

# Geometría Riemanniana

Semestre 2024-1

September 24, 2023

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Índice</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1 Variedades Riemannianas</b>                      | <b>3</b>  |
| 1.1 Variedades diferenciables . . . . .               | 3         |
| 1.2 Vectores tangentes . . . . .                      | 8         |
| 1.3 Diferencial de una aplicación . . . . .           | 11        |
| 1.4 Subvariedades . . . . .                           | 12        |
| 1.4.1 Ejercicios 14-18 de agosto . . . . .            | 14        |
| 1.5 Inmersiones, sumersiones y encajes . . . . .      | 16        |
| 1.6 Campos vectoriales . . . . .                      | 20        |
| 1.7 Corchete de Lie . . . . .                         | 22        |
| 1.7.1 Ejercicios 4-8 septiembre . . . . .             | 25        |
| 1.8 Teorema de rectificación . . . . .                | 27        |
| <b>2 Formas y tensores</b>                            | <b>30</b> |
| 2.1 Tensores . . . . .                                | 30        |
| 2.2 Covectores . . . . .                              | 32        |
| 2.3 Formas diferenciales . . . . .                    | 33        |
| 2.4 Derivada exterior . . . . .                       | 34        |
| 2.5 Variedades orientables y no orientables . . . . . | 36        |
| 2.6 Cambios de coordenadas . . . . .                  | 37        |
| 2.7 Campos tensoriales . . . . .                      | 38        |
| 2.8 Contracción . . . . .                             | 40        |
| 2.9 Derivaciones de campos tensoriales . . . . .      | 43        |
| 2.10 Interpretaciones . . . . .                       | 45        |
| <b>3 Referencias</b>                                  | <b>46</b> |

# 1. Variedades Riemannianas

## 1.1 Variedades diferenciables

**Definición.** Una **variedad topológica** es un espacio topológico  $M$  **localmente homeomorfo** a  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, es un espacio topológico tal que para cualquier  $p \in M$  existe una vecindad abierta  $U \subseteq M$  de  $p$ , un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ . Decimos que  $h$  es una **carta** y  $U$  es una **vecindad coordinada**.

Para definir el concepto de variedad diferenciable necesitamos primero definir alguna noción de diferenciabilidad en una variedad topológica. Comenzamos con el caso de funciones valuadas en los números reales. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \subseteq M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & \nearrow f \circ h^{-1} & \\ V \subseteq \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

La idea es que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  debe ser suave en  $p \in M$  si la composición  $f \circ h^{-1}$  es suave en  $h(p)$ . Pero hay un detalle: necesitamos que esta definición no dependa de la carta.

Podría ser que un mismo punto  $p$  estuviera en dos vecindades coordinadas  $U_\alpha$  y  $U_\beta$ . ¿Es posible que  $f \circ h_\alpha^{-1}$  sea suave y  $f \circ h_\beta^{-1}$  no?

$$\begin{array}{ccc} & p \in U_\alpha \cap U_\beta & \\ h_\alpha \swarrow & & \searrow h_\beta \\ V_\alpha & \xrightarrow{h_\beta \circ h_\alpha^{-1}} & V_\beta \end{array}$$

Necesitamos agregar la condición de que las transformaciones de cambio de coordenadas  $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$  sean suaves. En este caso, si suponemos que  $f \circ h_\beta^{-1}$  es suave, entonces también  $(f \circ h_\beta^{-1}) \circ (h_\beta \circ h_\alpha^{-1}) = f \circ h_\alpha^{-1}$  también es suave (ya que la composición de dos funciones suaves es suave). Así, la composición de  $f$  con cualquier carta coordinada queda suave.

**Definición.** Un **atlas** en un espacio topológico  $M$  es una colección de cartas en  $M$  tal que

(A2) Todo punto de  $M$  está en alguna vecindad coordenada.

(A1) Cualquier par de cartas se traslapa suavemente.

Un atlas  $\mathcal{C}$  en  $M$  es **completo** si  $\mathcal{C}$  contiene toda carta en  $M$  que se traslapa suavemente con todas las cartas de  $\mathcal{C}$ .

**Lema.** Todo atlas en  $M$  está contenido en un único atlas completo.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{A}$  un atlas en  $M$ , y definamos

$$\mathcal{A}' = \{h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n : h \text{ se traslapa suavemente con todas las cartas en } \mathcal{A}\}$$

Ahora observamos que (1)  $\mathcal{A}'$  es un atlas, pues satisface (A1) trivialmente y (A2), que es claro si alguna de las cartas está en  $\mathcal{A}$ , y si no, basta componer con una en  $\mathcal{A}$  y su inversa, reduciendo el dominio si es necesario.  $\mathcal{A}'$  es maximal por definición. Ahora sea  $\mathcal{C}$  otro atlas completo en  $M$  tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}$  satisface (A2), entonces  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}'$  por definición de  $\mathcal{A}'$ . Y como  $\mathcal{C}$  es completo, debe contener a todas las cartas en  $\mathcal{A}'$ . □

**Ejemplo** (de un atlas no completo). Tomemos  $M = S^1 \subset \mathbb{C}$  y el atlas dado por las funciones

$$\begin{array}{ll} h_1 : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} & h_2 : S^1 \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \text{Arg}(z) & z \mapsto \text{Arg}(z) \end{array}$$

Que se traslapan suavemente y cubren a  $S^1$ . Ahora notemos que la carta

$$\begin{array}{l} k : S^1 \cap \{x + iy : y > 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x + iy \mapsto x \end{array}$$

también se traslapa suavemente con las otras dos.

**Definición.** Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica tal que cada cambio de coordenadas es suave. Además, el atlas debe ser **maximal** en el sentido de que estén contenidas todas las cartas que sean compatibles con las de cualquier atlas dado. Es decir, no es posible añadir otra carta que sea compatible con las anteriores.

Para una carta de la forma  $h_\alpha(q) = (x_\alpha(q), y_\alpha(q))$ ,  $U_\alpha \subseteq M$ ,  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ , diremos que

$$x_\alpha : U_\alpha \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$$

es una **función coordenada**. La carta  $h_\alpha$  también se llama **sistema de coordenadas**.

Ahora definamos funciones suaves entre variedades.

**Definición.** Una función  $\phi : M \rightarrow N$  entre las variedades  $M$  y  $N$  es una **transformación suave** si para cualquier punto  $p \in M$  existe una carta  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  y una carta  $k : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $p \in U$  y  $\phi(p) \in V \subseteq N$  tales que

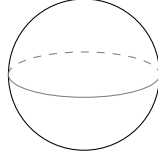
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & N \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^m & \dashrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

la composición  $k \circ \phi \circ h^{-1}$  es suave. Una transformación suave con inversa suave se llama **difeomorfismo**.

**Observación.** La función  $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$  es un difeomorfismo.

**Ejemplo** (de una carta coordenada). Una esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  con el abierto

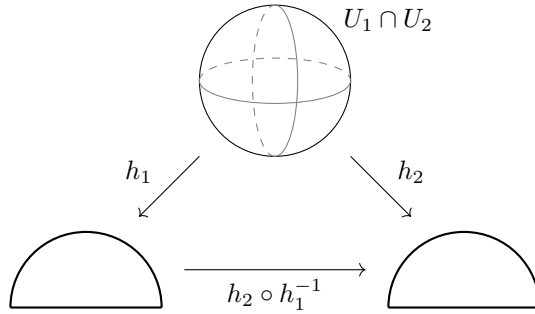
$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$



y el homeomorfismo

$$h_1(x, y, z) = (x, y).$$

**Ejemplo** (de un cambio de coordenadas). Tomemos un punto en  $S^2$ , por ejemplo  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , que está en  $U_1$ , y también en  $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0\}$  con  $h_2 = (x, z)$ . Luego,



El cambio de coordenadas es  $h_2 \circ h_1^{-1} = (x, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ , que es una función suave.

**Ejemplo** (El plano proyectivo real). En  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  definamos la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } (x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$$

Como ejercicio se puede comprobar que en efecto se trata de una relación de equivalencia. El conjunto de clases de equivalencia se llama **plano proyectivo real** y se denota por  $\mathbb{R}P^2$ . A la clase de equivalencia de  $(x_0, y_0, z_0)$  la denotamos  $[x_0 : y_0 : z_0]$  y decimos que son las **coordenadas homogéneas** del punto.

¿Cuáles serán las cartas?

$$\begin{array}{lll} U_0 = \{[x : y : z] \mid x \neq 0\} & U_1 = \{[x : y : z] \mid y \neq 0\} & U_2 = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\} \\ h_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 & h_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 & h_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [x : y : z] \mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) & [x : y : z] \mapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) & [x : y : z] \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \end{array}$$

Observemos que  $\mathbb{R}P^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ . Para encontrar los cambios de coordenadas, notemos que  $h_1^{-1} = [u_1, 1, v_1]$ , de forma que  $h_2 \circ h_1^{-1} = h_2[u_1 : 1 : v_1] = \left(\frac{u_1}{v_1}, \frac{1}{v_1}\right)$ , que es una función diferenciable.

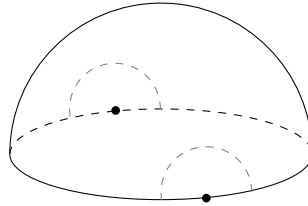
$$\begin{array}{ccc} & U_1 \cap U_2 & \\ h_1 \swarrow & & \searrow h_2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h_2 \circ h_1^{-1}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Ahora definamos alguna función real-valuada en  $\mathbb{R}P^2$  para ver si es suave. Tomemos el ejemplo de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f[x : y : z] &= \arccos \left( \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

que está bien definida ya que al multiplicar un vector en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  por un escalar  $\lambda$ , éste se cancela. ¿Es suave? ¿Continua?

Bueno, podemos darnos cuenta de que es continua cuando pensamos que el plano proyectivo es el hemisferio norte de la esfera identificando puntos antípodos en el ecuador. En este caso, casi todos los puntos del plano proyectivo tienen un único representante. Sólo los puntos en el ecuador podrían causar problema, pero la identificación por puntos antípodos en el ecuador nos permite construir vecindades de estos puntos pegando dos medias vecindades.



Para saber si la función es suave, debemos llevar el problema a  $\mathbb{R}^2$  usando las cartas coordenadas. Creemos que este ejemplo en particular no es suave...

Tomemos mejor

$$g[x : y : z] = \frac{ax + by + cz}{cx + dy + fz}$$

Si  $p \in U_2$ ,

$$\begin{aligned} g \circ h_2^{-1}(u_2, v_2) &= g[u_2 : v_2 : 1] \\ &= \frac{au_2 + bv_2 + e}{cu_2 + dv_2 + f} \end{aligned}$$

¿Cómo nos aseguramos de que no se puede hacer cero el denominador? Intentemos dar una función de la forma

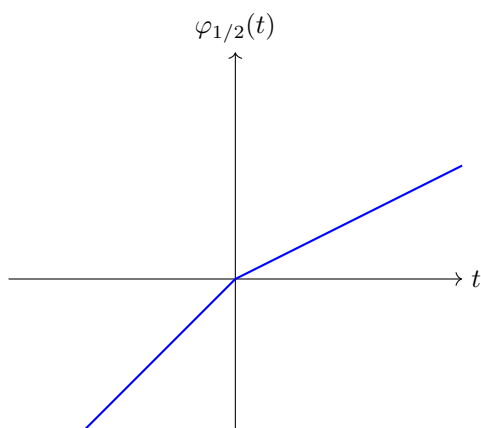
$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}P^2 &\rightarrow \mathbb{R}P^1 \approx \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ [x : y : z] &\mapsto [ax + by + ez : cx + dy + fz] \end{aligned}$$

¡Hay elecciones de los coeficientes  $a, \dots, f$  que hacen que la función no sea suave!

**Ejercicio.** Consideremos para todo  $r > 0$  la aplicación  $\varphi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0 \\ rt & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Muestre que los atlas  $(\varphi_r)_{r>0}$  definen una familia no numerable de estructuras diferenciables sobre  $\mathbb{R}$ . ¿Las variedades diferenciables correspondientes son difeomorfos?



*Solución.* Primero observemos que la función  $\varphi_r$  es un homeomorfismo, ya que es continua y su inversa,  $\varphi_{1/r}$ , también. Al ser una única carta, los cambios de coordenadas son por vacuidad suaves, así que  $\mathbb{R}$  con el atlas que consta de la carta  $\varphi_r$  es una variedad diferenciable para toda  $r$ .

Si  $\mathbb{R}_r$  es la variedad con el atlas  $\varphi_r$ , ¿será que  $\mathbb{R}_1$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}_{1/2}$ ? Intentemos dar un difeomorfismo:

$$f : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_{1/2}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Claramente  $f$  es biyectiva. ¿Será suave? Notemos que si consideramos esta función de  $\mathbb{R}_1$  en  $\mathbb{R}_1$  no lo es, pues tiene un pico en 0. Recordando nuestra definición de función suave entre variedades, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_{1/2} \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_{1/2} \\ \mathbb{R} & \dashrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

De hecho  $\varphi_{1/2} \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_{1/2} \circ f = id$ , así que  $f$  es suave. Y por un cálculo análogo,  $f^{-1}$  también. Esta construcción se generaliza fácilmente para construir un difeomorfismo de  $\mathbb{R}_1$  en  $\mathbb{R}_r$ , y con una simple composición, concluimos que todas estas variedades son difeomorfas entre sí.  $\square$

## 1.2 Vectores tangentes

Recordemos que para el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$  los vectores tangentes se pueden ver como el vector velocidad de una curva regular en la superficie. ¿Cómo podemos generalizar esta definición?

**Definición.** Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $p \in M$  y  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  el conjunto de funciones suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Un **vector tangente** a  $M$  en  $p$  es un funcional  $v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  con las propiedades de que

- **$\mathbb{R}$ -lineal:**  $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$
- **Regla de Leibniz:**  $v(f \cdot g) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

Este concepto generaliza la idea de *derivada direccional*: cada vector tangente es un operador que actúa como una derivada direccional.

**Observación.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . La colección de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- Elemento cero:  $f \mapsto 0$ .
- Suma:  $v + w : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \mapsto v(f) + w(f)$
- Producto escalar.  $\lambda v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \mapsto \lambda v(f)$

¿Cuál será una base de este espacio vectorial? Se nos antoja tomar los vectores canónicos en el dominio de la **parametrización** (la función inversa de la carta coordenada, cuyo dominio es  $\mathbb{R}^n$ ).



Consideremos una vecindad coordenada  $U$  de  $p \in M$  y la carta correspondiente

$$\begin{aligned} h : U \subset M &\rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ q &\mapsto (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)) \end{aligned}$$

Diremos que  $x^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  son las **funciones coordenadas**.

Ahora tomemos una función suave en la variedad,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , y componemos con la parametrización para obtener

$$\begin{aligned} f \circ h^{-1} : V \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u^1, u^2, \dots, u^n) &\mapsto f \circ h^{-1}(u^1, u^2, \dots, u^n) \end{aligned}$$

Esta función tiene una derivada direccional,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) := \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{h(p)} (f \circ h^{-1})$$

Cuando variamos  $f$ , obtenemos un operador que es un candidato perfecto para ser un vector tangente. Resultará que éstos son una base del espacio tangente  $T_p M$ .

**Lema** (No visto en clase, [O'Neill](#)). Sea  $v \in T_p M$ .

1. Si  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  son iguales en una vecindad de  $p$ , entonces  $v(f) = v(g)$ .
2. Si  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  es constante,  $v(f) = 0$ .

**Lema.** Sea  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  suave, donde  $V \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto convexo que contiene al 0. Entonces, existen funciones  $g_i : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  suaves tales que

$$g(u^1, \dots, u^n) = g(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n g_i(u^1, \dots, u^n) u^i$$

y además  $g_i(0, \dots, 0) = \frac{\partial g}{\partial u^i}(0, \dots, 0)$

*Demostración.* Proponemos

$$g_i(u^1, \dots, u^n) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu^1, \dots, tu^n) dt.$$

Hagamos un poco más explícitas las cuentas hechas en clase. Cuando fijamos un punto  $(u^1, \dots, u^n) := q \in \mathbb{R}^n$ , podemos ver la función  $g(tq)$  como una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . ¿Cuál es su derivada? Debemos usar la regla de la cadena pensando en la composición de "multiplicar por  $t$ " seguida de  $g$ :

$$d_t g(tq) = d_{tq} g \cdot d_t(tq) = \nabla_{tq} g \cdot q$$

Donde  $\cdot$  es el producto de matrices (en este caso es el producto punto), y  $\nabla g$  es el vector de derivadas parciales. Luego aplicamos el teorema fundamental del cálculo para

obtener:

$$\begin{aligned}
 g(u^1, \dots, u^n) - g_i(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \frac{dg}{dt}(tu^1, \dots, tu^n) dt \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu^1, \dots, tu^n) u^i dt \\
 &= \sum_{i=1}^n u^i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tu^1, \dots, tu^n) dt
 \end{aligned}$$

□

Lo anterior se puede expresar así:

$$g = g(0) + \sum g_i u^i \quad (1.1)$$

**Teorema (12, O'Neill).** Si  $h(q) = (x^1(q), \dots, x^n(q))$  es una carta coordenada de  $M$  en  $p$ , entonces los vectores  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  son una base del espacio tangente. Más aún,

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{para toda } v \in T_p M$$

*Demostración.* Tomemos  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  y definimos  $g := f \circ h^{-1}$  para usar el lema. Suponiendo que  $h(p) = 0$ , sustituyendo en 1.1, obtenemos que

$$f = f(p) + \sum f_i x^i$$

donde  $f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tq) dt$ . Derivando esta expresión respecto a  $x^i$  simplemente obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i \quad (1.2)$$

Ahora sea  $v \in T_p M$  cualquier vector tangente. Al aplicar  $f$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
 v(f) &= v \left( f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i \right) \\
 &= v(f(p)) + v \left( \sum_{i=1}^n f_i x^i \right) \\
 &= 0 + \sum v(f_i x^i) \quad \text{ya que } f(p) \text{ es constante} \\
 &= \sum v(f_i) x^i(p) + f_i(p) v(x^i) \quad \text{Leibniz} \\
 &= 0 + \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} x^i \quad \text{ya que } h(p) = 0 \text{ y por 1.2}
 \end{aligned}$$

Ahora veamos que los vectores son linealmente independientes. Supongamos que

$$w := \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0 \in T_p M$$

Evaluando en  $x^j \in C^\infty$ ,

$$0 = w(x^j) = \sum \alpha_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_p = \alpha_j$$

□

### 1.3 Diferencial de una aplicación

Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , la **diferencial** de una función  $\phi : M \rightarrow N$  en  $p \in M$  es de la forma

$$\begin{aligned} d\phi_p : T_p M &\rightarrow T_p N \\ v &\mapsto d\phi_p(v) \end{aligned}$$

La asociación es bastante natural:  $d\phi_p(v)$  manda una función  $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  en  $v(f \circ \phi)$ .

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\phi} & N & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & \searrow & \text{f} \circ \phi & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

**Observación.** La diferencial es una transformación lineal.

**Lema (14, O'Neill).** Sean  $\phi : M \rightarrow N$  una transformación suave,  $p \in M$  y  $q = \phi(p) \in N$  con sistemas de coordenadas  $h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $k : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $h(p) = 0$ , y  $k(q) = 0$ . Entonces,

$$d\phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y^i \circ \phi)}{\partial x^j} (p) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\phi p}$$

Con funciones coordenadas  $h = (x^1, \dots, x^m)$  y  $k = (y^1, \dots, y^n)$ .

*Demostración.* Definamos  $v = \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_p M$  y tomemos una función  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ . Para encontrar  $d\phi_p(v) := w$ , usamos el **teorema** anterior para expresar

$$w = \sum_{i=1}^n w(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Y luego calculamos

$$w(y^i) = v(y^i \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p y^i \circ \phi$$

□

**Observación.** Con toda formalidad, la expresión anterior es de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p y^i \circ \phi = \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_0 y^i \circ \phi \circ h^{-1}$$

**Observación.** Recordando que la diferencial es una transformación lineal entre los espacios tangentes, la matriz que la representa respecto a las bases  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$  y  $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$  es igual a la matriz que representa la derivada de la transformación en coordenadas respecto a las bases canónicas de los espacios euclidianos.

Con todo detalle, sea  $A = (a_{ij})$  la matrix de  $n \times m$  corespondiente a  $d\phi_p$ . Es decir,

$$d\phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_q$$

De acuerdo al **lema** anterior,  $a_{ij} = \frac{\partial y^i \circ \phi \circ h^{-1}}{\partial x^j}$ .

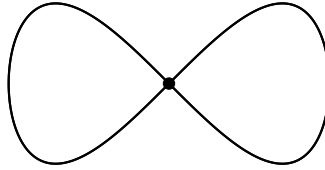
La derivada de la transformación en coordenadas es  $d(k \circ \phi \circ h^{-1})_0$ . Se trata de una transformación lineal  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Recordando que las funciones coordenadas en el contradominio son  $k = (y^1, \dots, y^n)$ , la representación matricial de  $B$  es  $\left( \frac{\partial y^i \circ \phi \circ h^{-1}}{\partial x^j} \right)_{ij}$ .

## 1.4 Subvariedades

**Definición.** Una **subvariedad** de  $S$  de una variedad  $M$  es una variedad tal que:

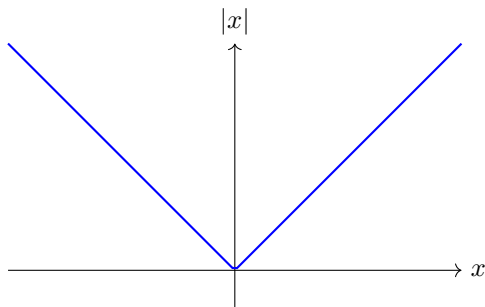
- i) Tiene la topología de subespacio de  $M$ .
- ii) La inclusión  $j : S \hookrightarrow M$  es suave y en cada punto  $p \in S$  la diferencial de  $j$  en  $p$   $dj_p : T_p S \rightarrow T_p M$  es inyectiva.

**Ejemplo** (Lemniscata). Pensamos una función  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow L$ , donde  $L$  es la Lemniscata. Cuando le damos la topología inducida por  $\alpha$ , resulta que esta curva es una variedad. Sin embargo, no es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual de acuerdo a la definición que acabamos de dar.



**Ejemplo** (La gráfica del valor absoluto). Consideremos  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$ , que

es una subvariedad topológica de  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual.



**Afirmación.** No existe ninguna estructura suave para  $S$  tal que  $S$  sea subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ .

Supongamos que tenemos una carta coordenada  $h$  en algún atlas de  $S$  y un vector  $v \in T_p S$  cuya imagen bajo la diferencial  $di_p$  es cero.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^2 \\ h \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{R} & \dashrightarrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Notemos que la parametrización local es de la forma  $h^{-1}(t) = (x, y)$  con  $y = |x|$ , o bien  $y^2(t) = x^2(t)$ . Derivando,  $2y(t)y'(t) = 2x(t)x'(t)$ . Tenemos dos casos:

- Si  $x(t) > 0$ , entonces  $y(t) = x(t)$  y  $y'(t) = x'(t)$ . Tomando límite hacia el cero ya que las funciones son suaves,  $y'(0) = x'(0)$ .
- Si  $x(t) < 0$  entonces  $y(t) = -x(t)$  y  $y'(t) = -x'(t)$ . Tomando límite,  $y'(0) = x'(0)$ .

*\*Falta concluir que ambas derivadas son cero\**

**Observación.** En [Lee](#), tenemos otra demostración de este hecho en el **Ejemplo 5.45**. Esencialmente, Lee usa la siguiente proposición:

**Proposición.** Sean  $M$  una variedad,  $S \subset M$  una subvariedad,  $p \in S$  y  $v \in T_p M$ . Entonces  $v$  es un vector en  $T_p S$  si y sólo si existe una curva suave  $\gamma : J \rightarrow M$  cuya imagen está contenida en  $S$ , es suave como mapeo en  $S$ , y es tal que  $0 \in J$ ,  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ .

Suponiendo que  $S$  es una subvariedad, tendríamos una curva suave  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  que en 0 pasa por  $(0, 0)$  y su derivada no es cero, ya que el espacio tangente debe tener al menos un elemento no trivial. Si  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , la función  $y$  alcanza un mínimo en  $t = 0$ , así que  $y'(0) = 0$ . Y, como en la prueba que hicimos en clase, sabemos que  $y^2(t) = x^2(t)$ . Derivando dos veces,  $y'(t)^2 + y(t)y''(t) = x'(t)^2 + x''(t)$ . Evaluando en  $t = 0$ , concluimos que  $y'(0) = x'(0) = 0$ , pero esto es justo lo que no queríamos.

### 1.4.1 Ejercicios 14-18 de agosto

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y  $N$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Sea  $p \in M$ ,  $U$  una vecindad coordenada de  $p$  con una carta  $h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sea  $q \in N$ ,  $V$  una vecindad coordenada de  $q$  con una carta  $k : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A  $M \times N$  le damos estructura de variedad, cuyas vecindades coordenadas son de la forma  $U_\alpha \times V_\beta$ , y cuyas cartas son de la forma

$$\begin{aligned} h \times k : U_\alpha \times V_\beta &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) &\mapsto (h(p), k(q)) \end{aligned}$$

#### 1. Las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} \pi : M \times N \rightarrow M & & \sigma : M \times N \rightarrow N \\ (p, q) \mapsto p & \text{y} & (p, q) \mapsto q \end{array}$$

son suaves.

2. Una transformación  $\phi : P \rightarrow M \times N$  es suave si y sólo si  $\pi \circ \phi$  y  $\sigma \circ \phi$  son suaves.

3. Para cada  $(p, q) \in M \times N$  los subconjuntos

$$\begin{aligned} M \times q &= \{(x, q) \in M \times N : x \in M\} \\ p \times N &= \{(p, y) \in M \times N : y \in N\} \end{aligned}$$

son subvariedades de  $M \times N$ .

4. Para cada  $(p, q)$ ,

$$\begin{aligned} \pi|_{M \times q} &\text{ es un difeomorfismo } M \times q \rightarrow M \\ \sigma|_{p \times N} &\text{ es un difeomorfismo } p \times N \rightarrow N \end{aligned}$$

*Solución.*

1. Escogiendo un punto en  $M \times N$  y una carta coordenada  $h \times k$ , construimos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\pi} & M \\ h \times k \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \end{array}$$

La flecha punteada manda  $(x, y) \mapsto x$ , que es suave.

2. Para un punto en  $P$  con carta coordenada  $\ell$  tal que  $h \times k$  es una carta de su imagen bajo  $\phi$ , tenemos:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & M \times N \\ \ell \downarrow & & \downarrow h \times k \\ \mathbb{R}^p & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Sabemos que  $P$  es suave si y sólo si  $(h \times k) \circ \phi \circ \ell^{-1}$  es suave. Notemos que para  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $(h \times k)(\phi(\ell^{-1}(z))) = (h(\phi(\ell^{-1}(z))), k(\phi(\ell^{-1}(z))))$ , de manera que la flecha punteada es suave cuando las dos funciones coordenadas son suaves, y de hecho, ¡éstas son las cartas coordenadas cuando componemos con las proyecciones!

3. Primero debemos dar una estructura diferenciable para  $M \times q$ . Dado  $(x, q) \in M \times q$  tomemos cualquier carta  $h : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $M$  que contenga a  $x$  y definamos  $h \times q : U_\alpha \times \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  simplemente por  $(h \times q)(y, q) = h(y)$ .

Ahora veamos si la inclusión es suave mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times q & \xhookrightarrow{j} & M \times N \\ h \times q \downarrow & & \downarrow h \times k \\ \mathbb{R}^m & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Notemos que hemos usado la carta  $h$  en dos lugares distintos. La flecha punteada es la inclusión  $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , que es suave. Para ver que su diferencial es inyectiva, usamos la **observación** de que la matriz que representa a la diferencial es la misma que la matriz de la derivada de la transformación en coordenadas, que es  $\begin{pmatrix} id_m \\ 0_n \end{pmatrix}$ , y en particular es inyectiva.

**Otro camino:** supongamos que  $v \in T_{M \times q}$  es tal que  $dj_p v = 0$ . Para ver que  $v = 0$ , tomemos  $f \in C^\infty(M \times q, \mathbb{R})$ . Consideremos la función  $\tilde{f} \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$  dada por  $\tilde{f}(x, y) = f(x, q)$ , que es suave ya que la derivada de  $\tilde{f} \circ (h \times k)^{-1}$  es el vector  $(df_p, 0, \dots, 0)$ . Luego,  $v(f) = v(\tilde{f} \circ j) = dj_p v(\tilde{f}) = 0$ .

4. La restricción de una función suave a una subvariedad es suave. Para dar una demostración explícita, tomamos cartas coordenadas alrededor de algún punto para construir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \times q & \xrightarrow{\pi|_{M \times q}} & M \\ h \times q \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^m & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \end{array}$$

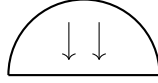
La flecha punteada es la identidad. El caso de la función inversa es análogo.

□

**Ejemplo** (de una variedad producto). Consideremos  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$  con el atlas

$$\begin{array}{ll} h_N(x, y) = x & h_S(x, y) = y \\ U_N = \{(x, y) \in S^1 | y > 0\} & U_S = \{(x, y) \in S^1 | y < 0\} \\ \\ h_O(x, y) = y & h_E(x, y) = x \\ U_E = \{(x, y) \in S^1 | x < 0\} & U_E = \{(x, y) \in S^1 | x > 0\} \end{array}$$

Que son las proyecciones al eje  $x$  o  $y$ .

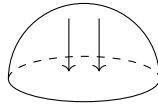


Ahora sea  $S^1 \times S^1$  con las cartas producto, que son de la forma

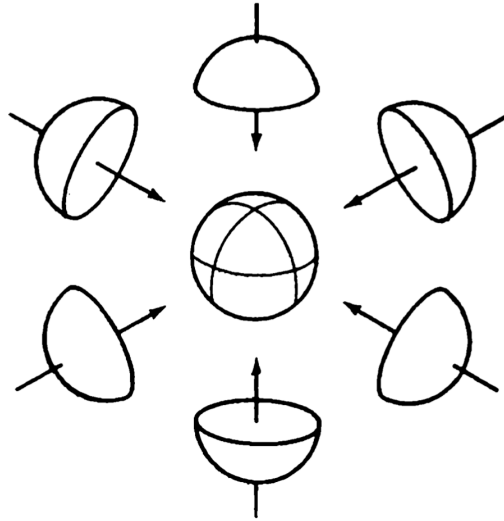
$$h_N \times h_N : U_N \times U_N \subset S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^2$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (h_N(x_1, x_2), h_N(y_1, y_2)) = (x_1, y_1)$$

Podemos definir un atlas análogo en esferas de cualquier dimensión proyectando cada hemisferio al plano que lo determina.



Para el caso de  $S^2$ , tenemos la figura de [Do Carmo](#):



Con estas estructuras diferenciables podemos construir la variedad  $S^p \times S^q$ . (También podemos usar las proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur para cubrir a la esfera con sólo dos cartas).

## 1.5 Inmersiones, sumersiones y encajes

**Definición.** Una función suave entre variedades  $f : M \rightarrow N$  es una **inmersión** en  $p \in M$  si su diferencial es inyectiva en  $p$ , y es una **sumersión** si su diferencial es suprayectiva en  $p$ . Si esta condición se cumple en toda  $M$ , decimos que la función es una inmersión o una sumersión.



**Observación.** En la definición de subvariedad pedimos que la inclusión sea una inmersión.

**Observación.** ¿Qué quieren decir estas condiciones? Observemos que por el teorema de la dimensión, si la diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es inyectiva, se sigue que  $\dim M \leq \dim N$ . Análogamente, si la diferencial es suprayectiva,  $\dim N \leq \dim M$ .

**Ejemplo.** Los ejemplos canónicos de inmersiones y sumersiones son la inclusión y la proyección de espacios euclidianos:

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x^1, \dots, x^n) &\mapsto (x^1, \dots, x^m) \end{aligned}$$

para  $m \geq n$ .

**Definición.** Un **encaje** es una inmersión que también es un homeomorfismo en su imagen.

**Ejemplo** (Curva densa en el toro, [Lee](#), 4.20). Consideremos el toro como la variedad producto  $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ . Tomemos un número irracional  $\alpha$  y la siguiente curva:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow T^2 \\ t &\mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}) \end{aligned}$$

Primero notemos que  $\gamma$  es una inmersión, ya que es suave y  $\gamma'(t)$  nunca se anula (como transformación lineal,  $\gamma'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  sólo puede enviar un número real  $\neq 0$  al cero si todas sus entradas son cero).

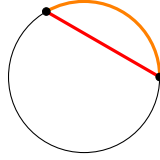
De hecho es una función inyectiva, ya que

$$\begin{aligned} \gamma(t_1) &= \gamma(t_2) \\ \iff (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i \alpha t_1}) &= (e^{2\pi i t_2}, e^{2\pi i \alpha t_2}) \\ \iff e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2} \quad \text{y} \quad e^{2\pi i \alpha t_1} &= e^{2\pi i \alpha t_2} \\ \iff t_1 = t_2 + m \quad \text{y} \quad \alpha t_1 = \alpha t_2 + n &\quad \text{para } m, n \in \mathbb{Z} \\ \iff t_1 - t_2 = m \quad \text{y} \quad \alpha t_1 - \alpha t_2 &= n \\ \implies \alpha m &= n \end{aligned}$$

que sólo es posible si  $m = n = 0$ .

Ahora probaremos que  $\gamma$  no es un encaje, pues no es un homeomorfismo en su imagen. Mostraremos que hay puntos en la curva  $\gamma$  tan cercanos como queramos al  $(1, 1) \in \gamma$ . Pensemos en qué pasa cada vez que avanzamos sobre  $\gamma$  por un número entero: la primera coordenada vuelve a ser 1, pero la segunda cambia. La idea es encontrar un número entero  $n$  tal que al desplazarse por  $n$  la segunda coordenada sea tan cercana como queramos al 1. Es decir, queremos encontrar una cota para  $|e^{2\pi i \alpha n} - 1|$ .

Notemos que  $|e^{2\pi i t_1} - e^{2\pi i t_2}| \leq |t_1 - t_2|$ .



Ahora tomamos dos números enteros  $n$  y  $m$ . Tenemos:

$$|e^{2\pi i \alpha n} - 1| = |e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m}| \leq |2\pi i \alpha n - 2\pi i m| = 2\pi |\alpha n - m|$$

Necesitaremos el siguiente lema:

**Lema** (Teorema de aproximación de Dirichlet). Sea  $\alpha$  un número real. Hay un múltiplo entero de  $\alpha$  que es muy cercano a algún número entero. Es decir, para cualquier entero positivo  $N$ , existen enteros  $n, m$  con  $1 \leq n \leq N$  tales que  $|n\alpha - m| < 1/N$ .

*Demostración.* Para los múltiplos enteros de  $\alpha$ , consideremos su distancia al entero menor o igual más cercano,  $|k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor|$ , que son números en el intervalo  $[0, 1)$ . Dividamos el intervalo en  $N$  partes de tamaño  $1/N$ . Consideremos  $k = 0, 1, \dots, N$ . Se trata de  $N + 1$  puntos repartidos en  $N$  intervalos, de manera que existen dos en uno sólo, digamos  $k_1$  y  $k_2$ . Escojamos  $n = k_2 - k_1$  y  $m = \lfloor k_2 \alpha \rfloor - \lfloor k_1 \alpha \rfloor$ . Luego,

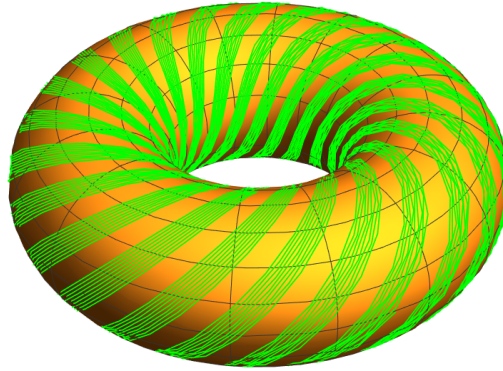
$$\begin{aligned} 1/N &> \left| |k_1 \alpha - \lfloor k_1 \alpha \rfloor| - |k_2 \alpha - \lfloor k_2 \alpha \rfloor| \right| \\ &\geq |(k_1 \alpha - \lfloor k_1 \alpha \rfloor) - (k_2 \alpha - \lfloor k_2 \alpha \rfloor)| \\ &\geq |\alpha(k_1 - k_2) - (\lfloor k_2 \alpha \rfloor - \lfloor k_1 \alpha \rfloor)| \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, existe  $n$  entero tal que  $|e^{2\pi i \alpha n} - 1| < 2\pi \varepsilon$  para cualquier  $\varepsilon > 0$ . De hecho,

$$|\gamma(n) - \gamma(0)| = |(e^{2\pi i \alpha n}, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| = |(1, e^{2\pi i \alpha n}) - (1, 1)| = |e^{2\pi i \alpha n} - 1| < 2\pi \varepsilon$$

De forma que  $(1, 1)$  es un punto de acumulación de  $\gamma(\mathbb{Z})$ , y los homeomorfismos (hay que considerar  $\gamma^{-1}$ ) mandan puntos de acumulación en puntos de acumulación, pero el 0 no es punto de acumulación de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{R}$ .



La curva  $\gamma$  para  $\alpha = \pi$  con  $t \in [0, 400]$

Ahora mostraremos una propiedad sobre las sumersiones.

**Teorema** (del conjunto de nivel regular, [L. Tu, 9.9](#)). Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave entre las variedades  $M$  y  $N$ . Si hay un punto  $c \in N$  tal que  $f$  es una sumersión en todos los puntos de  $f^{-1}(c)$ , entonces  $f^{-1}(c)$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $m - n$ .

*Demostración.* Para alguna carta  $k$  alrededor de  $c \in N$ , nombremos las coordenadas de  $f$  mediante  $k \circ f = (f^1, \dots, f^n) \in \mathbb{R}^n$ .

La idea es demostrar que dada una carta  $h = (x^1, \dots, x^m)$  en  $M$ , podemos reemplazar las primeras  $n$  funciones coordenadas con las coordenadas de  $f$ . Es decir, que la función

$$\begin{aligned} \tilde{h} : M &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (f^1, \dots, f^n, x^{n+1}, \dots, x^m) \end{aligned}$$

también es una carta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow h, \tilde{h} & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Basta ver que  $\tilde{h}$  tiene inversa. Usaremos el teorema de la función inversa ([L. Tu, 6.25](#)) para variedades: a reserva de los detalles, una función entre variedades es localmente invertible si y sólo si el determinante su diferencial no es cero.

Para aplicar este teorema a  $\tilde{h}$ , notemos que su diferencial es la matriz

$$d\tilde{h}_p = \begin{pmatrix} D & X \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

Donde  $D$  es la submatriz de  $df_p$  con las primeras  $n$  columnas y  $n$  renglones, y  $X$  es el resto de esta matriz. (Recordemos que como  $f$  es sumersión  $n \geq m$ , así que  $df_p$  es una matrix de  $m \times n$ ).

Como  $f$  es una sumersión en  $f^{-1}(c)$ , su diferencial  $df_p = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)$  tiene rango  $n$ . Renombrando las coordenadas para que las primeras  $n$  funciones coordenadas de  $df_p$  sean linealmente independientes, tenemos que  $\det D \neq 0$ . Luego,  $\det d\tilde{h}_p = \det D \det \text{Id} \neq 0$ .

Suponiendo que  $k(c) = (0, \dots, 0)$ , los puntos en  $f^{-1}(c)$  tienen coordenadas en  $\tilde{h}$  de la forma

$$(0, \dots, 0, x^{n+1}, \dots, x^m)$$

lo que le da una estructura de  $(m - n)$ -variedad.  $\square$

**Definición.** El **rango** de una función suave entre variedades es el rango de su diferencial.

**Teorema** (del rango constante, [L. Tu, 11.1](#)). Sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave entre las variedades  $M$  y  $N$ . Si el rango de  $f$  es constante  $k$  en una vecindad de algún punto  $p \in M$ , entonces existen cartas coordenadas  $h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $k : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que

$$(k \circ f \circ h^{-1}(r^1, \dots, r^m) = (r^1, \dots, r^m, 0, \dots, 0)$$

para cualquier  $(r^1, \dots, r^m) \in h(U)$ .

En otras palabras,  $f$  se ve localmente como una inclusión (si es una inmersión) o como una proyección (si es una sumersión).

## 1.6 Campos vectoriales

**Definición (O'Neill).** Un **campo vectorial** es una correspondencia que a cada  $p \in M$  le asocia un vector tangente  $v \in T_p M$ , y *varía suavemente* sobre la variedad.

Debemos especificar qué quiere decir que el campo vectorial “varíe suavemente”. Consideremos un vector tangente  $v_p$  a una variedad  $M$  anclado en el punto  $p \in M$ . Hemos visto que deben existir coeficientes  $a_i(p)$  tales que

$$v_p = a_1(p) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + a_n(p) \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$$

Suponiendo que  $v_p$  es un elemento de un campo vectorial, podemos variar el punto en el que está anclado el vector para obtener otros vectores  $v_q$  que se expresan análogamente como

$$v_q = a_1(q) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q + \dots + a_n(q) \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q$$

Decimos que un campo vectorial es **suave** si las funciones  $a_1, \dots, a_n : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  son suaves.

**Observación.** Denotaremos al conjunto de campos vectoriales en una variedad por  $\mathfrak{X}(M)$ .

Para definir un campo vectorial como una función entre dos conjuntos, primero debemos construir el haz tangente (ver [Lee Cap 3.4](#)).

**Definición.** Dada una variedad  $M$ , el **haz tangente** es la unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto, es decir,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

La **proyección natural** es una función  $\pi : TM \rightarrow M$  que envía cada vector en el punto al que está anclado. Un **campo vectorial** ([Lee Cap. 8](#)) es una sección de la proyección natural, es decir, una función continua

$$\begin{aligned} V : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto V_p \end{aligned}$$

tal que  $\pi \circ V = \text{Id}_M$ .

$$\begin{array}{ccc} & & TM \\ & \nearrow V & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\text{Id}} & M \end{array}$$

**Proposición** ([Lee, 3.18](#)). Sea  $M$  es una variedad de dimensión  $n$ . El haz tangente tiene una topología natural y una estructura suave que lo hacen una variedad diferenciable de dimensión  $2n$  respecto a la cual  $\pi : TM \rightarrow M$  es suave.

*Demostración.* Comenzamos con una carta  $h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $M$ . Notemos que  $\pi^{-1}(U)$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a puntos en  $U$ . ¿Qué coordenadas debería tener uno de estos vectores? La elección natural es primero las  $n$  entradas del punto al que está anclado, y luego los  $n$  coeficientes del vector respecto a su base canónica. Definamos una carta  $\tilde{h} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\tilde{h} \left( \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n)$$

Donde las  $x^i$  son las funciones coordenadas de  $h$ , es decir,  $h = (x^1, \dots, x^n)$ . Recordemos que por el [teorema](#) de la base del espacio tangente,  $v^i = v(x^i)$ .

Ahora veamos cómo son los cambios de coordenadas. Tomemos dos cartas  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $k : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $M$  y las correspondientes  $\tilde{h} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  y  $\tilde{k} : \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Los cambios de coordenadas son funciones de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{k} \circ \tilde{h}^{-1} : h(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow k(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ \tilde{k} \circ \tilde{h}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) &= \left( \tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j} v^j, \dots, \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} v^j \right) \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{x}^i$  son las funciones coordenadas de  $k$ . Esta fórmula se obtiene sin complicaciones usando el **lema** para las coordenadas de la diferencial aplicado al cambio de coordenadas (Lee (3.12)), que nos dice cómo cambian las coordenadas de un vector tangente mediante una función de transición.  $\square$

## 1.7 Corchete de Lie

Dado un campo vectorial  $V$  en una variedad  $M$ , es posible verlo como una función

$$\begin{aligned} V : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f : M &\rightarrow \mathbb{R} \mapsto v(f) : M \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto v_p(f) \end{aligned}$$

Comparemos esto con la siguiente definición:

**Definición.** Una derivación es una función

$$\mathbb{D} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

tal que

- **$\mathbb{R}$ -lineal:**  $\mathbb{D}(af + bg) = a\mathbb{D}(f) + b\mathbb{D}(g)$  para  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .
- **Leibniz:**  $\mathbb{D}(f \cdot g) = \mathbb{D}(f) \cdot g + f\mathbb{D}(g)$ .

De modo que los campos vectoriales se pueden ver como derivaciones. Y de hecho, dada una derivación  $\mathbb{D}$ , podemos obtener un campo vectorial enviando a cada punto  $p \in M$  y a cada función  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  a  $\mathbb{D}(f)(p)$ .

**Definición.** Dados dos campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos su **corchete de Lie** como el operador

$$\begin{aligned} [X, Y] : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned}$$

Resultará que  $[X, Y]$  es un campo vectorial. Para verlo, simplemente notamos que:

(a) Es  $\mathbb{R}$ -lineal, pues

$$[X, Y](\lambda f + \mu g) = X(Y(\lambda f + \mu g)) - Y(X(\lambda f + \mu g)) = \lambda[X, Y](f) + \mu[X, Y](g)$$

(b) Es Leibniz, ya que

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(f \cdot g)) - Y(X(f \cdot g)) \\ &= X(Yf \cdot g + f \cdot Yg) - Y(Xf \cdot g + g \cdot Xg) \\ &= X(Yf) \cdot g + (Yf) \cdot Xg + Xf \cdot Yg + f \cdot X(Yg) - Y(Xf) \cdot g \\ &\quad - Yf \cdot Xg - f \cdot Y(Xg) \\ &= (X(Yf) - Y(Xf)) \cdot g + f \cdot (X(Yg) - Y(Xg)) \\ &= ([X, Y](f)) \cdot g + f \cdot ([X, Y](g)) \end{aligned}$$

**Observación.** El operador  $f \mapsto X(Yf)$ , en contraste, no es una derivación (campo vectorial), pues no satisface la regla de Leibniz.

**Proposición** (Propiedades del corchete de Lie, [Do Carmo, 5.3](#)).

1. **Bilinealidad.** Para  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $[\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2, W] = \lambda_1 V_1, W] + \lambda_2 V_2, W]$ .
2. **Anticonmutatividad.**  $[V, W] = -[W, V]$ .
3. **Identidad de Jacobi.**  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
4. Para  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ,  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

**Definición.** Dados un campo vectorial  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , un punto  $p \in M$  y una vecindad  $U$  de  $p$ , el **flujo local** de  $V$  cerca de  $p$  es una función  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  tal que las curvas  $t \mapsto \varphi(t, x_0) = \varphi_t x_0$  son **curvas integrales** de  $V$ , es decir,  $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$ .

**Observación.** Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, las curvas integrales de un campo vectorial suave en una variedad diferenciable existen y son únicas cerca de cada punto. (Ver [Lee, 9.12](#) para una correspondencia entre flujos y campos vectoriales).

**Teorema** ([Do Carmo, 5.4](#)). Sean  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  y  $p \in M$ . Si  $\varphi$  es el flujo local de  $V$  alrededor de  $p$ , entonces

$$[V, W]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)}(W_{\varphi_t(p)}) - W_p)$$

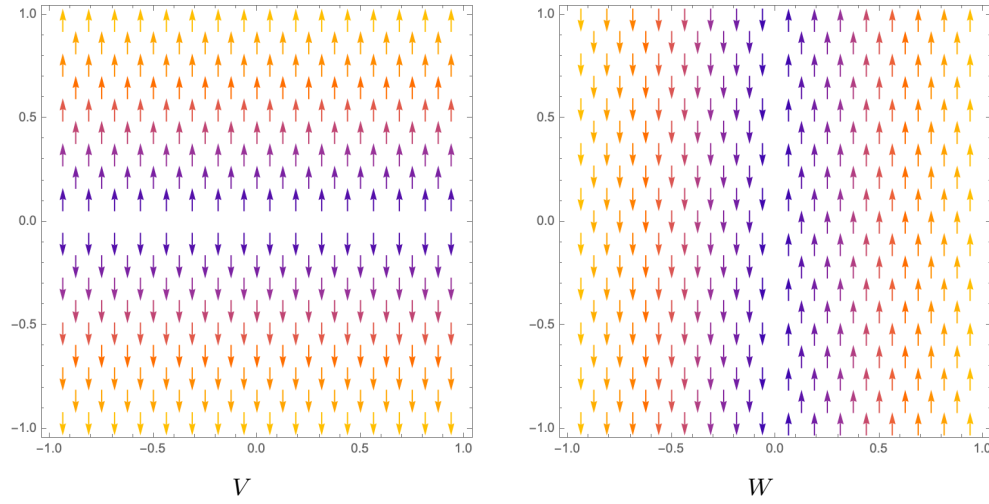
Esto nos permite dar la interpretación geométrica de que el corchete de Lie es como “derivar un campo vectorial respecto a otro”. Lo que estamos haciendo es comparar cuánto cambia un campo vectorial de un punto a otro sobre una curva integral transportando uno de los vectores al punto base del otro, y ya que están en el mismo espacio vectorial, podemos restarlos y ver qué tan distintos son.

**Ejemplo.** Consideremos los campos vectoriales  $V = y \frac{\partial}{\partial y}$  y  $W = x \frac{\partial}{\partial dy}$ . Haciendo cuentas, encontramos que  $[V, W] = -x \frac{\partial}{\partial y} = -W$ .

Podemos graficarlos en Mathematica mediante el código

```
V[x_, y_] := {0, y}
W[x_, y_] := {0, x}
VectorPlot[V[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
VectorPlot[W[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

para obtener:



En este caso podemos describir explícitamente el flujo de  $V$  como la función

$$(t, x_0, y_0) \mapsto \psi(t, x_0, y_0) := (x(t), y(t))$$

Que satsiface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

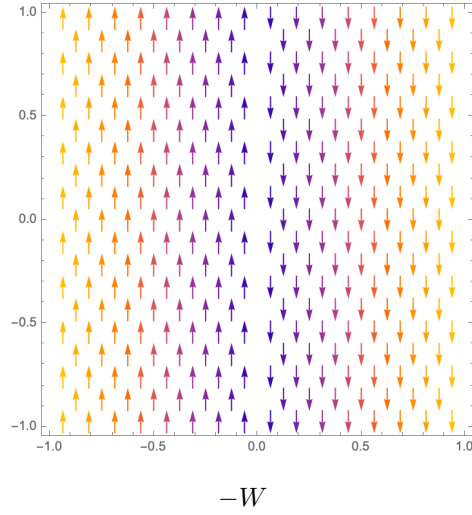
cuyas soluciones son  $x(t) = x_0, y(t) = y_0 e^t$ .

La función que "regresa"  $t$  unidades de tiempo a lo largo de una curva integral que pasa por el punto  $(x, y)$  es  $\psi_{-t}(x, y) = (x, ye^{-t})$ . Al ser una función de  $\mathbb{R}^2$  en sí mismo, su diferencial es una transformación lineal que se puede expresar mediante la matriz

$$d(\psi_{-t})_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

de forma que envía  $W_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{-t} \end{pmatrix}$ . Para aplicar nuestro teorema, vemos esta correspondencia como una función  $F(t)$ , cuya derivada es justamente el límite que escribimos arriba. Hemos confirmado que  $F'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -xe^{-t} \end{pmatrix} = [V, W] = -W$ .





**Observación** (Corchete de Lie en coordenadas). Supongamos que  $V = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$  y  $W = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , busquemos una expresión para las funciones  $c_k$  en la expresión

$$[V, W] = \sum_k c_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Para cualquier  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} [V, W](f) &= V(Wf) - W(Vf) \\ &= V \left( \sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - W \left( \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x^i} \left( b_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial x^j} \left( a_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i,j} \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j} \end{aligned}$$

### 1.7.1 Ejercicios 4-8 septiembre

**Ejercicio 1.** En  $\mathbb{R}^3$  considera los campos vectoriales en coordenadas cartesianas  $X = x^2 E_1 + y E_3$  y  $Y = y^3 E_2$  y la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(p, q, r) = p^2 q r$ . Calcula  $[X, Y]$  en  $(1, 0, 1)$ ,  $fY$  en  $(1, 0, 1)$  y  $Yf$  en  $(1, 0, 1)$ . Expresa  $X$  en términos de la base de campos coordenados correspondiente a coordenadas cilíndricas.

*Solución.* El corchete de Lie de  $X$  y  $Y$  debe ser un campo vectorial, es decir, un operador que asocia funciones suaves en la variedad con números reales. Para cualquier  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , tenemos

$$\begin{aligned} [X, Y](g) &= X\left(\underbrace{Yg}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})}\right) - Y\left(\underbrace{Xg}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})}\right) \\ &= \dots \\ &= -y^3 \frac{\partial g}{\partial z} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es decir,  $[X, Y] = -y \frac{\partial}{\partial z}$ , de forma que  $[X, Y]_{(1,0,1)} = -0 \frac{\partial}{\partial z} \in T_{(1,0,1)}\mathbb{R}^3$ .

Luego,  $fY$  también es un campo vectorial, así que al evaluar en punto nos da un vector tangente:

$$(fY)_{(1,0,1)} = f(1,0,1)(y^3 E_2)_{(1,0,1)} = 0 \in T_{(1,0,1)}\mathbb{R}^3$$

Por otro lado,  $Yf$  es una función definida en la variedad  $\mathbb{R}^3$  que en cada punto nos devuelve un número real:

$$(Yf)(1,0,1) = \left[ y^3 \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{(1,0,1)} = [y^3 x^2 z]_{(1,0,1)} = 0 \in \mathbb{R}$$

El mapeo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cambia coordenadas cilíndricas a cartesianas manda  $(r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ . Su diferencial

$$dT = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

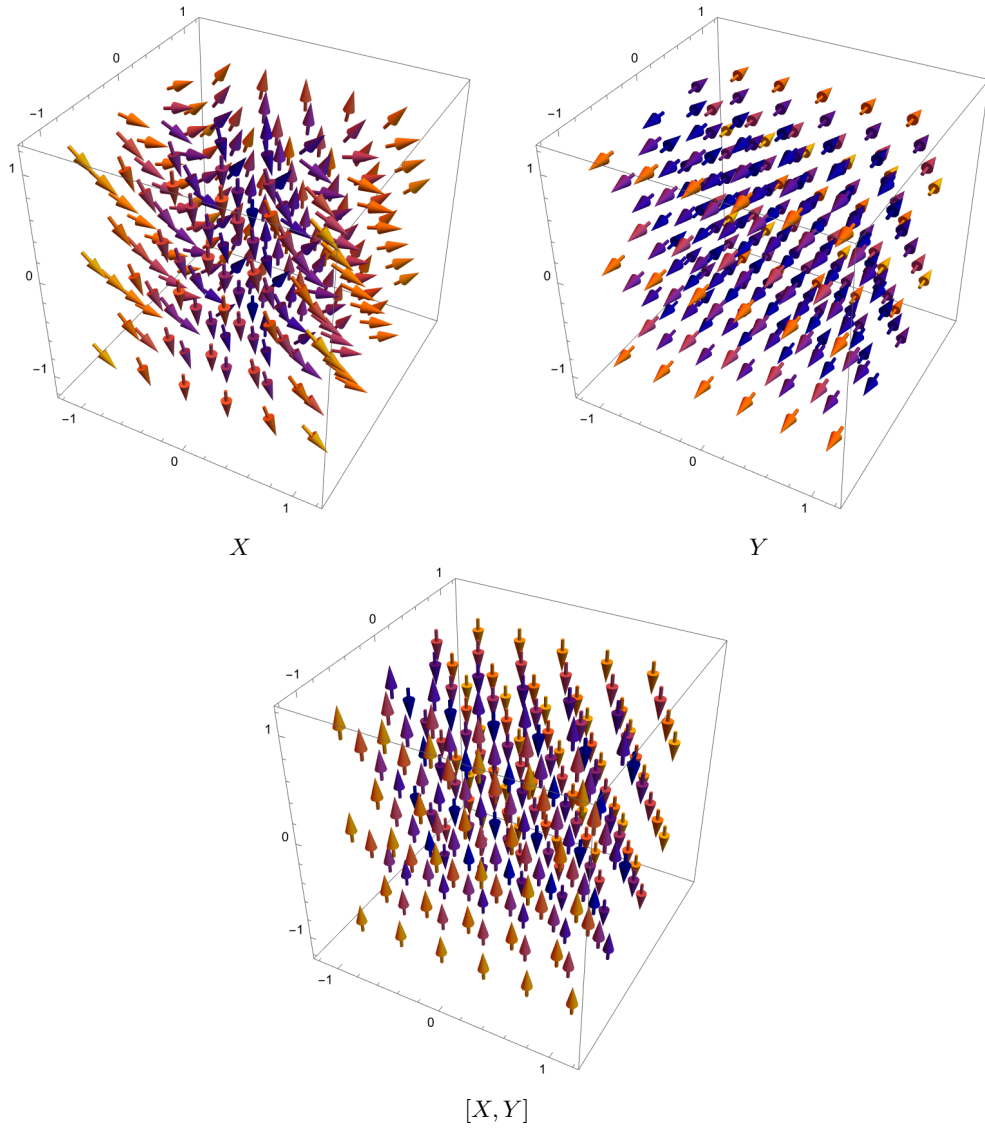
tiene inversa

$$dT^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores columna de  $dT^{-1}$  son las coordenadas cilíndricas de los vectores tangentes básicos  $E_1, E_2$  y  $E_3$ . Sustituyendo,

$$\begin{aligned} X &= r^2 \cos^2 \theta (\cos \theta E_r - \frac{1}{r} \sin \theta E_\theta) + r \sin \theta E_z \\ &= r^2 \cos^3 \theta E_r - r \cos^2 \theta \sin \theta E_\theta + r \sin \theta E_z. \end{aligned}$$

También se puede definir el cambio de coordenadas normalizando los vectores. □



## 1.8 Teorema de rectificación

Podemos simplificar la expresión local de un campo vectorial mediante un cambio de coordenadas:

**Lema (O'Neill, 57).** Si  $V$  es un campo vectorial y  $p \in M$  con  $V_p \neq 0$ , entonces existe un sistema de coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  alrededor de  $p$  tal que  $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$ .

*Demostración.* Sea  $\psi : I \times U \rightarrow M$  el flujo local de  $V$  alrededor de  $p$  relativo a la carta

$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tomemos un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  que no contenga a  $V_p$ . Para fijar ideas, consideremos en el hiperplano normal  $H$  a  $V_p$ . Entonces,  $S := h^{-1}(H)$  es una subvariedad. Usaremos la siguiente observación:

**Observación.** Podemos ver el espacio tangente de una subvariedad como subespacio del espacio tangente de la variedad. Aunque esto no es formalmente cierto, para  $w \in T_p S$  podemos asociarle el vector  $dj_p(w) \in T_p M$  que manda  $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mapsto w(g|_S)$ . (Ver [Lee](#), 5.37).

Ahora restrinjamos el flujo a la subvariedad, y tomemos  $q \in S \cap U$ . El flujo es un difeomorfismo entre  $J \times V$  (ver O'Neill). Para un sistema de coordenadas  $z^2(q), \dots, z^n(q)$  en la subvariedad, tenemos coordenadas  $x^1(r) = t, x^2(r) = z^2(q), \dots, x^n(r) = z^n(q)$  en  $J \times V$ . Estas coordenadas se pueden tomar como coordenadas de  $M$ , para las cuales  $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$ . Para verlo, tomamos una curva integral  $\alpha$  de  $V$  de forma que  $V(x^1) = (\frac{d}{dt}x^1(\alpha(t))) = \frac{dx^1}{dt} = 1$ , y en las demas coordenadas se anula por no depender de  $t$ .  $\square$

Ahora comparemos con las ideas de Arnold en su libro de ecuaciones diferenciales ordinarias:

**Definición (Cooke and Arnold).** Un **campo de direcciones** en  $\mathbb{R}^n$  es una función que a cada punto le asocia una recta que pasa por ese punto.

Una **rectificación** de un campo de direcciones en  $\mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo que lo transforma en un campo de direcciones paralelas. Un campo de direcciones es **rectificable** si existe una rectificación de él.

**Teorema.** Todo campo de direcciones suave es rectificable en una vecindad de cada punto.

**Teorema.** La ecuación diferencial  $\dot{x} = v(t, x)$  con  $v$  suave es localmente equivalente a la ecuación  $\frac{dy}{dz} = 0$  mediante el cambio de coordenadas  $(t, x) \leftrightarrow (y, z)$ .

**Ejercicio (Lee, 9.5).** Supongamos que  $M$  es una variedad suave y compacta que admite un campo vectorial que no se anula en ninguna parte. Demuestre que existe un mapeo suave  $F : M \rightarrow M$  que es homotópico a la identidad y no tiene puntos fijos.

*Solución.* La idea es tomar el flujo del campo vectorial y fijar una  $t_0$  tal que al avanzar  $t_0$  unidades de tiempo no quede ningún punto fijo.

Supongamos que  $V$  es un campo vectorial que no se anula en ninguna parte, de forma que para cualquier punto  $p \in M$  podemos encontrar una vecindad  $U_p$  donde  $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$  para las coordenadas  $h = (x^1, \dots, x^n)$  en  $U_p$ . Una curva integral  $\alpha$  de  $V$  tiene coordenadas  $(t, 0, \dots, 0)$ , ya que su derivada manda  $f \in C^\infty \mapsto \frac{d}{dt}f \circ \alpha = \frac{\partial(f \circ h^{-1})}{\partial x^1}$ .

Hemos construido una cubierta abierta  $\{U_p\}_{p \in M}$  de  $M$ , que tiene una subcubierta finita  $U_1, \dots, U_k$ . ¿Cómo nos aseguramos de que hay una  $t_0$  tal que el flujo  $\psi_{t_0} : M \rightarrow M$  no se salga del dominio de todos estos abiertos?

Conviene hacer con un poco más de detalle la construcción: en vez de aplicar la compacidad a la cubierta  $\{U_p\}$ , debemos tomar una bola de radio  $\varepsilon_p$  dentro de cada abierto  $h(U_p) \subset \mathbb{R}^n$  (donde el flujo tiene la expresión que hemos especificado). Y ahora sí, la cubierta de "bolas"  $\{h^{-1}(B_{\varepsilon_p/2}(h(p)))\}_{p \in M}$  tiene una subcubierta finita  $\{h^{-1}(B_{\varepsilon_i/2}(h(p_i)))\}_{i=1}^k$  y podemos definir  $t_0 := \min_{1 \leq i \leq k} \varepsilon_i/2$ . (Hemos tomado  $\varepsilon_p/2$  para asegurarnos de que la curva integral que pase por cualquier punto del abierto no se salga).

Se sigue de la expresión local del flujo que la función suave  $\psi_{t_0} : M \rightarrow M$  no tiene puntos fijos, y la homotopía  $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$  que manda  $(s, p) \mapsto \psi_{st_0}(p)$  es la buscada.  $\square$

¿Qué clase de información nos da este resultado? Para desarrollar intuición veamos un ejemplo.

**Ejercicio (Lee, 9.4).** En  $S^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$  con  $n$  impar, definamos  $\theta(t, z) = e^{it}z$ . Entonces, el **generador infinitesimal** de  $\theta$ , es decir, el campo vectorial  $V_p = \frac{d}{dt}\theta(t, p)$ , es un campo vectorial suave que no se anula.

*Demostración.* Derivando respecto a  $t$ , obtenemos que  $V_p = ie^{it}z$  como vector en  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Es claro que este vector nunca se anula. Además, se trata de un campo vectorial suave simplemente por ser el generador infinitesimal de un flujo (Proposición 9.11).  $\square$

¿Será que si una variedad no admite un campo vectorial que no se anula en ninguna parte no es posible construir una función suave homotópica a la identidad y sin puntos fijos? Veamos el siguiente teorema de topología algebraica:

**Teorema** (de la bola peluda [Hatcher, 2.28](#)).  $S^n$  admite un campo vectorial continuo que no se anula si y sólo si  $n$  es impar.

Así que en  $S^2$ , por ejemplo, cualquier campo vectorial suave se anula en por lo menos un punto. ¿Será que entonces no hay una función homotópica a la identidad y sin puntos fijos? Al menos en las esferas de dimensión par, la respuesta es que no.

Cuando una función  $f : S^n \rightarrow S^n$  no tiene puntos fijos, el segmento que une  $f(x)$  y  $-x$  no pasa por el origen, así que podemos definir la homotopía de la línea recta normalizada  $H(t, x) = (tf(x) - (1-t)x) / |tf(x) - (1-t)x|$ . Ésta resulta ser una homotopía entre  $f$  y la función antípoda  $-\text{Id}$ .

El resultado clave de topología algebraica (que no podemos demostrar) es que hay un **invariante homotópico** que se llama **grado** para funciones entre esferas que asocia el número  $(-1)^{n+1}$  a la función antípoda y el número 1 a la identidad. Así que estos números deben coincidir. De hecho, la prueba del teorema de la bola peluda es precisamente construyendo una homotopía entre la identidad y la antípoda.

## 2. Formas y tensores

### 2.1 Tensores

Éstas son las definiciones de [O'Neill](#). También recomendamos consultar [Palmas V. and Sánchez M.](#) **Advertencia:** la notación en estos dos libros (y en otros) puede no ser igual.

**Definición (O'Neill, Cap 3).** Para cualesquiera espacios vectoriales (o más generalmente, módulos)  $V_1, \dots, V_s$ , podemos definir el **producto directo** como el espacio vectorial definido con las operaciones naturales en  $V_1 \times \dots \times V_s$ . Si  $V_1 = \dots = V_s$ , denotamos este espacio vectorial por  $V^s$ .

Una función definida en un espacio de este estilo es **multilineal** si es lineal en cada entrada.

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$ . Un  $(r, s)$ -**tensor** es una función  $K$ -multilineal definida en el producto directo de  $(V^*)^r$  con  $V^s$ . Es decir, es una función multilineal

$$T : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$$

Ahora comparemos con la definición de [Spivak](#):

**Definición.** Un  $k$ -tensor es una función multilineal

$$T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

**Observación.** El conjunto de  $k$ -tensores  $\tau^k(V)$  tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned}(S + T)(v_1, \dots, v_k) &= S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k) \\ (\lambda T)(v_1, \dots, v_k) &= \lambda T(v_1, \dots, v_k)\end{aligned}$$

**Definición.** Para el **producto tensorial** de  $S \in \tau^k(V)$  y  $T \in \tau^\ell(V)$  es el tensor  $S \otimes T \in$

$\tau^{k+\ell}(V)$  dado por

$$\begin{aligned} S \otimes T : V^k \times V^\ell &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) &\mapsto S(v_1, \dots, v_k) \otimes T(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) \end{aligned}$$

**Observación** (Intuición sobre el producto tensorial). El producto tensorial de dos espacios vectoriales  $A$  y  $B$  se puede pensar como el espacio vectorial donde viven los "productos" de los elementos de  $A$  y  $B$ . Como en  $\mathbb{R}^3$ , no siempre es posible definir un producto entre vectores, así que esta estructura a menudo se "sale" de los espacios originales y resulta en un objeto algebraico abstracto.

**Proposición.** Dada una base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$ , tenemos la base  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  del espacio dual  $V^*$  dada por

$$\begin{aligned} \varphi_i : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_j &\mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, los productos de la forma  $\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k}$  son una base de  $\tau^k(V)$ .

**Observación.** Dada una transformación lineal entre espacios vectoriales  $f : V \rightarrow W$ , la transformación lineal

$$\begin{aligned} f^* : \tau^k(W) &\rightarrow \tau^k(V) \\ T(v_1, \dots, v_k) &\mapsto T(f(v_1), \dots, f(v_k)) \end{aligned}$$

**Definición.** Un  $k$ -tensor  $T$  en  $V$  es **alternante** si

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

Y denotaremos al conjunto de  $k$ -tensores alternantes por  $\Lambda^k(V)$ .

Para  $T \in \tau^k(V)$ , definamos

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn } \sigma T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

**Proposición.**

1. Si  $T \in \tau^k(V)$ , entonces  $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$ .
2. Si  $\omega \in \Lambda^k(V)$ , entonces  $\text{Alt}(\omega) = \omega$ .
3. Si  $T \in \tau^k(V)$ , entonces  $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$ .

El producto tensorial de dos tensores alternantes no necesariamente es alternante, por lo que definimos

**Definición.** El **producto cuña** de dos tensores alternantes  $\omega \in \Lambda^k(V)$  y  $\eta \in \Lambda^\ell(V)$  es

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

**Proposición** (Propiedades del producto cuña).

1.  $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$ .
2.  $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$ .
3.  $\lambda(\omega \wedge \eta) = \lambda\omega \wedge \eta = \omega \wedge \lambda\eta$ .
4.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$  (**Anticonmutatividad**)
5.  $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$ .
6.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ .

**Proposición.** La colección de formas alternantes  $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$  con  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$  es una base de  $\Lambda^k(V)$ , de forma que tiene dimensión  $\binom{n}{k}$ .

**Proposición.** Sean  $v_1, \dots, v_k$  son una base de un espacio vectorial  $V$  y  $\omega \in \Lambda^n(V)$ . Para los vectores  $w_i = \sum_j \lambda_{ij} v_j$  en  $V$ , tenemos que

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(\lambda_{ij}) \omega(v_1, \dots, v_k)$$

## 2.2 Covectores

**Definición.** Una **1-forma (covector)** en un espacio tangente  $T_p M$  es una función lineal  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las 1-formas (covectores) son elementos en el dual del espacio tangente  $T_p M^*$ , que llamaremos el espacio **cotangente**.

**Ejemplo** (Dos 1-formas en  $(T_p \mathbb{R}^2)^*$ ). Dada una curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(0) = (x_0, y_0)$  y  $\alpha'(0) = (v_1, v_2)$ , tenemos las 1-formas (covectores)

$$\begin{aligned} dx : T_{(x_0, y_0)} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & dy : T_{(x_0, y_0)} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ v = \alpha'(0) &\mapsto v_1 & v = \alpha'(0) &\mapsto v_2 \end{aligned}$$

Y resultará que cualquier  $\omega \in T_{(x_0, y_0)} \mathbb{R}^2$  es de la forma  $\omega = adx + bdy$ . Es decir:

$$\begin{aligned} \omega : T_{(x_0, y_0)} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\mapsto av_1 + bv_2 \end{aligned}$$

Ahora consideremos un vector tangente a una variedad  $M$  en algún punto  $p$  que en coordenadas locales se exprese como

$$v_p = a_1(p) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + a_n(p) \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$$



Si  $\omega \in (T_p M)^*$ , por linealidad tenemos

$$\omega(v_p) = a_1(p)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p\right) + \dots + a_n(p)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)$$

**Observación.** Tendremos que

$$dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Observación.** Las 1-formas (covectores)  $dx^1, \dots, dx^n$  son una base del espacio cotangente  $(T_p M)^*$ .

**Observación.** En el ejemplo anterior usamos que la derivada de una curva es un vector tangente. De hecho, otra forma de definir los vectores tangentes es justo como derivadas de curvas (ver [Do Carmo](#) y [Lee Prop 3.23](#)).

**Observación.** Las funciones bilineales de la forma  $\omega : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  también forman un espacio vectorial. Si  $V = W = \mathbb{R}^n$  tenemos como ejemplos determinante y el producto escalar.

Ahora tratemos de definir una operación en el espacio cotangente, que llamaremos **producto cuña**. Consideremos el caso de una variedad de dimensión 2  $M$ . Como en el caso de  $M = \mathbb{R}^2$ , los covectores  $dx^1$  y  $dx^2$  forman una base del espacio cotangente. Definamos

$$dx^1 \wedge dx^2 : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

que actuará de la siguiente forma: para  $u = a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}$  y  $v = c\frac{\partial}{\partial x^1} + d\frac{\partial}{\partial x^2}$ ,

$$(dx^1 \wedge dx^2)(u, v) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

## 2.3 Formas diferenciales

Ahora construimos el concepto dual al de campo vectorial para covectores.

**Definición.** Una **1-forma diferencial** en una variedad suave  $M$  es una función que a cada punto  $p \in M$  y a cada vector tangente  $v_p \in T_p M$  le asocia un número  $\omega(p, v_p)$ .

Localmente,

$$\omega(p, v_p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx_p^i(v_p)$$

con  $a_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  suave para toda  $i$ . Una expresión más sencilla es  $\omega = \sum a_i dx^i$ .

**Observación.** Dado un campo vectorial  $V$  y una 1-forma diferencial  $\omega$  en  $M$ , podemos calcular

$$p \mapsto V_p \mapsto \omega_p(V_p) \in \mathbb{R}$$

Este número lo denotaremos, abusando de notación por

$$\omega(V) : M \rightarrow \mathbb{R}$$

## 2.4 Derivada exterior

Una función  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  se considera una 0-forma. Notemos que su diferencial  $df$  es una 1-forma en cuanto a que para cualquier punto  $p$  de la variedad, la función  $df_p$  es un covector: a cada vector le asigna un número real. En coordenadas, tenemos

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

La siguiente definición generaliza esta idea.

**Definición (L. Tu, 4.5).** Para una  $k$ -forma definida en algún abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} := \sum_I a_I dx^I$$

su **derivada exterior** o **diferencial** es la  $(k+1)$ -forma

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \left( \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I$$

**Definición.**

- Una  $k$ -forma  $\omega$  es **cerrada** si  $d\omega = 0$
- Una  $k$ -forma es **exacta** si existe una  $(k-1)$ -forma  $\theta$  tal que  $\omega = d\theta$ .

**Proposición (L. Tu, 4.7).** Si  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$

1.  $d^2 = 0$ . (Usando la conmutatividad de las segundas derivadas parciales)
2. Si  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ , y  $X \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $(df)(X) = Xf$ .

**Ejemplo** (Una 1-forma cerrada que no es exacta, L. Tu, 4.9 y ejemplo p. 43). Consideremos la 1-forma

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

definida en  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Una 1-forma  $Pdx + Qdy$  es cerrada cuando  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , así que  $\omega$  es cerrada. Consideremos la integral

$$\int_\alpha \omega = \int_0^{\theta_0} -\sin t (-\sin t) + \cos t \cos t dt = \int_0^{\theta_0} dt = \theta_0$$

Para ver que  $\omega$  no es exacta, supongamos que  $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $df = \omega$ . En este caso, sabemos que la integral de línea sobre cualquier curva cerrada debe dar cero.

Explícitamente, si  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \omega &= \int_0^{\theta_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt \\ &= \int_0^{\theta_0} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) dt \\ &= f(x(\theta_0), y(\theta_0)) - f(x(0), y(0)) \\ &= f(\cos \theta_0, \sin \theta_0) - f(1, 0)\end{aligned}$$

Haciendo  $\theta_0 \rightarrow 2\pi$  esta integral tiende a 0, pero la anterior tiende a  $2\pi$ .

Resulta que la proporción de formas exactas respecto a formas cerradas depende exclusivamente de la topología de una variedad. Siguiendo a [L. Tu](#), definamos el cociente de dos espacios vectoriales

$$H^k(U) = \frac{\{k\text{-formas cerradas en } M\}}{\{k\text{-formas exactas en } M\}}$$

que llamaremos la  **$k$ -ésima de cohomología de De Rham** de  $M$ , que está bien definido ya que cualquier forma cerrada es exacta. Georges De Rham demostró en 1931 que las formas diferenciales satisfacen los mismos axiomas que los ciclos y las cadenas de la homología singular, mostrando una dualidad entre estas construcciones.

Un resultado central en esta teoría es que dos espacios homotópicamente equivalentes tienen asociada la misma cohomología (Corolario 27.11). En particular, como  $\mathbb{R}^n$  es contraíble (homotópicamente equivalente a un punto), su cohomología es trivial para  $k \geq 1$ : ¡no hay 1-formas no triviales definidas en el espacio unipuntual! Este resultado se conoce como el Lema de Poincaré (Corolario 27.13).

En el ejemplo anterior vimos un espacio no contraíble cuya primera homología no es trivial: hay una 1-forma cerrada que no es exacta.

Mostramos una demostración "a pie" del Lema de Poincaré para subconjuntos estrellados de  $\mathbb{R}^n$  (en particular, todo  $\mathbb{R}^n$ ). Un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es **estrellado** si existe un punto  $c$  tal que para cualquier  $x \in U$  el segmento que une  $c$  y  $x$  se queda contenido en  $U$ .

**Teorema ([Lee, 11.49](#), Lema de Poincaré para conjuntos estrellados).** Cualquier 1-forma cerrada definida en un conjunto estrellado  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es exacta.

*Demostración.* Sea  $\omega$  una 1-forma cerrada en  $U$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que el centro de  $U$  es el origen (la traslación adecuada manda formas cerradas en cerradas y exactas en exactas). Mostraremos que

$$d \int_{\gamma_x} \omega = \omega$$

donde  $\gamma_x(t) = tx$  para  $0 \leq t \leq 1$ , el segmento que une  $x$  al origen.

Supongamos que  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$ . Como la integral es una función real-valuada en  $U$ , para encontrar su derivada exterior basta encontrar sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^j} \int_{\gamma_x} \omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x^i dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i(tx) x^i dt \\
 &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(tx) tx^i + \omega_j(tx) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(tx) tx^i + \omega_j(tx) \right) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} t \omega_j(tx) dt \\
 &= \omega_j(x)
 \end{aligned}$$

Usando que como  $\omega$  es cerrada,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

□

## 2.5 Variedades orientables y no orientables

En un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita definamos una relación de equivalencia entre bases  $\{v_1, \dots, v_n\} \sim \{w_1, \dots, w_n\}$  cuando el determinante de la transformación lineal  $T : V \rightarrow V$  tal que  $T(v_j) = w_j$  para toda  $j$  es positivo.

**Definición (Do Carmo, 4.4).** Una variedad diferenciable  $M$  es **orientable** si admite un atlas  $A$  para el cual los cambios de coordenadas tienen jacobiana con determinante positivo. La elección de tal estructura diferenciable se llama **orientación**, y una **variedad orientada** es una pareja  $(M, A)$ . Dos orientaciones cuya unión es un atlas para el cual los cambios de coordenadas tienen jacobiano con determinante positivo **determinan la misma orientación**.

**Observación.**

- Si  $M$  es orientable y conexa entonces existen exactamente dos orientaciones distintas.
- Si  $M$  y  $N$  son difeomorfos, basta que una sea orientable para que la otra lo sea.
- Si  $M$  y  $N$  son variedades difeomorfas orientadas, un difeomorfismo puede **preservar** o **invertir** la orientación. Explícitamente, si  $\varphi : (M, A) \rightarrow (N, B)$  es un difeomorfismo entre variedades orientables,  $\varphi$  induce un atlas  $B'$  en  $N$  como sigue: para una carta coordenada  $h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  definimos  $\varphi \circ h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U)$ . Cuando  $B$  y  $B'$  determinan la misma orientación decimos que  $\varphi$  preserva orientación.

- Si  $M$  puede ser cubierta por dos vecindades coordenadas cuya intersección es conexa, entonces  $M$  es orientable. El determinante de la Jacobiana del cambio de coordenadas no puede ser 0 por tratarse de una función invertible. Como la intersección de las vecindades coordenadas es conexa, el determinante no puede cambiar de signo. Reajustando si es necesario las coordenadas, podemos suponer que el determinante es siempre positivo.

**Ejemplo** ( $S^n$  es orientable). Consideremos el caso de  $S^2$  con el atlas dado por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur:

$$\begin{aligned} h_1 : S^1 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 & h_2 : S^1 \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) & (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

¿Cuál es la función de cambio de coordenadas  $(u^1, v^1) \mapsto (u^2, v^2)$ ?

$$u^2 = \frac{u^1}{|(u^1, v^1)|^2} \quad v^2 = \frac{v^1}{|(u^1, v^1)|^2}$$

Observemos que esta transformación fija la circunferencia unitaria en  $\mathbb{R}^2$ , e invierte las regiones de adentro y afuera. De hecho, se trata de la inversión respecto a la circunferencia unitaria. Como la intersección de estas dos vecindades es conexa, por la observación anterior  $S^2$  (y con un argumento análogo  $S^n$ ) es orientable.

**Observación.** La transformación antípoda  $-\text{Id} : S^n \rightarrow S^n$  preserva la orientación cuando  $n$  es impar, y la invierte cuando  $n$  es par. (Ver [Teorema de la bola peluda](#)). Esta prueba me pareció buena, usando un campo normal. Otra idea para demostrarlo, siguiendo las ideas de [Hatcher](#), es ver la antípoda como la composición de tantas reflexiones como coordenadas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

## 2.6 Cambios de coordenadas

Consideremos un campo vectorial  $X$  definido en alguna variedad  $M$ . Dadas dos vecindades coordenadas  $U$  y  $V$  con intersección no vacía, tenemos las expresiones

$$X = \sum_{i=0}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=0}^n b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

y queremos encontrar la relación entre las funciones  $a^i$  y  $b^j$ .

Consideremos la matriz  $M$  de la diferencial de  $k \circ h^{-1}$ , que es de la forma  $M = \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$ . Observemos que  $X(x^k) = a^k$ , y  $X(y^m) = b^m$ . Y también  $X(y^m) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial y^m}{\partial x^i}$ , así que

de hecho

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

dicho de otra forma,  $Ma = b$ .

Ahora hagamos el mismo razonamiento para una 1-forma (pensada como una correspondencia que a cada punto de la variedad le asigna un elemento en el dual del espacio tangente) dada por

$$\theta = \sum_{k=1}^n c_k dx^k = \sum_{m=1}^n e_m dy^m$$

Y nuevamente busquemos la relación entre las funciones  $c_k$  y  $e_m$ . Como antes,  $\theta \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = e_j$  y  $\theta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = c_i$ . Y también  $\theta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{m=1}^n e_m dy^m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ .

Y ahora sabemos que se tiene la relación

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{\ell=1}^n g_\ell \frac{\partial}{\partial y^\ell}$$

de forma que  $\frac{\partial y^m}{\partial x^i} = \sum_{\ell=1}^n g_\ell \frac{\partial y^m}{\partial y^\ell} = g_m$  y entonces

$$dy^m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = dy^m \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial y^\ell} \right) = g_m$$

y entonces concluimos que  $\theta \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{m=1}^n e_m \frac{\partial y^m}{\partial x^i}$ , que no es sino la multiplicación por la matriz inversa de  $M$ . Tenemos que  $Me = c$  y que  $M^{-1}c = e$ .

## 2.7 Campos tensoriales

Un campo tensorial es a un tensor lo que un campo vectorial a un vector y una 1-forma a un covector. De hecho, los campos vectoriales y las 1-formas son casos particulares de campos tensoriales.

**Definición (O'Neill).** Un  $(r, s)$ -**campo tensorial** en una variedad  $M$  es una función  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineal

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Es decir,  $A$  es una función que a  $r$  1-formas y  $s$  campos vectoriales asocia una función real-valuada.

Comparemos con la definición de [L. W. Tu](#).

**Definición (21.10).** Un  $(r, s)$ -**campo tensorial** en una variedad  $M$  es una sección del **haz vectorial**

$$\left( \bigotimes_r TM \right) \otimes \left( \bigotimes_s TM^* \right) = \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{r \text{ veces}} \otimes \underbrace{TM^* \otimes \dots \otimes TM^*}_{s \text{ veces}}$$

donde el concepto de haz vectorial es una generalización natural del haz tangente para espacios vectoriales arbitrarios.

Recordando el diagrama conmutativo que usamos para definir campos vectoriales usando el concepto de sección, ahora tenemos:

$$\begin{array}{ccc} & (\bigotimes_r TM) \otimes (\bigotimes_s TM^*) & \\ & \swarrow A & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\text{Id}} & M \end{array}$$

que nos muestra que a cada punto de la variedad asignamos un  $(r, s)$ -tensor. (Ver Proposición 21.11 para una equivalencia entre las definiciones).

**Ejemplo.** Un  $(1, 0)$ -campo tensorial es un campo vectorial y un  $(0, 1)$ -campo tensorial es una 1-forma.

Denotaremos por  $\mathfrak{T}_s^r(M)$  al conjunto de  $(r, s)$ -campos tensoriales, que es un módulo sobre el anillo  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  con la suma de tensores entrada a entrada.

Ahora estudiemos cómo se comportan los campos tensoriales en vecindades coordenadas.

**Ejemplo (O'Neill, Cap. 2, Sec. Tensor Components).** Tomemos  $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$  y una carta coordenada  $h = (x^1, \dots, x^n)$  en  $M$ . Para una 1-forma y dos campos vectoriales con las siguientes expresiones locales

$$\theta = \sum_k \theta_k dx^k \quad X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

al evaluar en  $A$  obtenemos

$$A \left( \sum_k \theta_k dx^k, \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j,k} \theta_k X^i Y^j A \left( dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

por multilinealidad. Como esperábamos,  $A$  está determinado únicamente por su acción en la base. Esto nos motiva a definir

$$A_{ij}^k := A \left( dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

En general,

**Definición.** Sea  $A$  un  $(r, s)$ -campo tensorial  $A$  definido en una variedad  $M$ . Si  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una vecindad coordenada alrededor de  $p \in M$  con  $h = (x^1, \dots, x^n)$ , las **funciones componentes** de  $A$  respecto a  $h$  son las funciones real-valuadas

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A \left( dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \right)$$

Y de hecho,

**Lema.** En una vecindad coordenada como en la definición anterior,

$$A = \sum A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r}$$

que es lo que esperaríamos de acuerdo a que, en cada punto, la base está dada por el producto tensorial de los elementos básicos de acuerdo al siguiente teorema:

**Teorema (L. W. Tu, 18.8).** Si  $v_1, \dots, v_n$  es una base de  $V$  y  $w_1, \dots, w_m$  es una base de  $W$ , entonces

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

es una base de  $V \otimes W$ .

**Observación** (Componentes del producto tensorial). Para cualesquiera  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  y  $B \in \mathfrak{T}_q^p(M)$ , las componentes del producto tensorial son las funciones de la forma

$$(A \otimes B)_{j_1, \dots, j_s, n_1, \dots, n_q}^{i_1, \dots, i_r, m_1, \dots, m_p} = A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} B_{n_1, \dots, n_q}^{m_1, \dots, m_p}$$

## 2.8 Contracción

Queremos construir una operación que llamaremos **contracción**.

**Lema (O'Neill6, Cap. 2).** Existe una función

$$\begin{aligned} C : \mathfrak{T}_1^1(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto C(A) \end{aligned}$$

tal que

$$C(\theta \otimes X) = \theta(X)$$

para cualesquiera  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$

*Demostración.* En una vecindad coordenada  $U$  alrededor de  $p \in M$  con carta  $h = (x^1, \dots, x^n)$ ,



definamos

$$\begin{aligned}
 C(A) &= C \left( \sum_{i,k} A_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \right) \\
 &= \sum_{i,k} A_i^k C \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \right) \\
 &= \sum_{i,k} A_i^k dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\
 &= \sum_i A_i^i
 \end{aligned}$$

que es una función en  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Para ver que  $C$  está bien definida en toda la variedad debemos ver que no depende de la elección de coordenadas. Supongamos que  $k = (y^1, \dots, y^n)$  es otro sistema de coordenadas en  $p$ . Usaremos las siguientes expresiones de cambio de coordenadas (que encontramos hace un par de secciones):

$$dy^m = \sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i \quad \frac{\partial}{\partial y^m} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Las funciones componentes de  $A$  son

$$\begin{aligned}
 A_m^m &= \sum_m A \left( dy^m, \frac{\partial}{\partial y^m} \right) \\
 &= \sum_m A \left( \sum_i \frac{\partial y^m}{\partial x^i} dx^i, \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \sum_{i,j} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} A \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
 &= \sum_i A \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)
 \end{aligned}$$

□

Notemos que para el caso de un  $(1,1)$ -campo tensorial definido en  $\mathbb{R}^2$ , tenemos cuatro funciones componentes que se pueden mostrar en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}$$

y de hecho la contracción de  $A$  es simplemente la traza de esta matriz,  $A_1^1 + A_2^2$ .

Para generalizar esta construcción nos ayudaremos del caso que acabamos de ver. Para  $i \in \{1, \dots, r\}$  y  $j \in \{1, \dots, s\}$ , definimos

$$C_j^i : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$$

enviando

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\theta^1, \dots, \theta^n, X_1, \dots, X_n) &\mapsto A(\theta^1, \dots, \theta^n, X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} C_j^i(A) : \mathfrak{X}^*(M)^{r-1} \times \mathfrak{X}(M)^{s-1} &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\theta^1, \dots, \hat{\theta}^i, \dots, \theta^n, X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) &\mapsto C(A^\#) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}^*(M)^1 \times \mathfrak{X}(M)^1 &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\theta^i, X_j) &\mapsto A(\theta^1, \dots, \theta^n, X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Es decir,  $B$  es el  $(1, 1)$ -tensor que obtenemos al fijar todas las entradas salvo la  $i$ -ésima en las 1-formas y la  $j$ -ésima en los tensores, y a éste le aplicamos la contracción que definimos al principio.

**Ejemplo.** Tomemos  $M = \mathbb{R}^2$  y  $A \in \mathfrak{T}_3^2(\mathbb{R}^2)$  dado por

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)^2 \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)^3 &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (\omega, \theta, X, Y, Z) &\mapsto A(\omega, \theta, X, Y, Z) \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos las expresiones locales

$$\begin{aligned} X &= \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & Y &= \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}, & Z &= \sum_m Z^m \frac{\partial}{\partial x^m} \\ \theta &= \sum_k \theta_k dx^k, & \omega &= \sum_n \omega_n dx^n \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} A(\omega, \theta, X, Y, Z) &= A \left( \sum_n \omega_n dx^n, \sum_k \theta_k dx^k, \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_m Z^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \sum_{n,k,i,j,m} \omega_n \theta_k X^i Y^j Z^m A \left( dx^n, dx^k, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \sum_{n,k,i,j,m} \omega_n \theta_k X^i Y^j Z^m A_{i,j,m}^{n,k} \end{aligned}$$

Calculemos la contracción  $C_3^1(A)$ . Para esto, fijamos  $\theta, X$  y  $Y$ , y variamos  $\omega$  y  $X$  para definir

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)^1 \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)^1 &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ (\omega, Z) &\mapsto A(\omega, \theta, X, Y, Z) \end{aligned}$$

Si suponemos que

$$B = \sum_{n,m} B_m^n \omega_n Z^m$$

entonces debe ser cierto que

$$B_m^n = \sum_{k,i,j} \theta_k X^i Y^j A \left( dx^n, dx^k, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m} \right)$$

Ahora aplicamos la contracción a  $B$ , que nos devuelve simplemente la función

$$\begin{aligned} C(B) &= \sum_m B_m^m \\ &= \sum_m \sum_{k,i,j} \theta_k X^i Y^j A \left( dx^m, dx^k, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &:= \sum_{i,j,k} E_{ij}^k \theta_k X^i Y^j \end{aligned}$$

De manera la contracción buscada es  $E$ , el  $(1,2)$ -campo tensorial con funciones componentes  $E_{ij}^k$ . Es decir,  $C_3^1(A) = E$ .

## 2.9 Derivaciones de campos tensoriales

**Definición.** Una **derivación** de campos tensoriales en una variedad  $M$  es una familia de operadores

$$\mathbb{D} : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M) \quad r, s \in \mathbb{N}$$

tales que

- son  $\mathbb{R}$ -lineales,
- satisfacen Leibniz respecto al producto tensorial, es decir

$$\mathbb{D}(A \otimes B) = (\mathbb{D}A) \otimes B + A \otimes \mathbb{D}(B),$$

- y conmutan con las contracciones, es decir,

$$\mathbb{D}(CA) = C(\mathbb{D}A)$$

para cualquier contracción  $C$ .

**Observación.** Para  $t = s = 0$  obtenemos  $\mathfrak{T}_0^0 = C^\infty(M, \mathbb{R})$ , de manera que tenemos una derivación justo como fueron definidas en la Sección 1.7. Recordemos que estas derivaciones están en correspondencia uno a uno con campos vectoriales. Así, podemos evaluar este tipo de derivaciones en funciones, es decir, podemos calcular  $\mathbb{D}_0^0 f$  por ser de la forma  $Vf$ .

Agregando un campo vectorial al argumento, podemos pensar que el corchete de Lie es una derivación  $\mathbb{D}_0^1$ , es decir,  $\mathbb{D}_0^1 W = [V, W]$  para  $W \in \mathfrak{T}_0^1(M)$ .

**Observación.** Nos gustaría que para una función del estilo  $\theta(X)$  se tuviera que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\theta(X)) &= (\mathbb{D}\theta)(X) + \theta(\mathbb{D}X) \\ \iff (\mathbb{D}\theta)(X) &= \mathbb{D}(\theta(X)) - \theta(\mathbb{D}X) \\ \iff (\mathbb{D}\theta)(X) &= \mathbb{D}(\theta(X)) - \theta([V, X])\end{aligned}$$

para algún  $V$  como en la observación anterior

De hecho, esta relación sí se cumple, más aún:

**Proposición** (Regla del producto). Para funciones de la forma  $A(\theta^1, \dots, \theta^n, X_1, \dots, X_n)$ , se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_0^0(A(\theta^1, \dots, \theta^n, X_1, \dots, X_n)) &= (\mathbb{D}_s^r A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_i A(\theta^q, \dots, \mathbb{D}_1^0 \theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &+ \sum_j A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathbb{D}_0^1 X_j, \dots, X_s)\end{aligned}$$

*Demostración.* Primero observemos que para  $A \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ ,  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M) \approx \mathfrak{T}_1^0(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M) \approx \mathfrak{T}_0^1(M)$ , podemos calcular  $A \otimes \theta \otimes X \in \mathfrak{T}_2^2(M)$  que esté dado por

$$(A \otimes \theta \otimes X)(\omega, \eta, W, Y) = A(\omega, W)\theta(Y)\mathfrak{X}(\eta)$$

Supongamos que tenemos las expresiones locales

$$A(\theta, X) = \sum A_j^i \theta_i X^j, \quad \theta = \sum \theta_i dx^i, \quad X = \sum X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Hacemos dos contracciones directamente sobre estas expresiones para obtener:

$$A_j^i \theta_\ell X^k \rightarrow \sum A_j^i \theta_i X^k \rightarrow \sum_j \sum_i A_j^i \theta_i X^j$$

es decir, tenemos la igualdad  $A(\theta, X) = \bar{C}(A \otimes \theta \otimes X)$ .

Ahora calculamos la derivación:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_0^0(A(\theta, X)) &= \mathbb{D}_0^0(\bar{C}(A \otimes \theta \otimes X)) \\ &= \bar{C}(\mathbb{D}_2^2(A \otimes \theta \otimes X)) \\ &= \bar{C}(\mathbb{D}_1^1 A \otimes \theta \otimes X) + \bar{C}(A \otimes \mathbb{D}_1^0 \theta \otimes X) + \bar{C}(A \otimes \theta \otimes \mathbb{D}_0^1 X) \\ &= (\mathbb{D}_1^1 A)(\theta, X) + A(\mathbb{D}_1^0 \theta, X) + A(\theta, \mathbb{D}_0^1 X)\end{aligned}$$

Con lo que hemos demostrado el caso para  $r = s = 1$ . Los demás casos se demuestran análogamente.  $\square$

## 2.10 Interpretaciones

Dada una transformación  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineal de la forma

$$A : \mathfrak{X}(M)^r \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

podemos asociarle el campo tensorial  $\bar{A} \in \mathfrak{T}_r^1(M)$  con la regla

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_r) = \theta(A(X_1, \dots, X_r))$$

De hecho esta correspondencia es un isomorfismo entre  $\mathfrak{T}_r^1(M)$  y los mapeos multilíneales  $\mathfrak{X}(M)^r \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . Este resultado se puede generalizar:

**Ejercicio (Lee, 12-4).** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Existe un isomorfismo natural (independiente de la base) entre los tensores  $\tau_\ell^{k+1}$  y los mapeos multilíneales de la forma

$$T : (V^*)^k \times V^\ell \rightarrow V$$

En adelante denotaremos indistintamente  $A$  y  $\bar{A}$ .

### 3. Referencias

- Cooke, R., and V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 1992. Springer Textbook.
- Do Carmo, M.P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992. Mathematics (Boston, Mass.)
- Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge Univ. P, 2000.
- Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition, 2013.
- O'Neill, Barrett. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103, Volume 103 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic P, 1983.
- Palmas V., Oscar A., and Héctor Sánchez M. *Geometría riemanniana*. Universidad Nacional Autónoma de México, 2007. Las prensas de ciencias.
- Spivak, M. *Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus*. Avalon Publishing, 1965.
- Tu, L.W. *An Introduction to Manifolds*. Springer New York, 2010. Universitext.
- Tu, Loring W. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Springer International Publishing, 2017. Graduate Texts in Mathematics.