Cohomología de de Rham

github.com/dan-gc/de-rham

Plan de la charla

Nota bibliográfica. La sección 1 es la introducción de Bott and Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Las secciones 2 a 4 son una mezcla de Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* y Tu, *An Introduction to Manifolds*, y un poco de Bott and Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. La sección sección 5 está en Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*.

1 Motivación

Las componentes conexas de un espacio X están caracterizadas por el hecho de que, en cada una, *cualquier función localmente constante es globalmente constante*. Definendo $H^0(X)$ como el espacio vectorial de funciones real-valuadas localmente constantes, $\dim H^0(X)$ es el número de componentes conexas de X.

Ahora observemos que si M es un abierto en $\mathbb{R}^n$, esta propiedad se describe pidiendo que el gradiente

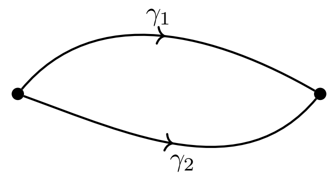
$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

sea cero. Buscamos una ecuación diferencial natural que nos ayude a definir $H^1(X)$.

Ahora para generalizar esta idea tomemos una 1-forma $\theta = \sum_i a_i dx^i$ y la pensamos como un operador sobre las curvas en M vía

$$\gamma \mapsto \int_\gamma \theta$$

Y se nos antoja que θ sea *localmente* constante en el sentido de que al variar ligeramente γ (sin cambiar los puntos inicial y final) la intergral permanece igual. ¿A qué nos referimos con esto?



Si las integrales sobre dos curvas homotópicas γ_1 y γ_2 coinciden,

$$\int_{\gamma_1} \theta = \int_{\gamma_2} \theta$$

es decir

$$0 = \int_{\gamma_1} \theta - \int_{\gamma_2} \theta = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \theta = \int_{\partial D^2} \theta = \int_{D^2} d\theta,$$

así que si $d\theta = 0$ la 1-forma es *localmente constante* en el espacio de lazos.

Ahora notemos que por el teorema fundamental del cálculo $\int_\gamma df = f(Q) - f(P)$ donde P y Q son los puntos inicial y final de γ. Diremos que los gradientes (0-formas exactas) son ***trivialmente*** localmente constantes.

Definamos entonces $H^1(M)$ como el espacio vectorial de integrales de línea localmente constantes módulo las que son trivialmente constantes.

2 Complejo de de Rham

En esta sección construimos un funtor contravariante $\Omega^*(-)$ de la categoría de variedades suaves en la categoría de álgebras diferenciales graduadas asociativas y anticonmutativas. A cada álgebra corresponde un complejo de cadenas que llamaremos complejo de de Rham.

1. Una variedad topológica M es ***diferenciable*** si tiene un atlas tal que las funciones de transición son difeomorfismos. El atlas debe ser maximal en el sentido de que contiene todas las posibles cartas que son compatibles.

   Si $u^1, \ldots, u^n$ son las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y (U, φ) es una carta coordenada de M, podemos escribir $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ donde $x^i = u^i \circ \varphi$. Una función real-valuada f definida en M es ***suave*** si su ***pullback*** $f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞-diferenciable. La colección de tales funciones se denota por $C^\infty(M)$.

2. En cada punto $p \in M$ con carta coordenada $(U, x^1, \ldots, x^n)$ el conjunto de funcionales $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$

   $$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

   definidos mediante $f \mapsto \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial u^i}\Big|_p$ generan un espacio vectorial que llamamos ***espacio tangente*** y denotamos por T_pM. Un ***campo vectorial*** es una sección suave del ***haz tangente*** $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

El conjunto de funcionales $T_pM \to \mathbb{R}$

$$(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p$$

definidos mediante $(dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta^i_j$ generan un espacio vectorial que llamamos ***espacio cotangente*** y denotamos por $T^*_pM \approx \operatorname{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$. Sus elementos se llaman ***1-covectores***.

3. Nuestro siguiente paso es construir el funtor $\bigwedge^k(-)$ que a un espacio vectorial arbitrario asigna el espacio vectorial de k***-tensores alternantes***. Aplicaremos este funtor al espacio tangente en un punto, luego variamos el punto para obtener secciones de un haz y finalmente tomamos la suma directa sobre k. El resultado es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa a la que después dotaremos de una antiderivación.

   Las funciones $\mathbb{R}$-multilineales lineales $\underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{k \text{ veces}} \to \mathbb{R}$ se llaman k***-tensores***.

   Un k-tensor es un k***-covector*** si es ***alternante*** , es decir, si su valor cambia de signo cuando dos entradas cambian de lugar. La colección de k-covectores en p se denota por $\bigwedge^k(T^*_pM)$.

   Una k***-forma*** o ***campo*** k***-covectorial*** es una sección suave del haz vectorial $\bigwedge^k(T^*M) = \bigcup_{p\in M}\bigwedge^k(T^*_pM)$. La colección de k-formas en M se denota por $\Omega^k(M)$.

4. El ***producto cuña*** definido puntualmente como el $(k+\ell)$-covector

$$(\omega \wedge \tau)_p = \frac{1}{k!\ell!}\operatorname{Alt}(\omega \otimes \tau)_p$$

   que explícitamente quiere decir que

$$(\omega \wedge \tau)_p(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} (\operatorname{sgn}\sigma)\omega_p(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\tau_p(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

   para $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\tau \in \Omega^\ell(M)$, donde $S_{k+\ell}$ es el grupo de permutaciones. Esta operación se extiende suavemente a una $(k+\ell)$-forma.

   Recordemos que el ***producto copa*** entre las cocadenas $\varphi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^\ell(X;R)$ está definido como

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_\ell])$$

   para un simplejo singular $\sigma : \Delta_{k+\ell} \to X$. (El símbolo $[v_0, \ldots, v_k]$ representa el simplejo dado por los vértices $v_0, \ldots, v_k$).

   El producto cuña es bilineal, asociativo y anticonmutativo:

$$\omega \wedge \tau = (-1)^{\deg\omega\deg\tau}\tau \wedge \omega$$

Una base de $\bigwedge^k(T_p^*U)$ en una vecindad coordenada U está dada por los k-covectores

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad \text{con } i_1 < \ldots < i_k$$

así que es un espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$.

El conjunto $\Omega^*(M) = \bigoplus_k^n \Omega^k(M)$ es un álgebra graduada asociativa y anticonmutativa con el producto cuña como operación.

5. La ***derivada exterior de una función real-valuada*** $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ es la 1-forma definida localmente como

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

o, equivalentemente, es el operador que manda $v \mapsto vf$ para $v \in T_pM$. (Esta definición local se extiende a una 1-forma).

La ***derivada exterior*** es el operador $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ definido localmente como

$$d\omega = d\sum_I a_I x^I = \sum_I da_I \wedge x^I = \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge x^I,$$

(se extiende correctamente) que satisface las siguientes propiedades:

(a) Es $\mathbb{R}$-lineal.

(b) $d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\tau)$

(c) $d^2 = 0$

(d) Si $f \in C^\infty(U)$ y X es un campo vectorial, entonces $(df)(X) = Xf$.

El ***operador frontera en cohomología singular*** es simplemente $\mathrm{Hom}(\partial) = \partial^*$ donde ∂ es la frontera de cadenas singulares. Recordando la definición del mapeo inducido mediante el funtor contravariante Hom, tenemos:

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr, "\varphi\circ\partial=\partial^*"] & \\ C_n \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$

que no es más que evaluar el cociclo φ en la frontera de una cadena (simplejo), es decir, en la suma alternada de las caras del simplejo:

$$\varphi\partial(\sigma) = \sum_i (-1)^i \varphi(\sigma|[v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{n+1}])$$

Una k-forma ω es ***cerrada*** si $d\omega = 0$ y ***exacta*** si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

6. Dada una función suave $F : N \to M$ entre variedades y un k-covector $\omega_{F(p)} \in T^*_{F(p)}M$, el ***pullback*** de $\omega_{F(p)}$ es el k-covector en T^*_pN dado por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \dots, F_{*,p}v_k)$$

para $v_1, \dots, v_k \in T_pN$ donde $F_{*,p}$ es la diferencial de F definida por $F_{*,p}vf = v(f \circ F)$.

Proposición (Propiedades del pullback)**.** Si $F : M \to N$ es una función suave entre variedades y ω y τ son formas diferenciales en M,

(a) $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

(b) $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$.

(c) En cualquier carta coordenada,

$$F^*\left(\sum \omega_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

donde d denota la diferencial.

Proposición (Naturalidad de la derivada exterior)**.** Si $F : N \to M$ es una función suave entre variedades y $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces

$$dF^*\omega = F^*d\omega$$

3 Cohomología de de Rham

Ahora construimos el funtor $H^p_{dR}(-)$.

1. La ***k-ésima cohomología de de Rham*** es el espacio vectorial cociente

$$H^k_{dR} = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}}$$

2. (Funtorialidad) Sea$F : M \to N$ es una función suave. Como el pullback $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ conmuta con la derivada exterior, manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas, así que desciende a homología y tenemos un ***pullback en homología***, que también denotamos por F^*, tal que

   (a) Si $G : N \to P$ es otra función suave, $(G \circ F)^* = G^* \circ F^*$

   (b) Id^* es la identidad en $H^k_{dR}(M)$.

   es decir, $H^k_{dR}(-)$ es un funtor contravariante de variedades (con frontera) en espacios vectoriales.

3. (Invarianza homotópica) Si M y N son homotópicamente equivalentes, $H^k_{dR}(M) \approx H^k_{dR}(N)$ para toda k. El isomorfismo es el inducido por cualquier equivalencia homotópica, ya que dos funciones equivalentemente homotópicas inducen el mismo mapeo en cohomología.

   (Lema de Poincaré) Si M es contraible, $H^p_{dR}(M) \approx 0$ para $p \geq 1$.

4. Resultados básicos:

   (a) (Cohomología de la unión disjunta) Si $M = \bigsqcup M_i$, entonces $H^p_{dR}(M) \approx \prod H^p_{dR}(M_i)$. Usando el pullback de las inclusiones.

   (b) (Cohomología de grado cero) $H^0_{dR}(M) \approx \mathbb{R}$ por ser el espacio de funciones constantes, es decir, soluciones de $df = 0$.

   (c) (Mayer-Vietoris) Supongamos que $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de M. Las inclusiones

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

   inducen la siguiente sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p_{dR} \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{dR}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \cdots$$

5. El ***soporte*** de una forma ω en M es $\operatorname{supp} \omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$. La colección de p-formas con soporte compacto en M se denota por $\Omega^p_c(M)$. La ***p-ésima cohomología con soporte compacto de*** M es el espacio vectorial cociente

$$H^p_c(M) = \frac{\ker d : \Omega^p_c(M) \to \Omega^{p+1}_c(M)}{\operatorname{img} d : \Omega^{p-1}_c \to \Omega^p_c(M})$$

Ejemplo (La cohomología compacta de $\mathbb{R}$)**.** Como no hay funciones constantes no cero con soporte compacto, $H^0(\mathbb{R}) \approx 0$. Consideremos el mapeo

$$\int_{\mathbb{R}} : \Omega^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

Es suprayectivo por la existencia de funciones flan. Veamos que su kernel son las 1-formas exactas con soporte compacto. Por un lado, si df tiene soporte contenido en un intervalo $[a, b]$,

$$\int_{\mathbb{R}} df = \int_a^b df = f(b) - f(a) = 0 - 0.$$

Por otro lado, si $g(x)dx$ tiene integral cero en $\mathbb{R}$, su antiderivada

$$f(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$$

tiene soporte compacto.

4 Integración en variedades

Definición (Orientación)**.**

Dos bases de T_pM están ***consistentemente orientadas*** si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Una ***orientación puntual*** en M es una elección de clase de equivalencia de bases en cada espacio tangente.

Un ***marco local*** (una n-tupla de secciones del haz tangente TU en un abierto U que en cada punto son una base de T_pU) está ***positivamente orientado*** si en cada punto es una base en la orientación de M. Si cada punto está en el dominio de un marco local orientado, M es ***orientable***.

M es orientable si y sólo si existe una n-forma que no se anula y es positiva en cualquier marco local orientado que llamamos ***forma de orientación***. Si M es Riemanniana orientada existe una única ***forma de volumen*** dV que vale 1 en cualquier marco local ortonormal orientado de TM y, equivalentemente, en cualesquiera coordenadas locales orientadas $x^1, \ldots, x^n$ se expresa como

$$dV_g = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

donde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$.

Observación (Integración en variedades)**.**

- Sólo podemos integrar variedades orientadas.
- Sólo podemos integrar n-formas en una variedad de dimensión n.
- Las n-formas que integremos deben tener soporte compacto.

Definición (Integración en variedades)**.**

1. Primero definimos ***la integral de una n-forma*** en $\mathbb{R}^n$. Si $\omega = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ es una n-forma en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, su integral en $A \subset U$ es la integral de Riemann de f:
$$\int_A \omega = \int_A f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n := \int_A f(x)dx^1 \ldots dx^n$$
(la integral de Riemann es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores sobre particiones de rectángulos).
2. Denotamos por $\Omega_c^k(M)$ el conjunto de k-formas en M que tienen soporte compacto. En una variedad orientada M de dimensión n con una carta coordenada orientada U definimos para $\omega \in \Omega_c^n(U)$,
$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$
3. Dada una partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}$ subordinada al atlas orientado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de M y $\omega \in \Omega_c^n(M)$, tenemos que
    - $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$ es una suma finita en cada punto.

- $\operatorname{supp} \rho_\alpha \omega$ es compacto.
- $\rho_\alpha \omega$ es una n-forma con soporte compacto en U_α, así que su integral $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ está bien definida.

Podemos definir

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

que es independiente de la elección de atlas orientado y partición de la unidad.

Si (M, g) es Riemanniana orientada y compacta definimos

$$\mathrm{Vol}(M) := \int_M dV_g$$

Proposición (Propiedades de integración en variedades)**.** Sean M y N variedades diferenciables orientadas de dimensión n con o sin frontera y ω y η dos n-formas con soporte compacto en M.

1. **Linealidad.** Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta$.
2. **Revierte orientación.** Si $-M$ denota la orientación contraria de M, $-\int_M \omega = \int_{-M} \omega$.
3. **Positividad.** Si ω está positivamente orientada, $\int_M \omega > 0$.
4. **Invarianza bajo difeomorfismos.** Si $F : N \to M$ es un difeomorfismo, $\int_M \omega = \int_M F^*\omega$ si F preserva orientación, y si la revierte una es inversa aditiva de la otra.

Proposición (Integración sobre parametrizaciones)**.** Sean M es una n-variedad orientada con o sin frontera y ω una n-forma con soporte compacto en M. Suponamos que $D_1, \ldots, D_k$ son dominios de integración en $\mathbb{R}^n$, y para $i = 1, \ldots, k$, tenemos mapeos suaves $F_i : \bar{D}_i \to M$ tales que:

1. F_i se restringe a un mapeo que preserva orientación de D_i en un abierto $W_i \subset M$,
2. $W_i \cap W_j \neq \varnothing$ para $i \neq j$,
3. $\operatorname{supp} \omega \subseteq \bar{W}_1 \cup \ldots \cup \bar{W}_k$.

Entonces,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} F_i^* \omega$$

Proposición (Pullback de formas de grado máximo)**.** Si $F : M \to N$ es una función suave entre las variedades M y N con con coordenadas locales (x^i) en $U \subset M$ y (y^i) en $V \subset N$, y si u es cualquier función real-valuada en N,

$$F^*(u dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n) = (\det DF)(u \circ F) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

donde DF es la matriz jacobiana de la diferencial F_*.

Definición. Una variedad con frontera M es una n-variedad localmente homeomorfa al semiplano superior. Los puntos cuya n-ésima coordenada es cero conforman la ***frontera de*** M, que denotamos por ∂M. Si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es un atlas en M, el atlas $\{(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})\}$ hace de ∂M una variedad diferenciable de dimensión $(n-1)$ sin frontera, que es orientable si M es orientable.

Teorema (de Stokes)**.** Si M es una n-variedad diferenciable con frontera y ω es una $(n-1)$-forma en M con soporte compacto,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

donde ω en el lado derecho es la forma inducida por la inclusión $i^*\omega$.

Corolario. Si $\partial M = 0$ o $d\omega = 0$, la integral anterior es cero.

5 Teorema de de Rham

El ***simplejo estándar*** $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ es la envolvente convexa del conjunto $\{e_0, e_1, \dots, e_p\}$ donde $e_0 = 0$ y e_i es el i-ésimo vector básico. Un ***simplejo singular suave*** en M es una función suave $\sigma : \Delta_p \to M$ en el sentido de que cada punto en Δ_p hay una extensión suave de σ a un abierto de $\mathbb{R}^p$.

Un simplejo singular suave es en particular un simplejo singular. Esto nos permite definir el ***complejo de cadenas suaves*** con el mismo operador frontera que en la homología singular, y obtenemos el ***p-ésimo grupo de homología suave***, que denotamos por $H_p^\infty(M)$ para $p \in \mathbb{Z}$.

Teorema. La inclusión induce un isomorfismo $H_p^\infty(M) \approx H_p(M)$ para toda p.

Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y σ es un simplejo suave, la ***integral de*** ω ***sobre*** σ es

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega$$

de acuerdo a que si $\sigma^*\omega = g dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$ en Δ_p, la integral del lado derecho es la integral de Riemann de g.

Si $c \in C_p^\infty(M)$ es una ***cadena suave*** de la forma $c = \sum_i c_i \sigma_i$, definimos la ***integral de*** ω ***sobre*** c como $\int_c \omega = \sum_i c_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Teorema (Stokes para cadenas)**.** Si $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ y $c \in C_p^\infty(M)$,

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Demostración. Basta mostrar el resultado para un sólo simplejo. Suponiendo cierto el teorema de Stokes en $\mathbb{R}^n$,

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d\sigma^*\omega = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega$$

¿Cómo podemos integrar una función en $\partial\Delta_p$? La idea es parametrizar las caras por separado. Consideremos la única función afín $\Delta_p \to \Delta_p$ que lleva i-ésimo vértice al "último lugar", digamos,

$$(e_0, \ldots, e_p) \mapsto (e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_p, e_i)$$

Es decir, manda $e_i \mapsto e_p$, $e_j \mapsto e_j$ si $j < i$, y $e_j \mapsto e_{j-1}$ si $i < j \leq p$.

La restricción de esta función a a la frontera del semiespacio superior $\partial\mathbb{H}^p$ es justamente una parametrización de la cara opuesta al i-ésimo vértice, que denotaremos por $F_i : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$.

Esta función consiste de intercambiar entradas consecutivas $p - i$ veces, que preserva orientación cuando $p - i$ es par. Además, la orientación estándar de $\partial\mathbb{H}^p$ coincide con la orientación de $\mathbb{R}^p$ si y sólo si p es par. En conclusión, F_i preserva orientación si y sólo si i es par.

Para que nuestra integral esté bien definida, necesitamos que todas las parametrizaciones preserven orientación, así que:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega &= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_i^*\sigma^*\omega \\
&= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i)^*\omega \\
&= \sum_i (-1)^i \int_{\sigma\circ F_i} \omega \\
&= \int_{\partial\sigma} \omega
\end{aligned}$$

Ya que $\partial\Delta_p = \sum_i (-1)^i \sigma \circ F_i$ por definición. □

Teorema (de de Rham)**.** El mapeo $\mathscr{I} : H^p_{dR}(M) \to H^p(M)$ definido para $[c] \in H_p(M)$ y $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$ como

$$\mathscr{I}[\omega][c] = \int_c \omega$$

para cualesquiera representantes de las clases de equivalencia está bien definido y es un isomorfismo para toda p.

Demostración. El hecho de que esté mapeo esté bien definido parece ser la razón de ser de toda nuestra construcción: si $c - c' = \partial b$

$$\int_c \omega - \int_{c'} \omega = \int_{c-c'} \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0,$$

y si $\omega - \omega' = d\eta$,

$$\int_c \omega - \int_c \omega' = \int_c \omega - \omega' = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0.$$

Para demostrar que $\mathscr{I}$ es un isomorfismo necesitamos varios resultados.

1.

□