La conjetura de Poincaré en dimensiones altas

Notas

github.com/danimalabares/cohom

September 20, 2023

Índice

1. Ágebra homológica

1.1 Repaso

Sea R un anillo asociativo con 1. Podemos ahora tomar la categoría de R-módulos, R-mod , cuyos objetos son R-módulos y los morfismos son homomorfismos R-lineales. También podemos construir $\mathrm{R\text{-}ch\text{-}comp}$, cuyos objetos son complejos de cadenas,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

tales que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, es decir, $\operatorname{img} \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$. y sus morfismos son morfismos complejos de cadenas, $C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet$, que son muchos morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta en todos los cuadraditos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_n"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Y definimos

$$H_n(C_\bullet) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{img} \partial_{n+1}}$$

Definición.

- Decimos que $C_\bullet$ es **acíclico** si $H_n(C_\bullet) = 0$ para toda n.
- La sucesión $C_1 \xrightarrow{\varphi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3$ es **exacta** si $\operatorname{img} \varphi = \ker \psi$.
- La sucesión $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow 0$ es una **sucesión exacta corta**.
- Y si se extiende infinitamente, es una **sucesión exacta larga**.

Proposición. En una sucesión exacta corta, φ es inyectiva, ψ es suprayectiva y $C_3 \approx C_2/\ker\psi$. Abusando de notación, podemos pensar que $C_3 \approx C_2/C_1$, pero hay que tener cuidado aquí porque el encaje de C_1 en C_2 puede no ser único.

Tomemos n fijo. Entonces

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ab} \\ \text{R-ch-comp} \arrow[ur] \arrow[r, "H_n"] & \text{R-mod} \arrow[u] \\ C_\bullet \arrow[r, mapsto] & H_n(C_\bullet) \end{tikzcd}$$

Y como los morfismos de cadenas mandan ciclos en ciclos y fronteras en fronteras, podemos definir los morfismos inducidos, que satisfacen que $(fg)_* = f_* g_*$ y $id_{C_{\bullet *}} = id_{H_n(C_\bullet)}$. Como la composición de morfismos se abre en el mismo orden en el que estaba, se llama **funtor covariante**.

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "f_n-g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"'] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Esto es tanto como decir que $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n. Es decir, funciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre complejos de cadenas.

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \to H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar\phi_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar\psi_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar\phi_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo $c \in C_p(A)$. Como j_p es suprayectiva, existe un $a \in B_p$ tal que $j_p(a) = c$. Luego, $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$, ya que, como el diagrama conmuta, $\partial_p j_p = j_{p-1}\partial_p$ y c es un ciclo. Como la sucesión es exacta, $\ker j_{p-1} = \operatorname{img} i_{p-1}$, así que existe $a \in A_{p-1}$ tal que $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$. Este a es un ciclo, ya que el diagrama conmuta, $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$, y la i_{p-2} es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos $\delta_{*p}[c] = [a]$.

Y una vez definido este homomorfismo, el resto de la prueba sale sin trucos. □

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.** Para dos sucesiones exactas cortas y morfismos f, g y h,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\bar{h}"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_{p-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(A') \arrow[r] & H_p(B') \arrow[r] & H_p(C') \arrow[r] & H_{p-1}(A') \arrow[r] & H_{p-1}(B') \arrow[r] & H_{p-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración. Salvo en los cuadrados donde está $\bar{h}$ a la izquierda y $\bar{f}$ a la derecha, la conmutatividad se sigue por funtorialidad. □

Lema (de los cinco)**.** Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "h_5"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_1 \arrow[d, "h_1"] \\
N_5 \arrow[r, "g_5"'] & N_4 \arrow[r, "g_4"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_1
\end{tikzcd}$$

Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

1.2 Más álgebra homológica

Tomemos N, M R-módulos, y el conjunto de homomorfismos R-lineales de M en N, que es un grupo abeliano (cuya identidad es el morifsmo que manda todo a 0, y $f + g(m) = f(m) + g(m)$ que también es un morfismo, $(-f)(m) = -f(m)$). También tiene estructura de R-módulo con la operación $(rf)(m) = rf(m) = f(rm)$.

Ahora construyamos un funtor:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(-, N) : \text{R-mod} &\to \mathrm{Ab} \\
M &\mapsto \mathrm{Hom}(M, N) \\
M \xrightarrow{\varphi} M' &\mapsto \qquad ?
\end{aligned}$$

La flecha inducida será

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(M, N) \xleftarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N) \\
&\varphi^*(f) = f\varphi \leftarrow\!\shortmid f
\end{aligned}$$

De acuerdo a

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f\varphi"] & \\
M' \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Así que $\mathrm{Hom}(-, N)$ es un funtor **contravariante**. De hecho, es un **funtor aditivo exacto izquierdo**:

- **Aditivo**. Manda sumas directas en sumas directas, es decir,

  $$\mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N) \approx \mathrm{Hom}(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}(M_2, N)$$

  Que tiene que ver con la propiedad universal de la suma directa:

  $$\begin{tikzcd}
  M_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[d, dashed, "\exists! f\oplus g"] & M_2 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\
  & N &
  \end{tikzcd}$$

  Donde $(f \oplus g)(m_1, m_2) = f(m_1) + g(m_2)$. Así que si tenemos (f, g) en el módulo de la derecha, lo mandamos a $f \oplus g$.

- **Exacto** Supongamos que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

a la que le aplicamos el funtor para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(B,N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(A,N)$$

En general, φ^* no es suprayectiva.

Ejercicio.

- Checar lo anterior.

  Solución. Basta ver que la flecha $0 \to A$ no necesiamente va a dar a una flecha de la forma $\mathrm{Hom}(A,N) \to 0$. □

- ¿Qué pasa con el cokernel?

Observación. También podemos definir el funtor análogo dejando libre la entrada de la derecha, y obtenemos un funtor covariante (que no usaremos tanto y también es aditivo exacto *izquierdo*).

Observación. Denotaremos $\mathrm{Hom}_R(M,N) := M^*$, y, por si acaso $\mathrm{Hom}(N,M) := M_*$.

1.3 Funtores derivados

Es un juego, y usaremos R-módulos libres, que tienen la ventaja de tener una base. Un R**-módulo libre** es uno de la forma $\bigoplus_{i\in I} R_i$ donde $R_i = R$. Los elementos canónicos son $e_j := (\delta_{ij})_{i\in I}$, y $\beta := \{ej\}_{j\in J}$ es una **base** en cuanto a que cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier R-módulo M y para toda función $f : \beta \to M$ existe un único $\bar{f} : L = \bigoplus_{i\in I} R_i \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \\ L \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, diremos que P es **proyectivo** si existe Q tal que $P \oplus Q$ es libre.

Ejemplo. $\mathbb{Z}/6 \approx \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposición. Todo R-módulo es cociente de un R-módulo libre.

Demostración.

$$\begin{tikzcd} L = \bigoplus_{i\in M} R_i \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & M \\ M \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Como $\bar{f}$ es suprayectiva, por primer teorema de isomorfismo, terminamos. □

Definición. Sea M un R-módulo. Una **resolución libre (proyectiva)** de M es una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

tal que F_j es libre para toda j.

Teorema. Todo R-módulo tiene una resolución libre (proyectiva).

Demostración. f_0 sale por la proposición anterior. Tomamos el módulo $\ker f_0$, lo incluimos en F_0 escogemos F_1 que cubre $\ker f_0$ por la proposición anterior.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0 \\
& & \ker f_0 \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

□

Teorema. Sea $\alpha : M \to M'$ un homomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2"] & F_1' \arrow[r, "f_1"] & F_0' \arrow[r, "f_0"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

entonces existen los α_i que hacen conmutar el diagrama.

Más aún, si existen $\beta_i : F_i \to F_i'$ que cumplen lo mismo entonces los homomorfismos determinados por los α_i y β_i son homotópicos.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
& \beta_0 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tomamos un elemento $e \in \beta_0$ en la base de F_0. Lo mandamos mediante f_0 a M, luego con α. Pero como f_0' es supra, podemos escoger un elemento $e' \in F_0'$ que le pega.

Ahora

$$\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{img} f_1 \arrow[d, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, dashed, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2'"] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] \arrow[dr] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & \operatorname{img} f_1' \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Hay una flecha desde $\operatorname{img} f_1$ hasta $\operatorname{img} f_1'$ que cierra el diagrama.

Faltó lo de homotopía (usando las diagonales como el diagrama coloreado). □

Definición. Sea M un R-módulo. Tomamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

Quitamos M:

$$\cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow 0$$

Aplicamos $\operatorname{Hom}_R(-, N)$:

$$0 \longrightarrow F_0^* \xrightarrow{f_1} F_1^* \longrightarrow F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$$

Definimos

$$\operatorname{Ext}_R^n(M, N) := H_n(0 \to F^*)$$

Teorema. $\operatorname{Ext}_R^n(M, N)$ no depende de la resolución.

Demostración. Usamos el teorema anterior (dos veces), tomando dos resoluciones de M usando la identidad como α:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2' \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & F_1' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & F_0' \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y aquí resulta que $\{\beta_i\alpha_i\} \simeq \{Id\}$. Y dualizamos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longleftarrow & F_1^* & \longleftarrow & F_0^* & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \alpha_1^*}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \alpha_0^*}\Big\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1^{'*} & \longleftarrow & F_0^{'*} & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \beta_1^*}\Big\uparrow & & {\scriptstyle \beta_0^*}\Big\uparrow & & & & \\
\cdots & \longleftarrow & F_1^{'*} & \longleftarrow & F_0^{'*} & \longleftarrow & M^* & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

Y como el funtor es aditivo, la homotopía pasa al dual, es decir, $\{\beta_i^*\alpha_i^*\} \simeq \{Id\}$. Luego pasamos a los grupos de homología:

$$\begin{array}{c}
H_1(F^*) \\
{\scriptstyle \alpha_1^{\#}}\Big\uparrow \\
H_1(F'^*) \\
{\scriptstyle \beta_1^{\#}}\Big\uparrow \\
H_1(F^*)
\end{array}$$

Cambiando los roles, obtenemos que estas dos funciones $\alpha_1^{\#}$ y $\beta_1^{\#}$ son inversas una de la otra. $\square$

Proposición. $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) \approx \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Demostración. Tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathrm{img}\, f_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} \mathrm{img}\, f_1^*$$

Luego $\ker f_1^* \approx \mathrm{img}\, f_0^* \approx M^*$. Luego, por definición $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) = \ker f_1^* \approx M^* = \mathrm{Hom}(M,N)$ $\square$

Lema (De la herradura). *Sucesiones exactas cortas de módulos inducen sucesiones exactas cortas de resoluciones.* Tomemos una sucesión exacta corta y dos resulciones libres de los extremos. Entonces existe lo rojo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[r] \arrow[u] & F_0 \arrow[r] \arrow[u] & F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r] \arrow[u] & F_1 \arrow[r] \arrow[u] & F_1'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Pa' pronto, la resolución de en medio es la suma de las resoluciones:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 & \\
1 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0' \arrow[r] \arrow[u] & F_0' \oplus F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & F_0'' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Y hay que hacer todo lo de rutina. □

Ahora apliquemos $\mathrm{Hom}(-, N)$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 & P_0'^{*} \arrow[l] \arrow[d] & P_0^{*} \arrow[l] \arrow[d] & P_0''^{*} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & P_1'^{*} \arrow[l] \arrow[d] & P_1^{*} \arrow[l] \arrow[d] & P_1''^{*} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

O sea que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longleftarrow P_\bullet'^{*} \longleftarrow P_\bullet^{*} \longleftarrow P_\bullet''^{*} \longleftarrow 0$$

A la que aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^0(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

Y notemos que los primeros tres módulos son:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

Y ahora supongamos que tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Que inducen

$$\begin{tikzcd} 0 & P'^{*}_{\bullet} \arrow[l] & P^*_{\bullet} \arrow[l] & P''^{*}_{\bullet} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ 0 & Q'^{*}_{\bullet} \arrow[l] \arrow[u] & Q^*_{\bullet} \arrow[l] \arrow[u] & Q''^{*}_{\bullet} \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Y por fin obtenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M'', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(M', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0_R(A'', N) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^0_R(A, N) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}^0_R(A', N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \end{tikzcd}$$

donde todo conmuta. Y ese es más o menos el juego de los funtores derivados.

Es momento de hacer un decreto:

A partir de ahora el anillo será $\mathbb{Z}$.

Tomemos entonces $A, B \in \mathbb{Z}\text{-mod}$ y el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, B)$. ¿Cómo será una resolución libre proyectiva para A?

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker f_0 = P_1 \longrightarrow \bigoplus_{I_0} \mathbb{Z} = P_0 \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0$$

Que inducen

$$0 \longleftarrow 0 \longleftarrow P_1^* \longleftarrow P_0^* \longleftarrow 0$$

Es decir,

$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para cualesquiera $\mathbb{Z}$-módulos A, B y $n \geq 2$.

Proposición.

- $\mathrm{Ext}^n_R(-, N)$ es un funtor aditivo para toda n, es decir,

$$\mathrm{Ext}^n_R(M' \oplus M'', N) \approx \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M'', N)$$

Demostración. Consideremos

$$P'_\bullet \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$P''_\bullet \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

Y no es difícil ver que también tenemos

$$P'_\bullet \oplus P''_\bullet \longrightarrow M' \oplus M'' \longrightarrow 0$$

Y la homología abre sumas: $(P''_\bullet \oplus P''_\bullet)^* \approx P''_\bullet \oplus P'^*_\bullet$. □

- $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ si A es libre.

  Demostración. Simplemente tomamos $0 \to A \to A \to 0$. □

- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \approx B/nB$.

  Demostración.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \xleftarrow{n^*} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) & \longleftarrow 0 \\ & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & \\ 0 \longleftarrow & B & \xleftarrow[n]{} & B & \longleftarrow 0 \end{array}$$

  Así que $B/nB = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, B)$. □

¿Qué obtenemos de esta proposición? Si A es finitamente generado, $A \approx \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/m_t$, entonces $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B) \approx B/m_1B \oplus \ldots \oplus B/m_tB$.

1.4 Grupos de cohomología

Tomemos un grupo abeliano G y un complejo de cadenas de grupos abelianos libres

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Y apliquemos el $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, G)$ para obtener

$$\cdots \longrightarrow C^*_n \xrightarrow{\partial^*_{n+1}} C^*_{n+1} \xrightarrow{\partial^*_{n+2}} C^*_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

que tiene su homología,

$$H^n(C_\bullet, G) = \ker \partial^*_n / \operatorname{img} \partial^*_{n-1}$$

que llamaremos el **n-ésimo grupo de cohomología de $C_\bullet$ con coeficientes en G**.

Consideremos

$$\mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial^*_{n-1}} \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \xrightarrow{\partial^*_n} \mathrm{Hom}(C_n, G)$$

Y también

$$\begin{tikzcd} C_{n-2} \arrow[r, "f"] & G \\ C_{n-1} \arrow[u, "\partial_{n-1}"] \arrow[ur, "f\partial_{n-1}"'] & \end{tikzcd}$$

De manera que los elementos en la homología funciones que se anulan en las fronteras, ya que $[g] \in H^{n-1}(C;G)$ para alguna $g : C_{n-1} \to G$ tal que

$$\begin{aligned} f\partial_{n-1} : C_{n-1} &\to G \\ g &\mapsto g\partial_n = 0 \end{aligned}$$

1.5 Teorema de coeficientes universales

Los funtores homología y dualizar no conmutan, es decir $H^n(C_\bullet;G)$ y $\mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet),G)$ no son iguales.

Ejemplo. Analizar el caso de

$$C_\bullet \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

comparando $H^n(C_\bullet;\mathbb{Z})$ con $\mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet);\mathbb{Z})$. Para calcular la cohomología lo primero que hago es dualizar:

$$C_\bullet^* \qquad 0 \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

De manera que $H^0(C_\bullet;\mathbb{Z}) = 0$ y $H^1(C_\bullet;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pero $\mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet),\mathbb{Z}) = 0$ para toda n.

Aún así, podemos construir una función

$$\begin{aligned} h : H^n(C_\bullet;G) &\to \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet),G) \\ [g] &\mapsto Z_n/B_n = H_n(C_\bullet) \to G \end{aligned}$$

donde $g : C_n \to G$ con $g|_{B_n} = 0$. Así que simplemente enviamos a $[g]$ a la restricción $g|_{Z_n} : Z_n/B_n \to G$.

Proposición. h es suprayectiva. Más aún, exste una función

$$\varphi : \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet),G) \to H^n(C_\bullet;G)$$

tal que $h\varphi = id$.

Demostración. Sea $\bar{g} : H_n(C_\bullet) \to G$. Como $H_n(C_\bullet) = Z_n/B_n$, lo que queremos hacer es extender $\bar{g}$ a una función en todo $C_\bullet$. Observemos que tenemos esta sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Como $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ y C_n es libre porque **estamos suponiendo que $C_\bullet$ es un complejo de cadenas de grupos abelianos libres**. Luego, esta sucesión exacta corta se escinde así que $C_n = Z_n \oplus B_n$, y la proyección a Z_n es un mapeo $C_n \to Z_n$. En fin,

$$\begin{tikzcd} Z_n \arrow[r] & H_n(C) \arrow[r, "\bar{g}"] & G \\ C_n \arrow[u] \arrow[urr, dashed, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Y de hecho$g$ sí representa un elemento en la cohomología, ya que $g|_{B_n} = 0$ porque la flecha de $Z_n \to H_n(C) = Z_n/B_n$ es el paso al cociente, así que se pierden los elementos de B_n. Además, φ es un homomorfismo. Ya además $\varphi h = id$ por la forma en la que fue contruida: no hemos hecho más que extender y luego restringir una función. □

Corolario. $H^n(C_\bullet, G) \approx \mathrm{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \oplus \ker h$.

Proposición. $\ker h \approx \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}, G)$.

Demostración. Esta prueba tiene un truco. Comenzamos por definir el complejo de cadenas de los ciclos,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & & & & \\ Z_\bullet \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & Z_n \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & Z_{n-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & \cdots \\ C_\bullet \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, hook] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial n-1"] \arrow[d, hook] & \cdots \\ B_{\bullet-1} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & B_n \arrow[r, "0"] & B_{n-1} \arrow[r, "0"] & \cdots \\ 0 & & & & \end{tikzcd}$$

Los homomorfismos frontera son 0 cuando vemos este complejo de cadenas como subcomplejo de cadenas de $\mathbb{C}_\bullet$. Y algo parecido para $B_{\bullet-1}$. Ahora, la sucesión exacta corta de complejos de cadenas se escinde y al dualizar obtenemos

$$0 \longrightarrow B^*_{\bullet-1} \longrightarrow C^*_\bullet \longrightarrow Z^*_\bullet \longrightarrow 0$$

Ahora sí, aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica para obtener

$$\cdots \longrightarrow B^*_{n-1} \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \longrightarrow Z^*_n \longrightarrow B^*_n \longrightarrow H^{n+1}(C_\bullet, G) \longrightarrow \cdots$$

Afirmación. $Z^*_n \xrightarrow{i^*_n} B^*_n$ dado por $g \mapsto g|_{B_n}$ es el dual de $B_n \hookrightarrow Z_n$.

Observación. El dual de una inclusión es una restricción.

En la prueba simplemente mostramos que el mapeo $g \mapsto \bar{g}\partial_{n+1} : B_n \to G$ es una restricción.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & 0 & 0 & \\
Z_\bullet \arrow[d, hook] & & \cdots \arrow[r] & Z_n^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & Z_{n-1}^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & \cdots \\
C_\bullet \arrow[d] & & \cdots \arrow[r] & C_n^* \arrow[u] \arrow[r, "\partial_n^*"] & C_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "\partial_{n-1}^*"] & \cdots \\
B_{\bullet-1} \arrow[d] & & \cdots \arrow[r] & B_n^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & B_{n-1}^* \arrow[u] \arrow[r, "0"] & \cdots \\
0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Perseguimos ese diagrama para construir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& Z_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & G \\
B_n \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & C_n \arrow[ur, "\bar{g}"] & \\
& C_{n+1} \arrow[u] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Parece que la $\bar{g}$ cambió de ser una restricción a una extensión...

Luego

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} i_{n-1}^* \longrightarrow H^n(C_\bullet; G) \xrightarrow{h} \ker i_n^* \longrightarrow 0$$

Afirmación. $\ker i_n^* = \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$

Afirmación. $\ker h = \operatorname{coker} i_{n-1}^*$.

Entonces,

$$Z_{n-1}^* \xrightarrow{i_{n-1}^*} B_{n-1}^* \longrightarrow \operatorname{coker} i_{n-1}^* \longrightarrow 0$$

Y ahora nada más tomamos

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 & \\
0 \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r, hook] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[ur] & H_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Y de aquí que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr] & & & 0 & \\ & Z^*_{n-1} \arrow[r, "i^*_{n-1}"] & B^*_{n-1} \arrow[r] \arrow[ur] & \operatorname{coker} i^*_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Y esa de cuatro no es exacta pero sí concluimos que $\operatorname{coker} i^*_{n-1} = \operatorname{Ext}^1(H_n(C_\bullet), G)$. $\square$

Teorema (de coeficientes universales)**.** Sean G un grupo abeliano y $C_\bullet$ un $\mathbb{Z}$-complejo de cadenas de grupos abelianos libres, entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \longrightarrow H^n(C_\bullet, G) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \longrightarrow 0$$

que se escinde.

Además, esta sucesión es **natural** en $C_\bullet$, es decir, si $\alpha : C_\bullet \to C'_\bullet$, entonces el siguiente diagrma conmuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C_\bullet), G) \arrow[r] & H^n(C_\bullet, G) \arrow[r, "h"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C), G) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(H_{n-1}(C'_\bullet), G) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & H^n(C'_\bullet, G) \arrow[r, "h'"] \arrow[u, "\alpha^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C'), G) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_*"] & 0 \end{tikzcd}$$

donde estamos abusando de notación con las flechas inducidas por α, que son distintas, pero se obtienen usando que H_n y Ext son funtores.

Observación. El nombre *coeficientes universales* tiene que ver con que la homología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ determina la cohomología con cualesquiera coeficientes.

Demostración. Ahora demostremos la naturalidad. Comenzamos con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C_\bullet \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] & B_{\bullet,-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & B'_{\bullet-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego dualizamos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z^*_\bullet \arrow[r] & C^*_\bullet \arrow[r] & B^*_{\bullet-1} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'^*_\bullet \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & C'^*_\bullet \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & B'^*_{\bullet,-1} \arrow[r] \arrow[u, "\alpha^*"] & 0 \end{tikzcd}$$

Y por último

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i^*_{n-1} & \longrightarrow & H^n(C_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i^*_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \alpha^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle \alpha^*}\big\uparrow & & {\scriptstyle \alpha^*}\big\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{coker} i'^*_{n-1} & \longrightarrow & H^n(C'_\bullet, G) & \longrightarrow & \ker i'^*_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

□

Corolario. Supongamos que $H_n(C_\bullet)$ y $H_{n-1}(C_\bullet)$ son finitamente generados. Podemos expresarlos así:

$$H_n(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n \qquad\qquad H_{n-1}(C_\bullet) = \mathbb{Z}^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}$$

Con T_n y T_{n-1} finitos. Entonces,

$$H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
H^n(C_\bullet, \mathbb{Z}) &\approx \operatorname{Hom}(H_n(C_\bullet, \mathbb{Z})) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_\bullet), \mathbb{Z}) \\
&\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^r \oplus T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(Z^{r_{n-1}} \oplus T_{n-1}, \mathbb{Z}) \\
&\approx \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^{r_n}, \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Hom}(T_n, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}^{r_{n-1}}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(T_{n-1}, \mathbb{Z})) \\
&\approx \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_{n-1}
\end{aligned}$$

□

Corolario. Si $\alpha : C_\bullet \to C'_\bullet$ induce isomorfismos en homología, entonces induce isomorfismos en cohomología.

Demostración. En la prueba de la naturalidad del teorema de coeficientes universales, los α_* de los extremos son isomorfismos. Por el lema de los cinco, α_* también lo es. □

2. Cohomología

2.1 Cohomología de espacios

Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Podemos definir el complejo de cadenas singulares de X,

$$C_\bullet(X) \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

donde

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i\sigma_i | m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\} \approx \bigoplus_{n \text{ sim. sing.}} \mathbb{Z}$$

Y definimos

$$\begin{aligned} H_n(X;\mathbb{Z}) &= H_n(C_\bullet(X)) \\ C^\bullet(X;G) &= \mathrm{Hom}(C_\bullet(X), G) \\ H^n(X;G) &= H_n(C^\bullet(X,G)) \end{aligned}$$

de donde

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\partial^*_{n+1}} \mathrm{Hom}(C_n, G) \xleftarrow{\partial^*_n} \mathrm{Hom}(C_{n-1}, G) \longleftarrow \cdots$$

Y las fronteras están definidas mediante

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\varphi"] & G \\ C_{n+1} \arrow[u, "\partial_{n+1}"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Y definimos los cociclos y las cofronteras.

Y el **teorema de coeficientes universales en cohomología** nos dice que:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$

También podemos definir los **grupos de cohomología reducidos** comenzando con el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial n-1} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dualizando, y calculando homología. Como con la homología reducida, $\tilde{H}^n(X;G) = H^n(X;G)$, y $H^0(X) \approx \mathrm{Hom}(H_0(X), G) \approx \bigoplus_{\pi_0(X)} G$. Para verlo, usamos el teorema de coeficientes universales. Y si X es arco-conexo, por la propiedad universal del abelianizado y usando el homomorfismo de Hurewics, $H^n(X) \approx \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)$.

También hay un **teorema de coeficientes universales para la cohomología reducida**.

Ahora tratemos de definir la cohomología de la pareja. Todo comienza usando

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(A, X) \longrightarrow 0$$

Que se escinde ya que la base de $C_\bullet(A)$ es una sub-base de $C_\bullet(X)$. Aplicamos $\mathrm{Hom}(-, G)$ para obtener

$$0 \longrightarrow C^*_\bullet(X, A) \longrightarrow C^*_\bullet(X) \longrightarrow C^*_\bullet(A) \longrightarrow 0$$

Y aquí calculamos los grupos de homología

$$H^n(X, A) := H_n(C^*_\bullet(X, A))$$

Aplicamos el teorema fundamental del álgebra para obtener

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, A) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Y también tenemos **naturalidad**, es decir, si tenemos $f : (X, A) \to (Y, B)$ es decir, una función continua con $f(A) \subset B$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_\bullet(A) & \longrightarrow & C_\bullet(X) & \longrightarrow & C_\bullet(A, X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow f_\# & & \big\downarrow f_\# & & \big\downarrow f_\# & & \\
0 & \longrightarrow & C_\bullet(B) & \longrightarrow & C_\bullet(Y) & \longrightarrow & C_\bullet(Y, B) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Luego dualizamos,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^*_\bullet(A) & \longrightarrow & C^*_\bullet(X) & \longrightarrow & C^*_\bullet(A, X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & f^*_\# \big\uparrow & & f^*_\# \big\uparrow & & f^*_\# \big\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^*_\bullet(B) & \longrightarrow & C^*_\bullet(Y) & \longrightarrow & C^*_\bullet(Y, B) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Y también aquí todo conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^n(X,A) & \longrightarrow & H^n(X) & \longrightarrow & H^n(A) & \longrightarrow & H^{n+1}(X,A) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^n(Y,B) & \longrightarrow & H^n(Y) & \longrightarrow & H^n(B) & \longrightarrow & H^{n+1}(Y,B) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Aprovechamos para decir que una función de parejas como ésta tiene una **función inducida**

$$f^* : H^n(Y,B) \to H^n(X,A)$$

y de hecho $(fg)^* = g^* f^*$, $id^*_{(X,A)} = id_{H^n(X,A)}$. O sea que de verdad tenemos un funtor.

También tenemos **invarianza homotópica**, es decir, si $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ son homotópicas, entonces $f^* = g^*$. Recordemos un poco la demostración: si dos funciones de parejas son homotópicas, entonces las funciones inducidas en los complejos de cadenas son homotópicas con la definición algebraica, así que inducen iguales en la homología. Dualizando ese diagrama con flechas diagonales de colores, obtenemos que las funciones en cocadenas son homotópicas, así que serán iguales en cohomología.

También tenemos un **teorema de coeficientes universales para parejas**, que se enuncia así:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_n(X,A),G) \longrightarrow H^n(X,A;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X,A),G) \longrightarrow 0$$

que se puede aplicar simplemente porque el complejo de cadenas $C_\bullet(X,A)$ es de grupos abelianos libres.

Y además el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X,A),G) & \longrightarrow & H^n(X,A;G) & \xrightarrow{h} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X,A),G) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_*}\uparrow & & {\scriptstyle\alpha^*}\uparrow & & {\scriptstyle\alpha_*}\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(Y,B),G) & \longrightarrow & H^n(Y,B;G) & \xrightarrow{h'} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(Y,B),G) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Y también hay **escisión**: si $Z \subseteq A \subseteq X$ tal que $\bar{Z} \subseteq A$, $i : (X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X,A)$, entonces $i^* : H^n(X - Z, A - Z) \xrightarrow{\approx} H^n(X,A)$, cuya demostración se puede dar con escisión homológica y coeficientes universales vía lema de los cinco.

Ahora tomemos la cuña de espacios tales que el punto de pegado tiene una vecindad contraible, entonces:

$$\tilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \approx \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha) \qquad \tilde{H}^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \approx \prod_\alpha \tilde{H}^n(X_\alpha)$$

$$H_n\left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha\right) \approx \bigoplus H_n(X_\alpha) \qquad H^n\left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha\right) \approx \prod_\alpha H^n(X_\alpha)$$

Para complejos CW,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \approx H_n(X^n/X^{n-1}) \approx H_n\left(\bigvee_{n\text{-células}} S^n\right) \approx \bigoplus_{n\text{-células}} \mathbb{Z}$$

Recordemos que la homología celular se construye de acuerdo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[dr, "j_{n-1}"] & & & \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[ur, "\partial_n"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[rr, "d_{n-1}"] \arrow[dr, "\partial_{n-1}"'] & & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & & & H_{n-2}(X^{n-2}) \arrow[ur, "j_{n-2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que los mapeos j_{n-1} y ∂_{n-1} son parte de la sucesión exacta larga de la pareja, de modo que su composición es cero, así que las d_i son cero porque factorizan ese cero.

Dualicemos esto:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n-1}(X^{n-1}) \arrow[dl, "\partial_n^*"'] & & & \\
H^n(X^n, X^{n-1}) & & H^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ll, "D^n"'] \arrow[ul, "j_{n-1}^*"'] & & H^{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \arrow[ll, "D^{n-1}"'] \arrow[dl, "j_{n-2}^*"] \\
 & & & H^{n-2}(X^{n-2}) \arrow[ul, "\partial_{n-1}^*"] &
\end{tikzcd}$$

Obtenemos funciones D_n en vez de las d_n, y pues nada, tenemos **chomología celular**, y otra vez,

Proposición. Si X es un complejo CW, $H_n(C^\bullet_{CW}(X)) := H^n_{CW}(X) \approx H^\bullet(X)$, y además $C^\bullet_{CW}(X;G)$ es el dual de $C^{CW}_\bullet(X;G)$.

Demostración. Recordemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\text{-células}} \mathbb{Z}, G) &= \prod_{n\text{-células}} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, G) \\
&= \prod_{n\text{-células}} G
\end{aligned}$$

De forma que los grupos de cohomología son

$$H^m(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \prod_{n\text{-células}} G & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Ya que los grupos de homología son libres.

Ahora observemos que $H^k(X^n) \approx H^k(X^{n-1})$ para $k \neq n, n-1$. Fijando k y bajando la n, esto implica que $H^k(X^n) \approx H^k(X^0) \approx 0$. De aquí que podemos poner algunos ceros en el diagrama de arriba:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[dl] & \\
0 & & H^{n-1}(X^n) \arrow[dl] & & \\
 & H^{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ul] \arrow[dl, "\partial_n^*"'] & & & \\
H^n(X^n, X^{n-1}) & & H^{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ll, "D^n"'] \arrow[ul, "j^*_{n-1}"'] & & H^{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \arrow[ll, "D^{n-1}"'] \arrow[dl, "j^*_{n-2}"] \\
 & & & H^{n-2}(X^{n-2}) \arrow[ul, "\partial^*_{n-1}"] \arrow[dl] & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ahora notemos que para $k \leq n+1$, $H^k(X, X^{n+1}) = 0$ ya que

$$H^k(X, X^{n+1}) \approx \operatorname{Hom}(H_k(X, X^{n+1})) \oplus \operatorname{Ext}(H_{k-1}(X, X^{n+1}))$$

Luego, tenemos una sucesión exacta corta:

$$0 \approx H^n(X, X^{n+1}) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{\approx} H^n(X^{n+1}; G) \longrightarrow H^{n+1}(X, X^{n+1}) \approx 0$$

Así que ese $H^{n-1}(X^n)$ que agregamos en el diagrama de arriba es $\approx H^{n-1}(X)$.

Por fin, las flechas en la diagonal arriba-izquierda del diagrama son parte de la sucesión exacta de la pareja, de la cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
H^{n-1}(X) &\approx \ker \partial_{n-1} \\
&\approx \ker D^{n-1} / \operatorname{img} \partial_{n-2} \\
&\approx \ker D^{n-1} / \operatorname{img} D^{n-2} \\
&\approx \operatorname{Hom}^{n-1}(X)
\end{aligned}$$

Con lo que demostramos la primera parte. (Hay que recorrer la n en todos lados para que sea más claro, pero así está bien).

Para lo segundo, tomemos el siguiente diagrama, que resulta de dualizar otro

$$\begin{tikzcd}
H^n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "h"] & H^n(X^n) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h"] & H^{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[d, "h"] \\
\operatorname{Hom}(H_n(X^n, X^{n1})) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(H_n(X^n)) \arrow[r] & \operatorname{Hom}(H_{n+1}(X^{n+1}, X^n))
\end{tikzcd}$$

En primer lugar, por los Ext, las h de los extremos son isomorfismos. Además, por las sucesiones exactas largas de las parejas, los cuadrados conmutan, de forma que las composiciones de las flechas horizontales son isomorfas, que es justo lo que queríamos demostrar. $\square$

Por último,

Teorema. Mayer-Vietoris en cohomología.

2.2 Producto copa

Esto es que hace distinta la cohomología de la homología. En algún punto de esta sección necesitaremos que los coeficientes estén en un anillo conmutativo con unidad R. Construiremos el anillo

$$\left(\bigoplus_{n\geq 0} H^n(X), +, \smile\right)$$

Definición. Recordemos que $C^n(X) = \mathrm{Hom}(C_n(X), R)$, y tomemos dos cocadenas $\varphi \in C^k(X, R)$ y $\psi \in C^\ell(X, R)$. El **producto copa** es

$$\varphi \smile \psi \in C^{k+\ell}(X; R)$$

que debe ser una función definida en las $k+\ell$ cadenas:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma : \Delta^{k+\ell} \to X) := \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k]) \cdot_R \psi(\sigma|[v_k, \ldots, v_{k+\ell}])$$

Que es como aplicar la ϕ en los primeros k vértices del simplejo y luego aplicar ψ en los últimos ℓ. Cada uno me da un elemento en R y los multiplico.

Ya con esto tenemos

$$\left(\bigoplus_{n\geq 0} C^n(X; R), +, \smile\right)$$

Ya que el producto copa es asociativo y distributivo casi por definición. Además, la cocadena $1 \in C^0(X; R)$ es una unidad.

Observación. Se trata de un **anillo graduado**, que es una estructura de la forma $(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_i, +, \cdot)$ tal que A_i es un grupo abeliano y para cualesquiera $a \in A_i$ y $b \in A_j$, $a \cdot b \in A_{i+j}$.

Para pasar a homología, lo único que debemos verificar es que este producto se restringe bien a ciclos y pasa bien al cociente:

Proposición. $\partial(\varphi \smile \psi) = \partial\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \partial\psi$

Demostración. Simplemente calcular cada componente. Parece que la alternancia viene del operador frontera. $\square$

De lo cual deducimos que

- ciclo$\smile$ciclo=ciclo.
- frontera$\smile$ciclo=frontera, ya que el término $\partial\varphi \smile \psi$ se anula.
- ciclo$\smile$frontera=frontera.

Y deducimos el producto copa en la homología no depende de los representantes para obtener el **anillo de cohomología**

$$\left(\bigoplus_{n\geq 0} H^n(X;R), +, \smile\right)$$

Denotaremos $H^*(X,R) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(X;R)$.

Ahora debemos demostrar que el mapeo que asocia a un espacio X este anillo es funtorial. Esto ya se tiene cuando vemos el anillo de cohomología como un grupo. Basta demostrar que

Proposición. $f^*(\varphi \smile \psi) = f^*\varphi \smile f^*\psi$.

Proposición (Anticonmutatividad)**.** Si $\alpha \in H^k$ y $\beta \in H^\ell$,

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{k+\ell}\beta \smile \alpha$$

Observemos que $\alpha \smile \alpha := \alpha^2 = -\alpha^2 \implies 2\alpha^2 = 0$ no necesariamente implica que $\alpha = 0$, y que $H^*(X,\mathbb{Z}/2)$ sí es conmutativo.

Ejemplo (Anillo de cohomología de $\mathbb{R}P^n$)**.** Calculamos la homología de $\mathbb{R}P^n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

y dualizamos con $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z}/2)$:

$$\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} 0$$

Así que la cohomología es $\mathbb{Z}/2$ si $0 \leq i \leq n$ y 0 en $i > n$. El producto de la clase de grado uno en el primer grupo de cohomología consigo misma me va dando los elementos no cero en cada nivel (esto es lo único que no está demostrado en este ejemplo). Es decir, $\alpha_1^i = \alpha_i$ para cualquier $2 \leq i \leq n$ y $\alpha_1^{n+1} = 0$

Entonces

$$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \approx \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2[X]/\langle X^{n+1}\rangle$$

usando la relación que pusimos arriba.

Proposición.

1. $H^*(\bigsqcup X_i, R) \approx \prod H^*(X_i, R)$.
2. $\widetilde{H^*}(\bigvee X_i, R) = \prod \widetilde{H^*}(X, R)$ ya que, como esperaríamos, existe un anillo de cohomología reducida, aunque no necesariamente tiene unidad.

Demostración. Rutina. □

Ejemplo. Ahora comparemos $S \vee S^2$ y $\mathbb{R}P^2$, cuyos anillos de cohomología son los dos $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Pero el elemento no trivial de grado 1, β_1 elevado al cuadrado es 0 porque estamos en el producto directo de los anillos, así que estamos en el producto del primer anillo, es decir

$$(\beta_1, 0)^2 = (\beta_1^2, 0) = (0, 0)$$

pero, como dijimos antes, el análogo en el proyectivo al cuadrado es el elemento no trivial en grado 2.

2.3 Teorema de Künneth

Recordemos que si X y Y son complejos CW, su producto $X \times Y$ también tiene estructura de complejo CW: su n-esqueleto es $C_n^{CW}(X \times Y) = \mathbb{Z}\{e^i \times e^j : i + j = n\}$.

2.3.1 Producto tensorial

Sea R un anillo conmutativo con 1, y M, N R-módulos. Una función $f : M \times N \to A$ es R-**bilineal** si es lineal en cada entrada. El **producto tensorial** de M y N sobre R es un R-módulo $M \otimes_R N$ con una función bilineal tal que se cumple la siguiente propiedad universal

$$(m, n) \longmapsto m \otimes n$$

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r] \arrow[dr, "\text{bilineal}"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "R\text{-lineal}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
M \otimes_R N = R[m \otimes n | m \in M, n \in N] \Big/ \Big\langle & (m_1 + m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n, \\
& m \otimes (n_1 + n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2, \\
& (rm) \otimes n - r(m \otimes n), \\
& m \otimes (rn) - r(m \otimes n) \Big\rangle
\end{aligned}$$

Proposición (Propiedades del producto tensorial)**.**

- $R \otimes_R M \approx M$.
- $M \otimes_R N \approx N \otimes_R M$ (ésta podría tener detalles si R no es conmutativo).
- $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_R N \approx \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$.
- Si $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ es R-lineal, la función $M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes_R \mathrm{Id}_N} M_2 \otimes_R N$ que manda $m_1 \otimes n \mapsto f(m_1) \otimes n$ es R-lineal.

- Para N fijo,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ab} \\ -\otimes N : \text{R-mod} \arrow[r] \arrow[ur] & \text{R-mod} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

  es covariante exacto derecho, es decir, $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ induce $M'' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow 0$. Y también tenemos $\mathrm{Tor}^i_R(-, N)$.

- Si L_1 y L_2 son R-módulos libres, entonces,

$$L_1 \otimes L_2 = \left(\bigoplus_{\alpha} R\right) \otimes \left(\bigoplus_{\beta} R\right) = \bigoplus_{\alpha\times\beta} R$$

  que nos recuerda justamente a la construcción del producto de dos complejos CW.

- Si $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $B = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} B_j$ son R-módulos graduados, su producto

$$A \otimes_R B = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$$

  también tiene estructura de módulo graduado.

$$\begin{array}{llllll} \vdots & & & & & \\ A_0 \otimes B_n & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ A_0 \otimes B_2 & & & & & \\ A_0 \otimes B_1 & A_1 \otimes B_1 & & & & \\ A_0 \otimes B_0 & A_1 \otimes B_0 & A_2 \otimes B_0 & \cdots & A_n \otimes B_0 & \cdots \end{array}$$

- Si X y Y son complejos CW,

$$C_*^{CW}(X \times Y) \approx C_*^{CW}(X) \otimes_R C_*^{CW}(Y)$$

  como R-módulos graduados, es decir, $C_n^{CW}(X\times Y) \approx \oplus_{i+j=n} C_i^{CW}(X) \otimes C_j^{CW}(Y)$ para toda n.

Y la pregunta natural para complejos CW es ¿qué pasa en la homología? Tendremos la siguiente fórmula que recuerda al teorema de coeficientes universales.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} (H_i(X) \otimes H_j(Y)) \longrightarrow H_k(X \times Y; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k-1} \mathrm{Tor}(H_i(X), H_j(Y)) \longrightarrow 0$$

Aunque no es cierto que $H^*(X) \times H^*(Y)$ es igual que $H^*(X \times Y; R)$, podemos definir una función llamada **producto cruz** de la siguiente forma

$$\begin{aligned} H^*(X) \times H^*(Y) &\to H^*(X \times Y; R) \\ (a, b) &\mapsto p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \end{aligned}$$

Donde $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$. Claramanete es una función bilineal.

Podemos extender al producto tensorial:

$$\begin{tikzcd} H^*(X) \times H^*(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d] & H^*(X \times Y; R) \\ H^*(X) \otimes H^*(Y) \arrow[ur, dashed, "\times"'] & \end{tikzcd}$$

Definamos una estructura de anillo en $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ mediante

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}(ac) \otimes (bd)$$

con lo cual el mapeo de arriba $\times$ es un homomorfismo de anillos.

Proposición (Künneth)**.** El mapeo $\times$ es un isomorfismo de anillos si $H^*(Y, R)$ es un R-módulo libre.

Demostración. Checar en Hatcher. $\square$

Ahora calculamos usando cohomología relativa el isomorfismo

$$H^*(X, A) \otimes H^*(Y, B) \to H^*(X \times Y, (A \times Y) \cup (X \times B))$$

Proposición.

$$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \approx \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2[X]/\langle X^{n+1} \rangle$$

Para lo cual basta ver que el producto de los elementos no triviales en cada grado es el producto no trivial en la suma de los grados.

Demostración. Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^n &= \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\} \Big/ x \sim \lambda y, \lambda \neq 0 \\ &= D^n \Big/ x \sim -x, x \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Denotemos $\mathbb{R}P^n$ por P^n. Queremos ver que el elmento no trivial en $0 \neq \alpha \in H^i(P^n)$ copa el elemento no trivial en $0 \neq \beta \in H^j(P^n)$ es igual al elemento no trivial en $0 \neq \alpha \smile \beta \in H^{i+j}(P^n)$.

Consideremos los encajes naturales

$$\begin{aligned} P^i &\hookrightarrow P^n & \qquad P^j &\hookrightarrow P^n \\ [x_0, \ldots, x_i] &\mapsto [x_0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0] & \qquad [y_0, \ldots, y_j] &\mapsto [0, \ldots, 0, y_0, \ldots, y_k] \end{aligned}$$

Pensando en el modelo del disco, P^i y P^j son intersecciones de hiperplanos en el disco. Luego $P^i \cap P^j = \{p\}$.

Notemos además que $\partial P^n = P^{n-1}$, y que $P^n - P^{n-1}$ es una bola abierta que denotaremos por $\mathbb{R}^n$. Y también, $P^j - P^{n-1} \approx \mathbb{R}^j$ y $P^i - P^{n-1} \approx \mathbb{R}^i$.

$$\begin{array}{ccc}
H^i(P^n) \times H^j(P^n) & \xrightarrow{\qquad\smile\qquad} & H^n(P^n) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^i(P^n, P^n - P^j) \times (P^n, P^n - P^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(P^n, P^n - \{p\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{p\})
\end{array}$$

Incluyendo las parejas usando $(P^n, \varnothing)$. El resultado se sigue de mostrar que las flechas verticales son isomorfismos y que en el renglón de hasta abajo, la copa de generadores va a dar al generador.

Es posible retraer la pareja $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j)$ en $(R^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$ de manera que

$$\begin{array}{ccc}
H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\smile} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\}) \times H^j(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^j - \{0\}) & \xrightarrow{\times} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
\end{array}$$

Observemos que la cohomología de $H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})$ es la misma que la de la esfera ya que podemos proyectar radialmente y la cohomología de $\mathbb{R}^n$ se anula en la sucesión exacta larga de la pareja.

Luego, la cohomología del producto tensorial de $\tilde{H}^*(S^{j-1}) \otimes \tilde{H}^*(S^{i-1})$ es justamente $\mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \approx \mathbb{Z}/2$ ya que son los únicos que factores que sobreviven en todos los grados. Finalmente aplicamos Künneth en el renglón de abajo. $\square$

Observación. Podemos pensar que el producto copa mide cómo se intersectan dos subvariedades.

Observación. Fi existe $f : X \to \mathbb{R}P^n$, entonces la función inducida $f^* : H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \to H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ está determinada por su acción en el polinomio x.