

Cohomología de de Rham

Plan de la charla

1	Motivación	1
2	Complejo de de Rham	2
3	Integración en variedades	5
4	Cohomología de de Rham	9
5	Teorema de de Rham	11

Nota bibliográfica. La sección 1 es la introducción de Bott and Tu, [Differential Forms in Algebraic Topology](#). Las secciones 2 a 4 son una mezcla de Lee, [Introduction to Smooth Manifolds](#) y Tu, [An Introduction to Manifolds](#), y un poco de Bott and Tu, [Differential Forms in Algebraic Topology](#). La sección sección 5 está en Lee, [Introduction to Smooth Manifolds](#).

1 Motivación

Las componentes conexas de un espacio X están caracterizadas por el hecho de que, en cada una, *cualquier función localmente constante es globalmente constante*. Definiendo $H^0(X)$ como el espacio vectorial de funciones real-valuadas localmente constantes, $\dim H^0(X)$ es el número de componentes conexas de X .

Ahora observemos que si M es un abierto en \mathbb{R}^n , esta propiedad se describe pidiendo que el gradiente

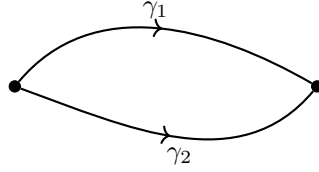
$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

sea cero. Buscamos una ecuación diferencial natural que nos ayude a definir $H^1(X)$.

Ahora para generalizar esta idea tomemos una 1-forma $\theta = \sum_i a_i dx^i$ y la pensamos como un operador sobre las curvas en M vía

$$\gamma \mapsto \int_{\gamma} \theta$$

Y se nos antoja que θ sea *localmente* constante en el sentido de que al variar ligeramente γ (sin cambiar los puntos inicial y final) la integral permanece igual. ¿A qué nos referimos con esto?



Si las integrales sobre dos curvas homotópicas γ_1 y γ_2 coinciden,

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta$$

es decir

$$0 = \int_{\gamma_1} \theta - \int_{\gamma_2} \theta = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \theta = \int_{\partial D^2} \theta = \int_{D^2} d\theta,$$

así que si $d\theta = 0$ la 1-forma es *localmente constante* en el espacio de lazos.

Ahora notemos que por el teorema fundamental del cálculo $\int_{\gamma} df = f(Q) - f(P)$ donde P y Q son los puntos inicial y final de γ . Diremos que los gradientes (0-formas exactas) son *trivialmente* localmente constantes.

Definamos entonces $H^1(M)$ como el espacio vectorial de integrales de línea localmente constantes módulo las que son trivialmente constantes.

2 Complejo de de Rham

En esta sección construimos un funtor contravariante $\Omega^*(-)$ de la categoría de variedades suaves en la categoría de álgebras diferenciales graduadas asociativas y anti-conmutativas. A cada álgebra corresponde un complejo de cadenas que llamaremos complejo de de Rham.

1. Una variedad topológica M es *diferenciable* si tiene un atlas tal que las funciones de transición son difeomorfismos. El atlas debe ser maximal en el sentido de que contiene todas las posibles cartas que son compatibles.

Si u^1, \dots, u^n son las funciones coordenadas de \mathbb{R}^n y (U, φ) es una carta coordenada de M , podemos escribir $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ donde $x^i = u^i \circ \varphi$. Una función real-valuada f definida en M es *suave* si su *pullback* $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ -diferenciable. La colección de tales funciones se denota por $C^\infty(M)$.

2. En cada punto $p \in M$ con carta coordenada (U, x^1, \dots, x^n) el conjunto de funcionales $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$$

definidos mediante $f \mapsto \left. \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial u^i} \right|_p$ generan un espacio vectorial que llamamos *espacio tangente* y denotamos por $T_p M$. Un *campo vectorial* es una sección suave del *haz tangente* $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$.

El conjunto de funcionales $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$

$$(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p$$

definidos mediante $(dx^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i$ generan un espacio vectorial que llamamos *espacio cotangente* y denotamos por $T_p^* M \approx \text{Hom}(T_p M, \mathbb{R})$. Sus elementos se llaman *1-covectores*.

3. Nuestro siguiente paso es construir el funtor $\bigwedge^k(-)$ que a un espacio vectorial arbitrario asigna el espacio vectorial de *k-tensores alternantes*. Aplicaremos este funtor al espacio tangente en un punto, luego variamos el punto para obtener secciones de un haz y finalmente tomamos la suma directa sobre k . El resultado es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa a la que después dotaremos de una antiderivación.

Las funciones \mathbb{R} -multilineales lineales $\underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman *k-tensores*.

Un k -tensor es un *k-covector* si es *alternante*, es decir, si su valor cambia de signo cuando dos entradas cambian de lugar. La colección de k -covectores en p se denota por $\bigwedge^k(T_p^* M)$.

Una *k-forma* o *campo k-covectorial* es una sección suave del haz vectorial $\bigwedge^k(T^* M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^* M)$. La colección de k -formas en M se denota por $\Omega^k(M)$.

4. El *producto cuña* definido puntualmente como el $(k + \ell)$ -covector

$$(\omega \wedge \tau)_p = \frac{1}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \tau)_p$$

que explícitamente quiere decir que

$$(\omega \wedge \tau)_p(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\text{sgn } \sigma) \omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \tau_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

para $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^\ell(M)$, donde $S_{k+\ell}$ es el grupo de permutaciones. Esta operación se extiende suavemente a una $(k + \ell)$ -forma.

Recordemos que el *producto copa* entre las cocadenas $\varphi \in C^k(X; R)$ y $\psi \in C^\ell(X; R)$ está definido como

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma| [v_0, \dots, v_k]) \psi(\sigma| [v_{k+1}, \dots, v_\ell])$$

para un simplejo singular $\sigma : \Delta_{k+\ell} \rightarrow X$. (El símbolo $[v_0, \dots, v_k]$ representa el simplejo dado por los vértices v_0, \dots, v_k).

El producto cuña es bilineal, asociativo y anticonmutativo:

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg \omega \deg \tau} \tau \wedge \omega$$

Una base de $\bigwedge^k(T_p^*U)$ en una vecindad coordenada U está dada por los k -covectores

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{con } i_1 < \dots < i_k$$

así que es un espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$.

El conjunto $\Omega^*(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$ es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa con el producto cuña como operación.

5. La **derivada exterior de una función real-valuada** $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ es la 1-forma definida localmente como

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

o, equivalentemente, es el operador que manda $v \mapsto vf$ para $v \in T_p M$. (Esta definición local se extiende a una 1-forma).

La **derivada exterior** es el operador $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ definido localmente como

$$d\omega = d \sum_I a_I x^I = \sum_I da_I \wedge x^I = \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge x^I,$$

(se extiende correctamente) que satisface las siguientes propiedades:

- (a) Es \mathbb{R} -lineal.
- (b) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\tau)$
- (c) $d^2 = 0$
- (d) Si $f \in C^\infty(U)$ y X es un campo vectorial, entonces $(df)(X) = Xf$.

El operador frontera en cohomología singular es simplemente $\text{Hom}(\partial) = \partial^*$ donde ∂ es la frontera de cadenas singulares. Recordando la definición del mapeo inducido mediante el funtor contravariante Hom , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & & \\ \partial \downarrow & \searrow \varphi \circ \partial = \partial^* & \\ C_n & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

que no es más que evaluar el cociclo φ en la frontera de una cadena (simplejo), es decir, en la suma alternada de las caras del simplejo:

$$\varphi \partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi(\sigma|[v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}])$$

Una k -forma ω es **cerrada** si $d\omega = 0$ y **exacta** si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

6. Dada una función suave $F : N \rightarrow M$ entre variedades y un k -covector $\omega_{F(p)} \in T_{F(p)}^*M$, el **pullback** de $\omega_{F(p)}$ es el k -covector en T_p^*N dado por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \dots, F_{*,p}v_k)$$

para $v_1, \dots, v_k \in T_pN$ donde $F_{*,p}$ es la diferencial de F definida por $F_{*,p}vf = v(f \circ F)$.

Proposición (Propiedades del pullback). Si $F : M \rightarrow N$ es una función suave entre variedades y ω y τ son formas diferenciales en M ,

- (a) $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ es \mathbb{R} -lineal.
- (b) $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$.
- (c) En cualquier carta coordenada,

$$F^*\left(\sum \omega_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

donde d denota la diferencial.

Proposición (Naturalidad de la derivada exterior). Si $F : N \rightarrow M$ es una función suave entre variedades y $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces

$$dF^*\omega = F^*d\omega$$

Observación (Tres formas de ver la derivada de una función real-valuada). Sea $f \in C^\infty(M)$. Los siguientes tres objetos están en correspondencia:

1. La diferencial $f_{*,p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ que manda v al vector $f_{*,p}v$ dado por $C^\infty(\mathbb{R}) \ni g \mapsto v(g \circ f)$.
2. La 1-forma $df \in \Omega^1(M)$ obtenida mediante la derivada exterior de f , definida por $df(v) = vf$, evaluada en p .
3. La función que a una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ le asocia el número real $(f \circ \gamma)'(0)$.

3 Integración en variedades

Definición (Orientación).

Dos bases de T_pM están **consistentemente orientadas** si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Una **orientación puntual** en M es una elección de clase de equivalencia de bases en cada espacio tangente.

Un **marco local** (una n -tupla de secciones del haz tangente TU en un abierto U que en cada punto son una base de T_pU) está **positivamente orientado** si en cada punto es una base en la orientación de M . Si cada punto está en el dominio de un marco local orientado, M es **orientable**.

M es orientable si y sólo si existe una n -forma que no se anula y es positiva en cualquier marco local orientado. Si M es Riemanniana existe una única **forma de volumen** dV que vale 1 en cualquier marco local ortonormal orientado de TM y, equivalentemente, en cualesquiera coordenadas locales orientadas x^1, \dots, x^n se expresa como

$$dV_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

donde $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$.

Definición (Integrales de línea).

1. Primero definimos la integral de una 1-forma ω en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Para la coordenada natural t en \mathbb{R} , sabemos que $\omega_t = f(t)dt$ para alguna función suave $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos **la integral de ω en $[a, b]$** como la integral de Riemann:

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt$$

2. La generalización a una curva sobre una variedad está dada por el pullback de la forma bajo la carta coordenada. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva suave y ω es un campo covectorial suave en M , la **integral de ω sobre γ** es el número real

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega$$

Proposición (Propiedades de las integrales de línea). Sea M una variedad suave, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva suave y ω una 1-forma en M . Entonces

1. La integral de ω en γ es \mathbb{R} -lineal en $\mathfrak{X}^*(M)$, es decir, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$, $\int_{\gamma} (a\omega_1 + b\omega_2) = a \int_{\gamma} \omega_1 + b \int_{\gamma} \omega_2$.
2. Si γ es constante, $\int_{\gamma} \omega = 0$.
3. Si $\gamma_1 = \gamma|_{[a,b]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[b,c]}$ con $a < b < c$, entonces $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.
4. Si $F : N \rightarrow M$ es una función suave,

$$\int_{\gamma} F^* \omega = \int_{F \circ \gamma} \omega$$

5. Hay otra expresión para esta integral:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

Teorema (Fundamental de las integrales de línea). Sea M una variedad suave. Si f es una función suave real-valuada en M y $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva suave, entonces

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Observación (Integración en variedades).

- Sólo podemos integrar variedades orientadas.
- Sólo podemos integrar n -formas en una variedad de dimensión n .
- Las n -formas que integremos deben tener soporte compacto.

Definición (Integración en variedades).

1. Primero definimos **la integral de una n -forma** en \mathbb{R}^n . Si $\omega = f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ es una n -forma en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, su integral en $A \subset U$ es la integral de Riemann de f :

$$\int_A \omega = \int_A f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n := \int_A f(x)dx^1 \dots dx^n$$

(la integral de Riemann es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores sobre particiones de rectángulos).

2. Denotamos por $\Omega_c^k(M)$ el conjunto de k -formas en M que tienen soporte compacto. En una variedad orientada M de dimensión n con una carta coordenada orientada U definimos para $\omega \in \Omega_c^n(U)$,

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

3. Dada una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}$ subordinada al atlas orientado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M y $\omega \in \Omega_c^n(M)$, tenemos que
 - $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$ es una suma finita en cada punto.
 - $\text{supp } \rho_\alpha \omega$ es compacto.
 - $\rho_\alpha \omega$ es una n -forma con soporte compacto en U_α , así que su integral $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ está bien definida.

así que podemos definir

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

que es independiente de la elección de atlas orientado y partición de la unidad.

4. Si (M, g) es Riemanniana orientada, existe una única n -forma dV_g caracterizada por la siguiente expresión en cualesquiera coordenadas locales orientadas x^1, \dots, x^n :

$$dV_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

donde $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$, respecto a la cual definimos

$$\text{Vol}(M) = \int_M dV_g$$

cuando M es compacta.

5. Una variedad con frontera M es una n -variedad localmente homeomorfa al semiplano superior. Los puntos cuya n -ésima coordenada es cero conforman la frontera ∂M . Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas en M , el atlas $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ hace de ∂M una variedad diferenciable de dimensión $(n - 1)$ sin frontera, que es orientable si M es orientable.

Proposición (Propiedades de integración en variedades). Sean M y N variedades diferenciables orientadas de dimensión n con o sin frontera y ω y η dos n -formas con soporte compacto en M .

1. **Linealidad.** Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta$.
2. **Revierte orientación.** Si $-M$ denota la orientación contraria de M , $-\int_M \omega = \int_{-M} \omega$.
3. **Positividad.** Si ω está positivamente orientada, $\int_M \omega > 0$.
4. **Invarianza bajo difeomorfismos.** Si $F : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo, $\int_M \omega = \int_N F^* \omega$ si F preserva orientación, y si la revierte una es inversa aditiva de la otra.

Proposición (Integración sobre parametrizaciones). Sean M es una n -variedad orientada con o sin frontera y ω una n -forma con soporte compacto en M . Suponamos que D_1, \dots, D_k son dominios de integración en \mathbb{R}^n , y para $i = 1, \dots, k$, tenemos mapeos suaves $F_i : \bar{D}_i \rightarrow M$ tales que:

1. F_i se restringe a un mapeo que preserva orientación de D_i en un abierto $W_i \subset M$,
2. $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$,
3. $\text{supp } \omega \subseteq \bar{W}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_k$.

Entonces,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega$$

Proposición (Pullback de formas de grado máximo). Si $F : M \rightarrow N$ es una función suave entre las variedades M y N con coordenadas locales (x^i) en $U \subset M$ y (y^i) en $V \subset N$, y si u es cualquier función real-valuada en N ,

$$F^*(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (\det DF)(u \circ F) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Teorema (de Stokes). Si M es una n -variedad diferenciable con frontera y ω es una $(n - 1)$ -forma en M con soporte compacto,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

donde ω en el lado derecho es la forma inducida por la inclusión $i^* \omega$.

Corolario. Si M no tiene frontera la integral es cero.

Corolario. Si ω es cerrada, $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Ejemplo (Teorema de Green). Veamos el caso de \mathbb{R}^2 . Una 1-forma es de la forma $Pdx + Qdy$ para $P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Luego,

$$\begin{aligned}
 d(Pdx + Qdy) &= d(Pdx) + d(Qdy) \\
 &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) \\
 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

así que

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

donde la integral del lado izquierdo es la integral de Riemann de la función $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ en D .

Ejemplo (El área del círculo unitario). Para integrar el elemento de área en el círculo unitario, consideramos

$$P = -\frac{1}{2}y \quad y \quad Q = \frac{1}{2}x$$

luego,

$$\begin{aligned}
 \int_{D^2} dx \wedge dy &= \int_{S^1} -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{S^1} ydx + \frac{1}{2} \int_{S^1} xdy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp^*(ydx) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \exp^*(xdy) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y \circ \exp)d(x \circ \exp) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x \circ \exp)d(y \circ \exp) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y \circ \exp)(t)dx(\exp'(t))dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x \circ \exp)(t)dy(\exp'(t))dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin t)(-\sin t)dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t)dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi
 \end{aligned}$$

4 Cohomología de de Rham

1. La k -ésima cohomología de de Rham es el espacio vectorial cociente

$$H_{dR}^k = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}}$$

2. (Funtorialidad) Si $F : M \rightarrow N$ es una función suave, el pullback $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas, así que desciende a homología así que tenemos un *pullback en homología*, que también denotamos por F^* , tal que

(a) Si $G : N \rightarrow P$ es otra función suave, $(G \circ F)^* = G^* \circ F^*$

(b) Id^* es la identidad en $H_{dR}^k(M)$.

es decir, H_{dR}^k es un funtor contravariante de variedades (con frontera) en espacios vectoriales.

Este resultado se debe a que el pullback conmuta con la derivada exterior.

3. (Invarianza homotópica) Si M y N son homotópicamente equivalentes, $H_{dR}^k(M) \approx H_{dR}^k(N)$ para toda k . El isomorfismo es el inducido por cualquier equivalencia homotópica, ya que dos funciones equivalentemente homotópicas inducen el mismo mapeo en cohomología.

(Lema de Poincaré) Si M es contraíble, $H_{dR}^p(M) \approx 0$ para $p \geq 1$.

4. Resultados básicos:

(a) (Cohomología de la unión disjunta) Si $M = \bigsqcup M_i$, entonces $H_{dR}^p(M) \approx \prod H_{dR}^p(M_i)$. Usando el pullback de las inclusiones.

(b) (Cohomología de grado cero) $H_{dR}^0(M) \approx \mathbb{R}$ por ser el espacio de funciones constantes, es decir, soluciones de $df = 0$.

(c) (Mayer-Vietoris) Supongamos que $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de M . Las inclusiones

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & i \nearrow & & \searrow k & \\ U \cap V & & & & M \\ & j \searrow & & \nearrow l & \\ & & V & & \end{array}$$

inducen la siguiente sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_{dR}^p \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H_{dR}^p(U) \oplus H_{dR}^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_{dR}^p(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^{p+1}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \cdots$$

5. El **soporte** de una forma ω en M es $\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$. La colección de p -formas con soporte compacto en M se denota por $\Omega_c^p(M)$. La *p -ésima cohomología con soporte compacto de M* es el espacio vectorial cociente

$$H_c^p(M) = \frac{\ker d : \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(M)}{\text{img } d : \Omega_c^{p-1}(M) \rightarrow \Omega_c^p(M)}$$

Ejemplo (La cohomología compacta de \mathbb{R}). Como no hay funciones constantes no cero con soporte compacto, $H^0(\mathbb{R}) \approx 0$. Consideremos el mapeo

$$\int_{\mathbb{R}} : \Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Es suprayectivo por la existencia de funciones flan. Veamos que su kernel son las 1-formas exactas con soporte compacto. Por un lado, si df tiene soporte contenido en un intervalo $[a, b]$,

$$\int_{\mathbb{R}} df = \int_a^b df = f(b) - f(a) = 0 - 0.$$

Por otro lado, si $g(x)dx$ tiene integral cero en \mathbb{R} , su antiderivada

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$$

tiene soporte compacto.

Ejemplo. En general,

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) \approx \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ \mathbb{R} & \text{si } p = n \end{cases}$$

5 Teorema de de Rham

El *simplejo estándar* $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ es la envolvente convexa del conjunto $\{e_0, e_1, \dots, e_p\}$ donde $e_0 = 0$ y e_i es el i -ésimo vector básico. Un *simplejo singular suave* en M es una función suave $\sigma : \Delta_p \rightarrow M$ en el sentido de que cada punto en Δ_p hay una extensión suave de σ a un abierto de \mathbb{R}^p .

Un simplejo singular suave es en particular un simplejo singular. Esto nos permite definir el *complejo de cadenas suaves* con el mismo operador frontera que en la homología singular, y obtenemos el *p -ésimo grupo de homología suave* que denotamos por $H_p^\infty(M)$ para $p \in \mathbb{Z}$.

Teorema. La inclusión induce un isomorfismo $H_p^\infty(M) \approx H_p(M)$ para toda p .

Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y σ es un simplejo suave, la *integral de ω sobre σ* es

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

de acuerdo a que si $\sigma^* \omega = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$ en Δ_p , la integral del lado derecho es la integral de Riemann de g . (La integral de Riemann es el supremo de las sumas inferiores en rectángulos sobre el dominio).

Si $c \in C_p^\infty(M)$ es una *cadena suave* de la forma $c = \sum_i c_i \sigma_i$, definimos la *integral de ω sobre c* como $\int_c \omega = \sum_i c_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Teorema (Stokes para cadenas). Si $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ y $c \in C_p^\infty(M)$,

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Demostración. Basta encontrar el resultado para un sólo simplejo. Suponiendo cierto el teorema de Stokes en \mathbb{R}^n ,

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d\sigma^* \omega = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^* \omega$$

¿Cómo podemos integrar una función en $\partial\Delta_p$? La idea es parametrizar las caras por separado. Definimos la *i-ésima función cara* $F_{i,p} : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ como el único mapeo afín que manda $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1}) \mapsto (\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_{i-1}, \tilde{e}_{i+1}, \dots, \tilde{e}_p)$. Para que la integral esté bien definida de acuerdo al lema de integración sobre parametrizaciones, es necesario que estos mapeos estén orientados.

El truco está en considerar el único mapeo afín $\Delta_p \rightarrow \Delta_p$ que lleva *i*-ésimo vértice al “último lugar”, es decir, manda $[e_0, \dots, e_p]$ en $[e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p, e_i]$. Entonces, la *i*-ésima función cara es la restricción de ese mapeo a $\partial\mathbb{H}^p$.

Parafraseando a Lee, vista como composición de permutaciones en las coordenadas, $F_{i,p}$ preserva orientación cuando la permutación es par, es decir, cuando $p-i$ es par. Las coordenadas de $\partial\mathbb{H}^p$ están positivamente orientadas cuando p es par, y por fin, $F_{i,p}$ preserva orientación si y sólo si i es par.

Ahora sí, acomodando los signos para que la orientación sea la misma en todas las parametrizaciones,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_p} \sigma^* \omega &= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_{i,p}^* \sigma^* \omega \\ &= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_{i,p})^* \omega \\ &= \int_{\partial\sigma} \omega \end{aligned}$$

Ya que, de hecho, $\partial\Delta_p = \sum_i (-1)^i \sigma \circ F_{i,p}$. □

Teorema (de de Rham). El mapeo $\mathcal{d} : H_{dR}^p(M) \rightarrow H^p(M)$ definido para $[c] \in H_p(M)$ y $[\omega] \in H_{dR}^p(M)$ como

$$\mathcal{d}[\omega][c] = \int_c \omega$$

para cualesquiera representantes de las clases de equivalencia está bien definido y es un isomorfismo para toda p .

Demostración. El hecho de que esté mapeo esté bien definido parece ser la razón de ser de toda nuestra construcción: si $c - c' = \partial b$

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0,$$

y si $\omega - \omega' = d\eta$,

$$\int_c \omega - \int_c \omega' = \int_c \omega - \omega' = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0.$$

Para demostrar que ℓ es un isomorfismo necesitamos varios resultados.

1.

□