Ejercicios de Geometría Diferencial (Curso de posgrado) *cualquier observación o contribución es bienvenida

Cambios de coordenadas

Veamos que

$$\det d(\Psi^{-1} \circ \Phi) = \det \left(\frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right)^2_{i,j=1,2} > 0.$$

Primero notemos que

$$\Psi^{-1} \circ \Phi = (y^1 \circ \phi, y^2 \circ \phi, c_1, c_2)$$

Donde y^1 y y^2 son las funciones coordenadas de ψ^{-1} y c_i está dada por

$$(x_1, x_2, a_1, a_2) \mapsto a_1 \frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^2}$$

Las primeras dos funciones coordenadas de $\Psi^{-1} \circ \Phi$ dependen sólo de las dos primeras entradas del punto que escojamos en en el dominio $\Omega \times \mathbb{R}^2$. De igual forma, las últimas dos funciones coordenadas dependen sólo de las dos últimas entradas.

Esto hace que la matriz de $d(\Psi^{-1} \circ \Phi)$ sea de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

De hecho, por cómo definí $\Psi^{-1} \circ \Phi$, es claro que

$$A = B = \left(\frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,2}$$

Sólo falta justificar la definición de las funciones c_i. De acuerdo al cambio de coordenadas $\psi^{-1} \circ \phi$,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial (y^1 \circ \phi)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial (y^2 \circ \phi)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^2},$$

de tal forma que a un vector de la forma

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

le corresponden coordenadas (c_1, c_2) en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$.

Las 1-variedades son planas

Pruebe que cualquier 1-variedad Riemanniana es plana.

Sea M una variedad Riemanniana 1-dimensional. De acuerdo a la definición de Lee, para ver que M es plana necesitamos encontrar una isometría local entre M y $\mathbb{R}$. Esto quiere decir que para cualquier punto p en M existe una vecindad U de p y una isometría $\varphi : V \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ para algún abierto V de $\mathbb{R}$. Suponiendo que g es la métrica de M y $\bar{g}$ es la métrica usual de $\mathbb{R}$, debemos demostrar que $\varphi^* g = \bar{g}$.

Sabemos que el espacio de (2,0)-tensores simétricos en $\mathbb{R}$ es dimensión 1, de tal forma que $\varphi^* g = f\bar{g}$ para alguna función $f \in \mathcal{C}^\infty$. Tenemos:

$$f = f\bar{g}(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = \varphi^* g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = g(\varphi_* \frac{\partial}{\partial t}, \varphi_* \frac{\partial}{\partial t}) = |\varphi'(t)|^2$$

Así que para concluir basta mostrar que $f = |\varphi'(t)|^2 = 1$. Es decir, basta ver que para cualquier punto de M hay una parametrización por longitud de arco.

Dada la parametrización φ que ya tenemos, podemos reajustar usando la función

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\varphi'(t)| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g(\varphi_* \frac{\partial}{\partial t}, \varphi_* \frac{\partial}{\partial t})} dt$$

para $t_0, t \in V$. Como φ es isometría, $s' = |\varphi'(t)| \neq 0$, y s debe tener inversa local s^{-1}, cuya derivada es

$$\frac{ds^{-1}}{dt} = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))}$$

Por fin, si definimos $\psi = \varphi \circ s^{-1}$ obtenemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varphi'(s^{-1}(t))}{|\varphi'(s^{-1}(t))|} = 1$$

De tal forma que ψ es una parametrización local de M por longitud de arco.

Formas en la esfera

Faltó escribir la pregunta...

1. a Supongamos que X es un campo vectorial definido en $U \cap V$. Expresándolo de acuerdo a la base "norte", tenemos que:

$$dx_S(X) = dx_S\left(X^1\frac{\partial}{\partial x_N} + X^2\frac{\partial}{\partial y_N}\right) = X^1 dx_S\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right) + X^2 dx_S\left(\frac{\partial}{\partial y_N}\right)$$

Recordemos las expresiones de cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_N} &= \frac{\partial x_S}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial y_S}\\ \frac{\partial}{\partial y_N} &= \frac{\partial x_S}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial y_S}\end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos que

$$\begin{aligned}dx_S(X) = dx_N(X) dx_S&\left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial x_N}\frac{\partial}{\partial y_S}\right)\\ + dy_N(X) dx_S&\left(\frac{\partial x_S}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_S}\right)\\ = &\left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N}dx_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N}dy_N\right)(X)\end{aligned}$$

Donde, de acuerdo al cambio de coordenadas,

$$\frac{\partial x_S}{\partial x_N} = \frac{\partial}{\partial x_N}\frac{x_N}{r_N} = \frac{y_N^2 - x_N^2}{r_N^2}$$

Y también:

$$\frac{\partial x_S}{\partial y_N} = \frac{-2x_N y_N}{r_N^2}$$

El mismo razonamiento para dy_S nos lleva a que:

$$dy_S = \frac{\partial y_S}{\partial x_N}dx_N + \frac{\partial y_S}{\partial y_N}dy_N$$

Donde:

$$\frac{\partial y_S}{\partial x_N} = \frac{-2x_N y_N}{r_N^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y_S}{\partial y_N} = \frac{x_N^2 - y_N^2}{r_N^2}$$

Para expresar el producto cuña, simplemente sustituimos:

$$\begin{aligned}
dx_S \wedge dy_S &= \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N}dx_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N}dy_N\right) \wedge \left(\frac{\partial y_S}{\partial x_N}dx_N + \frac{\partial y_S}{\partial y_N}dy_N\right) \\
&= \frac{\partial x_S}{\partial x_N}\frac{\partial y_S}{\partial y_N}dx_N \wedge dy_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N}\frac{\partial y_S}{\partial x_N}dy_N \wedge dx_N \\
&= \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N}\frac{\partial y_S}{\partial y_N} - \frac{\partial x_S}{\partial y_N}\frac{\partial y_S}{\partial x_N}\right) dx_N \wedge dy_N
\end{aligned}$$

Sustituyendo más...

$$\begin{aligned}
dx_S \wedge dy_S &= \left(\frac{y_N^2 - x_N^2}{r_N^2}\frac{x_N^2 - y_N^2}{r_N^2} - \frac{-2x_N y_N}{r_N^2}\frac{-2x_N y_N}{r_N^2}\right) dx_N \wedge dy_N \\
&= \left(\frac{-x_N^4 + 2x_N^2 y_N^2 - y_N^4 - 4x_N^2 y_N^2}{r_N^4}\right) dx_N \wedge dy_N \\
&= \left(\frac{-x_N^4 - 2x_N^2 y_N^2 - y_N^4}{r_N^4}\right) dx_N \wedge dy_N \\
&= -\frac{r_N^2}{r_N^4}dx_N \wedge dy_N \\
&= -\frac{1}{r_N^2}dx_N \wedge dy_N
\end{aligned}$$

1. b Primero notemos que

$$\begin{aligned}
(1 + r_S)^2 &= \left(1 + \frac{x_N^2}{r_N^2} + \frac{y_N^2}{r_N^2}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{r_N}{r_N^2}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{r_N}\right)^2
\end{aligned}$$

Y ahora sustituimos una última vez:

$$\begin{aligned}
\omega|_{U\cap V} &= \frac{4}{(1 + r_S)^2}dx_S \wedge dy_S \\
&= \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{r_N}\right)^2}\left(-\frac{1}{r_N^2}\right) dx_N \wedge dy_N \\
&= \frac{-4}{(1 + r_N)^2}dx_N \wedge dy_N
\end{aligned}$$

Función de transición

Calcule la función de transición de $T\mathbb{S}^2$ asociada a las dos trivializaciones locales determinadas por la proyección estereográfica de la esfera $\mathbb{S}^2$.

Siguiendo el comentario de Lee, tenemos que la función τ que buscamos es la matriz jacobiana asociada al mapeo de transición entre las dos proyecciones estereográficas.

Supongamos que las proyecciones desde el polo norte y sur son φ_N y φ_S. Sabemos que

$$\varphi_N^{-1}(x,y) = \frac{(2x, 2y, x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}$$
$$\varphi_S(x,y,z) = \frac{(x,y)}{1+z}$$

de forma que la composición es

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x,y) = \frac{\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)}{1+\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2x,2y)}{x^2+y^2+1+x^2+y^2-1} \\ &= \frac{(2x,2y)}{2(x^2+y^2)} \\ &= \frac{(x,y)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Y la matriz jacobiana de esta función es *Falta*

Forma de volumen

Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada. Entonces existe una única n-forma dV en M que llamaremos *forma de volumen* que satisface cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

(1) Si $(\epsilon^1, ..., \epsilon^n)$ es cualquier comarco ortonormal local orientado en T^*M, entonces

$$dV = \epsilon^1 \wedge ... \wedge \epsilon^n$$

(2) Si $(E_1, ..., E_n)$ es cualquier marco ortonormal local orientado de TM, entonces

$$dV(E_1, ..., E_n) = 1$$

(3) Para cualesquiera cartas coordenadas locales orientadas $(x_1, ..., x_n)$,

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

Sabemos que para cualquier punto $p \in M$ hay un marco ortonormal local orientado $(E_1, ..., E_n)$, que tiene un comarco asociado $(\epsilon^1, ..., \epsilon^n)$. Podemos definir dV como en (2) y demostrar que no depende de la elección del marco. Es decir, que si $(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_n)$ es otro marco ortonormal orientado y definimos análogamente $\widetilde{dV}$, obtenemos que $dV = \widetilde{dV}$, para lo cual es suficiente ver que

$$dV(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_n) = \widetilde{dV}(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_n) = 1$$

Tenemos para los dos marcos la relación

$$\widetilde{E_i} = A_i^j E_j$$

para algunas funciones suaves A_i^j. Y de hecho,

Proposition 14.9. *Suppose V is an n-dimensional vector space and $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. If $T\colon V \to V$ is any linear map and $v_1, \ldots, v_n$ are arbitrary vectors in V, then*

$$\omega(Tv_1, \ldots, Tv_n) = (\det T)\omega(v_1, \ldots, v_n). \tag{14.2}$$

así que

$$\begin{aligned} dV(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_n) &= \epsilon^1 \wedge ... \wedge \epsilon^n(\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_n) \\ &= (\det A_i^j)\epsilon^1 \wedge ... \wedge \epsilon^n(E_1, ..., E_n) \\ &= \det A_i^j \end{aligned}$$

Ahora como los dos marcos son ortonormales, la matriz (A_i^j) es una transformación lineal que preserva la métrica y fija el origen, de tal forma que es una matriz ortogonal en el grupo $O(n)$. Y como además las dos bases son orientadas, podemos suponer que $\det A_i^j = 1$.

Ahora veamos la unicidad de dV. Tomemos dV de acuerdo a la definición que hemos dado y supongamos que α es otra forma diferenciable que satisface (2). Notemos que $\bigwedge^n(M)$ está generada por dV, de forma que debe existir f suave tal que $dV = f\alpha$. Basta mostrar que $f = 1$. Y sí, porque

$$1 = dV(E_1, ..., E_n) = \alpha(E_1, ..., E_n)$$

Por último comprobemos la equivalencia de (3). Como en los incisos anteriores, partimos de que existen funciones suaves f y A^i_j tales que

$$dV = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \qquad \text{y} \qquad \partial x_i = A^j_i E_j$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f &= f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n(\partial x_1, ..., \partial x_n) \\ &= dV(\partial x_1, ..., \partial x_n) \\ &= dV(A^j_1 E_j, ..., A^j_n E_n) \\ &= \det A^j_i dV(E_1, ..., E_n) \\ &= \det A^j_i \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \partial x_i, \partial x_j \rangle = \langle A^k_i E_k, A^\ell_j E_\ell \rangle \\ &= A^k_i A^\ell_j \langle E_k, E_\ell \rangle = A^k_i A^\ell_j \delta_{k\ell} = \sum_k A^k_i A^k_j \end{aligned}$$

luego este número es la entrada (i, j) de la matriz $A^T A$ y así

$$\det g_{ij} = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$$

De esta forma, $f = \pm\sqrt{\det A}$. Como los dos marcos son orientados, por definición el determinante de la matriz (A^i_j) debe ser positivo, y como este determinante es justamente f, tomamos el signo positivo y hemos terminado.

Observación: falta comprobar que (3) implica (2).

Inmersión isométrica del toro plano en $\mathbb{R}^2$

Dé una inmersión isométrica del toro plano, $\mathbb{T}^n$ a $\mathbb{R}^{2n}$.

(Creo que no está del todo bien) Para dar una definición correcta de $\mathbb{T}^n$, consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (\theta_1, ..., \theta_n) &\mapsto (\cos\theta_1, \sin\theta_1, ..., \cos\theta_n, \sin\theta_n) \end{aligned}$$

y veamos que es una inmersión isométrica cuya imagen es $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ veces}}$.

En primer lugar,

$$d_p\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_n \end{pmatrix}$$

es de rango máximo, por lo que es inyectiva en cualquier punto.

Para ver que se trata de una isometría, basta notar que

$$\langle d_p\varphi e_i, d_p\varphi e_j\rangle = \langle (0, \cdots, -\sin\theta_i, \cos\theta_i, \cdots, 0), (0, \cdots, -\sin\theta_j, \cos\theta_j, \cdots, 0)\rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$$

Una inmersión isométrica de $\mathbb{T}^n$ a $\mathbb{R}^{2n}$ es la identidad restringida a la imagen de φ.

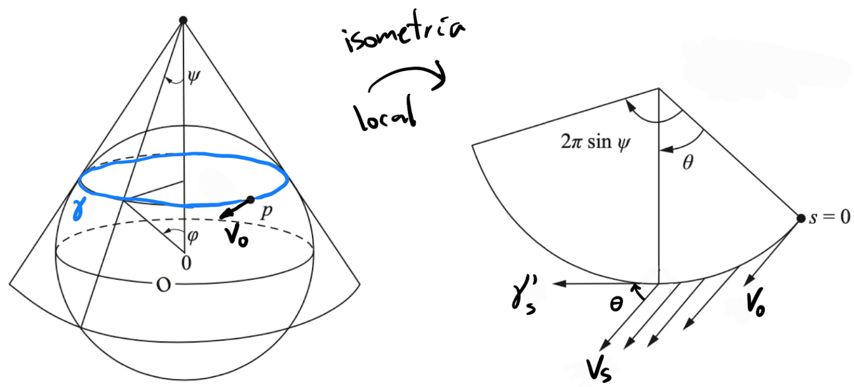
Transporte paralelo en el cono

Considere la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sea γ un paralelo de latitud ψ. (Por lo que, si $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ son coordenadas esféricas sobre S^2, entonces $\psi = \pi/2 - \varphi$). Sea $\mathbf{V}_0$ un vector tangente a S^2 en algún punto de γ, y sea α_0 el ángulo que forma $\mathbf{V}_0$ con γ. Deduzca una expresión para α, el ángulo que forma el transporte paralelo de $\mathbf{V}_0$ a lo largo de γ, en términos de la latitud ψ y la longitud del recorrido sobre γ. En particular, encuentre una expresión para α cuando el recorrido es una vuelta completa sobre γ.

Sugerencia: considere el cono tangente a S^2 a lo largo de γ. Demuestre que el transporte paralelo de $\mathbf{V}_0$ a lo largo de γ no depende de si se toma relativo a S^2 o al cono.

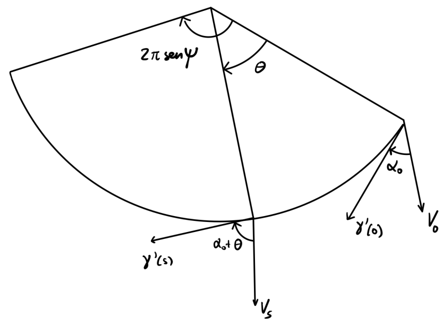
Una observación de Dani unos meses después... ¿Qué no podemos simplemente, como Do Carmo, suponer que nuestro paralelo γ está parametrizado por longitud de arco y así la relación entre s y θ es trivial? (son iguales) Al final, para calcular α tras una vuelta completa, volvemos a obtener $2\pi \sin \psi + \alpha_0$.

(Consultar do Carmo, Geometría diferencial de curvas y superficies). Supongamos por ahora que la sugerencia es cierta y que hay una isometría local natural entre el cono menos una generatriz y una región abierta de $\mathbb{R}^2$.



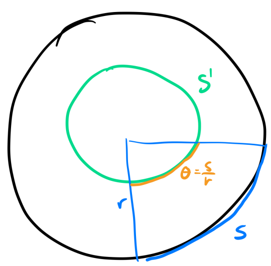
Comenzaremos por observar que, en el caso en el que $\mathbf{V}_0$ fuera el vector velocidad de una parametrización por longitud de arco de γ, el ángulo orientado entre el transporte paralelo de $\mathbf{V}_0$ y γ' tras un desplazamiento de ángulo central θ sería exactamente de θ. Esto se debe a las dos suposiciones del párrafo anterior y a que el transporte paralelo en el plano es trivial.

Acercándonos a nuestro problema, si $\mathbf{V}_0$ fuera cualquier otro vector cuyo ángulo con el vector γ'_0 fuera de α_0, no queda más remedio que el ángulo orientado entre el transporte paralelo de $\mathbf{V}_0$ y γ' después de un desplazamiento de ángulo central θ sea de $\alpha_0 + \theta = \alpha$.

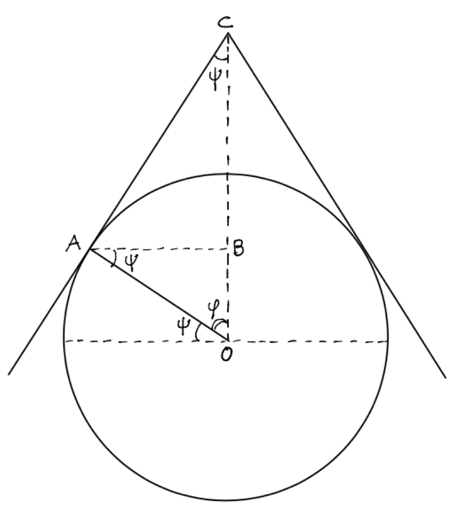


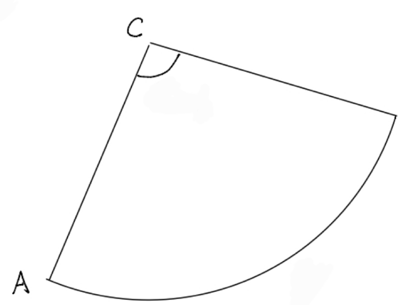
Para dar una descripción de α en términos de la latitud ψ y la longitud del recorrido sobre γ basta dar la relación entre el ángulo central del recorrido θ y la longitud del recorrido s. Esto depende del tamaño del paralelo, que está determinado por ψ.

Un desplazamiento de longitud s a lo largo de un círculo unitario cssorresponde con un ángulo central $\theta = s$. Si el círculo es de radio r, un desplazamiento de longitud s corresponde con un ángulo central $\theta = s/r$.



Por último, el radio del círculo r está dado por el dibujo y la ecuación de Mara:





$$r = CA = \sqrt{(OC)^2 - 1} = \sqrt{\csc^2 \psi - 1} = \cot \psi$$

Así que

$$\theta = \frac{s}{\cot \psi} = s \tan \psi$$

Y por fin

$$\alpha = \alpha_0 + s \tan \psi$$

En el caso de la vuelta completa sobre γ,

$$s = 2\pi AB = 2\pi \frac{\text{sen } \psi}{\tan \psi}$$

y entonces $\alpha = \alpha_0 + 2\pi \text{sen } \psi$.

Ahora volvamos para confirmar que el transporte paralelo es el mismo para cualquier superficie tangente a una curva. Para hacer una prueba general, tomemos S y S' dos superficies que contienen una curva γ tales que $T_pS = T_pS'$ para cualquier $p \in \gamma$. Veamos que la derivada covariante a lo largo de γ coincide en ambas superficies.

En el contexto de superficies regulares encajadas en $\mathbb{R}^3$, la derivada covariante de cualquier campo vectorial $\mathbf{V}$ definido sobre γ es la proyección sobre el plano tangente de la derivada usual del campo visto como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, y al coincidir los planos tangentes se sigue inmediante que la derivada covariante coincide.

Para una demostración usando la definición de los símbolos de Christoffel, basta tomar dos parametrizaciones locales de S y S' que coincidan en los vectores básicos del plano tangente a lo largo de γ para obtener una igualdad en los símbolos de Christoffel de cada derivada covariante y también mismas funciones componentes del campo $\mathbf{V}$ a lo largo de γ, de lo que se sigue que las derivadas covariantes coinciden a lo largo de γ.

Usando cualquiera de estos argumentos, concluimos que el transporte paralelo de un vector $\mathbf{V}_0 \in \gamma$ coincide para ambas superficies porque el transporte paralelo es único (Teo. de existencia y unicidad).

Por último, la isometría local entre el cono tangente al paralelo menos una generatriz y la región de $\mathbb{R}^2$ delimitada en coordenadas polares por

$$0 < \rho, \qquad 0 < \theta < 2\pi \text{sen } \psi$$

se puede dar usando una aplicación que preserva la primera forma fundamental del cono y la del plano de acuerdo una parametrización con coordenadas polares. Precisamente por preservar la primera forma fundamental, dos superficies localmente isométricas tienen el mismo transporte paralelo, y hemos terminado.

Integral de la curvatura escalar en la esfera

Pruebe que la curvatura escalar en un punto p de una variedad Riemanniana n-dimensional M está dada por

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mathrm{Ric}_p(x) dS^{n-1}$$

de acuerdo a las definiciones

$$K(p) := \frac{1}{n} \sum_i \mathrm{Ric}_p(e_i)$$

y

$$\mathrm{Ric}_p(e_i) := \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle$$

para una base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM.

Como la función escalar Ric_p es una forma bilineal simétrica, sabemos que existen λ_i tales que si un vector tangente $x \in T_pM$ está dado por $x = \sum_i x_i e_i$, entonces

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2.$$

Como la integral está dada en la esfera unitaria, tendremos que $|x| = 1$, y entonces el vector en $\mathbb{R}^n$ definido por $\nu = (x_1, ..., x_n)$ también es unitario. Definamos también el vector $V = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)$. Con esto, nuestra integral se puede ver como

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mathrm{Ric}_p(x) dS^{n-1} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle V, \nu \rangle dS^{n-1}$$

Aplicando teorema de la divergencia vía Stokes y el hecho de que vol $B^n / \omega_{n-1} = 1/n$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle V, \nu \rangle dS^{n-1} &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{B^n} \mathrm{div}\ V dB^n \\
&= \frac{1}{n} \mathrm{div}\ V \\
&= \frac{\sum \lambda_i}{n} \\
&= \frac{\sum \mathrm{Ric}_p(e_i)}{n} \\
&= K(p)
\end{aligned}$$

Observación: las dos primeras igualdades en la expresión anterior requieren justificación.

Pullback de una forma diferencial

Sean $F : M \longrightarrow N$ una función suave y ω una k-forma diferencial en N. El **pullback** de ω es una k-forma en M dada por

$$(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_k) = \omega_{F(p)}(dF_pv_1, ..., dF_pv_k)$$

para $p \in M$ y $v_1, ..., v_k$ vectores en T_pM.

Eventualmente se definirá la integral de una forma (que puede medir un volumen) en una variedad usando el pullback de una carta coordenada:

$$\int_U \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega$$

llevando así la integral a $\mathbf{R}^n$.

Lema 14.16. Para $F : M \longrightarrow N$ suave,

(a) $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ es lineal sobre $\mathbf{R}$

(b) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$

(c) En cualquier carta coordenada,

$$F^*\left({\sum_I}' \omega_I dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k}\right) = {\sum_I}' (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge ... \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

Demostración.

(a) Para $a \in \mathbf{R}$ y dos k-formas en N,

$$\begin{aligned}(F^*(a\omega + \eta))_p(v_1, ..., v_k) &= (a\omega + \eta)_{F(p)}(dF_pv_1, ..., dF_pv_k) \\ &= a\omega_{F(p)}(dF_pv_1, ..., dF_pv_k) + \eta_{F(p)}(dF_pv_1, ..., dF_pv_k) \\ &= a(F^*\omega)_p(v_1, ..., v_k) + (F^*\eta)_p(v_1, ..., v_k)\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(F^*(\omega\wedge\eta))_p(v_1,...,v_{k+l}) &= (\omega\wedge\eta)_{F(p)}(dF_pv_1,...,dF_pv_{k+l})\\
&= (\omega_{F(p)}\wedge\eta_{F(P)})(dF_pv_1,...,dF_pv_{k+l})\\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\omega_{F(p)}\otimes\eta_{F(p)})(dF_pv_1,...,dF_pv_{k+l})\\
&= \frac{1}{k!l!}\sum \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_{F(p)}(dF_pv_{\sigma(1)},...,dF_pv_{\sigma(k)})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\eta_{F(p)}(dF_pv_{\sigma(k+1)},...,dF_pv_{\sigma(l)})\\
&= \frac{1}{k!l!}\sum \mathrm{sgn}(\sigma)F^*\omega(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)})F^*\eta(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+l)})\\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}((F^*\omega)_p\otimes(F^*\eta)_p)(v_1,...,v_{k+l})\\
&= (F^*\omega)_p\wedge(F^*\eta)_p(v_1,...,v_{k+l})
\end{aligned}
$$

(c) En clase vimos un caso muy sencillo pensando en $N=\mathbf{R}^2$ con coordenadas (y^1,y^2). Mostramos que el pullback de una 2-forma $\omega=\omega_{12}dy^1\wedge dy^2$ es:

$$
\begin{aligned}
F^*(\omega_{12}dy^1\wedge dy^2)_p(v_1,v_2) &= (\omega_{12}dy^1\wedge dy^2)_{F(p)}(dF_p(v_1),dF_p(v_2))\\
&= \omega_{12}(F(p))\frac{1}{1!1!}\sum \mathrm{sgn}(\sigma)dy^1_{F(p)}(dF_p(v_{\sigma(1)})dy^2_{F(p)}(dF_p(v_{\sigma(2)})\\
&= (\omega_{12}\circ F)(p)\sum \mathrm{sgn}(\sigma)d(y^1\circ F)_p(v_{\sigma(1)})d(y^2\circ F)_p(v_{\sigma(2)})\\
&= (\omega_{12}\circ F)(p)(d(y^1\circ F)_p\wedge d(y^2\circ F)_p)(v_1,v_2)\\
&= (\omega_{12}\circ F)(p)(d(y^1\circ F)\wedge d(y^2\circ F))_p(v_1,v_2)
\end{aligned}
$$

Comentamos que esta prueba se puede tomar como el caso base para una inducción sobre k en una variedad N de dimensión n. (En la prueba nunca usamos que la dimensión de N fuera 2.)

Ley de transformación para los coeficientes de una conexión

Sean M una variedad suave con o sin frontera y ∇ una conexión en TM. Tomemos dos marcos locales (E_i) y $(\widetilde{E}_j)$ de TM en algún abierto $U \subseteq M$. Supongamos que se tiene la relación

$$\widetilde{E}_i = A_i^j E_j \tag{1}$$

para alguna matriz de funciones A_i^j. Si los coeficientes de Christoffel de ∇ respecto a (E_i) son Γ_{ij}^k y respecto a $(\widetilde{E}_j)$ son $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$, entonces

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + \left(A^{-1}\right)_p^k A_i^q E_q(A_j^p)$$

Demostración

Sabemos que:

$$\nabla_{\widetilde{E}_i} \widetilde{E}_j = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \widetilde{E}_k$$

Y sustituyendo con (1):

$$\nabla_{A_i^q E_q} (A_j^p E_p) = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^r E_r$$

Ahora volteemos la identidad anterior y usemos las propiedades de linealidad y Leibniz de ∇:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^r E_r &= A_i^q \nabla_{E_q} (A_j^p E_p) \\
&= A_i^q \left(E_q(A_j^p) E_p + A_j^p \nabla_{E_q} E_p \right) \\
&= A_i^q \left(E_q(A_j^p) E_p + A_j^p \Gamma_{qp}^r E_r \right) \\
&= A_i^q E_q(A_j^p) E_p + A_i^q A_j^p \Gamma_{qp}^r E_r
\end{aligned}$$

Notemos que en él último sumando de la última expresión los índices p y r son mudos. Comparando con el resultado al que queremos llegar, conviene intercambiarlos. De una vez también vamos a intercambiar la r por la p en el lado izquierdo de la ecuación. Obtenemos:

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^p E_p = A_i^q E_q(A_j^p) E_p + A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p E_p$$

Podemos quitar el campo E_p para obtener que dada una p,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^p &= A_i^q E_q(A_j^p) + A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p \\
\iff (A^{-1})_p^k A_k^p \widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p) + (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p \\
\iff \widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p) + (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p
\end{aligned}$$

Donde el último paso se puede pensar como un producto de matrices.

Pullback de una conexión

Sean M y $\widetilde{M}$ variedades suaves con o sin frontera. Supongamos que $\widetilde{\nabla}$ es una conexión en $T\widetilde{M}$ y $\varphi : M \longrightarrow \widetilde{M}$ es un difeomorfismo. Entonces, el mapeo

$$\varphi^*\widetilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y = (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y$$

es una conexión en TM.

Esta proposición sirve para demostrar la naturalidad de la conexión de Levi-Civita: si φ fuera una isometría de variedades Riemannianas, el pullback de la conexión de Levi-Civita de $\widetilde{M}$ es la conexión de Levi-Civita de M.

Vamos a la demostración. Hay que ver que $\varphi^*\widetilde{\nabla}$ es $\mathbb{R}$-lineal en el segundo argumento, $\mathcal{C}^\infty$-lineal en el primer argumento y Leibniz en el segundo argumento.

1.

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X(aY_1 + Y_2) &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_*(aY_1 + Y_2) \\
&= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} (a\varphi_* Y_1 + \varphi_* Y_2) \\
&= (\varphi^{-1})_* (a\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_1 + \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_2) \\
&= a(\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_1 + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_2 \\
&= a(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y_1 + (\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y_2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\widetilde{\nabla})_{(fX_1 + X_2)} Y &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_*(fX_1 + X_2)} \varphi_* Y \\
&= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* fX_1 + \varphi_* X_2} Y \\
&= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{(f \circ \varphi^{-1})\varphi_* X_1 + \varphi_* X_2} Y
\end{aligned}$$

Definamos $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ para obtener

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\widetilde{\nabla})_{(fX_1 + X_2)} \varphi_* Y &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\tilde{f}\varphi_* X_1 + \varphi_* X_2} \varphi_* Y \\
&= (\varphi^{-1})_* (\tilde{f}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y) \\
&= (\varphi^{-1})_* (\tilde{f}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y) + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\
&= \tilde{f} \circ \varphi^{-1} (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\
&= f(\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\
&= f(\varphi^*\widetilde{\nabla})_{X_1} \varphi_* Y + (\varphi^*\widetilde{\nabla})_{X_2} \varphi_* Y
\end{aligned}$$

3. Usando la misma notación para $\tilde{f}$,

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X(fY) &= (\varphi^{-1})_*\widetilde{\nabla}_{\varphi_*X}\varphi_*(fY) \\
&= (\varphi^{-1})_*\widetilde{\nabla}_{\varphi_*X}\tilde{f}\varphi_*\varphi_*Y \\
&= (\varphi^{-1})_*\left(\varphi_*X\tilde{f}\varphi_*Y + \tilde{f}\widetilde{\nabla}\widetilde{\varphi_*X}\varphi_*Y\right) \\
&= (\varphi^{-1})_*\varphi_*X\tilde{f}\varphi_*Y + (\varphi^{-1})_*(\tilde{f}\widetilde{\nabla}_{\varphi_*X}\varphi_*Y) \\
&= (\varphi_*X\tilde{f}\circ\varphi^{-1})(\varphi^{-1})_*\varphi_*Y + (\tilde{f}\circ\varphi^{-1})(\varphi^{-1})_*\widetilde{\nabla}_{\varphi_*X}\varphi_*Y \\
&= Xf(\varphi^{-1})_*\varphi_*Y + f(\varphi^{-1})_*\widetilde{\nabla}_{\varphi_*X}\varphi_*Y \\
&= XfY + f(\varphi^*\widetilde{\nabla})_XY
\end{aligned}$$

Faltó aclarar la igualdad del primer sumando en el último paso

Campos vectoriales y flujos

(Problemas de Flujos #4). Dé un ejemplo de campos vectoriales X, Y y W en $\mathbb{R}^2$ tales que $X = Y = \frac{\partial}{\partial x}$ a lo largo del eje x pero que $\mathcal{L}_X W \neq \mathcal{L}_Y W$.

Consideremos los campos que hacen esto algebraicamente más sencillo:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

(Así Y se vuelve $\frac{\partial}{\partial x}$ en el eje x.)

Veamos si funciona:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X W_p(f) &= [X, W]_p(f) \\
&= X_p W(f) - W_p X(f) \\
&= \left.\frac{\partial W(f)}{\partial x}\right|_p - W_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y W_p(f) &= [Y, W]_p(f) \\
&= Y_p W(f) - W_p Y(f) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)_p W(f) - W_p\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) f \\
&= \left.\frac{\partial W(f)}{\partial x}\right|_p + y\left.\frac{\partial W(f)}{\partial y}\right|_p - W_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - W_p\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \mathcal{L}_X W_p(f) + y\left.\frac{\partial W(f)}{\partial y}\right|_p - W_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Así que, por ejemplo,

$$W = \frac{\partial}{\partial x}$$

implicaría que

$$y\left.\frac{\partial W(f)}{\partial y}\right|_p - W_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

que no se hace cero en el origen para todas las funciones continuas y por lo tanto $\mathcal{L}_X W_{(0,0)} - \mathcal{L}_Y W_{(0,0)} \neq 0$.

1 Flujos y homotopía

(Flujos #3) Supongamos que M es una variedad suave y compacta que admite un campo vectorial que no se anula en ninguna parte. Demuestre que existe un mapeo suave $F : M \longrightarrow M$ que es homotópico a la identidad y no tiene puntos fijos.

Tomemos un campo vectorial X en M que no se anule en ninguna parte, de forma que existan coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$ tales que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ en una vecindad de cualquier punto. En este caso, una curva integral $\theta(t, p)$ de X tiene coordenadas $(p^1 + t, 0, ..., 0)$ cerca de p. Una curva de este estilo puede tomar valores de t siempre que no se salga del abierto donde tenemos esas coordenadas, así que nuestra variable se mueve en un dominio acotado, digamos $0 \leq t \leq t_p$.

Hemos construido una cubierta abierta $\{U_p\}_{p \in M}$ de nuestra variedad, que es compacta, así que hay una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$. A cada uno de estos abiertos corresponde un valor máximo al que puede llegar el parámetro de las curvas integrales, digamos t_i.

Tomemos $T = \min t_i$ y la función $F : M \longrightarrow M$ que, digamos, "avanza T unidades de tiempo" a lo largo de las curvas integrales de X. Dicho de otra forma, $F(p) = \theta(p, T)$.

Ya tenemos una función, sólo queda probar es homotópica a la identidad y que no tiene puntos fijos. Comencemos con lo segundo.

Cualquier punto p de la variedad está contenido en uno de los k abiertos de la subcubierta finita, donde la curva intgral que pasa por p tiene coordenadas $(p^1 + t, 0, ..., 0)$. No queda de otra que $p = \theta(p, 0) \neq \theta(p, T) = F(p)$.

Finalmente, una homotopía con la identidad es $H(s, p) = \theta(p, sT)$.

Mapeos multilineales

(Álgebra tensorial 1) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Existe un isomorfismo natural (i.e. independiente de la base) entre $T^{(k+l,l)}$ y el espacio de todos los mapeos multilineales:

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{\ell \text{ veces}} \longrightarrow V$$

Para un mapeo multilineal T como arriba podemos definir

$$\hat{T}(\omega_1, ..., \omega_{k+1}, v_1, ..., v_\ell) = \omega_{k+1}(T(\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_\ell)$$

La asociación $T \mapsto \hat{T}$ es el isomorfismo que buscamos. La linealidad se sigue trivialmente de la linealidad T y de la forma diferencial ω_{k+1}. Para ver que es inyectiva hay que invocar el resultado de que si todos los funcionales de un espacio vectorial (en este caso ω_{k+1}, que podemos variar libremente) se hacen cero en el mismo vector (en este caso $T(\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_\ell)$), entonces ese vector debe ser el cero. *Falta*

Lema de Poincaré para conjuntos estrellados

(Álgebra tensorial 2) Si U es un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$, entonces cualquier 1-forma cerrada definida en U es exacta.

Mostraremos que

$$d\int_{\gamma_x}\omega = \omega$$

donde $\gamma_x(t) = tx$ para $0 \le t \le 1$.

(El resultado es válido para conjuntos estrellados centrados en 0, cosa que podemos suponer sin pérdida de generalidad porque la traslación adecuada manda formas cerradas en cerradas, y exactas en exactas.)

Supongamos que $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$. Para encontrar la derivada exterior de la integral basta encontrar sus derivadas parciales.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^j}\int_{\gamma_x}\omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j}\int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x^i dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\omega_i(tx)x^i dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx)tx^i + \omega_j(tx)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx)tx^i + \omega_j(tx)\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} t\omega_j(tx) dt \\
&= \omega_j(x)
\end{aligned}$$

Usando que como ω es cerrada,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

Tensores: cambios de coordenadas

1

Veamos primero que si $i \neq j$, $A^i_j = 0$. Consideremos las bases

$$\begin{aligned}\xi &= \{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} \\ \eta &= \{v_1, ..., v_i, ..., 2v_j, ..., v_n\}\end{aligned}$$

del espacio V de dimensión n. También tenemos sus correspondientes bases duales:

$$\begin{aligned}\xi^* &= \{v_1^*, ..., v_i^*, ..., v_j^*, ..., v_n^*\} \\ \eta^* &= \{v_1^*, ..., v_i^*, ..., (2v_j)^*, ..., v_n^*\}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}A(v_i^*, v_j) = {}^{\xi}A^i_j = {}^{\eta}A^i_j &= A(v_i^*, 2v_j) = 2A(v_i^*, v_j) \\ &\iff A(v_i^*, v_j) = 0 \\ &\iff {}^{\xi}A^i_j = 0\end{aligned}$$

para cualquier base de V.

Como observación, notemos que si $i = j$, la ecuación anterior se vuelve

$$A(v_j^*, v_j) = {}^{\xi}A^j_j = {}^{\eta}A^j_j = A((2v_j)^*, 2v_j) = 2A(\tfrac{1}{2}v_j^*, v_j) = A(v_j^*, v_j)$$

ya que $(2v_j)^* = \frac{1}{2}v_j^*$ por la construcción natural de la base dual.

Ahora veamos que $A^i_i = A^j_j$. Tomemos las bases ordenadas

$$\begin{aligned}\xi &= \{v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n\} \\ \eta &= \{v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n\}\end{aligned}$$

y sus bases duales ξ^* y η^*. Entonces,

$$\begin{aligned}{}^{\xi}A^i_i = {}^{\eta}A^i_i &\iff A(v_i^*, v_i) = A(v_j^*, v_j) \\ &\iff {}^{\xi}A^i_i = {}^{\xi}A^j_j\end{aligned}$$

Para cualquier base de V. Tomando $A^i_i = \lambda$ se obtiene el resultado.

2 (a)

Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $q \in \mathbb{R}^2$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
v \otimes w(p,q) &= v(p)w(q) \\
&= \left(\sum_i v_i dx^i\right)(p)\left(\sum_j w_j dy^j\right)(q) \\
&= \sum_i v_i dx^i(p) \sum_j w_j dy^j(q) \\
&= \sum_{i,j} v_i w_j dx^i(p) dy^j(q) \\
&= \sum_{i,j} v_i w_j dx^i \otimes dy^j(p,q) \\
&= \left(\sum_{i,j} v_i w_j dx^i \otimes dy^j\right)(p,q)
\end{aligned}
$$

2 (b)

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
T_A(v) = &(av_1 + bv_2 + cv_3)dx^1 \\
&+ (dv_1 + ev_2 + fv_3)dx^2 \\
&+ (gv_1 + hv_2 + iv_3)dx^3
\end{aligned}
$$

Y que:

$$
\begin{aligned}
T_B(w) = &(pw_1 + qw_2)dy^1 \\
&+ (rw_1 + sw_2)dy^2
\end{aligned}
$$

Así que:

$$\begin{aligned}
T_A(v)\otimes T_B(w) &= (av_1+bv_2+cv_3)(pw_1+qw_2)dx^1\otimes dy^1\\
&+(dv_1+ev_2+fv_3)(pw_1+qw_2)dx^2\otimes dy^1\\
&+(gv_1+hv_2+iv_3)(pw_1+qw_2)dx^3\otimes dy^1\\
&+(av_1+bv_2+cv_3)(rw_1+sw_2)dx^1\otimes dy^2\\
&+(dv_1+ev_2+fv_3)(rw_1+sw_2)dx^2\otimes dy^2\\
&+(gv_1+hv_2+iv_3)(rw_1+sw_2)dx^3\otimes dy^2\\
&=(apv_1w_1+bpv_2w_1+cpv_3w_1+aqv_1w_2+bqv_2w_2+cqv_3w_3)dx^1\otimes dy^1\\
&+(dpv_1w_1+epv_2w_1+fpv_3w_1+dqv_1w_2+eqv_2w_2+fqv_3w_3)dx^2\otimes dy^1\\
&+(gpv_1w_1+hpv_2w_1+ipv_3w_1+gqv_1w_2+hqv_2w_2+iqv_3w_3)dx^3\otimes dy^1\\
&+(arv_1w_1+brv_2w_1+crv_3w_1+asv_1w_2+bsv_2w_2+csv_3w_3)dx^1\otimes dy^2\\
&+(drv_1w_1+erv_2w_1+frv_3w_1+dsv_1w_2+esv_2w_2+fsv_3w_3)dx^2\otimes dy^2\\
&+(grv_1w_1+hrv_2w_1+irv_3w_1+gsv_1w_2+hsv_2w_2+isv_3w_3)dx^3\otimes dy^2
\end{aligned}$$

Así es que para la base ordenada

$$dx^1\otimes dy^1, dx^2\otimes dy^1, dx^3\otimes dy^1, dx^1\otimes dy^2, dx^2\otimes dy^2, dx^3\otimes dy^2$$

tenemos que:

$$\begin{pmatrix} ap & bp & cp & aq & bq & cq\\ dp & ep & fp & dq & eq & fq\\ gp & hp & ip & gq & hq & iq\\ ar & br & cr & as & bs & cs\\ dr & er & fr & ds & es & fs\\ gr & hr & ir & gs & hs & is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1w_1\\ v_2w_1\\ v_3w_1\\ v_1w_2\\ v_2w_2\\ v_3w_2 \end{pmatrix}$$

es el vector de coordenadas de $(T_A\otimes T_B)(v\otimes w)$.