

Ejercicios de Geometría Diferencial (Curso de posgrado)

Este documento es una compilación de ejercicios para el curso de posgrado de Geometría Diferencial. Aunque hay varias cosas que se podrían mejorar, también hay ejercicios bien trabajados. ¡Todxs son bienvenidos a intervenir este documento!

- Pueden descargar una copia de los archivos en [GitHub](#)
- Y también pueden editar directamente el documento en [OverLeaf](#).

Índice

1	Cambios de coordenadas	2
2	Formas en la esfera	4
3	Función de transición	6
4	Forma de volumen	7
5	Inmersión isométrica del toro plano en \mathbb{R}^2	9
6	Transporte paralelo en el cono	10
7	Integral de la curvatura escalar en la esfera	13
8	Pullback de una forma diferencial	14
9	Ley de transformación para los coeficientes de una conexión	16
10	Pullback de una conexión	17
11	Campos vectoriales y flujos	19
12	Flujos y homotopía	20
13	Mapeos multilineales	21
14	Lema de Poincaré para conjuntos estrellados	22
15	Tensores: cambios de coordenadas	23

1 Cambios de coordenadas

Aquí falta algo de contexto...

Veamos que

$$\det d(\Psi^{-1} \circ \Phi) = \det \left(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,2}^2 > 0.$$

Primero notemos que

$$\Psi^{-1} \circ \Phi = (y^1 \circ \phi, y^2 \circ \phi, c_1, c_2)$$

Donde y^1 y y^2 son las funciones coordenadas de ψ^{-1} y c_i está dada por

$$(x_1, x_2, a_1, a_2) \mapsto a_1 \frac{\partial(y^1 \circ \phi)}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial(y^1 \circ \phi)}{\partial x^2}$$

Las primeras dos funciones coordenadas de $\Psi^{-1} \circ \Phi$ dependen sólo de las dos primeras entradas del punto que escojamos en el dominio $\Omega \times \mathbb{R}^2$. De igual forma, las últimas dos funciones coordenadas dependen sólo de las dos últimas entradas.

Esto hace que la matriz de $d(\Psi^{-1} \circ \Phi)$ sea de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

De hecho, por cómo definí $\Psi^{-1} \circ \Phi$, es claro que

$$A = B = \left(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,2}$$

Sólo falta justificar la definición de las funciones c_i . De acuerdo al cambio de coordenadas $\psi^{-1} \circ \phi$,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial(y^1 \circ \phi)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial(y^2 \circ \phi)}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^2},$$

de tal forma que a un vector de la forma

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

le corresponden coordenadas (c_1, c_2) en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$.

Las 1-variedades son planas

Pruebe que cualquier 1-variedad Riemanniana es plana.

Sea M una variedad Riemanniana 1-dimensional. De acuerdo a la definición de Lee, para ver que M es plana necesitamos encontrar una isometría local entre M y \mathbb{R} . Esto quiere decir que para cualquier punto p en M existe una vecindad U de p y una isometría $\varphi : V \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ para algún abierto V de \mathbb{R} . Suponiendo que g es la métrica de M y \bar{g} es la métrica usual de \mathbb{R} , debemos demostrar que $\varphi^*g = \bar{g}$.

Sabemos que el espacio de $(2,0)$ -tensores simétricos en \mathbb{R} es dimensión 1, de tal forma que $\varphi^*g = f\bar{g}$ para alguna función $f \in C^\infty$. Tenemos:

$$f = f\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \varphi^*g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = g\left(\varphi_*\frac{\partial}{\partial t}, \varphi_*\frac{\partial}{\partial t}\right) = |\varphi'(t)|^2$$

Así que para concluir basta mostrar que $f = |\varphi'(t)|^2 = 1$. Es decir, basta ver que para cualquier punto de M hay una parametrización por longitud de arco.

Dada la parametrización φ que ya tenemos, podemos reajustar usando la función

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\varphi'(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{g\left(\varphi_*\frac{\partial}{\partial t}, \varphi_*\frac{\partial}{\partial t}\right)} dt$$

para $t_0, t \in V$. Como φ es isometría, $s' = |\varphi'(t)| \neq 0$, y s debe tener inversa local s^{-1} , cuya derivada es

$$\frac{ds^{-1}}{dt} = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))}$$

Por fin, si definimos $\psi = \varphi \circ s^{-1}$ obtenemos

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varphi'(s^{-1}(t))}{|\varphi'(s^{-1}(t))|} = 1$$

De tal forma que ψ es una parametrización local de M por longitud de arco.

2 Formas en la esfera

Faltó escribir la pregunta...

1. a Supongamos que X es un campo vectorial definido en $U \cap V$. Expresándolo de acuerdo a la base “norte”, tenemos que:

$$dx_S(X) = dx_S \left(X^1 \frac{\partial}{\partial x_N} + X^2 \frac{\partial}{\partial y_N} \right) = X^1 dx_S \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right) + X^2 dx_S \left(\frac{\partial}{\partial y_N} \right)$$

Recordemos las expresiones de cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_N} &= \frac{\partial x_S}{\partial x_N} \frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial x_N} \frac{\partial}{\partial y_S} \\ \frac{\partial}{\partial y_N} &= \frac{\partial x_S}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial y_S} \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos que

$$\begin{aligned} dx_S(X) &= dx_N(X) dx_S \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N} \frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial x_N} \frac{\partial}{\partial y_S} \right) \\ &\quad + dy_N(X) dx_S \left(\frac{\partial x_S}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial x_S} + \frac{\partial y_S}{\partial y_N} \frac{\partial}{\partial y_S} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N} dy_N \right) (X) \end{aligned}$$

Donde, de acuerdo al cambio de coordenadas,

$$\frac{\partial x_S}{\partial x_N} = \frac{\partial}{\partial x_N} \frac{x_N}{r_N} = \frac{y_N^2 - x_N^2}{r_N^2}$$

Y también:

$$\frac{\partial x_S}{\partial y_N} = \frac{-2x_N y_N}{r_N^2}$$

El mismo razonamiento para dy_S nos lleva a que:

$$dy_S = \frac{\partial y_S}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial y_S}{\partial y_N} dy_N$$

Donde:

$$\frac{\partial y_S}{\partial x_N} = \frac{-2x_N y_N}{r_N^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y_S}{\partial y_N} = \frac{x_N^2 - y_N^2}{r_N^2}$$

Para expresar el producto cuña, simplemente sustituimos:

$$\begin{aligned}
 dx_S \wedge dy_S &= \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N} dy_N \right) \wedge \left(\frac{\partial y_S}{\partial x_N} dx_N + \frac{\partial y_S}{\partial y_N} dy_N \right) \\
 &= \frac{\partial x_S}{\partial x_N} \frac{\partial y_S}{\partial y_N} dx_N \wedge dy_N + \frac{\partial x_S}{\partial y_N} \frac{\partial y_S}{\partial x_N} dy_N \wedge dx_N \\
 &= \left(\frac{\partial x_S}{\partial x_N} \frac{\partial y_S}{\partial y_N} - \frac{\partial x_S}{\partial y_N} \frac{\partial y_S}{\partial x_N} \right) dx_N \wedge dy_N
 \end{aligned}$$

Sustituyendo más...

$$\begin{aligned}
 dx_S \wedge dy_S &= \left(\frac{y_N^2 - x_N^2}{r_N^2} \frac{x_N^2 - y_N^2}{r_N^2} - \frac{-2x_N y_N}{r_N^2} \frac{-2x_N y_N}{r_N^2} \right) dx_N \wedge dy_N \\
 &= \left(\frac{-x_N^4 + 2x_N^2 y_N^2 - y_N^4 - 4x_N^2 y_N^2}{r_N^4} \right) dx_N \wedge dy_N \\
 &= \left(\frac{-x_N^4 - 2x_N^2 y_N^2 - y_N^4}{r_N^4} \right) dx_N \wedge dy_N \\
 &= -\frac{r_N^2}{r_N^4} dx_N \wedge dy_N \\
 &= -\frac{1}{r_N^2} dx_N \wedge dy_N
 \end{aligned}$$

1. b Primero notemos que

$$\begin{aligned}
 (1 + r_S)^2 &= \left(1 + \frac{x_N^2}{r_N^2} + \frac{y_N^2}{r_N^2} \right)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{r_N^2}{r_N^2} \right)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{r_N^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

Y ahora sustituimos una última vez:

$$\begin{aligned}
 \omega|_{U \cap V} &= \frac{4}{(1 + r_S)^2} dx_S \wedge dy_S \\
 &= \frac{4}{\left(1 + \frac{1}{r_N^2} \right)^2} \left(-\frac{1}{r_N^2} \right) dx_N \wedge dy_N \\
 &= \frac{-4}{(1 + r_N^2)^2} dx_N \wedge dy_N
 \end{aligned}$$

3 Función de transición

Calcule la función de transición de $T\mathbb{S}^2$ asociada a las dos trivializaciones locales determinadas por la proyección estereográfica de la esfera \mathbb{S}^2 . Siguiendo el comentario de Lee, tenemos que la función τ que buscamos es la matriz jacobiana asociada al mapeo de transición entre las dos proyecciones estereográficas.

Supongamos que las proyecciones desde el polo norte y sur son φ_N y φ_S . Sabemos que

$$\varphi_N^{-1}(x, y) = \frac{(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\varphi_S(x, y, z) = \frac{(x, y)}{1 + z}$$

de forma que la composición es

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x, y) &= \frac{\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)}{1 + \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} \\ &= \frac{(2x, 2y)}{x^2 + y^2 + 1 + x^2 + y^2 - 1} \\ &= \frac{(2x, 2y)}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Y la matriz jacobiana de esta función es *Falta*

4 Forma de volumen

Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada. Entonces existe una única n -forma dV en M que llamaremos *forma de volumen* que satisface cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

- (1) Si $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$ es cualquier comarco ortonormal local orientado en T^*M , entonces

$$dV = \epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n$$

- (2) Si (E_1, \dots, E_n) es cualquier marco ortonormal local orientado de TM , entonces

$$dV(E_1, \dots, E_n) = 1$$

- (3) Para cualesquiera cartas coordenadas locales orientadas (x_1, \dots, x_n) ,

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Sabemos que para cualquier punto $p \in M$ hay un marco ortonormal local orientado (E_1, \dots, E_n) , que tiene un comarco asociado $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$. Podemos definir dV como en (2) y demostrar que no depende de la elección del marco. Es decir, que si $(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$ es otro marco ortonormal orientado y definimos análogamente \tilde{dV} , obtenemos que $dV = \tilde{dV}$, para lo cual es suficiente ver que

$$dV(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n) = \tilde{dV}(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n) = 1$$

Tenemos para los dos marcos la relación

$$\tilde{E}_i = A_i^j E_j$$

para algunas funciones suaves A_i^j . Y de hecho (Lee, Introduction to Smooth Manifolds),

Proposition 14.9. *Suppose V is an n -dimensional vector space and $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. If $T: V \rightarrow V$ is any linear map and v_1, \dots, v_n are arbitrary vectors in V , then*

$$\omega(Tv_1, \dots, Tv_n) = (\det T)\omega(v_1, \dots, v_n). \quad (14.2)$$

así que

$$\begin{aligned} dV(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n) &= \epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n) \\ &= (\det A_i^j) \epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(E_1, \dots, E_n) \\ &= \det A_i^j \end{aligned}$$

Ahora como los dos marcos son ortonormales, la matriz (A_i^j) es una transformación lineal que preserva la métrica y fija el origen, de tal forma que es una matriz ortogonal en el grupo $O(n)$. Y como además las dos bases son orientadas, podemos suponer que $\det A_i^j = 1$.

Ahora veamos la unicidad de dV . Tomemos dV de acuerdo a la definición que hemos dado y supongamos que α es otra forma diferenciable que satisface (2). Notemos que $\bigwedge^n(M)$ está generada por dV , de forma que debe existir f suave tal que $dV = f\alpha$. Basta mostrar que $f = 1$. Y sí, porque

$$1 = dV(E_1, \dots, E_n) = \alpha(E_1, \dots, E_n)$$

Por último comprobemos la equivalencia de (3). Como en los incisos anteriores, partimos de que existen funciones suaves f y A_j^i tales que

$$dV = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad \text{y} \quad \partial x_i = A_i^j E_j$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f &= f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n (\partial x_1, \dots, \partial x_n) \\ &= dV(\partial x_1, \dots, \partial x_n) \\ &= dV(A_1^j E_j, \dots, A_n^j E_j) \\ &= \det A_i^j dV(E_1, \dots, E_n) \\ &= \det A_i^j \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \partial x_i, \partial x_j \rangle = \langle A_i^k E_k, A_j^\ell E_\ell \rangle \\ &= A_i^k A_j^\ell \langle E_k, E_\ell \rangle = A_i^k A_j^\ell \delta_{k\ell} = \sum_k A_i^k A_j^k \end{aligned}$$

luego este número es la entrada (i, j) de la matriz $A^T A$ y así

$$\det g_{ij} = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$$

De esta forma, $f = \pm \sqrt{\det A}$. Como los dos marcos son orientados, por definición el determinante de la matriz (A_j^i) debe ser positivo, y como este determinante es justamente f , tomamos el signo positivo y hemos terminado.

Observación: falta comprobar que (3) implica (2).

5 Inmersión isométrica del toro plano en \mathbb{R}^2

Dé una inmersión isométrica del toro plano, \mathbb{T}^n a \mathbb{R}^{2n} .

(Creo que no está del todo bien) Para dar una definición correcta de \mathbb{T}^n , consideremos la función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (\theta_1, \dots, \theta_n) &\mapsto (\cos \theta_1, \sin \theta_1, \dots, \cos \theta_n, \sin \theta_n)\end{aligned}$$

y veamos que es una inmersión isométrica cuya imagen es $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ veces}}$.

En primer lugar,

$$d_p \varphi = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\sin \theta_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cos \theta_n \end{pmatrix}$$

es de rango máximo, por lo que es inyectiva en cualquier punto.

Para ver que se trata de una isometría, basta notar que

$$\langle d_p \varphi e_i, d_p \varphi e_j \rangle = \langle (0, \dots, -\sin \theta_i, \cos \theta_i, \dots, 0), (0, \dots, -\sin \theta_j, \cos \theta_j, \dots, 0) \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

Una inmersión isométrica de \mathbb{T}^n a \mathbb{R}^{2n} es la identidad restringida a la imagen de φ .

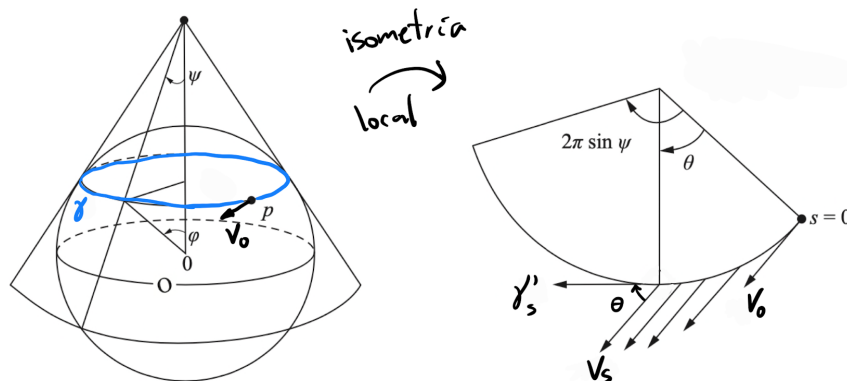
6 Transporte paralelo en el cono

Considere la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sea γ un paralelo de latitud ψ . (Por lo que, si $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ son coordenadas esféricas sobre S^2 , entonces $\psi = \pi/2 - \varphi$). Sea V_0 un vector tangente a S^2 en algún punto de γ , y sea α_0 el ángulo que forma V_0 con γ . Deduzca una expresión para α , el ángulo que forma el transporte paralelo de V_0 a lo largo de γ , en términos de la latitud ψ y la longitud del recorrido sobre γ . En particular, encuentre una expresión para α cuando el recorrido es una vuelta completa sobre γ .

Sugerencia: considere el cono tangente a S^2 a lo largo de γ . Demuestre que el transporte paralelo de V_0 a lo largo de γ no depende de si se toma relativo a S^2 o al cono.

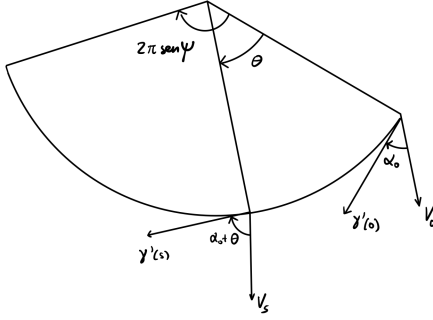
Una observación de Dani unos meses después... ¿Qué no podemos simplemente, como Do Carmo, suponer que nuestro paralelo γ está parametrizado por longitud de arco y así la relación entre s y θ es trivial? (son iguales) Al final, para calcular α tras una vuelta completa, volvemos a obtener $2\pi \sin \psi + \alpha_0$.

(Consultar do Carmo, Geometría diferencial de curvas y superficies). Supongamos por ahora que la sugerencia es cierta y que hay una isometría local natural entre el cono menos una generatriz y una región abierta de \mathbb{R}^2 .



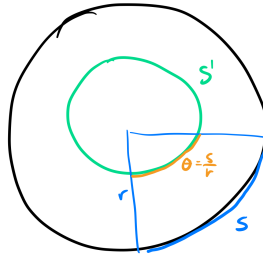
Comenzaremos por observar que, en el caso en el que V_0 fuera el vector velocidad de una parametrización por longitud de arco de γ , el ángulo orientado entre el transporte paralelo de V_0 y γ' tras un desplazamiento de ángulo central θ sería exactamente de θ . Esto se debe a las dos suposiciones del párrafo anterior y a que el transporte paralelo en el plano es trivial.

Acercándonos a nuestro problema, si V_0 fuera cualquier otro vector cuyo ángulo con el vector γ'_0 fuera de α_0 , no queda más remedio que el ángulo orientado entre el transporte paralelo de V_0 y γ' después de un desplazamiento de ángulo central θ sea de $\alpha_0 + \theta = \alpha$.

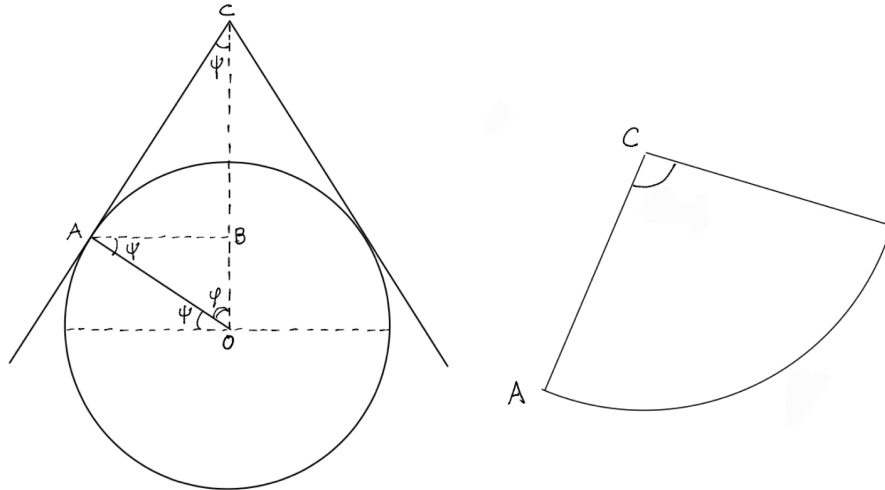


Para dar una descripción de α en términos de la latitud ψ y la longitud del recorrido sobre γ basta dar la relación entre el ángulo central del recorrido θ y la longitud del recorrido s . Esto depende del tamaño del paralelo, que está determinado por ψ .

Un desplazamiento de longitud s a lo largo de un círculo unitario corresponde con un ángulo central $\theta = s$. Si el círculo es de radio r , un desplazamiento de longitud s corresponde con un ángulo central $\theta = s/r$.



Por último, el radio del círculo r está dado por el dibujo y la ecuación de Mara:



$$r = CA = \sqrt{(OC)^2 - 1} = \sqrt{\csc^2 \psi - 1} = \cot \psi$$

Así que

$$\theta = \frac{s}{\cot \psi} = s \tan \psi$$

Y por fin

$$\alpha = \alpha_0 + s \tan \psi$$

En el caso de la vuelta completa sobre γ ,

$$s = 2\pi AB = 2\pi \frac{\text{sen } \psi}{\tan \psi}$$

y entonces $\alpha = \alpha_0 + 2\pi \text{sen } \psi$.

Ahora volvamos para confirmar que el transporte paralelo es el mismo para cualquier superficie tangente a una curva. Para hacer una prueba general, tomemos S y S' dos superficies que contienen una curva γ tales que $T_p S = T_p S'$ para cualquier $p \in \gamma$. Veamos que la derivada covariante a lo largo de γ coincide en ambas superficies.

En el contexto de superficies regulares encajadas en \mathbb{R}^3 , la derivada covariante de cualquier campo vectorial \mathbf{V} definido sobre γ es la proyección sobre el plano tangente de la derivada usual del campo visto como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , y al coincidir los planos tangentes se sigue inmediatamente que la derivada covariante coincide.

Para una demostración usando la definición de los símbolos de Christoffel, basta tomar dos parametrizaciones locales de S y S' que coincidan en los vectores básicos del plano tangente a lo largo de γ para obtener una igualdad en los símbolos de Christoffel de cada derivada covariante y también mismas funciones componentes del campo \mathbf{V} a lo largo de γ , de lo que se sigue que las derivadas covariantes coinciden a lo largo de γ .

Usando cualquiera de estos argumentos, concluimos que el transporte paralelo de un vector $\mathbf{V}_0 \in \gamma$ coincide para ambas superficies porque el transporte paralelo es único (Teo. de existencia y unicidad).

Por último, la isometría local entre el cono tangente al paralelo menos una generatriz y la región de \mathbb{R}^2 delimitada en coordenadas polares por

$$0 < \rho, \quad 0 < \theta < 2\pi \text{sen } \psi$$

se puede dar usando una aplicación que preserva la primera forma fundamental del cono y la del plano de acuerdo una parametrización con coordenadas polares. Precisamente por preservar la primera forma fundamental, dos superficies localmente isométricas tienen el mismo transporte paralelo, y hemos terminado.

7 Integral de la curvatura escalar en la esfera

Pruebe que la curvatura escalar en un punto p de una variedad Riemanniana n -dimensional M está dada por

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(x) dS^{n-1}$$

de acuerdo a las definiciones

$$K(p) := \frac{1}{n} \sum_i \text{Ric}_p(e_i)$$

y

$$\text{Ric}_p(e_i) := \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle$$

para una base ortonormal $\{e_i\}$ de $T_p M$.

Como la función escalar Ric_p es una forma bilineal simétrica, sabemos que existen λ_i tales que si un vector tangente $x \in T_p M$ está dado por $x = \sum_i x_i e_i$, entonces

$$\text{Ric}_p(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2.$$

Como la integral está dada en la esfera unitaria, tendremos que $|x| = 1$, y entonces el vector en \mathbb{R}^n definido por $\nu = (x_1, \dots, x_n)$ también es unitario. Definamos también el vector $V = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$. Con esto, nuestra integral se puede ver como

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \text{Ric}_p(x) dS^{n-1} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle V, \nu \rangle dS^{n-1}$$

Aplicando teorema de la divergencia vía Stokes y el hecho de que $\text{vol } B^n / \omega_{n-1} = 1/n$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \langle V, \nu \rangle dS^{n-1} &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{B^n} \text{div } V dB^n \\ &= \frac{1}{n} \text{div } V \\ &= \frac{\sum \lambda_i}{n} \\ &= \frac{\sum \text{Ric}_p(e_i)}{n} \\ &= K(p) \end{aligned}$$

Observación: las dos primeras igualdades en la expresión anterior requieren justificación.

8 Pullback de una forma diferencial

Sean $F : M \longrightarrow N$ una función suave y ω una k -forma diferencial en N . El **pullback** de ω es una k -forma en M dada por

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k)$$

para $p \in M$ y v_1, \dots, v_k vectores en $T_p M$.

Eventualmente se definirá la integral de una forma (que puede medir un volumen) en una variedad usando el pullback de una carta coordenada:

$$\int_U \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega$$

llevando así la integral a \mathbf{R}^n .

Lema 14.16. Para $F : M \longrightarrow N$ suave,

- (a) $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ es lineal sobre \mathbf{R}
- (b) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$
- (c) En cualquier carta coordenada,

$$F^* \left(\sum_I' \omega_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_I' (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ F)$$

Demostración.

- (a) Para $a \in \mathbf{R}$ y dos k -formas en N ,

$$\begin{aligned} (F^*(a\omega + \eta))_p(v_1, \dots, v_k) &= (a\omega + \eta)_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) \\ &= a\omega_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) + \eta_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_k) \\ &= a(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) + (F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} (F^*(\omega \wedge \eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (\omega \wedge \eta)_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_{k+l}) \\ &= (\omega_{F(p)} \wedge \eta_{F(p)})(dF_p v_1, \dots, dF_p v_{k+l}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega_{F(p)} \otimes \eta_{F(p)})(dF_p v_1, \dots, dF_p v_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum \text{sgn}(\sigma) \omega_{F(p)}(dF_p v_{\sigma(1)}, \dots, dF_p v_{\sigma(k)}) \\ &\quad \cdot \eta_{F(p)}(dF_p v_{\sigma(k+1)}, \dots, dF_p v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum \text{sgn}(\sigma) F^*\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) F^*\eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}((F^*\omega)_p \otimes (F^*\eta)_p)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= (F^*\omega)_p \wedge (F^*\eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

- (c) En clase vimos un caso muy sencillo pensando en $N = \mathbf{R}^2$ con coordenadas (y^1, y^2) . Mostramos que el pullback de una 2-forma $\omega = \omega_{12}dy^1 \wedge dy^2$ es:

$$\begin{aligned}
F^*(\omega_{12}dy^1 \wedge dy^2)_p(v_1, v_2) &= (\omega_{12}dy^1 \wedge dy^2)_{F(p)}(dF_p(v_1), dF_p(v_2)) \\
&= \omega_{12}(F(p)) \frac{1}{1!1!} \sum \text{sgn}(\sigma) dy^1_{F(p)}(dF_p(v_{\sigma(1)})) dy^2_{F(p)}(dF_p(v_{\sigma(2)})) \\
&= (\omega_{12} \circ F)(p) \sum \text{sgn}(\sigma) d(y^1 \circ F)_p(v_{\sigma(1)}) d(y^2 \circ F)_p(v_{\sigma(2)}) \\
&= (\omega_{12} \circ F)(p) (d(y^1 \circ F)_p \wedge d(y^2 \circ F)_p)(v_1, v_2) \\
&= (\omega_{12} \circ F)(p) (d(y^1 \circ F) \wedge d(y^2 \circ F))_p(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

Comentamos que esta prueba se puede tomar como el caso base para una inducción sobre k en una variedad N de dimensión n . (En la prueba nunca usamos que la dimensión de N fuera 2.)

9 Ley de transformación para los coeficientes de una conexión

Sean M una variedad suave con o sin frontera y ∇ una conexión en TM . Tomemos dos marcos locales (E_i) y (\tilde{E}_j) de TM en algún abierto $U \subseteq M$. Supongamos que se tiene la relación

$$\tilde{E}_i = A_i^j E_j \quad (1)$$

para alguna matriz de funciones A_i^j . Si los coeficientes de Christoffel de ∇ respecto a (E_i) son Γ_{ij}^k y respecto a (\tilde{E}_j) son $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$, entonces

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p + (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p)$$

Demostración

Sabemos que:

$$\nabla_{\tilde{E}_i} \tilde{E}_j = \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{E}_k$$

Y sustituyendo con (1):

$$\nabla_{A_i^q E_q} (A_j^p E_p) = \tilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^r E_r$$

Ahora volteemos la identidad anterior y usemos las propiedades de linealidad y Leibniz de ∇ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^r E_r &= A_i^q \nabla_{E_q} (A_j^p E_p) \\ &= A_i^q \left(E_q(A_j^p) E_p + A_j^p \nabla_{E_q} E_p \right) \\ &= A_i^q \left(E_q(A_j^p) E_p + A_j^p \Gamma_{qp}^r E_r \right) \\ &= A_i^q E_q(A_j^p) E_p + A_i^q A_j^p \Gamma_{qp}^r E_r \end{aligned}$$

Notemos que en el último sumando de la última expresión los índices p y r son mudos. Comparando con el resultado al que queremos llegar, conviene intercambiarlos. De una vez también vamos a intercambiar la r por la p en el lado izquierdo de la ecuación. Obtenemos:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^p E_p = A_i^q E_q(A_j^p) E_p + A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p E_p$$

Podemos quitar el campo E_p para obtener que dada una p ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k A_k^p &= A_i^q E_q(A_j^p) + A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p \\ \iff (A^{-1})_p^k A_k^p \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p) + (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p \\ \iff \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= (A^{-1})_p^k A_i^q E_q(A_j^p) + (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \Gamma_{qr}^p \end{aligned}$$

Donde el último paso se puede pensar como un producto de matrices.

10 Pullback de una conexi3n

Sean M y \widetilde{M} variedades suaves con o sin frontera. Supongamos que $\widetilde{\nabla}$ es una conexi3n en $T\widetilde{M}$ y $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}$ es un difeomorfismo. Entonces, el mapeo

$$\varphi^*\widetilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y = (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y$$

es una conexi3n en TM .

Esta proposici3n sirve para demostrar la naturalidad de la conexi3n de Levi-Civita: si φ fuera una isometr3a de variedades Riemannianas, el pullback de la conexi3n de Levi-Civita de \widetilde{M} es la conexi3n de Levi-Civita de M .

Vamos a la demostraci3n. Hay que ver que $\varphi^*\widetilde{\nabla}$ es \mathbb{R} -lineal en el segundo argumento, \mathcal{C}^∞ -lineal en el primer argumento y Leibniz en el segundo argumento.

1.

$$\begin{aligned} (\varphi^*\widetilde{\nabla})_X (aY_1 + Y_2) &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* (aY_1 + Y_2) \\ &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} (a\varphi_* Y_1 + \varphi_* Y_2) \\ &= (\varphi^{-1})_* (a\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_1 + \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_2) \\ &= a(\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_1 + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y_2 \\ &= a(\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y_1 + (\varphi^*\widetilde{\nabla})_X Y_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (\varphi^*\widetilde{\nabla})_{(fX_1+X_2)} Y &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_*(fX_1+X_2)} \varphi_* Y \\ &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* fX_1 + \varphi_* X_2} \varphi_* Y \\ &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{(f \circ \varphi^{-1})\varphi_* X_1 + \varphi_* X_2} \varphi_* Y \end{aligned}$$

Definamos $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ para obtener

$$\begin{aligned} (\varphi^*\widetilde{\nabla})_{(fX_1+X_2)} \varphi_* Y &= (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\tilde{f}\varphi_* X_1 + \varphi_* X_2} \varphi_* Y \\ &= (\varphi^{-1})_* (\tilde{f}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y) \\ &= (\varphi^{-1})_* (\tilde{f}\widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y) + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\ &= \tilde{f} \circ \varphi^{-1} (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\ &= f(\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X_2} \varphi_* Y \\ &= f(\varphi^*\widetilde{\nabla})_{X_1} \varphi_* Y + (\varphi^*\widetilde{\nabla})_{X_2} \varphi_* Y \end{aligned}$$

3. Usando la misma notación para \tilde{f} ,

$$\begin{aligned}
(\varphi^* \tilde{\nabla})_X(fY) &= (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_*(fY) \\
&= (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \tilde{f} \varphi_* \varphi_* Y \\
&= (\varphi^{-1})_* \left(\varphi_* X \tilde{f} \varphi_* Y + \tilde{f} \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \right) \\
&= (\varphi^{-1})_* \varphi_* X \tilde{f} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* (\tilde{f} \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y) \\
&= (\varphi_* X \tilde{f} \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})_* \varphi_* Y + (\tilde{f} \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \\
&= X f(\varphi^{-1})_* \varphi_* Y + f(\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \\
&= X fY + f(\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y_X(fY) &= (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_*(fY) \\
&= (\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \tilde{f} \varphi_* \varphi_* Y \\
&= (\varphi^{-1})_* \left(\varphi_* X \tilde{f} \varphi_* Y + \tilde{f} \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \right) \\
&= (\varphi^{-1})_* \varphi_* X \tilde{f} \varphi_* Y + (\varphi^{-1})_* (\tilde{f} \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y) \\
&= (\varphi_* X \tilde{f} \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})_* \varphi_* Y + (\tilde{f} \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \\
&= X f(\varphi^{-1})_* \varphi_* Y + f(\varphi^{-1})_* \tilde{\nabla} \varphi_* X \varphi_* Y \\
&= X fY + f(\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y
\end{aligned}$$

Faltó aclarar la igualdad del primer sumando en el último paso

11 Campos vectoriales y flujos

(Problemas de Flujos #4). Dé un ejemplo de campos vectoriales X, Y y W en \mathbb{R}^2 tales que $X = Y = \frac{\partial}{\partial x}$ a lo largo del eje x pero que $\mathcal{L}_X W \neq \mathcal{L}_Y W$.

Consideremos los campos que hacen esto algebraicamente más sencillo:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

(Así Y se vuelve $\frac{\partial}{\partial x}$ en el eje x .)

Veamos si funciona:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X W_p(f) &= [X, W]_p(f) \\ &= X_p W(f) - W_p X(f) \\ &= \left. \frac{\partial W(f)}{\partial x} \right|_p - W_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y W_p(f) &= [Y, W]_p(f) \\ &= Y_p W(f) - W_p Y(f) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)_p W(f) - W_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f \\ &= \left. \frac{\partial W(f)}{\partial x} \right|_p + y \left. \frac{\partial W(f)}{\partial y} \right|_p - W_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - W_p \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \mathcal{L}_X W_p(f) + y \left. \frac{\partial W(f)}{\partial y} \right|_p - W_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Así que, por ejemplo,

$$W = \frac{\partial}{\partial x}$$

implicaría que

$$y \left. \frac{\partial W(f)}{\partial y} \right|_p - W_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = y \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

que no se hace cero en el origen para todas las funciones continuas y por lo tanto $\mathcal{L}_X W_{(0,0)} - \mathcal{L}_Y W_{(0,0)} \neq 0$.

12 Flujos y homotopía

(Flujos #3) Supongamos que M es una variedad suave y compacta que admite un campo vectorial que no se anula en ninguna parte. Demuestre que existe un mapeo suave $F : M \longrightarrow M$ que es homotópico a la identidad y no tiene puntos fijos.

Tomemos un campo vectorial X en M que no se anule en ninguna parte, de forma que existan coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) tales que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ en una vecindad de cualquier punto. En este caso, una curva integral $\theta(t, p)$ de X tiene coordenadas $(p^1 + t, 0, \dots, 0)$ cerca de p . Una curva de este estilo puede tomar valores de t siempre que no se salga del abierto donde tenemos esas coordenadas, así que nuestra variable se mueve en un dominio acotado, digamos $0 \leq t \leq t_p$.

Hemos construido una cubierta abierta $\{U_p\}_{p \in M}$ de nuestra variedad, que es compacta, así que hay una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$. A cada uno de estos abiertos corresponde un valor máximo al que puede llegar el parámetro de las curvas integrales, digamos t_i .

Tomemos $T = \min t_i$ y la función $F : M \longrightarrow M$ que, digamos, “avanza T unidades de tiempo” a lo largo de las curvas integrales de X . Dicho de otra forma, $F(p) = \theta(p, T)$.

Ya tenemos una función, sólo queda probar es homotópica a la identidad y que no tiene puntos fijos. Comencemos con lo segundo.

Cualquier punto p de la variedad está contenido en uno de los k abiertos de la subcubierta finita, donde la curva integral que pasa por p tiene coordenadas $(p^1 + t, 0, \dots, 0)$. No queda de otra que $p = \theta(p, 0) \neq \theta(p, T) = F(p)$.

Finalmente, una homotopía con la identidad es $H(s, p) = \theta(p, sT)$.

13 Mapeos multilineales

(Álgebra tensorial 1) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Existe un isomorfismo natural (i.e. independiente de la base) entre $T^{(k+l,l)}$ y el espacio de todos los mapeos multilineales:

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{\ell \text{ veces}} \longrightarrow V$$

Para un mapeo multilineal T como arriba podemos definir

$$\hat{T}(\omega_1, \dots, \omega_{k+1}, v_1, \dots, v_\ell) = \omega_{k+1}(T(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_\ell))$$

La asociación $T \mapsto \hat{T}$ es el isomorfismo que buscamos. La linealidad se sigue trivialmente de la linealidad T y de la forma diferencial ω_{k+1} . Para ver que es inyectiva hay que invocar el resultado de que si todos los funcionales de un espacio vectorial (en este caso ω_{k+1} , que podemos variar libremente) se hacen cero en el mismo vector (en este caso $T(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_\ell)$), entonces ese vector debe ser el cero. *Falta*

14 Lema de Poincaré para conjuntos estrellados

(Álgebra tensorial 2) Si U es un subconjunto estrellado de \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n , entonces cualquier 1-forma cerrada definida en U es exacta.

Mostraremos que

$$d \int_{\gamma_x} \omega = \omega$$

donde $\gamma_x(t) = tx$ para $0 \leq t \leq 1$.

(El resultado es válido para conjuntos estrellados centrados en 0, cosa que podemos suponer sin pérdida de generalidad porque la traslación adecuada manda formas cerradas en cerradas, y exactas en exactas.)

Supongamos que $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$. Para encontrar la derivada exterior de la integral basta encontrar sus derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} \int_{\gamma_x} \omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x^i dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i(tx) x^i dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx) tx^i + \omega_j(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx) tx^i + \omega_j(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} t \omega_j(tx) dt \\ &= \omega_j(x) \end{aligned}$$

Usando que como ω es cerrada,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

15 Tensores: cambios de coordenadas

1

Veamos primero que si $i \neq j$, $A_j^i = 0$. Consideremos las bases

$$\begin{aligned}\xi &= \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \\ \eta &= \{v_1, \dots, v_i, \dots, 2v_j, \dots, v_n\}\end{aligned}$$

del espacio V de dimensión n . También tenemos sus correspondientes bases duales:

$$\begin{aligned}\xi^* &= \{v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_j^*, \dots, v_n^*\} \\ \eta^* &= \{v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, (2v_j)^*, \dots, v_n^*\}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}A(v_i^*, v_j) &= {}^\xi A_j^i = {}^\eta A_j^i = A(v_i^*, 2v_j) = 2A(v_i^*, v_j) \\ &\iff A(v_i^*, v_j) = 0 \\ &\iff {}^\xi A_j^i = 0\end{aligned}$$

para cualquier base de V .

Como observación, notemos que si $i = j$, la ecuación anterior se vuelve

$$A(v_j^*, v_j) = {}^\xi A_j^j = {}^\eta A_j^j = A((2v_j)^*, 2v_j) = 2A(\frac{1}{2}v_j^*, v_j) = A(v_j^*, v_j)$$

ya que $(2v_j)^* = \frac{1}{2}v_j^*$ por la construcción natural de la base dual.

Ahora veamos que $A_i^i = A_j^j$. Tomemos las bases ordenadas

$$\begin{aligned}\xi &= \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \\ \eta &= \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}\end{aligned}$$

y sus bases duales ξ^* y η^* . Entonces,

$$\begin{aligned}{}^\xi A_i^i &= {}^\eta A_i^i \iff A(v_i^*, v_i) = A(v_j^*, v_j) \\ &\iff {}^\xi A_i^i = {}^\xi A_j^j\end{aligned}$$

Para cualquier base de V . Tomando $A_i^i = \lambda$ se obtiene el resultado.

2 (a)

Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $q \in \mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
v \otimes w(p, q) &= v(p)w(q) \\
&= \left(\sum_i v_i dx^i \right) (p) \left(\sum_j w_j dy^j \right) (q) \\
&= \sum_i v_i dx^i(p) \sum_j w_j dy^j(q) \\
&= \sum_{i,j} v_i w_j dx^i(p) dy^j(q) \\
&= \sum_{i,j} v_i w_j dx^i \otimes dy^j(p, q) \\
&= \left(\sum_{i,j} v_i w_j dx^i \otimes dy^j \right) (p, q)
\end{aligned}$$

2 (b)

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
T_A(v) &= (av_1 + bv_2 + cv_3)dx^1 \\
&\quad + (dv_1 + ev_2 + fv_3)dx^2 \\
&\quad + (gv_1 + hv_2 + iv_3)dx^3
\end{aligned}$$

Y que:

$$\begin{aligned}
T_B(w) &= (pw_1 + qw_2)dy^1 \\
&\quad + (rw_1 + sw_2)dy^2
\end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned}
T_A(v) \otimes T_B(w) &= (av_1 + bv_2 + cv_3)(pw_1 + qw_2)dx^1 \otimes dy^1 \\
&\quad + (dv_1 + ev_2 + fv_3)(pw_1 + qw_2)dx^2 \otimes dy^1 \\
&\quad + (gv_1 + hv_2 + iv_3)(pw_1 + qw_2)dx^3 \otimes dy^1 \\
&\quad + (av_1 + bv_2 + cv_3)(rw_1 + sw_2)dx^1 \otimes dy^2 \\
&\quad + (dv_1 + ev_2 + fv_3)(rw_1 + sw_2)dx^2 \otimes dy^2 \\
&\quad + (gv_1 + hv_2 + iv_3)(rw_1 + sw_2)dx^3 \otimes dy^2 \\
&= (apv_1w_1 + bpv_2w_1 + cpv_3w_1 + aqv_1w_2 + bq v_2w_2 + cq v_3w_3)dx^1 \otimes dy^1 \\
&\quad + (dpv_1w_1 + epv_2w_1 + fpv_3w_1 + dqv_1w_2 + eqv_2w_2 + fqv_3w_3)dx^2 \otimes dy^1 \\
&\quad + (gpv_1w_1 + hpv_2w_1 + ipv_3w_1 + gqv_1w_2 + hqv_2w_2 + iqv_3w_3)dx^3 \otimes dy^1 \\
&\quad + (arv_1w_1 + brv_2w_1 + crv_3w_1 + asv_1w_2 + bsv_2w_2 + csv_3w_3)dx^1 \otimes dy^2 \\
&\quad + (drv_1w_1 + erv_2w_1 + frv_3w_1 + dsv_1w_2 + esv_2w_2 + fsv_3w_3)dx^2 \otimes dy^2 \\
&\quad + (grv_1w_1 + hrv_2w_1 + irv_3w_1 + gsv_1w_2 + hsv_2w_2 + isv_3w_3)dx^3 \otimes dy^2
\end{aligned}$$

Así es que para la base ordenada

$$dx^1 \otimes dy^1, dx^2 \otimes dy^1, dx^3 \otimes dy^1, dx^1 \otimes dy^2, dx^2 \otimes dy^2, dx^3 \otimes dy^2$$

tenemos que:

$$\begin{pmatrix} ap & bp & cp & aq & bq & cq \\ dp & ep & fp & dq & eq & fq \\ gp & hp & ip & gq & hq & iq \\ ar & br & cr & as & bs & cs \\ dr & er & fr & ds & es & fs \\ gr & hr & ir & gs & hs & is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1w_1 \\ v_2w_1 \\ v_3w_1 \\ v_1w_2 \\ v_2w_2 \\ v_3w_2 \end{pmatrix}$$

es el vector de coordenadas de $(T_A \otimes T_B)(v \otimes w)$.