen:

$$H^*(P^n, \mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}[X]/\langle 2X, X^{n+1} \rangle & |X| = 2, \text{ en dimensión par} \\ \mathbb{Z}[X, Y]/\langle 2X, X^n, Y^n, Y \rangle & |X| = 2, |Y| = n, \text{ en dimensión impar} \end{cases}$$

Una aplicación de esto es que para m par,

$$\tilde{H}^*(\mathbb{R}P^m \vee S^{m+1}, \mathbb{Z}) \approx \tilde{H}(\mathbb{R}P^m) \times \tilde{H}(S^{m+1})$$

Para verlo, primero notemos que, como grupos abelianos, $\tilde{H}^*(\mathbb{R}P^m \vee S^{m+1}, \mathbb{Z}) \approx_{\text{ab}} \tilde{H}(\mathbb{R}P^m + 1)$ ya que la cohomología de S^{m+1} no aporta nada hasta la dimensión $m+1$, donde le agrega un a copia de \mathbb{Z} . Cuando consideramos todo el anillo, se vuelve el producto. Y además, este anillo resulta isomorfo al anillo de cohomología del espacio proyectivo de dimensión impar.

El mismo ejemplo con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$ tiene el mismo isomorfismo de grupos abelianos, pero no de anillos.

Ahora veamos una aplicación. En realidad sólo están los complejos, los cuaternios y los octonios. Aquí podemos demostrar que:

Teorema (Hopf). Si A es un álgebra de división de dimensión finita sobre \mathbb{R} , entonces tiene dimensión real igual a una potencia de 2.

Demostración. Supongamos que $A \approx \mathbb{R}^n$. El producto en A es una función bilineal $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como A es un álgebra de división, las restricciones

$$\{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \times \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

son isomorfismos lineales para $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces tenemos un mapeo $\varphi : \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. Además, $\mathbb{R}P^{n-1} \times \{[y]\} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ y $\{[x]\} \times \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ son homeomorfismos para $[x], [y] \in \mathbb{R}P^{n-1}$.

Ahora tomamos el homomorfismo inducido,

$$\varphi^* : \mathbb{Z}/2[X] / \langle X^n \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/2[X_1, X_2] / \langle X_1^n, X_2^n \rangle$$

que manda el polinomio X en un polinomio de la forma $a_1 X_1 + a_2 X_2$ porque preserva el grado. Tomando también el inducido por la inclusión en el primer factor obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-1}) & \xleftarrow{\varphi^*} & H^*(\mathbb{R}P^{n-1}) \\ i^* \downarrow & \swarrow \approx & \\ H^*(\mathbb{R}P^{n-1}) & & \end{array}$$

Entonces, el generador X en la esquina arriba derecha va a dar a $a_1 X_1 + a_2 X_2$. Por tratarse la inclusión en el primer factor, i^* manda $X_1 \mapsto X_1$ y $X_2 \mapsto 0$. Entonces, $X \mapsto a_1 X_1$ bajo la flecha punteada, de forma que $a_1 \neq 0$, y análogamente $a_2 \neq 0$.

Ahora notemos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi^*(X^n) \\
 &= (X_1 + X_2)^n \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X_1^i X_2^{n-i} \\
 &= \binom{n}{0} X_2^n + \binom{n}{1} X_1 X_2^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} X_1^{n-1} X_2 + \binom{n}{n} X_1^n
 \end{aligned}$$

pero X_1^n y X_2^n se anulan en el cociente $\mathbb{Z}_2/\langle X_1^n, X_2^n \rangle$, de donde $\binom{n}{i} = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Ahora expresamos $n = n_1 + \dots + n_k$ donde n_i es una potencia de 2. Entonces,

$$\begin{aligned}
 (X_1 + X_2)^n &= (X_1 + X_2)^{n_1 + \dots + n_k} \\
 &= (X_1 + X_2)^{n_1} + \dots + (X_1 + X_2)^{n_k} \\
 &= (X_1^{n_1} + X_2^{n_1}) \dots (X_1^{n_k} + X_2^{n_k}) \quad = \text{aquí hay } 2^k \text{ términos}
 \end{aligned}$$

Pero por la observación anterior, $(X_1 + X_2)^n = X_1^n + X_2^n$, así que de hecho $k = 1$ y n es potencia de 2. \square

2.4 Dualidad de Poincaré

Definición. Una **variedad (topológica)** de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff (con base numerable) que es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Si M es compacta, diremos que M es cerrada.

Teorema (Dualidad de Poincaré). Si M es orientable,

$$H_k(M; \mathbb{Z}) \approx H^{n-k}(M; \mathbb{Z})$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Y si M no es orientable, de todas formas $H_k(M; \mathbb{Z}/2) \approx H^{n-k}(M; \mathbb{Z}/2)$.

Como tensorizar por \mathbb{Q} no altera la construcción,

$$H_k(M; \mathbb{Q}) \approx H_k(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \approx H^{n-k}(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \approx H^{n-k}(M; \mathbb{Q}) \approx H_{n-k}(M; \mathbb{Q})$$

O sea que la parte libre de torsión de los grupos de homología de cualquier variedad orientable cerrada tienen un comportamiento simétrico. Y de hecho también la torsión se comporta así por coeficientes universales.

Observemos que en una vecindad local U y un punto $x \in M$, por escisión y por la

sucesión exacta corta de la pareja,

$$\begin{aligned}
 H_n(M, M - x) &\approx H_n(U, U - x) \\
 &\approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
 &\approx H_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \\
 &\approx H_{n-1}(S^{n-1}) \\
 &\approx \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Definición.

- Una **orientación** en \mathbb{R}^n es una elección de un generador de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \approx \mathbb{Z}$, ya que \mathbb{Z} está generado tanto por 1 como por -1 . Que es algo así como un generador de la homología local.
- Dada una variedad M , una **orientación local** en $x \in M$ es una elección de un generador μ_x de $H_n(M, M - x)$.
- Tomemos una vecindad B de $x \in M$ homeomorfa a \mathbb{R}^n . Entonces $(M, M - B) \subset (M, M - \{x\})$. Y como B es homeomorfo a \mathbb{R}^n , de hecho $H_n(M, M - B) \approx H_n(M, M - \{x\})$.

Una **orientación** en M es una elección de dos orientaciones locales μ_x para todo $x \in X$ tal que si $B \subset M$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n , entonces

$$H_n(M, M - B) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$$

todas las μ_y para $y \in B$ son imágenes del mismo generador en el dominio. Es decir, las orientaciones son **localmente compatibles**.

Antes habíamos dicho que para cualquier $x \in X$ existe una vecindad B de x tal que para todo $y \in B$

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(M, M - B) & \xleftarrow{\approx} & H_n(M, M - x) \\
 \approx \uparrow & & \\
 H_n(M, M - y) & &
 \end{array}$$

Estas dos flechas, que son las inducidas por la inclusión, mandan μ_y y μ_x en el mismo elemento.

- M es **orientable** si admite una orientación.

Observación. Si M es orientable y conexa, entonces tiene exactamente dos orientaciones.

Ejemplo.

1. S^n es orientable para toda $n \geq 0$.
2. $\mathbb{R}P^{2n}$ no es orientable para $n \geq 1$.

3. $\mathbb{R}P^{2n+1}$ sí es orientable para $n \geq 0$.
4. K la botella de Klein no es orientable.

Proposición. Toda variedad (cerrada y conexa) tiene un cubriente dos a uno que es orientable.

Sketch de demostración. Definamos $\tilde{M} := \{\mu_x : x \in M, \mu_x \text{ es una orientación local en } x\}$. (Es decir, cada μ_x es un generador de $H_n(M, M - \{x\})$). Entonces, la función $p : \tilde{M} \rightarrow M$ dada por $\mu_x \mapsto x$ es dos a uno. Intuitivamente, nos vamos deslizando por M preservando la orientación hasta que le damos dos vueltas, como a la banda de Möbius (para la cual se reconstruye un cilindro).

Ahora le damos una topología a \tilde{M} . A cada abierto de un punto $x \in M$ le asociamos dos vecindades en \tilde{M} , una para cada orientación. Entonces p es continua, y de hecho es un cubriente dos a uno. Por último, \tilde{M} es orientable ya que la orientación es constante localmente. \square

Observación. Una orientación en M equivale a dar una sección continua de \tilde{M} .

Corolario. Sea M conexa. M es orientable si y sólo si \tilde{M} tiene dos componentes.

Demostración.

- (\Rightarrow) Por la observación anterior, tenemos una copia de M en \tilde{M} , y la otra orientación de la otra sección.
- (\Leftarrow) Si \tilde{M} tiene dos componenetas, diagmos $\tilde{M} = M_+ \sqcup M_-$, entonces cada una nos da una orientación en M . \square

Corolario. Para M conexa, si $\pi_1(M)$ no tiene subgrupos de índice 2 entonces M es orientable.

Demostración. Si M no es orientable, por el corolario anterior, entonces \tilde{M} es conexa. Luego $\pi_1(\tilde{M}) \hookrightarrow \pi_1(M)$ como un subgrupo de índice 2. \square

Ahora podemos agrandar la construcción de \tilde{M} definiendo otro cubriente más grande:

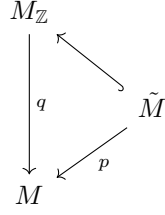
$$M_{\mathbb{Z}} = \{\alpha_x : \alpha_x \text{ es un elemento en } H_n(M, M - \{x\})\}$$

Y nuevamente tenemos un cubriente

$$q : M_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$$

$$\alpha_x \mapsto x$$

que es esencialmente la proyección de \mathbb{Z} al 1. De hecho, resulta ser un cubriente



Notemos que la colección de puntos que se proyectan al cero bajo q , es decir, $\alpha_x = 0$ en $H_n(M, M - \{x\})$ es una copia de M en $M_{\mathbb{Z}}$. Y de hecho, tomando parejas como $\{1, -1\}$ y $\{2, -2\}$, también obtenemos copias de \tilde{M} en $M_{\mathbb{Z}}$ denotadas por M_r para $r \in \mathbb{Z}$. De hecho, $M_{\mathbb{Z}}$ es una unión de copias de M y de \tilde{M} .

¿Qué pasa si tomamos un anillo conmutativo R ? Bueno, la homología local sigue siendo isomorfa a R , así que aún podemos definir la orientación. Ahora escogemos un elemento que genera a R , es decir, $x \in R$ tal que $xR = R$. Estos elementos se llaman **unidades**.

Observación. Si $R = \mathbb{Z}/2$ sólo hay una orientación posible y de hecho cualquier variedad es orientable.

En este caso, la construcción del cubriente es n a 1 donde n es el número de unidades en \mathbb{R} . Una orientación M seguirá siendo una sección de este cubriente, de hecho así se define. También está el cubriente M_R , y de hecho, si hay elementos de orden 2 (en sentido aditivo), \tilde{M} siempre tiene una sección, es decir, es R -orientable. En símbolos,

$$\exists 0 \neq r \in R \text{ tal que } 2r = 0 \implies \tilde{M} \text{ es } R\text{-orientable.}$$

Observación. Si M es \mathbb{Z} -orientable, vía M_1 tenemos una sección de M_R . Entonces, M es R -orientable para todo R .

Teorema. Sea M una n -variedad cerrada y conexa.

1. Si M es R -orientable, entonces

$$H_n(M; R) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}, R) \approx R$$

(donde estamos pensando que el primero es la homología de la pareja (M, \emptyset) , así que el morfismo es el inducido por la inclusión) es un isomorfismo para todo $x \in M$. **Checar demostración.**

Aquí estoy pensando que $H_n(M, M - \{x\}, R) \approx \bigwedge^n (T_p^* M)$. Es decir, estamos viendo que la n -ésima homología es igual a la n -ésima potencia exterior.

2. Si M no es R -orientable, entonces la misma función del inciso 1. es inyectiva y su imagen es $\{x \in H_n(M, M - \{x\}) : 2x = 0\}$. En particular, si M no es \mathbb{Z} -orientable, entonces $H_n(M; \mathbb{Z}) \approx 0$.
3. $H_m(M; R) \approx 0$ para $m > n$.

Observación.

1. Si M es R -orientable, un elemento en $H_n(H, R)$ cuya imagen es un generador en $H_n(M, M - \{x\})$ para cualquier $x \in M$ se le conoce como *una clase fundamental* de M y se denota como $[M]$. (Porque de hecho esto no cambia cuando variamos x gracias a una sucesión de abiertos que conectan un punto con otros, y un diagrama conmutativo donde todo es un isomorfismo).
2. Luego, por el inciso 1. vemos que si M es R -orientable, existe una clase fundamental. De hecho, el regreso también es cierto, pues

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(M) & \longrightarrow & H_n(M, M - \{x\}) \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & H_n(M, M - B)
 \end{array}$$

Teorema. Si M es una n -variedad conexa, cerrada y R -orientable,

$$H^n(M; R) \approx H_{n-k}(M; R) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Si M tiene una estructura celular, podemos tomar la estructura celular dual. Si este complejo celular también es M , tenemos una igualdad en los grupos de homología de arriba a abajo. Viendo que la homología del dual es la cohomología del original, terminamos.

$$\begin{array}{ccc}
 C & & C^* \\
 0 & \longrightarrow & n \\
 1 & \longrightarrow & n - 1 \\
 & & \vdots \\
 & & \vdots \\
 n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

□

2.4.1 Producto capa

Tomemos X un espacio topológico y R un anillo. Definamos

$$\begin{aligned}
 \frown: C_k(X; R) \times C^\ell(X; R) &\rightarrow C_{k-\ell}(X; R) \\
 (\sigma, \varphi) &\mapsto \sigma \frown \varphi := \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_\ell])\sigma|[v_\ell, \dots, v_\ell]
 \end{aligned}$$

donde $\sigma: [v_0, \dots, v_k] \rightarrow X$. Una vez definido en los básicos, extendemos R -bilinealmente para definir la función en el elemento genérico $\sum \sigma \frown \sum \varphi$.

Tenemos un operador frontera

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^\ell (\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \cap \delta\varphi)$$

Y a la mera hora

$$\begin{aligned} \frown: H_k(X; R) \times H^\ell(X; R) &\rightarrow H_{k-\ell}(X; R) \\ ([\sigma], [\varphi]) &\mapsto [\sigma \frown \varphi] \end{aligned}$$

Tenemos que ver que está bien definido y manda ciclos y cociclos en ciclos, fronteras y cociclos en fronteras, y que ciclo con cofrontera es ciclo (creo). Y sí.

Teorema. Si M es una n -variedad conexa, cerrada y R -orientable, el homomorfismo

$$[M] \frown -: H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo.

Proposición. Para $\alpha \in C_{k+\ell}(X; R)$, $\varphi \in C^k(X; R)$, $\psi \in C^\ell(X; R)$,

$$\psi(\alpha \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)\alpha \in R$$

Esta igualdad implica que

$$\begin{aligned} \varphi \smile -: C^\ell(X; R) &\rightarrow C^{k+\ell}(X; R) \\ - \cap \varphi : C_{k+\ell}(X; R) &\rightarrow C_\ell(X; R) \end{aligned}$$

Dualizando la segunda función obtenemos

$$(- \frown \varphi)^* : C^\ell \rightarrow C^{k+\ell}(X; R)$$

que resulta ser igual a la primera. Es decir, cupear con φ es el dual de capear con φ .

Y ahora hacemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^\ell(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_\ell(X; R), R) \\ \varphi \smile \downarrow & & \downarrow \frown \varphi^* \\ H^{k+\ell}(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{k+\ell}(X; R), R) \end{array}$$

Donde la h es suprayectiva. Y si R es un campo, sí hay isomorfismos. Y también si $R = \mathbb{Z}$ y los H^* son libres hay isomorfismos.

2.5 Consecuencias de dualidad de Poincaré

Definición. Sean A y B R -módulos y $A \times B \rightarrow R$ una forma bilineal. Decimos que esta forma es **no singular** si

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \text{Hom}_R(B, R) & B &\rightarrow \text{Hom}_R(B, R) \\ a &\mapsto \{a\} \times B \rightarrow R & b &\mapsto A \times \{b\} \rightarrow R \end{aligned}$$

son isomorfismos.

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \smile: H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) &\rightarrow R \\ (\varphi, \psi) &\mapsto (\varphi \smile \psi)([M]) \end{aligned}$$

que no depende de la elección del representante por usar la clase fundamental.

Proposición. El mapeo \smile es no singular si R es un campo o si $R = \mathbb{Z}$ y cocientamos la torsión en la cohomología $H^*(M; \mathbb{Z})$ (es decir, suponer que es finitamente generada).

Demostración. Demostremos no singularidad en el segundo factor, es decir consideremos

$$H^{n-k}(M) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_{n-k}(M), R)$$

que es un isomorfismo por hipótesis.

$$H^{n-k}(M) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_{n-k}(M), R) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_R(H^k(M), R)$$

donde D^* es el dual del mapeo de dualidad de Poincaré que, de hecho, también es un isomorfismo. Ahora debemos ver que de hecho este isomorfismo es el que llamamos \smile .

Recordemos cómo actúa la h que viene de coeficientes universales: de hecho, envía $[\psi] \mapsto \psi$. Y de hecho bajo D^* , $\psi \mapsto \psi([M] \frown -) = - \smile \psi([M])$. \square

Corolario. $\alpha \in H^k(M; R)$ genera un sumando directo si y sólo si existe $\beta \in H^{n-k}(M; R)$ tal que $\alpha \smile \beta$ es un generador de $H^n(M; R)$.

Demostración. α genera un sumando si y sólo si existe $f: H^k(M; R) \rightarrow R$ tal que $\alpha \mapsto 1$. Y de hecho por la proposición esto es equivalente a que exista β tal que $f = (- \smile \beta)[M]$ con $\alpha \mapsto 1$. \square

Ejemplo. Tomemos $P^n = \mathbb{R}P^n$ y $R = \mathbb{Z}/2$. Recordemos que la cohomología es

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow i \longrightarrow \dots \longrightarrow j \longrightarrow \dots \longrightarrow i+j \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

Queremos ver que \bar{x} no trivial de grado i copa \bar{y} no trivial de grado j nos dan el no trivial de grado $i+j$. Por la naturalidad del producto copa podemos tomar los elementos en $H^*(P^{i+j})$ de acuerdo a que como $P^{i+j} \hookrightarrow P^n$ podemos dualizar la inclusión y obtenemos $H^*(P^n) \rightarrow H^*(P^{i+j})$.

Tomando el producto copa de $x \neq 0$ con algún y de grado j , tenemos que $x \smile y \neq 0$ por el corolario, y luego $y \neq 0$.

Ejemplo. Tomemos $T = S^1 \times S^1$. La cohomología es

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & & \\ & & \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle & & \langle \tau \rangle & & \end{array}$$

Como α genera un sumando directo, existe γ tal que $\alpha \smile \gamma = \tau$. Pensando en α encajada como un meridiano S^1 en el toro,

$$\begin{array}{ccccccc} T & & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \uparrow & & & & & & \\ S^1 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle & & 0 \end{array}$$

por dimensión $\alpha \smile \alpha = 0$, así que $\alpha \smile \alpha = 0$ también en el toro.

Como $\gamma = n_1\alpha + n_2\beta$ y, Künneth, $H^*(S^1 \times S^1) \approx H^*(S^1) \otimes H^*(S^1)$, (?) concluimos que $n_2 = 1$ y de hecho $\alpha \smile \beta = 1$.

2.6 Variedades con frontera

Definición. Una **variedad con frontera** es un espacio topológico Hausdorff segundo numerable localmente homeomorfo a $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$.

Observación. La frontera ∂M es una subvariedad de dimensión $n - 1$ sin frontera orientable si M es orientable.

Proposición. ∂M siempre admite una vecindad collar, es decir, $\partial M \times (0, 1)$.

Definición. M es R -orientable si $M - \partial M$ es R -orientable.

Pregunta. Sea M cerrada. ¿Existe W compacta tal que $\partial W = M$? No.

Definición. Decimos que dos variedades cerradas M y N son **cobordantes** si existe W compacta tal que $\partial W = M \sqcup N$.

Observación. Ser cobordante es una relación de equivalencia.

Definición. El **anillo de cobordismo** es Variedades diferenciables / cobordismo $= (\Omega, \sqcup, \times)$.

3. La conjetura de Poincaré

Primero recordemos (¿recordemos?) que la única 1-variedad cerrada es S^1 , y en dimensión 2 sólo están la esfera y las superficies de género g . En dimensión 3 hay muchas, como S^3 , T^3 , las sumas conexas de T^3 , productos como $S^1 \times S_g$, y parece haber muchas más.

Y luego,

(Poincaré) — Si M^3 tiene la homología de la esfera, ¿entonces M^3 es homeomorfa a S^3 ?

(Poincaré) — No.

Siendo así que Poincaré encontró una 3-variedad que con la homología de S^3 que no es homeomorfa a S^3 haciendo una construcción tipo $A_5 \curvearrowright S^3 \rightarrow S^3/A_5$, de forma que $\pi_1(S^3/A_5) \cong A_5$ y resulta tener la homología de S^3 . Que por cierto se obtiene identificando caras del dodecaedro. Esta variedad se llama *esfera homológica*.

Pregunta. Si X, Y son variedades cerradas, conexas y homotópicamente equivalentes, ¿son homeomorfas?

Sabiendo cuáles son las dimensiones en dimensión 0, 1 y 2, la respuesta es que sí, calculando sus grupos de homología. (El primer grupo de homología de S_g es \mathbb{Z}^{2g} .) Así es que la pregunta es

Pregunta (Conjetura de Poincaré). $S^3 \simeq M^3 \xrightarrow{?} S^3 \cong M^3$

O bien

Pregunta (Conjetura de Poincaré). S^3 simplemente conexa $\xrightarrow{?} S^3 \cong M^3$

Aunque

Proposición. Si M^3 es simplemente conexa, entonces $M^3 \simeq S^3$.

Para lo cual, nos preguntamos si una familia de funciones entre todos los grupos de homotopía de dos espacios induce una función entre los espacios (al revés si es cierto).

Teorema (de Whitehead). Sea $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos complejos CW. Si $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ es un isomorfismo para toda n , entonces f es una equivalencia homotópica.

Consideremos

$$\begin{array}{ccc} h_n : \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & H_n(X) \\ [f : S^n \rightarrow X] & \longmapsto & f_*[S^n] \\ & \searrow & \\ & f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n & \\ & [S^n] \mapsto f_*[S^n] & \end{array}$$

Usando las clases fundamentales ya que las tenemos a la mano.

Teorema (Homomorfismo de Hurewicz).

- Si X es arco-conexo, h_1 es supra y $\ker h_1 = [G, G]$.
- Para $m \geq 2$, si $\pi_i(X) = 0$ para toda $i < m$ entonces h_m es un isomorfismo.

Es decir, el primer grupo de homología no cero y el primer grupo de homotopía no cero ocurren en la misma dimensión y son isomorfos.

Para nuestra proposición necesitamos esta versión del teorema de Whitehead, que se puede deducir de la anterior:

Teorema (de Whitehead). Si X y Y son complejos CW simplemente conexos y $f : X \rightarrow Y$ es tal que $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para toda n , entonces f es una equivalencia homotópica.

Ahora demostremos la proposición:

Demostración. Como S^3 y M^3 son simplemente conexas, basta mostrar que hay un isomorfismo en todos los grupos de homotopía. Por conexidad, $H_0(M^3) = 0$, y como $H_1(M^3)$ es el abelianizado de $\pi_1(M^3)$, también es cero. Y como M^3 es orientable, $H^3 \approx \mathbb{Z}$. Para calcular el segundo, $H^2(M^3) \approx H_1(M^3) \approx 0$. Ahora la parte libre de torsión en homología y cohomología coincide por coeficientes universales y dualidad de Poincaré, así que de hecho $H_2(M^3) = 0$.

Para aplicar el teorema de Whitehead necesitamos una función que induzca los isomorfismos en cada grupo. Ahora por Hurewicz, $\pi_2(M^3) \approx H_2(M^3) = 0$, y luego

$$\begin{array}{ccc} h_3 : \pi_3 : \pi_3(M^3) & \xrightarrow{\cong} & H_3 M^3 \\ [f : S^3 \rightarrow M^3] & \mapsto & \text{generador} \end{array}$$

Luego, f_* es un isomorfismo de $H_3(S^3)$ en $H_3(M^3)$. Los otros son cero, y en el 0-ésimo grupo de homología cualquier función induce un isomorfismo. \square

Observación. En dimensión 4 la proposición no es cierta, pues $M^4 = S^2 \times S^2$ es simplemente conexa pero $H_2(M^4) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por Künneth.

El objetivo de este curso es ver que

Teorema (Smale). $S^n \simeq M^n \implies S^n \approx M^n$ si $n \geq 6$ y M^n es diferenciable.

Resultó sólo un poco después de la prueba de Smale que

Teorema (Stalings, Newman). $S^n \simeq M^n \implies S^n \approx M^n$ si $n \geq 5$.

Aunque usando otras técnicas. Nosotros mostraremos el teorema de Smale usando una mezcla entre su prueba y la que un poco después dio Milnor.

Pregunta. ¿Qué pasa con $S^n \simeq M^n$ diferenciable $\implies S^n \overset{\text{difeo}}{\approx} M^n$?

(Milnor) — No. En dimensión 7 hay una variedad que topológicamente es una esfera pero diferenciablemente no. (Usando un invariante diferenciable, relacionado a clases características).

4. Exposiciones

4.1 K -teoría

Definición.

- Un *fibrado* o *haz* vectorial es una función $p : E \rightarrow B$ tal que
 1. Para todo $b \in B$, $p^{-1}(b)$ es un espacio vectorial (sobre \mathbb{R} o \mathbb{C}).
 2. Existe un cubrimiento (U_α) por abiertos de B tal que $p^{-1} \approx U \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo
- Un *morfismo* de fibrados vectoriales es una función que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

- El *pullback* de un haz vectorial es

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\quad} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

que resulta en una flecha $\text{Vect}(Y) \rightarrow \text{Vect}(X)$.

Lema. En la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

f es un isomorfismo si $f|_{p^{-1}(b)}$ es un isomorfismo lineal en cada fibra.

Definición. La *suma directa* de dos fibrados vectoriales

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

es $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) : p(e_1) = p(e_2)\} \subset E_1 \times E_2$.

Observación.

- Si ε^n denota el haz trivial de dimensión n , tenemos que $\varepsilon^n \oplus \varepsilon^m = \varepsilon^{n+m}$.
- Si B es Hausdorff compacto, para cualquier haz vectorial $E \rightarrow B$, existe otro $E' \rightarrow B$ tal que $E \oplus E'$ es trivial.

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ & \downarrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

Definición. El *producto tensorial* de dos haces como en la definición de suma directa es $E_1 \otimes E_2 := \bigsqcup p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$. Para darle una topología tomemos $U \subset B$ tal que $p_1^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^n \times U$ y $p_2^{-1}(U) \cong \mathbb{R}^m \times U$, y requerimos que

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \rightarrow U(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m)$$

sea un homeomorfismo.

Ahora, en $\text{Vect}(X)$,

- $E_1 \approx E_2$ si y sólo si existen n, m números naturales tales $E_1 \otimes \varepsilon^n \simeq E_2 \otimes \varepsilon^m$.
- $E_1 \sim E_2$ si y sólo si existe n tal que $E_1 \oplus \varepsilon^n \simeq E_2 \oplus \varepsilon^n$.

El *grupo de categoría de X reducido* $\tilde{K}(X)$ como el grupo $(\text{Vect}(X)/\sim, \oplus)$. Observemos que la relación \approx no tiene inversos. Para construir un grupo, los agregamos mediante $(E_1 - E_2) = (E'_1 - E'_2)$, $E_1 + E'_2 = E_2 + E'_1$ y $(E_1 - E_2) \oplus (E'_1 - E'_2) = (E_1 \oplus E'_1) - (E_2 \oplus E'_2)$. Con esto tenemos $K(X)$, el *grupo de categoría de X* .

Dada $X \xrightarrow{f} Y$ tenemos el pullback $\tilde{K}(Y) \xrightarrow{f^*} \tilde{K}(X)$. Y también está

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{K}(X) \\ E - \varepsilon^n & \mapsto & [E]_{\sim} \end{array}$$

cuyo kernel es $\ker(\varphi) = (\varepsilon^m - \varepsilon^n)$ Luego

$$K(X) \xrightarrow{\psi} K(\{x_0\})$$

con $\ker(\psi) = p^{-1}(x_0)$. Notemos que el grupo de categoría de un punto es los enteros:

$$\begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{x_0\} & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

donde $E' = \{(e, x_0) : p(e) = x_0\}$. Y también, $\ker(K(X) \rightarrow K(\{x_0\})) = \tilde{K}(X)$.

Ahora le damos estructura de anillo a $K(X)$. Dado

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

tenemos $\tilde{K}(X) = \ker(K(X) \rightarrow K(x_0))$. Y definimos el producto externo

$$\begin{aligned} \sigma : K(X) \otimes K(Y) &\rightarrow K(X \times Y) \\ a \otimes b &\mapsto p_1^*(a)p_2^*(b) \end{aligned}$$

Ahora usaremos el *fibrado vectorial línea*, que está dado en $H \subseteq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 = \{(x, v) : v \in x\}$ como

$$\begin{array}{ccc} H & & (x, v) \\ p \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^1 & & x \end{array}$$

Afirmación. $(H \otimes H) \oplus 1 = H \oplus H$

Teorema (Fundamental de ...). La composición

$$\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \otimes K(X) \longrightarrow K(S^2) \otimes K(X) \longrightarrow K(S^2 \times X)$$

Ahora estudiemos las sucesiones exactas. Para

$$A \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$$

tenemos

$$\tilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(A)$$

Tomando conos y suspensiones,

$$\begin{array}{ccccccc} A \hookrightarrow X \hookrightarrow X \cup CA & \rightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \rightarrow & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X/A & & SA & & SX \end{array}$$

Lema. Si A es contráctil, entonces $q : X \rightarrow X/A$ induce una biyección $\text{Vect}(X/A) \rightarrow \text{Vect}(X)$.

Y por fin tenemos la sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow \tilde{K}(S(X/A)) \rightarrow \tilde{K}(SX) \rightarrow \tilde{K}(SA) \rightarrow \tilde{K}(A/X) \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow \tilde{K}(A)$$