Cohomología de de Rham

github.com/dan-gc/de-rham

Plan de la charla

Nota bibliográfica. La sección 1 es la introducción de Bott and Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Las secciones 2 a 4 son una mezcla de Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* y Tu, *An Introduction to Manifolds*, y un poco de Bott and Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. La sección sección 5 está en Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*.

1 Motivación

Las componentes conexas de un espacio X están caracterizadas por el hecho de que, en cada una, *cualquier función localmente constante es globalmente constante*. Definendo $H^0(X)$ como el espacio vectorial de funciones real-valuadas localmente constantes, $\dim H^0(X)$ es el número de componentes conexas de X.

Ahora observemos que si M es un abierto en $\mathbb{R}^n$, esta propiedad se describe pidiendo que el gradiente

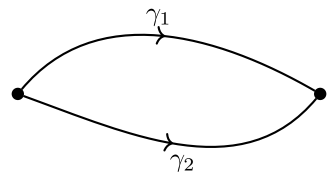
$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

sea cero. Buscamos una ecuación diferencial natural que nos ayude a definir $H^1(X)$.

Ahora para generalizar esta idea tomemos una 1-forma $\theta = \sum_i a_i dx^i$ y la pensamos como un operador sobre las curvas en M vía

$$\gamma \mapsto \int_\gamma \theta$$

Y se nos antoja que θ sea *localmente* constante en el sentido de que al variar ligeramente γ (sin cambiar los puntos inicial y final) la intergral permanece igual. ¿A qué nos referimos con esto?



Si las integrales sobre dos curvas homotópicas γ_1 y γ_2 coinciden,

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta$$

es decir

$$0 = \int_{\gamma_1} \theta - \int_{\gamma_2} \theta = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \theta = \int_{\partial D^2} \theta = \int_{D^2} d\theta,$$

así que si $d\theta = 0$ la 1-forma es *localmente constante* en el espacio de lazos.

Ahora notemos que por el teorema fundamental del cálculo $\int_\gamma df = f(Q) - f(P)$ donde P y Q son los puntos inicial y final de γ. Diremos que los gradientes (0-formas exactas) son ***trivialmente*** localmente constantes.

Definamos entonces $H^1(M)$ como el espacio vectorial de integrales de línea localmente constantes módulo las que son trivialmente constantes.

2 Complejo de de Rham

En esta sección construimos un funtor contravariante $\Omega^*(-)$ de la categoría de variedades suaves en la categoría de álgebras diferenciales graduadas asociativas y anticonmutativas. A cada álgebra corresponde un complejo de cadenas que llamaremos complejo de de Rham.

1. Una variedad topológica M es ***diferenciable*** si tiene un atlas tal que las funciones de transición son difeomorfismos. El atlas debe ser maximal en el sentido de que contiene todas las posibles cartas que son compatibles.

   Si $u^1, \ldots, u^n$ son las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y (U, φ) es una carta coordenada de M, podemos escribir $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ donde $x^i = u^i \circ \varphi$. Una función real-valuada f definida en M es ***suave*** si su ***pullback*** $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞-diferenciable. La colección de tales funciones se denota por $C^\infty(M)$.

2. En cada punto $p \in M$ con carta coordenada $(U, x^1, \ldots, x^n)$ el conjunto de funcionales $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$

   $$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

   definidos mediante $f \mapsto \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial u^i}\Big|_p$ generan un espacio vectorial que llamamos ***espacio tangente*** y denotamos por T_pM. Un ***campo vectorial*** es una sección suave del ***haz tangente*** $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

El conjunto de funcionales $T_pM \to \mathbb{R}$

$$(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p$$

definidos mediante $(dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right) = \delta^i_j$ generan un espacio vectorial que llamamos ***espacio cotangente*** y denotamos por $T^*_pM \approx \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$. Sus elementos se llaman ***1-covectores***.

3. Nuestro siguiente paso es construir el funtor $\bigwedge^k(-)$ que a un espacio vectorial arbitrario asigna la k***-ésima potencia exterior***, el espacio vectorial de k-tensores alternantes. Aplicaremos este funtor al espacio tangente en un punto, luego variamos el punto para obtener un haz vectorial y finalmente tomamos la suma directa sobre k. El resultado es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa a la que después dotaremos de una antiderivación.

   Las funciones $\mathbb{R}$-multilineales $\underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R}$ se llaman k***-tensores***.

   Un k-tensor es un k***-covector*** si es ***alternante*** , es decir, si su valor cambia de signo cuando intercambiamos dos entradas de lugar. La colección de k-covectores en p se denota por $\bigwedge^k(T^*_pM)$.

   Una k***-forma*** o ***campo*** k***-covectorial*** es una sección suave del haz vectorial $\bigwedge^k(T^*M) = \bigcup_{p\in M} \bigwedge^k(T^*_pM)$. La colección de k-formas en M se denota por $\Omega^k(M)$.

4. El ***producto cuña*** definido puntualmente como el $(k+\ell)$-covector

$$(\omega \wedge \tau)_p = \frac{1}{k!\ell!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \tau)_p$$

   que explícitamente quiere decir que

$$(\omega \wedge \tau)_p(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \tau_p(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

   para $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^\ell(M)$, donde $S_{k+\ell}$ es el grupo de permutaciones. Esta operación se extiende suavemente a una $(k+\ell)$-forma.

   Recordemos que el ***producto copa*** entre las cocadenas $\varphi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^\ell(X;R)$ está definido como

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_\ell])$$

   para un simplejo singular $\sigma : \Delta_{k+\ell} \to X$. (El símbolo $[v_0, \ldots, v_k]$ representa el simplejo dado por los vértices $v_0, \ldots, v_k$).

   El producto cuña es bilineal, asociativo y anticonmutativo:

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$$

Una base de $\bigwedge^k(T_p^*U)$ en una vecindad coordenada U está dada por los k-covectores

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad \text{con } i_1 < \ldots < i_k$$

así que es un espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$. En particular, $\bigwedge^n(T_p^*U)$ es de dimensión 1 si M es de dimensión n, es decir, las n-formas se pueden identificar con funciones suaves.

El conjunto $\Omega^*(M) = \bigoplus_k^n \Omega^k(M)$ es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa con el producto cuña como operación.

5. La ***derivada exterior de una función real-valuada*** $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ es la 1-forma definida localmente como

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

o, equivalentemente, es el operador que manda $v \mapsto vf$ para $v \in T_pM$. (Esta definición local se extiende a una 1-forma).

La ***derivada exterior*** es el operador $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ definido localmente como

$$d\omega = d\sum_I a_I x^I = \sum_I da_I \wedge x^I = \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge x^I,$$

El ***operador frontera*** en cohomología singular es simplemente $\mathrm{Hom}(\partial) = \partial^*$ donde ∂ es la frontera de cadenas singulares. Recordando la definición del mapeo inducido por el funtor contravariante Hom, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, "\varphi\circ\partial=\partial^*"] & \\
C_n \arrow[r, "\varphi"'] & G
\end{tikzcd}$$

que no es más que evaluar el cociclo φ en la frontera de una cadena (o en la base, un simplejo), es decir, en la suma alternada de las caras del simplejo:

$$\varphi\partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi(\sigma|[v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}])$$

Esta definición se extiende a una $(k+1)$ forma y satisface las siguientes propiedades (es una ***antiderivación***):

(a) Es $\mathbb{R}$-lineal.

(b) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\tau)$

(c) $d^2 = 0$

(d) Si $f \in C^\infty(U)$ y X es un campo vectorial, entonces $(df)(X) = Xf$.

Una k-forma ω es ***cerrada*** si $d\omega = 0$ y ***exacta*** si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

6. Dada una función suave $F : N \to M$ entre variedades y un k-covector $\omega_{F(p)} \in T^*_{F(p)}M$, el ***pullback*** de $\omega_{F(p)}$ es el k-covector en T^*_pN dado por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \ldots, F_{*,p}v_k)$$

para $v_1, \ldots, v_k \in T_pN$ donde $F_{*,p}$ es la diferencial de F definida por $F_{*,p}vf = v(f \circ F)$. Una vez más, se extiende suavemente.

Proposición (Propiedades del pullback)**.** Si $F : M \to N$ es una función suave entre variedades y ω y τ son formas diferenciales en M,

(a) $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

(b) (Funtorialidad puntual). La k-ésima potencia exterior $\bigwedge^k(-)$ es un funtor contravariante en la categoría de variedades punteadas (en general, en la categoría de espacios vectoriales).

(c) (Funtorialidad global). $\Omega^*(-)$ es un funtor contravariante.

(d) (Pullback de la cuña). $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$.

(e) (Naturalidad de la derivada exterior). $dF^*\omega = F^*d\omega$.

Observación. El espacio tangente es un funtor covariante de la cateogría de variedades punteadas en la categoría de espacios vectoriales. ¡Pero no cualquier función suave manda un campo vectorial en otro!

3 Cohomología de de Rham

Ahora construimos el funtor $H^p_{dR}(-)$. La ***k-ésima cohomología de de Rham*** es el espacio vectorial cociente

$$H^k_{dR} = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}}$$

1. (Funtorialidad). Sea$F : M \to N$ es una función suave. Como el pullback conmuta con la derivada exterior, manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas, así que desciende a homología y tenemos un ***pullback en homología***, también denotado por F^*, tal que

   (a) Si $G : N \to P$ es otra función suave, $(G \circ F)^* = G^* \circ F^*$

   (b) Id^* es la identidad en $H^k_{dR}(M)$.

   es decir, $H^k_{dR}(-)$ es un funtor contravariante de variedades (con frontera) en espacios vectoriales.

2. (Invarianza homotópica). Si M y N son homotópicamente equivalentes, $H^k_{dR}(M) \approx H^k_{dR}(N)$ para toda k. El isomorfismo es el inducido por cualquier equivalencia homotópica, ya que dos funciones equivalentemente homotópicas inducen el mismo mapeo en cohomología.

   (Lema de Poincaré). Si M es contraible, $H^p_{dR}(M) \approx 0$ para $p \geq 1$.

3. Resultados básicos:

   (a) (Cohomología de la unión disjunta). Si $M = \bigsqcup M_i$, entonces $H^p_{dR}(M) \approx \prod H^p_{dR}(M_i)$. Usando el pullback de las inclusiones.

   (b) (Cohomología de grado cero). $H^0_{dR}(M) \approx \mathbb{R}$ por ser el espacio de funciones constantes, es decir, soluciones de $df = 0$.

   (c) (Mayer-Vietoris). Supongamos que $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de M. Las inclusiones

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

   inducen la siguiente sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \cdots$$

4. El ***soporte*** de una forma ω en M es $\operatorname{supp} \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$. La colección de p-formas con soporte compacto en M se denota por $\Omega^p_c(M)$. La ***p-ésima cohomología con soporte compacto de*** M es el espacio vectorial cociente

$$H^p_c(M) = \frac{\ker d : \Omega^p_c(M) \to \Omega^{p+1}_c(M)}{\operatorname{img} d : \Omega^{p-1}_c \to \Omega^p_c(M})$$

   Ejemplo (La cohomología compacta de $\mathbb{R}$)**.** Como no hay funciones constantes no cero con soporte compacto, $H^0(\mathbb{R}) \approx 0$. Consideremos el mapeo

$$\int_{\mathbb{R}} : \Omega^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

   Es suprayectivo por la existencia de funciones flan. Veamos que su kernel son las 1-formas exactas con soporte compacto. Por un lado, si df tiene soporte contenido en un intervalo $[a, b]$,

$$\int_{\mathbb{R}} df = \int_a^b df = f(b) - f(a) = 0 - 0.$$

   Por otro lado, si $g(x)dx$ tiene integral cero en $\mathbb{R}$, su antiderivada

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$$

   tiene soporte compacto.

4 Integración en variedades

Definición (Orientación)**.**

Dos bases de T_pM están ***consistentemente orientadas*** si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Una ***orientación puntual*** en M es una elección de clase de equivalencia de bases en cada espacio tangente.

Un ***marco local*** (una n-tupla de secciones del haz tangente TU en un abierto U que en cada punto son una base de T_pU) está ***positivamente orientado*** si en cada punto es una base en la orientación de M. Si cada punto está en el dominio de un marco local orientado, M es ***orientable***.

M es orientable si y sólo si existe una n-forma que no se anula y es positiva en cualquier marco local orientado que llamamos ***forma de orientación***. Si M es Riemanniana orientada existe una única ***forma de volumen*** dV que vale 1 en cualquier marco local ortonormal orientado de TM y, equivalentemente, en cualesquiera coordenadas locales orientadas $x^1, \ldots, x^n$ se expresa como

$$dV_g = \sqrt{\det g_{ij}}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$.

Observación (Integración en variedades)**.**

- Sólo podemos integrar variedades orientadas.
- Sólo podemos integrar n-formas en una variedad de dimensión n.
- Las n-formas que integremos deben tener soporte compacto.

Definición (Integración en variedades)**.**

1. Primero definimos ***la integral de una n-forma*** en $\mathbb{R}^n$. Si $\omega = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ es una n-forma en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, su integral en $A \subset U$ es la integral de Riemann de f:
$$\int_A \omega = \int_A f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n := \int_A f(x)dx^1 \ldots dx^n$$
(la integral de Riemann es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores sobre particiones de rectángulos).

2. Denotamos por $\Omega_c^k(M)$ el conjunto de k-formas en M que tienen soporte compacto. En una variedad orientada M de dimensión n con una carta coordenada orientada U definimos para $\omega \in \Omega_c^n(U)$,
$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

3. Dada una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}$ subordinada al atlas orientado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M y $\omega \in \Omega_c^n(M)$, tenemos que
   - $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$ es una suma finita en cada punto.

- $\operatorname{supp} \rho_\alpha \omega$ es compacto.
- $\rho_\alpha \omega$ es una n-forma con soporte compacto en U_α, así que su integral $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ está bien definida.

Podemos definir

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

que es independiente de la elección de atlas orientado y partición de la unidad.

Si (M, g) es Riemanniana orientada y compacta definimos

$$\mathrm{Vol}(M) := \int_M dV_g$$

Proposición (Propiedades de integración en variedades)**.** Sean M y N variedades diferenciables orientadas de dimensión n con o sin frontera y ω y η dos n-formas con soporte compacto en M.

1. (Linealidad) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta$.
2. (Revierte orientación) Si $-M$ denota la orientación contraria de M, $-\int_M \omega = \int_{-M} \omega$.
3. (Positividad) Si ω está positivamente orientada, $\int_M \omega > 0$.
4. (Invarianza bajo difeomorfismos) Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo, $\int_M \omega = \int_M F^*\omega$ si F preserva orientación, y si la revierte una es inversa aditiva de la otra.

Proposición (Integración sobre parametrizaciones)**.** Sean M es una n-variedad orientada con o sin frontera y ω una n-forma con soporte compacto en M. Suponamos que $D_1, \ldots, D_k$ son dominios de integración en $\mathbb{R}^n$, y para $i = 1, \ldots, k$, tenemos mapeos suaves $F_i : \bar{D}_i \to M$ tales que:

1. F_i se restringe a un mapeo que preserva orientación de D_i en un abierto $W_i \subset M$,
2. $W_i \cap W_j \neq \varnothing$ para $i \neq j$,
3. $\operatorname{supp} \omega \subseteq \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_k$.

Entonces,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} F_i^* \omega$$

Proposición (Pullback de formas de grado máximo)**.** Si $F : M \to N$ es una función suave entre las variedades M y N con con coordenadas locales (x^i) en $U \subset M$ y (y^i) en $V \subset N$, y si u es cualquier función real-valuada en N,

$$F^*(u dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (\det DF)(u \circ F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

donde DF es la matriz jacobiana de la diferencial F_*.

Definición. Una variedad con frontera M es una n-variedad localmente homeomorfa al semiplano superior. Los puntos cuya n-ésima coordenada es cero conforman la ***frontera de*** M, que denotamos por ∂M. Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas en M, el atlas $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ hace de ∂M una variedad diferenciable de dimensión $(n-1)$ sin frontera, que es orientable si M es orientable.

Teorema (de Stokes)**.** Si M es una n-variedad diferenciable con frontera y ω es una $(n-1)$-forma en M con soporte compacto,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

donde ω en el lado derecho es la forma inducida por la inclusión $i^*\omega$.

Corolario. Si $\partial M = 0$ o $d\omega = 0$, la integral anterior es cero.

El teorema de Stokes y la proposición de integración sobre parametrizaciones son ciertas para ***variedades con esquinas***, es decir, variedades localmente parametrizadas en $\bar{\mathbb{R}}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) : x^i \geq 0\}$.

5 Teorema de de Rham

El ***simplejo estándar*** $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ es la envolvente convexa del conjunto $\{e_0, e_1, \ldots, e_p\}$ donde $e_0 = 0$ y e_i es el i-ésimo vector básico. Un ***simplejo singular suave*** en M es una función suave $\sigma : \Delta_p \to M$ en el sentido de que cada punto en Δ_p hay una extensión suave de σ a un abierto de $\mathbb{R}^p$.

Un simplejo singular suave es en particular un simplejo singular. Esto nos permite definir el ***complejo de cadenas suaves*** con el mismo operador frontera que en la homología singular, y obtenemos el ***p-ésimo grupo de homología suave***, que denotamos por $H_p^\infty(M)$ para $p \in \mathbb{Z}$.

Teorema. La inclusión induce un isomorfismo $H_p^\infty(M) \approx H_p(M)$ para toda p.

Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y σ es un simplejo suave, la ***integral de*** ω ***sobre*** σ es

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega$$

de acuerdo a que si $\sigma^*\omega = g dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$ en Δ_p, la integral del lado derecho es la integral de Riemann de g. (Δ_p es una variedad con esquinas, para la cual el pullback está bien definido por pedazos).

Si $c \in C_p^\infty(M)$ es una ***cadena suave*** de la forma $c = \sum_i c_i \sigma_i$, definimos la ***integral de*** ω ***sobre*** c como $\int_c \omega = \sum_i c_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Teorema (Stokes para cadenas)**.** Si $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ y $c \in C_p^\infty(M)$,

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Demostración. Basta mostrar el resultado para un sólo simplejo. Suponiendo cierto el teorema de Stokes para variedades con esquinas,

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega$$

¿Cómo podemos integrar una función en $\partial\Delta_p$? La idea es parametrizar las caras por separado. Consideremos la única función afín $\Delta_p \to \Delta_p$ que lleva i-ésimo vértice al "último lugar", digamos,

$$(e_0, \dots, e_p) \mapsto (e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p, e_i)$$

Es decir, manda $e_i \mapsto e_p$, $e_j \mapsto e_j$ si $j < i$, y $e_j \mapsto e_{j-1}$ si $i < j \leq p$.

La restricción de esta función a a la frontera del semiespacio superior $\partial\mathbb{H}^p$ es justamente una parametrización de la cara opuesta al i-ésimo vértice, que denotaremos por
$F_i : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$.

Esta función consiste de intercambiar entradas consecutivas $p - i$ veces, que preserva orientación cuando $p - i$ es par. Además, la orientación estándar de $\partial\mathbb{H}^p$ coincide con la orientación de $\mathbb{R}^p$ si y sólo si p es par. En conclusión, F_i preserva orientación si y sólo si i es par.

Para que nuestra integral esté bien definida, necesitamos que todas las parametrizaciones preserven orientación, así que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega &= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_i^*\sigma^*\omega \\
&= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i)^*\omega \\
&= \sum_i (-1)^i \int_{\sigma\circ F_i} \omega \\
&= \int_{\partial\sigma} \omega
\end{aligned}$$

Ya que $\partial\Delta_p = \sum_i (-1)^i \sigma \circ F_i$ por definición. □

Teorema (de de Rham)**.** El mapeo $\not{d} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M)$ definido para $[c] \in H_p(M)$ y $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$ como

$$\not{d}[\omega][c] = \int_c \omega$$

para cualesquiera representantes de las clases de equivalencia está bien definido y es un isomorfismo para toda p.

Demostración. El mapeo está bien definido por el teorema de Stokes: si $c - c' = \partial b$

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0,$$

y si $\omega - \omega' = d\eta$,

$$\int_c \omega - \int_c \omega' = \int_c \omega - \omega' = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0.$$

La idea central de la prueba es el ***argumento Mayer-Vietoris***: suponemos que la variedad tiene una cubierta por una pareja de abiertos que cada uno y su intersección satisfacen la propiedad, y usamos el lema de los cinco y la naturalidad de nuestra propiedad para construir un isomorfismo. Luego hacemos inducción sobre la cubierta.

Proposición (Naturalidad del homomorfismo de de Rham)**.** . Si $F : M \to N$ es una función suave, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^p_{dR}(N) & \xrightarrow{F^*} & H^p_{dR}(M) \\ {\scriptstyle \mathscr{I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{I}} \\ H^p(N;\mathbb{R}) & \xrightarrow[F^*]{} & H^p(M,\mathbb{R}) \end{array}$$

Si $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de M, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^p_{dR}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}_{dR}(M) \\ {\scriptstyle \mathscr{I}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{I}} \\ H^p(U \cap V, \mathbb{R}) & \xrightarrow[\partial^*]{} & H^{p-1}(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

donde δ y ∂^* son los homomorfismos de conexión en las sucesiones de Mayer-Vietoris.

Diremos que una variedad M es ***de de Rham*** si $\mathscr{I} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M)$ es un isomorfismo para toda p. Usaremos el argumento de Mayer-Vietoris para demostrar que

Afirmación 1. Si M tiene una cubierta finita de de Rham, M es de de Rham.

Supongamos que M tiene una cubierta $U_1, \ldots, U_k$ tal que cada U_i y cada intersección finita de ellos son de de Rham. Si $k = 1$, terminamos. Si $k = 2$ y la cubierta consiste de U y V, tenemos el siguiente diagrama cuyos renglones son sucesiones de Mayer-Vietoris y flechas verticales son homomorfismos de de Rham:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{p-1}_{dR}(U) \oplus H^{p-1}_{dR}(V) & \longrightarrow & H^{p-1}_{dR}(U \cap V) & \longrightarrow & H^p_{dR}(M) & \longrightarrow & H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) & \longrightarrow & H^p_{dR}(U \cap V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{p-1}(U, \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(V; \mathbb{R}) & \to & H^{p-1}(U \cap V; \mathbb{R}) & \to & H^p(M; \mathbb{R}) & \to & H^p(U; \mathbb{R}) \oplus H^p(V; \mathbb{R}) & \to & H^p(U \cap V; \mathbb{R}) \end{array}$$

El diagrama es conmutativo por la naturalidad del homomorfismo de de Rham. Por la hipótesis sobre la cubierta, todas las flechas verticales salvo la del centro son isomorfismos, que también lo es por el Lema de los cinco.

Para el paso inductivo tomamos una cubierta $U_1, \ldots, U_{k+1}$. Definiendo $U = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ y $V = U_{k+1}$, podemos aplicar el mismo diagrama. Con esto demostramos la afirmación.

El siguiente paso es demostrar que

Afirmación 2. Si la topología de M tiene una base cuyos abiertos e intersecciones finitas de ellos son de de Rham, M es de de Rham.

Esta afirmación no la demostraremos. A grandes rasgos, se usan particiones de la unidad para producir conjuntos compactos en la variedad. En las subcubiertas finitas resultantes se aplica la afirmación anterior.

Para concluir seguimos los siguientes pasos:

1. Cualquier conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es de de Rham.
2. Cualquier abierto en $\mathbb{R}^n$ es de de Rham, pues una base de su topología está dada por una colección de bolas, cada una convexa (Afirmación 2).
3. Por naturalidad del homomorfismo de de Rham, la cubierta de cartas coordenadas de M es una cubierta por abiertos de de Rham, que de hecho es una base para la topología de M (Afirmación 2).

Así que sólo falta demostrar el inciso 1. Si U es un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$, por el lema de Poincaré sólo necesitamos confirmar el isomorfismo $H^0_{dR}(U) \overset{\mathscr{I}}{\approx} H^0(U, \mathbb{R})$. Las 0-formas cerradas en U son funciones constantes, así que para cualquier 0-simplejo σ,

$$\mathscr{I}[f][\sigma] = \int_\sigma f = \int_{\Delta_0} \sigma^* f = f \circ \sigma(0)$$

no es cero si f no es la función constante cero, así que este elemento genera $H^0(U, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.

$\square$

Aprovechemos para enunciar otro resultado cuya demostración también usa el argumento Mayer-Vietoris:

Definición. Una función bilineal entre espacios vectoriales

$$\langle -, - \rangle : V \times W \to \mathbb{R}$$

es ***no degenerada*** si $\langle v, w \rangle = 0$ para todo v implica que $w = 0$ y $\langle v, w \rangle = 0$ para todo w implica que $v = 0$.

Teorema (Dualidad de Poincaré)**.** Si M es orientable, la función

$$\int : H^p_{dR}(M) \otimes H^{n-p}_c(M) \to \mathbb{R}$$

dada por la integral del producto cuña es un apareamiento no degenerado.