La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

August 14, 2023

Índice

1. Álgebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir $\mathrm{R\text{-}ch\text{-}comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\operatorname{img} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que $C_\bullet$ es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n.
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\operatorname{img} \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker \psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{tikzcd} & & \text{Ab} \\ & \text{R-ch-comp} \arrow[ur] \arrow[r, "H_n"] & \text{R-mod} \arrow[u] \\ & C_\bullet \arrow[r, mapsto] & H_n(C_\bullet) \end{tikzcd}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_* g_*$ y $id_{C_\bullet *} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **funtor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n-g_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \to H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1}\partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. $\square$

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.** Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar f"] & H_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar g"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\bar h"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar f"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar g"] & H_{p-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\bar h"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(A') \arrow[r] & H_p(B') \arrow[r] & H_p(C') \arrow[r] & H_{p-1}(A') \arrow[r] & H_{p-1}(B') \arrow[r] & H_{p-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está $\bar h$ a la izquierda y $\bar f$ a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. $\square$

Lema (de los cinco)**.** Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "h_5"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[d, "h_1"] \\ N_5 \arrow[r, "g_5"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_1 \end{tikzcd}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R-módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(-, N) : \text{R-mod} &\to \mathrm{Ab} \\ M &\mapsto \mathrm{Hom}(M, N) \\ M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto \quad ? \end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(M, N) \xleftarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N) \\ &\varphi^*(f) = f\varphi \leftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Así que $\mathrm{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

  $$\mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \mathrm{Hom}(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, N)$$

  Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

  $$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[d, dashed, "\exists! f\oplus g"] & M_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

  Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(B,N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(A,N)$$

En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

Solución. Basta ver que la flecha $0 \to A$ no necesiamente va a dar a una flecha de la forma $\mathrm{Hom}(A,N) \to 0$. □

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto *izquierdo*).

Observación. Denotaremos $\mathrm{Hom}_R(M,N) := M^*$, y, por si acaso $\mathrm{Hom}(N,M) := M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R-módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un R-**módulo libre** es uno de la forma $\bigoplus_{i\in I} R_i$ donde $R_i = R$. Los elementos canónicos son $e_j := (\delta_{ij})_{i\in I}$, y $\beta := \{ej\}_{j\in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R-módulo M y para toda función $f : \beta \to M$ existe un único $\bar{f} : L = \bigoplus_{i\in I} R_i \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \\ L \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.

Demostración.

$$\begin{tikzcd} L = \bigoplus_{i\in M} R_i \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M \\ M \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Como $\bar{f}$ es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos. □

Definición. Sea M un R-módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j.

Teorema. Todo R-módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \ker f_0 \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema. Sea $\alpha : M \to M'$ un homomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2"] & F_1' \arrow[r, "f_1"] & F_0' \arrow[r, "f_0"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i : F_i \to F_i'$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
& \beta_0 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0. Lo mandamos mediante f_0 a M, luego con α. Pero como f_0' es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F_0'$ que le pega.

Ahora

$$\begin{tikzcd}
& & & \operatorname{img} f_1 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] \arrow[dr] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{img} f_1' \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Hay una flecha desde $\operatorname{img} f_1$ hasta $\operatorname{img} f_1'$ que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado). $\square$

Definición. Sea M un R-módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\operatorname{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{f_1} F_1^* \longrightarrow F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$$

Definimos

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) := H_n(0 \to F^*)$$

Teorema. $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_2' & \xrightarrow{f_2} & F_1' & \xrightarrow{f_1} & F_0' & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\beta_2} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_0} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\
\cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i \alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & F_1^* & \longleftarrow & F_0^* & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_1^*}\uparrow & & {\scriptstyle\alpha_0^*}\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\beta_1^*}\uparrow & & {\scriptstyle\beta_0^*}\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1'^* & \longleftarrow & F_0'^* & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^* \alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$\begin{array}{c}
H_1(F^*) \\
{\scriptstyle\alpha_1^\#}\uparrow \\
H_1(F'^*) \\
{\scriptstyle\beta_1^\#}\uparrow \\
H_1(F^*)
\end{array}$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^{\#}$ y $\beta_1^{\#}$ son inversas una de la otra. □

Proposición. $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) \approx \operatorname{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \operatorname{img} f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \operatorname{img} f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \operatorname{img} f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\operatorname{Ext}_R^0(M,N) = \ker f_1^* \approx M^* = \operatorname{Hom}(M,N)$ □

Lema (De la herradura)**.** *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones.* Tomemos una sucesión exacta corta y dos resulciones libres de los extremos. Entonces existe lo rojo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[u] \arrow[r] & F_0 \arrow[u] \arrow[r] & F_0'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[u] \arrow[r] & F_1 \arrow[u] \arrow[r] & F_1'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \dots \arrow[u] & \dots \arrow[u] & \dots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[u] \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[u] \arrow[r] & F_0' \oplus F_0'' \arrow[u] \arrow[r] & F_0'' \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y hay que hacer todo lo de rutina. □

Ahora apliquemos $\mathrm{Hom}(-,N)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & P_0'^{*} & \longleftarrow & P_0^{*} & \longleftarrow & P_0''^{*} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & P_1'^{*} & \longleftarrow & P_1^{*} & \longleftarrow & P_1''^{*} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P_\bullet'^{*} \longleftarrow P_\bullet^{*} \longleftarrow P_\bullet''^{*} \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M'',N) \longrightarrow \cdots$$

Y ahora supongamos que tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Que inducen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & P_\bullet'^{*} & \longleftarrow & P_\bullet^{*} & \longleftarrow & P_\bullet''^{*} & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & Q_\bullet'^{*} & \longleftarrow & Q_\bullet^{*} & \longleftarrow & Q_\bullet''^{*} & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Y por fin obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(M'',N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(M',N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(M'',N) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(A'',N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(A,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^0(A',N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(M'',N) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será $\mathbb{Z}$.

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}\text{-mod}$ y el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para cualesquiera $\mathbb{Z}$-módulos A, B y $n \geq 2$.

Proposición.

- $\mathrm{Ext}^n_R(-, N)$ es un funtor aditivo para toda n, es decir,

$$\mathrm{Ext}^n_R(M' \oplus M'', N) \approx \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M'', N)$$

  Demostración. Consideremos

$$P'_\bullet \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_\bullet \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

  Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_\bullet \oplus P''_\bullet \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

  Y la homología abre sumas: $(P''_\bullet \oplus P''_\bullet)^* \approx P''_\bullet \oplus P'^*_\bullet$. □

- $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ si A es libre.

  Demostración. Simplemente tomamos $0 \to A \to A \to 0$. □

- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

  Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \xleftarrow{n^*} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \\ 0 & \longleftarrow & B & \xleftarrow[n]{} & B & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

  Así que $B/nB = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, B)$. □

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \approx B/m_1B \oplus \ldots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Y apliquemos el $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ para obtener

$$\cdots \longrightarrow C_n^* \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} C_{n+1}^* \xrightarrow{\partial_{n+2}^*} C_{n+2}^* \longrightarrow \cdots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_\bullet, G) = \ker \partial_n^* / \operatorname{img} \partial_{n-1}^*$$

que llamaremos el n**-ésimo grupo de cohomología de** $C_\bullet$ **con coeficientes en** G.

Consideremos

$$\mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_{n-1}^*} \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial_n^*} \mathrm{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$\begin{tikzcd} C_{n-2} \arrow[r, "f"] & G \\ C_{n-1} \arrow[u, "\partial_{n-1}"] \arrow[ur, "f\partial_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C; G)$ para alguna $g : C_{n-1} \to G$ tal que

$$f\partial_{n-1} : C_{n-1} \to G$$
$$g \mapsto g\partial_n = 0$$

Observación. Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_\bullet; G)$ y $\mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Aún así, podemos construir una función

$$h : H^n(C_\bullet; G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$$
$$[g] \mapsto Z_n/B_n = H_n(C_\bullet) \to G$$

donde $g : C_n \to G$ con $g|_{B_n} = 0$. Así que simplemente enviamos a $[g]$ a la restricción $g|_{Z_n} : Z_n/B_n \to G$. Que está bien definida.

Proposición. h es suprayectiva. Más aún, exste una función $\varphi : \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \to H^n(C_\bullet; G)$ tal que $h\varphi = id$.

Corolario. $H^n(C_\bullet, G) \approx \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \oplus \ker h$.