

Politopos

August 6, 2023

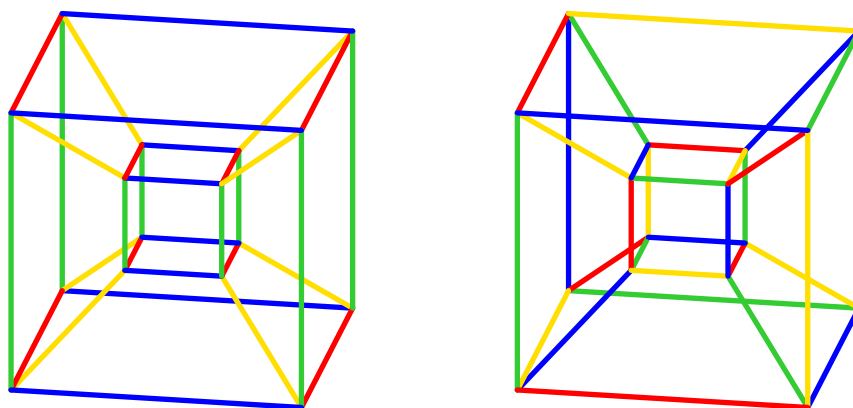
Índice

Índice	1
1 El cubo de Roli	2
2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction	3
2.1 Definiciones	3
2.2 La construcción de Petrie-Coxeter	4
2.3 Halving operation	5
2.4 2-Hole	5
2.5 Los quiralitos	6
3 Quiralitos estrellados	7
3.1 Del convexo al estrellado	8
4 En busca de otros poliedros quirales	9
4.1 Definiciones y resultados	9
4.2 Looking for chiral polyhedra	11

1 El cubo de Roli

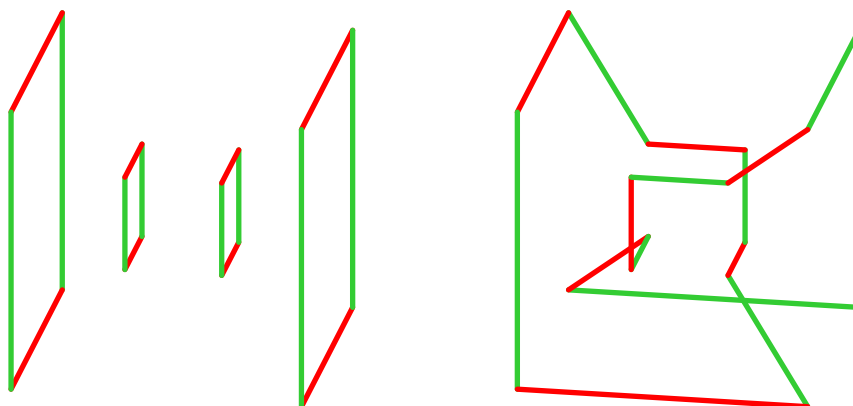
En 2014, J. Bracho, I. Hubbard y D. Pellicer encontraron un 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4 . Es el único ejemplo conocido de un 4-politopo en \mathbb{R}^4 .

Mostramos una construcción muy sencilla de este cubo. Comenzamos con dos coloraciones de las aristas del 4-cubo:



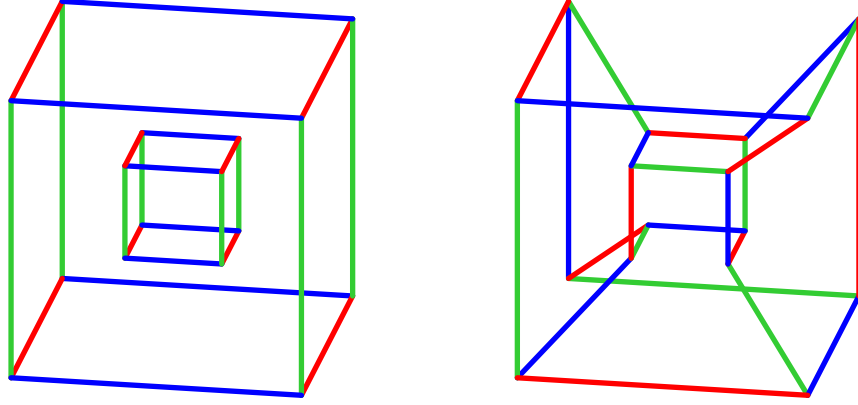
En cada vértice de cualquiera de las coloraciones inciden cuatro aristas de colores distintos.

En el 4-cubo normal, las caras son 4-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Definamos en el 4-cubo de la derecha que las caras sean los 8-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Aquí están las caras verde-rojo:



Ahora las facetas: en ambos cubos definamos las facetas como las componentes conexas

de tres colores. Aquí están las facetas verde-rojo-azul:



El cubo de la derecha se llama Cubo de Roli. Como dijimos, es un 4-politopo quiral. Parece que tiene la mitad de caras y la mitad de facetas de lo que tiene el 4-cubo. Las facetas son poliedros quirales (combinatorialmente regulares). Esta construcción se pudo generalizar para crear otros poliedros quirales, como mostramos en la siguiente sección.

2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction

Dado un 4-politopo regular \mathcal{T} , la construcción central es:

1. Calcular el poliedro de Petrie-Coxeter $PC_\alpha(\mathcal{T})$. Resulta ser regular o de clase $2_{\{0,2\}}$.
2. Aplicar la halving operation para obtener $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$.
3. Aplicar la operación de 2-facetting (2-hole) para obtener $(PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi := H_\alpha(\mathcal{T})$. Éste es un poliedro regular o quiral.

Cuando comenzamos con el 4-cubo, para ciertos valores de α (creo que 1 o 2) obtenemos las facetas del Cubo de Roli.

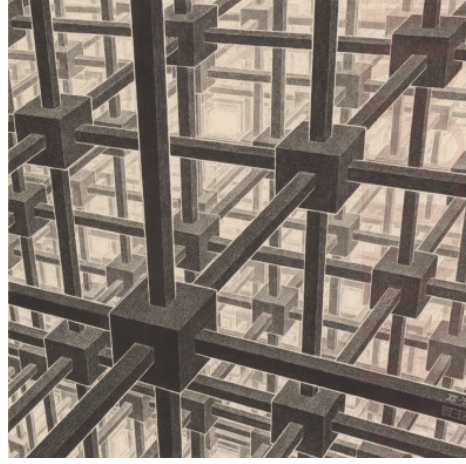
A continuación desglosaremos este proceso.

2.1 Definiciones

Definición. Un poliedro \mathcal{P} es

- **regular** (resp. **combinatoriamente regular**) si su grupo de simetrías $G(\mathcal{P})$ (resp. grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$) actúa transitivamente en las banderas.
- **quiral** (resp. **combinatoriamente quiral**) si $G(\mathcal{P})$ (resp. $\Gamma(\mathcal{P})$) induce dos órbitas en las banderas con la propiedad de que dos banderas adyacentes están en órbitas diferentes.

2.2 La construcción de Petrie-Coxeter



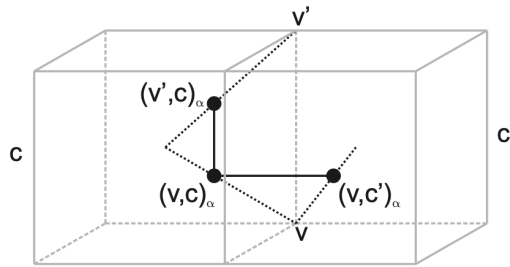
La construcción de Petrie-Coxeter y los valores de α .

Dado un 4-politopo regular \mathcal{T} , mostraremos cómo construir un poliedro regular o quiral $PC(\mathcal{T})$. Suponemos por el resto del texto que \mathcal{T} tiene caras planas.

Se escoge número α entre 0 y 1. Para un vértice v de \mathcal{T} y una cara que contiene a v , definimos el punto $(v, c)_\alpha$ sobre el segmento que une v con c a distancia $d\alpha$ desde v , donde d es la distancia entre ellos. Estos puntos serán los vértices del poliedro $PC_\alpha(\mathcal{T})$.

Las aristas son (1) los segmentos que unen $(v, c)_\alpha$ con $(v', c)_\alpha$, donde v y v' son vértices en una misma arista de \mathcal{T} ; y (2) los segmentos que unen $(v, c)_\alpha$ con $(v, c')_\alpha$ donde c y c' son caras que comparten una cara donde está v .

Las caras son los cuadrados $(v, c)_\alpha$, $(v', c)_\alpha$, $(v, c')_\alpha$ y $(v', c')_\alpha$ donde c y c' son caras que contienen a la arista entre v y v' .



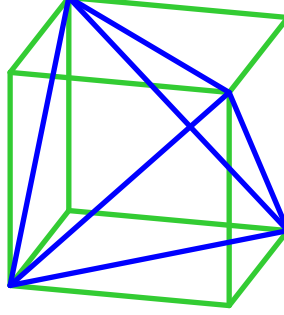
Tenemos algunos resultados sobre esta construcción:

Teorema. Para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ y cualquier politopo regular \mathcal{T} , $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro.

Observación. Para cualesquiera $\alpha \in (0, 1)$, un 4-politopo regular \mathcal{T} y su dual \mathcal{T}^* , $PC_\alpha(\mathcal{T}) = PC_{1-\alpha}(\mathcal{T})$.

Teorema. Para cualesquiera $\alpha \in (0, 1)$, un 4-politopo regular \mathcal{T} , el grupo de simetría de \mathcal{T} es isomorfo a un subgrupo de índice a lo más 2 de $G(PC_\alpha(\mathcal{T}))$. Además, $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es regular o un poliedro de dos órbitas en la clase $2_{\{0,2\}}$.

2.3 Halving operation



Esta operación transforma un poliedro \mathcal{P} con caras cuadradas en otro poliedro \mathcal{P}^η , cuyos vértices son algunos de los vértices de \mathcal{P} , donde dos de ellos son adyacentes si y sólo si son vértices opuestos en una cara de \mathcal{P} . Las caras de \mathcal{P}^η con figuras de vértice de algunos de los vértices de \mathcal{P} .

Como $PC_\alpha(\mathcal{T})$ tiene caras cuadradas, le podemos aplicar esta operación. Y como además es regular o de clase $2_{\{0,2\}}$, cualquier de los resultados de aplicarle la operación Halving son isomorfos.

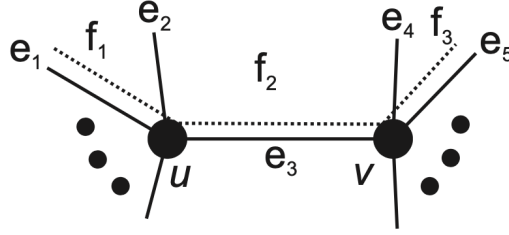
2.4 2-Hole

A 2-hole is constructed by traversing an edge to one of its endpoints, skipping the first edge on the left according to some local orientation, and then traversing a second edge. This procedure is repeated until an edge is traversed twice in the same direction.

La operación Facetting o 2-Hole convierte un poliedro \mathcal{P} con vértices de grado al menos 5 en una estructura \mathcal{P}^ϕ cuyo 1-esqueleto está contenido en el 1-esqueleto de \mathcal{P} y sus caras son un subconjunto de los 2-hoyos de \mathcal{P} .

Dados un vértice, arista y 2-hoyo incidentes, se va construyendo \mathcal{P}^ϕ por pasos de forma que el 1-esqueleto sea conexo y cada arista pertenezca a exactamente dos 2-hoyos. El resultado no siempre es un poliedro, pero en nuestro caso sí lo es. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema. Cuando $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$ es un poliedro, es regular o de clase $2_{\{1\}}$.



Construcción de un 2-hoyo

2.5 Los quiralitos

Finalmente podemos definir

$$H_\alpha(\mathcal{T}) = (PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi$$

Para entender cómo construir los grupos de simetrías de los quiralitos, debemos recordar algunas cosas. Dado un poliedro \mathcal{P} regular o quiral, el subgrupo de automorfismos $\Gamma^+(\mathcal{P})$ está generado por dos rotaciones distinguidas: la de la cara, σ_1 y la del vértice σ_2 .

Cuando \mathcal{P} es plano (todas sus caras están en un plano, por ejemplo, el hemicubo en \mathbb{P}^2), es posible que haya más de una isometría que actúa como σ_1 y σ_2 . Sin embargo, si \mathcal{P} no es plano, son únicas.:

Teorema. Si \mathcal{P} es un poliedro regular o quiral con caras planas, existen únicas isometrías S_1 y S_2 que actúan como σ_1 y σ_2 con respecto a alguna bandera base Φ .

Y luego,

Proposición. Si $H_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro, es regular o quiral.

Demostración. Basta mostrar que existe la rotación de la cara S_1 y la rotación del vértice S_2 . ¿Por qué? Si el grupo de simetrías del poliedro está generado por estas dos simetrías, tenemos que deducir que hay una o dos órbitas en banderas. \square

Se hizo este procedimiento para cada uno de los 4-politopos regulares (6 convexos y 10 estrellados). Veamos cómo analizar los poliedros resultantes.

De la regularidad de \mathcal{T} podemos estudiar la simetría de $H_\alpha(\mathcal{T})$. Mientras que $G(\mathcal{T}) = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$ como en la construcción Wythoff, resulta que $G(H_\alpha(\mathcal{T})) \leq \langle S_1, S_2 \rangle$, donde

$$S_1 = R_0 R_1 R_3 R_2$$

$$S_2 = R_2 R_1$$

Aquí, S_1 es un tornillo y S_2 una rotación, dando lugar a la notación $\left\{ \frac{p}{p_1, p_2}, q \right\}$ donde q es el orden de la rotación y los enteros p, p_1 y p_2 caracterizan al tornillo. Esto sugiere qué clase de poliedro es $H_\alpha(\mathcal{T})$: tiene caras helicoidales, q en cada vértice.

Se encontraron los siguientes Quiralitos o Halving-2-Holes:

	4-politopo \mathcal{T}	Quiralito $H_\alpha(T)$	$\#(G)$	$[G : \Gamma^+]$	Colapsa cuando $\alpha = (0, 1)$
Convexos	$\{3,3,3\}$	$\{\frac{5}{1,2}, 3\}$	60	1	(4,4)
	$\{4,3,3\}$	$\{\frac{8}{1,3}, 3\}$	48	4	(1,2)
	$\{3,4,3\}$	$\{\frac{12}{1,5}, 4\}$	192	3	(2,2)
	$\{5,3,3\}$	$\{\frac{30}{1,11}, 3\}$	1440	5	(1,4)
Estrellados	$\{3,5,5/2\}$	$\{\frac{20}{1,9}, 5\}$	1200	6	(2,2)
	$\{5,5/2,5\}$	$\{\frac{15}{1,4}, 5/2\}$	7200	1	(12,12)
	$\{5,3,5/2\}$	$\{\frac{12}{1,5}, 3\}$	144	50	(1,1)
	$\{3,3,5/2\}$	$\{\frac{30}{7,13}, 3\}$	1440	5	(4,1)
	$\{3,5/2,5\}$	$\{\frac{20}{3,7}, 5/2\}$	1200	6	(2,2)
	$\{5/2,5,5/2\}$	$\{\frac{15}{2,7}, 5\}$	7200	1	(12,12)

Donde G es el grupo de simetrías del quiralito.

Distintos valores de α en la construcción de Petrie-Coxeter dan lugar a distintos poliedros. Hay ciertos valores para los cuales las simetrías que generan $H_\alpha(\mathcal{T})$ son simetrías de \mathcal{T} . Cuando $\alpha = 0$, los vértices de $PC_\alpha(\mathcal{P})$ son los vértices de \mathcal{P} .

Cuando $\alpha = 0, 1$, es posible que algunos de los vértices en la construcción "colapsen". Eso quiere decir que algunos vértices terminan siendo el mismo, y el resultado puede no ser un poliedro. Si, en cambio, aparece el valor 1, leemos que "la cantidad de vértices que colapsan es 1" (para $\alpha = 0$ si el 1 está a la izquierda, y respectivamente $\alpha = 1$ derecha). Es decir, no hay colapso.

Conviene entonces estudiar los casos donde no hay colapso para $\alpha = 0$ pues en este caso la construcción de Petrie-Coxeter nos devuelve una estructura cuyos vértices son los mismos vértices del 4-politopo. Así, podremos usar las simetrías del 4-politopo original.

3 Quiralitos estrellados

Aquí comienza nuestro trabajo, basado en la siguiente sospecha: así como el cubo de Roli es la faceta de un 4-politopo quiral,

hay tres de los quiralitos que son las facetas de ciertos 4-politopos quirales.

Los sospechosos son $H_1\{5, 3, 5/2\}$, $H_0\{5, 3, 5/2\}$ y $H_1\{3, 3, 5/2\}$. Se trata de los quiralitos obtenidos a partir de los 4-politopos estrellados "Gran 120-celda" y "Gran 600-celda", resp. Dos de ellos están escogidos para valores de $\alpha = 1$, de forma que en estos dos casos estaremos trabajando con los 4-politopos duales, el $\{5/2, 5, 3\}$ "Pequeño 120-celda estelado" y el $\{5/2, 3, 3\}$, "Gran gran 120-celda estelada".

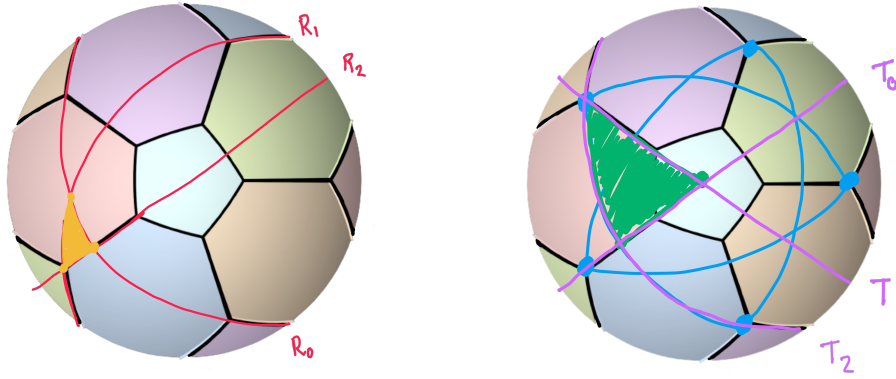
El primer paso es obtener los grupos de estos dos 4-politopos.

3.1 Del convexo al estrellado

Comenzamos con el grupo del $\{5,3,5/2\}$, la gran 120-celda. El grupo se denota $[5,3,5/2]$. La idea es tomar el grupo de simetrías de alguno de los convexos y expresar las relaciones del estrellado en términos de aquéllas.

En nuestro caso, partimos de que el grupo de la 120-celda, $[5,3,3]$, está generado por R_0, R_1, R_2 y R_3 como Wythoff, queremos expresar el grupo en términos de cuatro generadores T_0, T_1, T_2 y T_4 .

Comenzemos en dimensión 3, intentando expresar el $[5/3,3]$ a partir del grupo del dodecaedro. Después de muchos intentos logramos esto:



Es decir:

$$T_0 = R_2, \quad T_2 = R_0, \quad T_1 = (R_0 R_1)^2 R_2 (R_0 R_1)^{-2}$$

ya que T_1 es rotar R_2 en sentido antihorario con centro en el centro de la cara base

Ahora para encontrar la reflexión T_3 recordemos que la composición $T_2 T_3$ es la rotación en la arista de orden 3. Aunque esta intuición es correcta, **no es claro cómo encontrar T_3 en términos de las R_i con esta información.** ¿Y luego qué pasó?

En los notebooks, resulta que el grupo $[5/2, 3, 3] = [3, 3, 5/2] := \langle T_i \rangle$ está dado en términos del grupo $[5, 3, 5/2] := \langle P_i \rangle$ de acuerdo a:

$$T_0 = P_3, \quad T_1 = (P_2 P_1 P_0) P_1 (P_2 P_1 P_0)^{-1}, \quad T_2 = P_0, \quad T_3 = (P_1 P_0) P_1 (P_1 P_0)^{-1}$$

¿Qué podemos hacer? Decir cómo están dadas las P_i en términos de las R_i y habríamos terminado. Bueno, de hecho,

$$P_0 = R_0, \quad P_1 = (R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1}, \quad P_2 = R_3 R_2 R_3, \quad P_3 = R_2$$

Así que a la mera hora:

$$\begin{aligned} T_0 &= R_2, & T_2 &= R_0, \\ T_1 &= \left((R_3 R_2 R_3) ((R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1}) \right) (R_0) (R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1} \left((R_3 R_2 R_3) ((R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1}) \right)^{-1}, \\ T_3 &= \left((R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1} (R_0) \right) ((R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1}) \left((R_1 R_2) R_3 (R_1 R_2)^{-1} (R_0) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Antes de pasar a estudiar las T_i , hicimos esta cuenta con las P_i . Tenemos las presentaciones de los grupos:

$$[3, 3, 5] = \langle R_i | R_i^2 = (R_0 R_1)^3 = (R_1 R_2)^3 = (R_2 R_3)^5 = 1 \\ (R_0 R_2)^2 = (R_0 R_3)^2 = (R_1 R_3)^2 = 1 \rangle$$

$$[5, 3, 5/2] = \langle P_i | P_i^2 = (P_0 P_1)^5 = (P_1 P_2)^3 = (P_2 P_3)^5 = 1 \\ (P_0 P_2)^2 = (P_0 P_3)^2 = (P_1 P_3)^2 = 1 \rangle$$

Así que hay que checar que las P_i satisfagan eso. **Se comprobaron todas excepto que $(P_1 P_2)^3 = 1$.**

La búsqueda por la bandera Se logró identificar cómo está situada la bandera del $\{5, 3, 5/2\}$ con respecto a la bandera del $\{3, 3, 5\}$.

La idea de Roli es pensar que el icosaedrito de los no-vértices del $\{5/2, 3\}$ es la figura de vértice del $\{3, 3, 5\}$. Podemos tomar un tetraedro de los 20 que conforman ese icosaedrito, y dentro de él una bandera básica que genere al $\{3, 3, 5\}$. Entonces, R_0 bisecta una de las aristas del $\{5/2, 3\}$, así que podemos escoger esa arista para formar una bandera del $\{5/2, 3, 5\}$ y tenemos que $R_0 = P_0$.

4 En busca de otros poliedros quirales

Esta sección es una transcripción del trabajo de Bris.

4.1 Definiciones y resultados

Damos algunas definiciones, explicamos el método básico para construir poliedros usando la construcción de Wythoff y mostramos un par de teoremas.

Definición. Un **polígono (geométrico)** en \mathbb{R}^d es:

- Un conjunto discreto de puntos llamados **vértices**
- Un conjunto de segmentos que los unen llamados **aristas**

tales que la gráfica resultante es 2-regular.

Definición. Un **poliedro (geométrico)** en \mathbb{R}^d es un conjunto de polígonos llamados **caras** tal que:

- Los vértices son un conjunto discreto
- Cada arista pertenece exactamente a dos caras.
- La gráfica determinada por los vértices y las aristas es conexa.
- La figura de vértice en cada vértice es un polígono.

Definición (Banderas). • Una **bandera** de un poliedro es un vértice, una arista y una cara mutuamente incidentes.

- Si Φ es una bandera, Φ^i es la bandera que difiere de Φ sólo por en la cara $i \in \{0, 1, 2\}$ y se llama la **i -bandera adyacente**.

Definición. Un poliedro \mathcal{P} es **(geométricamente) quiral** si $G(\mathcal{P})$ induce dos órbitas en banderas y las banderas adyacentes están en órbitas distintas.

Observación. Un poliedro geométricamente quiral puede ser combinatoriamente quiral o regular.

Construcción de Wythoff para poliedros regulares. Sean R_0, R_1 y R_2 isometrías en \mathbb{R}^n que queremos usar para construir un poliedro regular \mathcal{P} y sea $G = \langle R_0, R_1, R_2 \rangle$. Ahora

- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de \mathcal{P} tal que $v \in \text{Fix } R_1 \cap \text{Fix } R_2$ y $v \notin \text{Fix } R_0$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con vR_0 .
- La **cara base** es la órbita de v y e bajo $\langle R_1, R_2 \rangle$.

Luego,

$V := \{vR : R \in G\}$ son los vértices de \mathcal{P} .

$E := \{eR : R \in G\}$ son las aristas de \mathcal{P} .

$F := \{fR : R \in G\}$ son las caras de \mathcal{P} .

Esta estructura se nota por \mathcal{P} o $\mathcal{P}(R_0, R_1, R_2; v)$

Construcción de Wythoff para poliedros quirales. Sean S_1 y S_2 isometrías en \mathbb{R}^n que queremos usar para construir un poliedro quiral \mathcal{P} y sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$. Ahora

- Necesitamos suponer que $(S_1 S_2)^2 = 1$.
- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de \mathcal{P} tal que $v \in \text{Fix } S_2$ y $v \notin \text{Fix } S_1$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con $vS_1^{-1} = vS_2^{-1}S_1^{-1} = vS_1S_2$. Necesitamos suponer que $eS_1 \neq e$ y $eS_2 \neq e$.
- La **cara base** es $\{vS, eS : S \in \langle S_1 \rangle\}$. Necesitamos suponer que $fS_2 \neq f$.

Luego,

$V := \{vR : R \in G\}$ son los vértices de \mathcal{P} .

$E := \{eR : R \in G\}$ son las aristas de \mathcal{P} .

$F := \{fR : R \in G\}$ son las caras de \mathcal{P} .

Esta estructura se nota por \mathcal{P} o $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

¿Cómo podemos estar seguros de que esta construcción nos da un poliedro?

Teorema. Sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$ un grupo discreto, donde S_1 y S_2 son isometrías de \mathbb{R}^n tales que $(S_1 S_2)^2 = 1$ y sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_1, S_2; v)$. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{1\}$.
- S_1 y S_2 son de orden mayor estricto que 2.
- $\text{Stab}_G v = \langle S_2 \rangle$, $\text{Stab}_G e = \langle S_1 S_2 \rangle$ y $\text{Stab}_G f = \langle S_1 \rangle$.

Entonces \mathcal{P} es un poliedro geométrico regular o quiral cuyo grupo de simetrías “es G como un subgrupo de índice 2 en $G(\mathcal{P})$ ”.

Teorema (Bracho, Hubbard, Pellicer). \mathcal{P} es un poliedro quiral en \mathbb{S}^3 si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- \mathcal{P} tiene caras holanes y figuras de vértices holanes.
- \mathcal{P} tiene caras helicoidales y figuras de vértice planas, y el plano que contiene a la figura de vértice de v no contiene a v .

Observación. En el segundo caso, si el vértice está en la figura de vértice, el poliedro es regular.

4.2 Looking for chiral polyhedra

El trabajo de Bris está planteado de la siguiente manera:

Sean $\mathcal{T} = \{p, q, r\}$ un 4-politopo regular esférico y R_0, R_1, R_2 y R_3 las isometrías que generan a \mathcal{T} con respecto a Φ . Denotaremos $[p, q, r] := \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Escogemos un vértice v y una arista e de \mathcal{T} para construir un poliedro usando el método de Wythoff, es decir, queremos que v y e estén en $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

Definimos $S_1 = R_0 R_1 R_2 R_3$ (recordemos que $\text{Stab } f = \langle S_1 \rangle$ en el teorema). La arista e es el segmento de línea que une v con $v S_1^{-1}$. Luego, la cara $f = \{v, e\} \langle S_1 \rangle$ es un **polígono de petrie**.

El objetivo es encontrar una S_2 con figuras de vértice planas, y tales que contienen al vértice del cual son la figura de vértice. Como queremos usar el teorema, tendremos que $v \in \text{Fix } S_2$, así que debemos buscar S_2 en $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Poliedros quirales con caras Petrie				
4-politopo \mathcal{T}	Poliedro \mathcal{P}	S_1	S_2	$ \langle S_1, S_2 \rangle $
$\{3, 3, 3\}$	—	$R_0 R_1 R_2 R_3$	—	—
$\{3, 3, 4\}$	$\{8, 4\}$		$R_3 R_2 R_1 R_2$	32
$\{4, 3, 3\}$	$\{8, 3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	48
$\{3, 4, 3\}$	—		—	—
$\{3, 3, 5\}$	—		—	—
$\{5, 3, 3\}$	$\{30, 3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	1440

Después de esto hubo una búsqueda por poliedros quirales con caras helicoidales:

Poliedros quirales con caras helicoidales				
4-politopo \mathcal{T}	Poliedro \mathcal{P}	S_1	S_2	$ \langle S_1, S_2 \rangle $
$\{3, 3, 3\}$	—	—	—	—
$\{3, 3, 4\}$	—	—	—	—
$\{3, 3, 5\}$	$\{12, 3\}$	$(R_1 R_2 R_3)^3 R_0$	$R_2 R_3 (R_2 R_3 R_1)^2 R_2 R_1$ $R_3 R_2 R_3 R_1 R_2 R_3 R_2 R_1$	144