Politopos

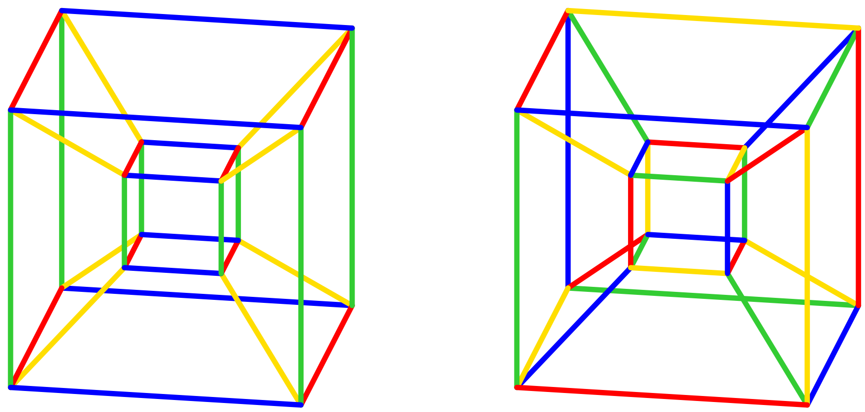
August 17, 2023

Índice

1 El cubo de Roli

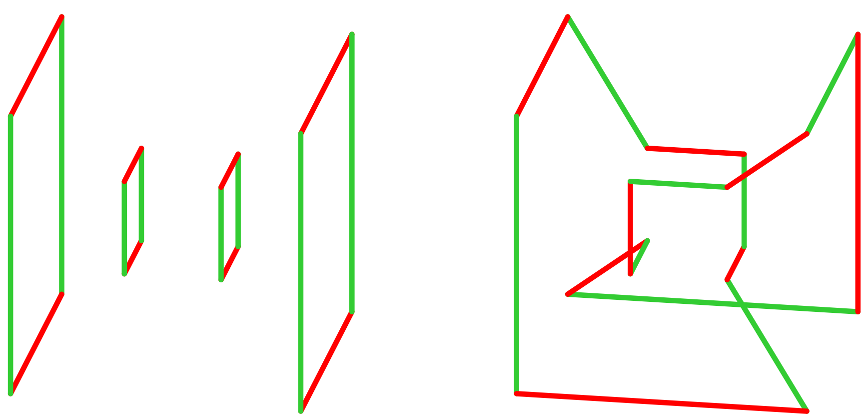
En 2014, J. Bracho, I. Hubard y D. Pellicer encontraron un 4-politopo quiral en $\mathbb{R}^4$. Es el único ejemplo conocido de un 4-politopo en $\mathbb{R}^4$.

Mostramos una construcción muy sencilla de este cubo. Comenzamos con dos coloraciones de las aristas del 4-cubo:

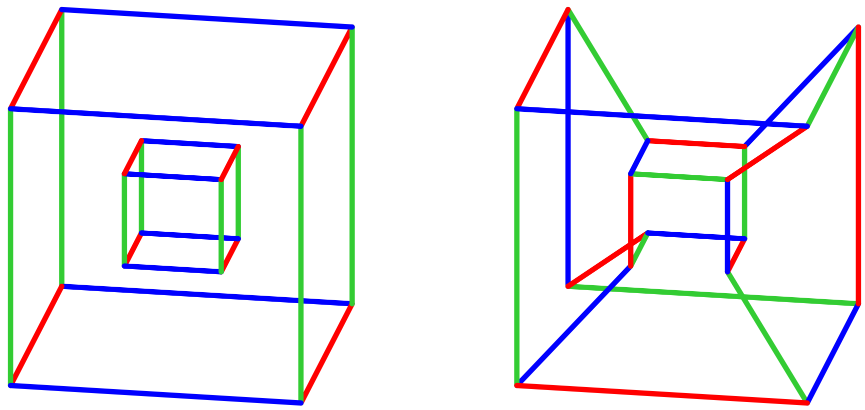


En cada vértice de cualquiera de las coloraciones inciden cuatro aristas de colores distintos.

En el 4-cubo normal, las caras son 4-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Definamos en el 4-cubo de la derecha que las caras sean los 8-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Aquí están las caras verde-rojo:



Ahora las facetas: en ambos cubos definamos las facetas como las componentes conexas de tres colores. Aquí están las facetas verde-rojo-azul:



El cubo de la derecha se llama Cubo de Roli. Como dijimos, es un 4-politopo quiral. Parece que tiene la mitad de caras y la mitad de facetas de lo que tiene el 4-cubo. Las facetas son poliedros quirales (combintorialmente regulares). Esta construicción se pudo generalizar para crear otros poliedros quirales, como mostramos en la siguiente sección.

2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction

Dado un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, la construcción central es:

1. Calcular el poliedro de Petrie-Coxeter $PC_\alpha(\mathcal{T})$. Resulta ser regular o de clase $2_{\{0,2\}}$.
2. Aplicar la halving operation para obtener $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$.
3. Aplicar la operación de 2-facetting (2-hole) para obtener $(PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi := H_\alpha(\mathcal{T})$. Éste es un poliedro regular o quiral.

Cuando comenzamos con el 4-cubo, para ciertos valores de α (creo que 1 o 2) obtenemos las facetas del Cubo de Roli.

A continuación desglosaremos este proceso.

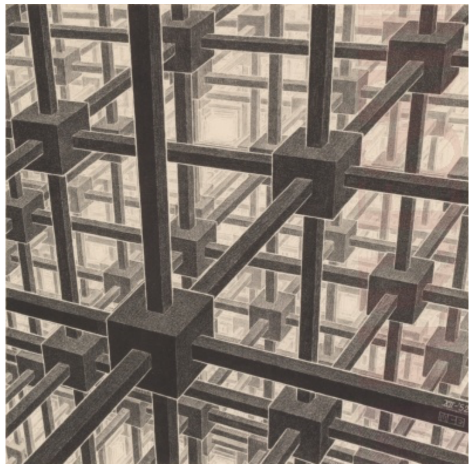
2.1 Definiciones

Definición. Un poliedro $\mathcal{P}$ es

- **regular** (resp. **combinatoriamente regular**) si su grupo de simetrías $G(\mathcal{P})$ (resp. grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$) actúa transitivamente en las banderas .
- **quiral** (resp. **combinatoriamente quiral**) si $G(\mathcal{P})$ (resp. $\Gamma(\mathcal{P})$) induce dos órbitas en las banderas con la propiedad de que dos banderas adyacentes están en órbitas diferentes.

Observación. Si $\mathcal{P}$ es regular o quiral, el grupo de simetrías actúa transitivamente en caras, aristas y vértices.

2.2 La construcción de Petrie-Coxeter



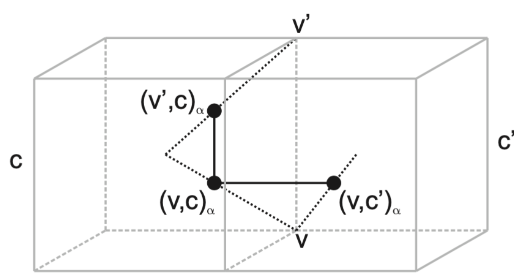
La construcción de Petrie-Coxeter y los valores de α.

Dado un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, mostraremos cómo constuir un poliedro regular o quiral $PC(\mathcal{T})$. Suponemos por el resto del texto que $\mathcal{T}$ tiene caras planas.

Se escoge número α entre 0 y 1. Para un vértice v de $\mathcal{T}$ y una cara que contiene a v, definimos el punto $(v,c)_\alpha$ sobre el segmento que une v con c a distancia $d\alpha$ desde v, donde d es la distancia entre ellos. Estos puntos serán los vértices del poliedro $PC_\alpha(\mathcal{T})$.

Las aristas son (1) los segmentos que unen $(v,c)_\alpha$ con $(v',c)_\alpha$, donde v y v' son vértices en una misma arista de $\mathcal{T}$; y (2) los semgentos que unen $(v,c)_\alpha$ con $(v,c')_\alpha$ donde c y c' son facetas que comparten una cara conde está v.

Las caras son los cuadrados $(v,c)_\alpha$, $(v',c)_\alpha$, $(v,c')_\alpha$ y $(v',c')_\alpha$ donde c y c' son caras que contienen a la arista entre v y v'.



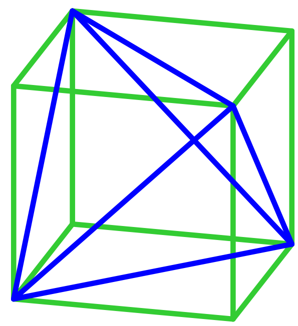
Tenemos algunos resultados sobre esta construcción:

Teorema. Para cualquier $\alpha \in (0,1)$ y cualquier politopo regular $\mathcal{T}$, $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro.

Observación. Para cualesquiera $\alpha \in (0,1)$, un 4-politopo regular $\mathcal{T}$ y su dual $\mathcal{T}^*$, $PC_\alpha(\mathcal{T}) = PC_{1-\alpha}(\mathcal{T})$.

Teorema. Para cualesquiera $\alpha \in (0,1)$, un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, el grupo de simetría de $\mathcal{T}$ es isomorfo a un subgrupo de índice a lo más 2 de $G(PC_\alpha(\mathcal{T}))$. Además, $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es regular o un poliedro de dos órbitas en la clase $2_{\{0,2\}}$.

2.3 Halving operation



Esta operación transforma un poliedro $\mathcal{P}$ con caras cuadradas en otro poliedro $\mathcal{P}^\eta$, cuyos vértices son algunos de los vértices de $\mathcal{P}$, donde dos de ellos son adyacentes si y sólo si son vértices opuestos en una cara de $\mathcal{P}$. Las caras de $\mathcal{P}^\eta$ con figuras de vértice de algunos de los vértices de $\mathcal{P}$.

Como $PC_\alpha(\mathcal{T})$ tiene caras cuadradas, le podemos aplicar esta operación. Y como además es regular o de clase $2_{\{0,2\}}$, cualquier de los resultados de aplicarle la operación Halving son isomorfos.

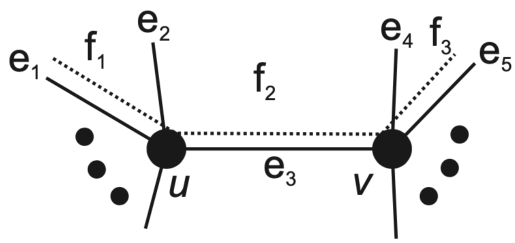
2.4 2-Hole

A 2-hole is constructed by traversing an edge to one of its endpoints, skipping the first edge on the left according to some local orientation, and then traversing a second edge. This procedure is repeated until an edge is traversed twice in the same direction.

La operación Facetting o 2-Hole convierte un poliedro $\mathcal{P}$ con vértices de grado al menos 5 en una estructura $\mathcal{P}^\phi$ cuyo 1-esqueleto está contenido en el 1-esqueleto de $\mathcal{P}$ y sus caras son un subconjunto de los 2-hoyos de $\mathcal{P}$.

Dados un vértice, arista y 2-hoyo incidentes, se va construyendo $\mathcal{P}^\phi$ por pasos de forma que el 1-esqueleto sea conexo y cada arista pertenezca a exactamente dos 2-hoyos. El resultado no siempre es un poliedro, pero en nuestro caso sí lo es. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema. Cuando $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$ es un poliedro, es regular o de clase $2_{\{1\}}$.



Construcción de un 2-hoyo

2.5 Los quiralitos

Finalmente podemos definir

$$H_\alpha(\mathcal{T}) = (PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi$$

Para entender cómo construir los grupos de simetrías de los quiralitos, debemos recordar algunas cosas. Dado un poliedro $\mathcal{P}$ regular o quiral, el subgrupo de automorfismos $\Gamma^+(\mathcal{P})$ está generado por dos rotaciones distinguidas: la de la cara, σ_1 y la del vértice σ_2.

Cuando $\mathcal{P}$ es plano (todas sus caras están en un plano, por ejemplo, el hemicubo en $\mathbb{P}^2$), es posible que haya más de una isometría que actúa como σ_1 y σ_2. Sin embargo, si $\mathcal{P}$ no es plano, son únicas.:

Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poliedro regular o quiral con caras planas, existen únicas isometrías S_1 y S_2 que actúan como σ_1 y σ_2 con respecto a alguna bandera base Φ.

Y luego,

Proposición. Si $H_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro, es regular o quiral.

Demostración. Basta mostrar que existe la rotación de la cara S_1 y la rotación del vértice S_2. ¿Por qué? Si el grupo de simetrías del poliedro está generado por estas dos simetrías, queremos deducir que hay una o dos órbitas en banderas. □

Se hizo este procedimiento para cada uno de los 4-politopos regulares (6 convexos y 10 estrellados). Veamos cómo analizar los poliedros resultantes.

De la regularidad de $\mathcal{T}$ podemos estudiar la simetría de $H_\alpha(\mathcal{T})$. Mientras que $G(\mathcal{T}) = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$ como en la construcción Wythoff, resulta que $G(H_\alpha(\mathcal{T})) \leq \langle S_1, S_2 \rangle$, donde

$$\begin{aligned} S_1 &= R_0 R_1 R_3 R_2 \\ S_2 &= R_2 R_1 \end{aligned}$$

Aquí, S_1 es un tornillo y S_2 una rotación, dando lugar a la notación $\left\{ \frac{p}{p_1, p_2}, q \right\}$ donde q es el orden de la rotación y los enteros p, p_1 y p_2 caracterizan al tornillo. Esto sugiere qué clase de poliedro es $H_\alpha(\mathcal{T})$: tiene caras helicoidales, q en cada vértice.

Se encontraron los siguientes Quiralitos o Halving-2-Holes:

	4-politopo $\mathcal{T}$	Quiralito $H_\alpha(T)$	$\#(G)$	$[G:\Gamma^+]$	Colapsa cuando $\alpha=(0,1)$
Convexos	{3,3,3}	$\{\frac{5}{1,2},3\}$	60	1	(4,4)
	{4,3,3}	$\{\frac{8}{1,3},3\}$	48	4	(1,2)
	{3,4,3}	$\{\frac{12}{1,5},4\}$	192	3	(2,2)
	{5,3,3}	$\{\frac{30}{1,11},3\}$	1440	5	(1,4)
Estrellados	{3,5,5/2}	$\{\frac{20}{1,9},5\}$	1200	6	(2,2)
	{5,5/2,5}	$\{\frac{15}{1,4},5/2\}$	7200	1	(12,12)
	{5,3,5/2}	$\{\frac{12}{1,5},3\}$	144	50	(1,1)
	{3,3,5/2}	$\{\frac{30}{7,13},3\}$	1440	5	(4,1)
	{3,5/2,5}	$\{\frac{20}{3,7},5/2\}$	1200	6	(2,2)
	{5/2,5,5/2}	$\{\frac{15}{2,7},5\}$	7200	1	(12,12)

Donde G es el grupo de simetrías del quiralito.

Distintos valores de α en la construcción de Petrie-Coxeter dan lugar a distintos poliedros. Hay ciertos valores para los cuales las simetrías que generan $H_\alpha(\mathcal{T})$ son simetrías de $\mathcal{T}$. Cuando $\alpha = 0$, los vértices de $PC_\alpha(\mathcal{P})$ son los vértices de $\mathcal{P}$.

Cuando $\alpha = 0, 1$, es posible que algunos de los vértices en la construcción "colapsen". Eso quiere decir que algunos vértices terminan siendo el mismo, y el resultado puede no ser un poliedro. Si, en cambio, aparece el valor 1, leemos que "la cantidad de vértices que colapsan es 1" (para $\alpha = 0$ si el 1 está a la izquierda, y respectivamente $\alpha = 1$ derecha). Es decir, no hay colapso.

Conviene entonces estudiar los casos donde no hay colapso para $\alpha = 0$ pues en este caso la construcción de Petrie-Coxeter nos devuelve una estructura cuyos vértices son los mismos vértices del 4-politopo. Así, podremos usar las simetrías del 4-politopo original.

3 En busca de 4-politopos quirales estrellados

Aquí comienza nuestro trabajo, basado en la siguiente sospecha: así como el cubo de Roli es la faceta de un 4-politopo quiral,

hay tres de los quiralitos que son las facetas de ciertos 4-politopos quirales.

Los sospechosos son $H_1\{5,3,5/2\}$, $H_0\{5,3,5/2\}$ y $H_1\{3,3,5/2\}$. Se trata de los quiralitos obtenidos a partir de los 4-politopos estrellados "Gran 120-celda" y "Gran 600-celda", resp. Dos de ellos están escogidos para valores de $\alpha = 1$, de forma que en estos dos casos estaremos trabajando con los 4-politopos duales, el {5/2,5,3} "Pequeño 120-celda estelado" y el {5/2,3,3}, "Gran gran 120-celda estelada".

El primer paso es obtener los grupos de estos dos 4-politopos.

3.1 Grupo de simetrías del {5,3,5/2}

Comenzamos con el grupo del {5,3,5/2}, la gran 120-celda. El grupo se denota [5,3,5/2]. La idea es tomar el grupo de simetrías de alguno de los convexos y expresar las relaciones del estrellado en términos de aquéllas.

En nuestro caso, partimos de que el grupo de la 600-celda, [3,3,5], está generado por R_0, R_1, R_2 y R_3. El objetivo es expresar expresar los generados P_0, P_1, P_2 y P_3 del grupo [5,3,5/2] en términos de las R_i.

Recordemos que estos dos grupos tienen las siguientes presentaciones:

$$\begin{aligned}[3,3,5] = \langle R_i | R_i^2 = (R_0R_1)^3 = (R_1R_2)^3 = (R_2R_3)^5 = 1 \\ (R_0R_2)^2 = (R_0R_3)^2 = (R_1R_3)^2 = 1\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[5,3,5/2] = \langle P_i | P_i^2 = (P_0P_1)^5 = (P_1P_2)^3 = (P_2P_3)^5 = 1 \\ (P_0P_2)^2 = (P_0P_3)^2 = (P_1P_3)^2 = 1\rangle\end{aligned}$$

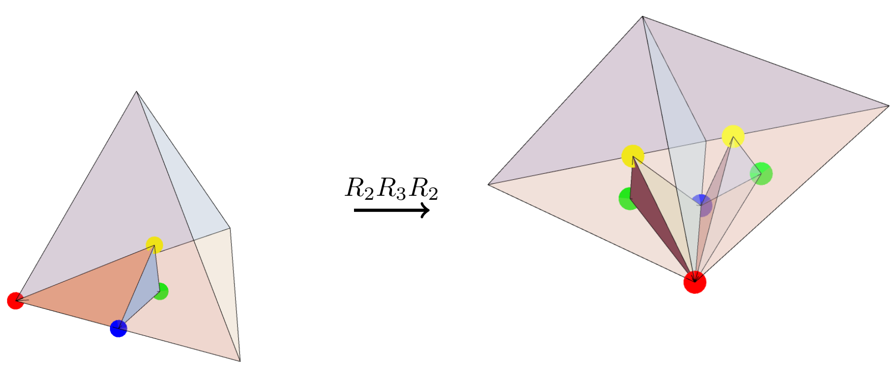
Afirmación (La idea de Roli)**.** Pensemos que el icosaedrito de los no-vértices del {5/2,3} es la figura de vértice del {3,3,5}. Al hacer actuar las isometrías R_i sobre el {5/2,3} obtenemos el {5/2,3,5}.

Demostración. Basta dar una presentación del [5,3,5/2] como arriba. Definamos

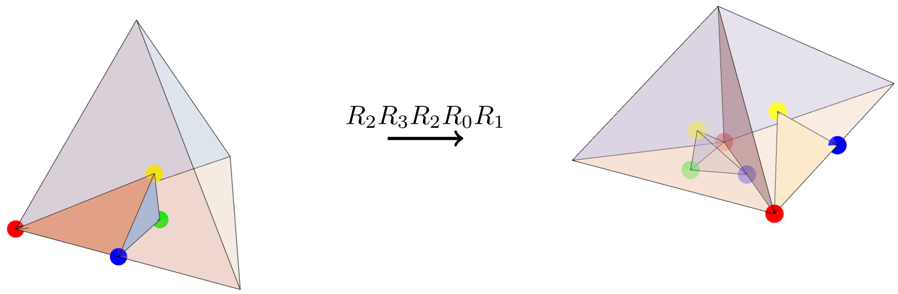
$$P_0 = R_0, \qquad P_2 = R_3, \qquad P_3 = R_2$$

Para P_1 hay que hacer un poquito más de chamba.

Mostraremos algunos dibujos *aproximados* de lo que está pasando (no pueden ser exactos porque los objetos están en dimensión 4). La conjugación $R_2R_3R_2$ es reflejar respecto a la cara de "en frente":



Ahora rotemos respecto a la recta amarillo-verde en dirección antihoraria (vista desde arriba), R_0R_1:



La observación clave es que la reflexión que buscamos está dada por el plano al que acaban de ir a dar los puntos rojo, verde y amarillo, de manera que P_1 es el conjugado de R_1 por la transformación que tenemos arriba.

$$\begin{aligned} P_1 :=& (R_2R_3R_2R_0R_1)^{-1}R_1(R_2R_3R_2R_0R_1) \\ =& R_1R_0R_2R_3R_2R_1R_2R_3R_2R_0R_1 \\ =& R_1R_2R_3R_2R_1R_0R_1R_2R_3R_2R_1 \end{aligned}$$

Ahora veamos que se satisfacen las relaciones. Primero las que no tienen a P_1:

$$(P_0P_2)^2 = (R_0R_3)^2 = 1 \qquad (P_0P_3)^2 = (R_0R_2)^2 = 1 \qquad (P_2P_3)^5 = (R_3R_2)^5 = 1$$

□

4 Busca S_3

Ahora sustituimos en las fórmulas que teníamos para las S_i y obtenemos las isometrías que generan un poliedro quiral:

$$\begin{aligned} S_1 &= P_0P_1P_3P_2 \\ S_2 &= P_2P_1 \end{aligned}$$

Seguramente se trata de $H_1(\{5, 3, 5/2\})$. Ahora hay que buscar una S_3 para construir un 4-politopo quiral, a la cual pediremos...

Primero las condiciones combinatorias:

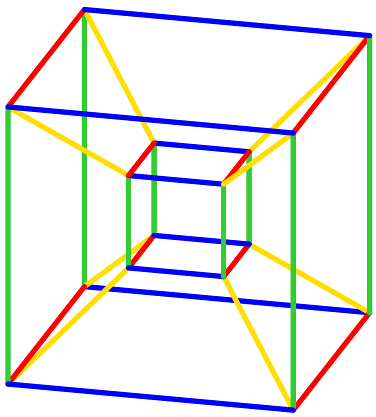
- $(S_1S_2S_3)^2 = 1$ [Pensamos que esta es giro de brocheta por un palillo que va del vértice al centro de la cara]
- $(S_2S_3)^2 = 1$.

Y luego las geométricas:

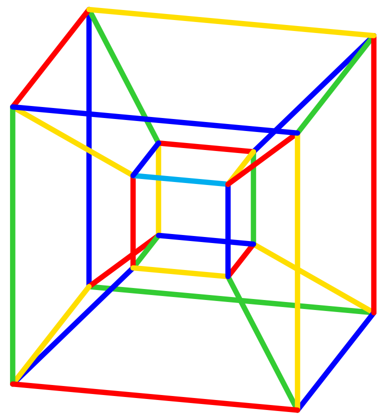
- $vS_3 = v$
- $eS_3 = e$

Observación. Bueno, $S_1 S_2$ es el medio giro en la arista o en la arista adyacente(depende del orden).

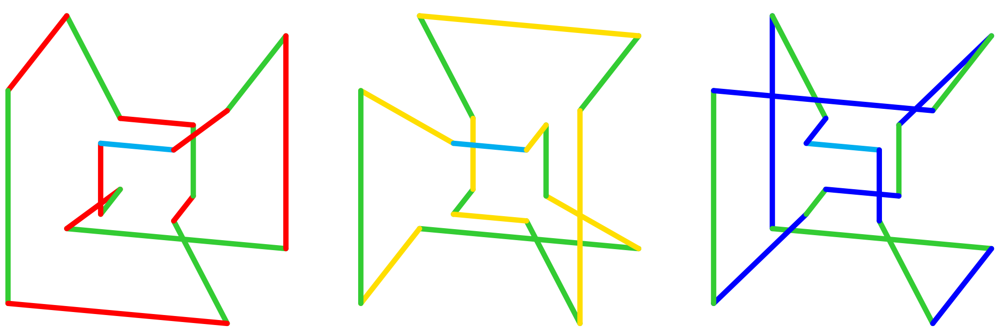
Analicemos el caso del Cubo de Roli para encontrar inspiración. Escojamos una arista base, color azul clarito. ¿Qué debería hacer S_3? Bueno, simplemente debe girar el 4-politopo alrededor de la arista. Esto es justo lo que vemos en los diagramas de abajo: S_3 relaciona las tres figuras.



4-cubo



Cubo de Roli



Rotación S_3

Parece que en este caso la rotación no es más que la rotación de la arista en el 4-cubo...

¿No será que $S_3 = P_3 P_2$**?**

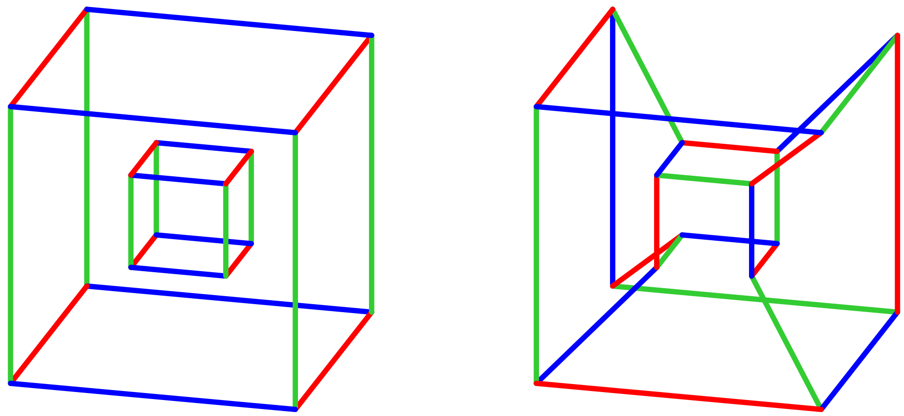
Veamos si $(S_2S_3)^2 = 1$. Sutstituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}
(S_2S_3)^2 &= ((P_2P_1)(P_3P_2))^2 \\
&= (P_2P_1P_3P_2)(P_2P_1P_3P_2) \\
&= P_2P_1P_3P_1P_3P_2 \\
&= P_2P_3P_1P_1P_3P_2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ahora $(S_1S_2S_3)^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
(S_1S_2S_3)^2 &= ((P_0P_1P_3P_2)(P_2P_1)(P_3P_2))^2 \\
&= P_0P_1P_3P_2P_2P_1P_3P_2P_0P_1P_3P_2P_2P_1P_3P_2 \\
&= P_0P_1P_3P_1P_3P_2P_0P_1P_3P_1P_3P_2 \\
&= P_0P_3P_1P_1P_3P_2P_0P_3P_1P_1P_3P_2 \\
&= P_0P_2P_0P_2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Y claramente fija al vértice y a la cara.



5 En busca de otros poliedros quirales

Esta sección es una transcripción del trabajo de Bris.

5.1 Definiciones y resultados

Damos algunas definiciones, explicamos el método básico para construir poliedros usando la construcción de Wythoff y mostramos un par de teoremas.

Definición. Un **polígono (geométrico)** en $\mathbb{R}^d$ es:

- Un conjunto discreto de puntos llamados **vértices**
- Un conjunto de segmentos que los unen llamados **aristas**

tales que la gráfica resultante es 2-regular.

Definición. Un **poliedro (geométrico)** en R^d es un conjunto de polígonos llamados **caras** tal que:

- Los vértices son un conjunto discreto
- Cada arista pertenece exactamente a dos caras.
- La gráfica determinada por los vértices y las aristas es conexa.
- La figura de vértice en cada vértice es un polígono.

Definición (Banderas)**.**

- Una **bandera** de un poliedro es un vértice, una arista y una cara mutualmente incidentes.
- Si Φ es una bandera, $\mathbf{\Phi^i}$ es la bandera que difiere de Φ sólo por en la cara $i \in \{0, 1, 2\}$ y se llama la i**-bandera adyacente**.

Definición. Un poliedro $\mathcal{P}$ es **(geométricamente) quiral** si $G(\mathcal{P}$ induce dos órbitas en banderas y las banderas adyacentes están en órbitas distintas.

Observación. Un poliedro geométricamente quiral puede ser combinatoriamente quiral o regular.

Construcción de Wythoff para poliedros regulares. Sean R_0, R_1 y R_2 isometrías en $\mathbb{R}^n$ que queremos usar para construir un poliedro regular $\mathcal{P}$ y sea $G = \langle R_0, R_1, R_2 \rangle$. Ahora

- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de $\mathcal{P}$ tal que $v \in \operatorname{Fix} R_1 \cap \operatorname{Fix} R_2$ y $v \notin \operatorname{Fix} R_0$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con vR_0.
- La **cara base** es la órbita de v y e bajo $\langle R_1, R_1 \rangle$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
V &:= \{vR : R \in G\} \text{ son los vértices de } \mathcal{P}.\\
E &:= \{eR : R \in G\} \text{ son las aristas de } \mathcal{P}.\\
F &:= \{fR : R \in G\} \text{ son las caras de } \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Esta estructura se nota por $\mathcal{P}$ o $\mathcal{P}(R_0, R_1, R_2; v)$

Construcción de Wythoff para poliedros quirales. Sean S_1 y S_2 isometrías en $\mathbb{R}^n$ que queremos usar para construir un poliedro quiral $\mathcal{P}$ y sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$. Ahora

- Necesitamos suponer que $(S_1 S_2)^2 = 1$.
- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de $\mathcal{P}$ tal que $v \in \operatorname{Fix} S_2$ y $v \notin \operatorname{Fix} S_1$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con $vS_1^{-1} = vS_2^{-1}S_1^{-1} = vS_1S_2$. Necesitamos suponer que $eS_1 \neq e$ y $eS_2 \neq e$.
- La **cara base** es $\{vS, eS : S \in \langle S_1 \rangle\}$. Necesitamos suponer que $fS_2 \neq f$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
V &:= \{vR : R \in G\} \text{ son los vértices de } \mathcal{P}.\\
E &:= \{eR : R \in G\} \text{ son las aristas de } \mathcal{P}.\\
F &:= \{fR : R \in G\} \text{ son las caras de } \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Esta estructura se nota por $\mathcal{P}$ o $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

¿Cómo podemos estar seguros de que esta construcción nos da un poliedro?

Teorema. Sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$ un grupo discreto, donde S_1 y S_2 son isometrías de $\mathbb{R}^n$ tales que $(S_1S_2)^2 = 1$ y sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_1, S_2; v)$. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{1\}$.
- S_1 y S_2 son de orden mayor estricto que 2.

- $\mathrm{Stab}_G\, v = \langle S_2 \rangle$, $\mathrm{Stab}_G\, e = \langle S_1 S_2 \rangle$ y $\mathrm{Stab}_G\, f = \langle S_1 \rangle$.

Entones $\mathcal{P}$ es un poliedro geométrico regular o quiral cuyo grupo de simetrías "es G como un subgrupo de índice 2 en $G(\mathcal{P})$".

Teorema (Bracho, Hubard, Pellicer). $\mathcal{P}$ es un poliedro quiral en $\mathbb{S}^3$ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- $\mathcal{P}$ tiene caras holanes y figuras de vértices holanes.
- $\mathcal{P}$ tiene caras helicoidales y figuras de vértice planas, y el plano que contiene a la figura de vértice de v no contiene a v.

Observación. En el segundo caso, si el vértice está en la figura de vértice, el poliedro es regular.

5.2 Looking for chiral polyhedra

El trabajo de Bris está planteado de la siguiente manera:

Sean $\mathcal{T} = \{p, q, r\}$ un 4-politopo regular esférico y R_0, R_1, R_2 y R_3 las isometrías que generan a $\mathcal{T}$ con respecto a Φ. Denotaremos $[p, q, r] := \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Escogemos un vértice v y una arista e de $\mathcal{T}$ para construir un poliedro usando el método de Wythoff, es decir, queremos que v y e estén en $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

Definimos $S_1 = R_0 R_1 R_2 R_3$ (recordemos que $\mathrm{Stab}\, f = \langle S_1 \rangle$ en el teorema). La arista e es el segmento de línea que une v con vS_1^{-1}. Luego, la cara $f = \{v, e\}\langle S_1 \rangle$ es un **polígono de petrie**.

El objetivo es encontrar una S_2 con figuras de vértice planas, y tales que contienen al vértice del cual son la figura de vértice. Como queremos usar el teorema, tendremos que $v \in \mathrm{Fix}\, S_2$, así que debemos buscar S_2 en $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Poliedros quirales con caras Petrie				
4-politopo $\mathcal{T}$	**Poliedro $\mathcal{P}$**	S_1	S_2	$\lvert\langle S_1, S_2 \rangle\rvert$
$\{3,3,3\}$	—	$R_0 R_1 R_2 R_3$	—	—
$\{3,3,4\}$	$\{8,4\}$		$R_3 R_2 R_1 R_2$	32
$\{4,3,3\}$	$\{8,3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	48
$\{3,4,3\}$	—		—	—
$\{3,3,5\}$	—		—	—
$\{5,3,3\}$	$\{30,3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	1440

Después de esto hubo una búsqueda por poliedros quirales con caras helicoidales:

Poliedros quirales con caras helicoidales				
4-politopo $\mathcal{T}$	**Poliedro $\mathcal{P}$**	S_1	S_2	$\lvert\langle S_1, S_2\rangle\rvert$
$\{3,3,3\}$	—	—	—	—
$\{3,3,4\}$	—	—	—	—
$\{3,3,5\}$	$\{12,3\}$	$(R_1R_2R_3)^3R_0$	$R_2R_3(R_2R_3R_1)^2R_2R_1$ $R_3R_2R_3R_1R_2R_3R_2R_1$	144

6 Apéndice

Mostramos las cuentas que faltaron. Denotamos R_i por i para simplificar la notación.

$$\begin{aligned}
(P_1P_3)^2 &= (123210123212)^2 \\
&= 123210123212123210123212 \\
&= 123210123\mathbf{212}23210123212 \\
&= 1232101231321 0123212 \\
&= 12321012\mathbf{331}210123212 \\
&= 1232\mathbf{010}21210123212 \\
&= 1232010\mathbf{121}10123212 \\
&= 12320\mathbf{010}20123212 \\
&= 123210\mathbf{02}123212 \\
&= 123\mathbf{121}123212 \\
&= 12313212 \\
&= 12\mathbf{13}3212 \\
&= (12)^3 = id
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_1P_2)^3 &= (123210123213)^3 \\
&= 123210123213123210123213123210123213 \\
&= 123210123\mathbf{231}123210123\mathbf{231}123210123213 \\
&= 1232101\mathbf{3232}2101\mathbf{3232}210123213 \\
&= 12321013 2\mathbf{13}0\mathbf{31}2310123213 \\
&= 123210132 1\mathbf{03}312310123213 \\
&= 12321013 2\mathbf{010}2310123213 \\
&= 1232101 3\mathbf{02}1\mathbf{20}310123213 \\
&= 1232101\mathbf{03}212\mathbf{30}10123213 \\
&= 12321\mathbf{101}32123\mathbf{101}123213 \\
&= 1232013\mathbf{121}31023213 \\
&= 12320\mathbf{31}121\mathbf{13}023213 \\
&= 12320\mathbf{31}121\mathbf{13}023213 \\
&= 123\mathbf{02}323\mathbf{20}3213 \\
&= 12\mathbf{03}23232\mathbf{30}213 \\
&= 1\mathbf{02}3232323\mathbf{20}13 \\
&= 10\mathbf{32}2013 \\
&= 1\mathbf{30}013 \\
&= (13)^2 = id
\end{aligned}$$

Para ver que $(P_0P_1)^5 = id$, comencemos con un caso más sencillo:

$$\begin{aligned}
(P_0P_1)^2 &= (012321012321)^5 \\
&= (012321)^{10}
\end{aligned}$$