

# Politopos

August 13, 2023

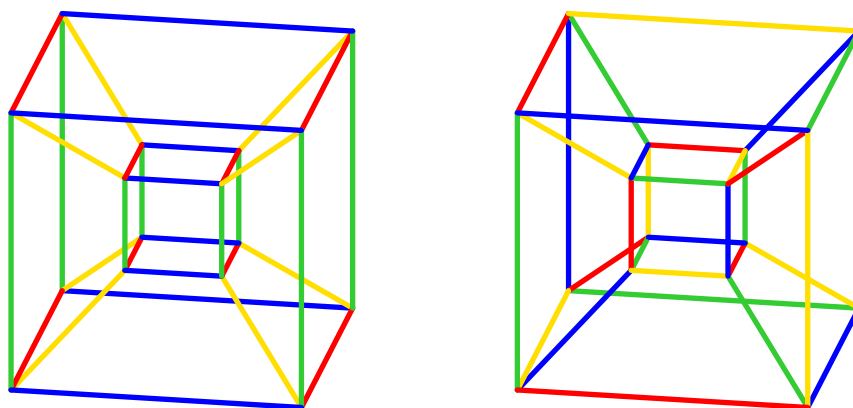
## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>1 El cubo de Roli</b>	<b>2</b>
<b>2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction</b>	<b>3</b>
2.1 Definiciones . . . . .	3
2.2 La construcción de Petrie-Coxeter . . . . .	4
2.3 Halving operation . . . . .	5
2.4 2-Hole . . . . .	5
2.5 Los quiralitos . . . . .	6
<b>3 Quiralitos estrellados</b>	<b>7</b>
3.1 Del convexo al estrellado . . . . .	8
<b>4 Busca <math>S_3</math></b>	<b>10</b>
<b>5 En busca de otros poliedros quirales</b>	<b>11</b>
5.1 Definiciones y resultados . . . . .	11
5.2 Looking for chiral polyhedra . . . . .	13

# 1 El cubo de Roli

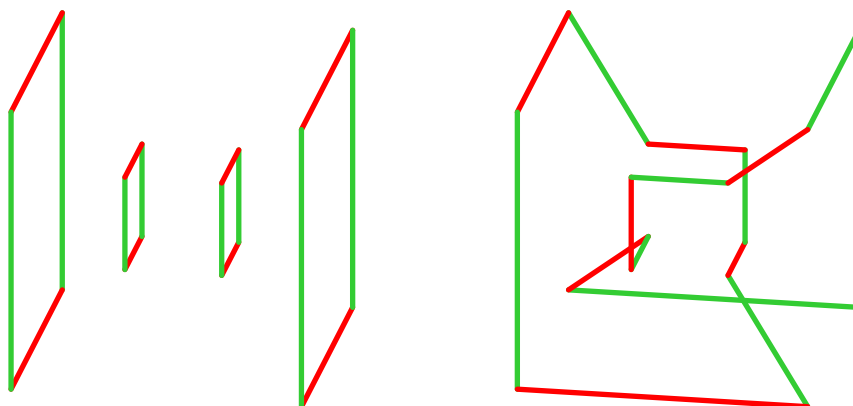
En 2014, J. Bracho, I. Hubbard y D. Pellicer encontraron un 4-politopo quiral en  $\mathbb{R}^4$ . Es el único ejemplo conocido de un 4-politopo en  $\mathbb{R}^4$ .

Mostramos una construcción muy sencilla de este cubo. Comenzamos con dos coloraciones de las aristas del 4-cubo:



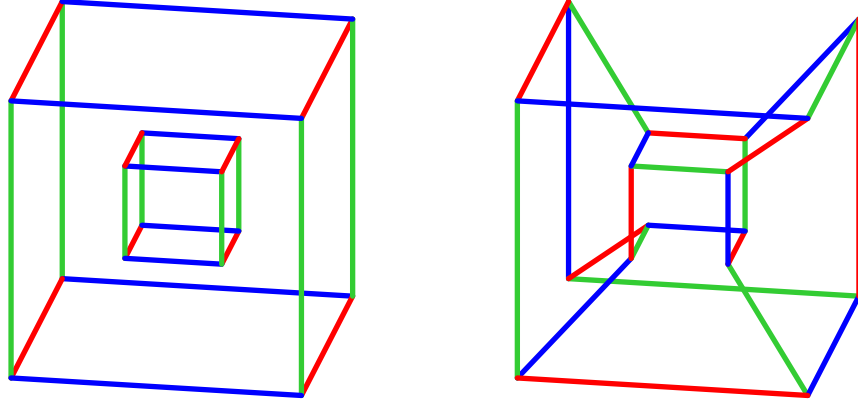
En cada vértice de cualquiera de las coloraciones inciden cuatro aristas de colores distintos.

En el 4-cubo normal, las caras son 4-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Definamos en el 4-cubo de la derecha que las caras sean los 8-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Aquí están las caras verde-rojo:



Ahora las facetas: en ambos cubos definamos las facetas como las componentes conexas

de tres colores. Aquí están las facetas verde-rojo-azul:



El cubo de la derecha se llama Cubo de Roli. Como dijimos, es un 4-politopo quiral. Parece que tiene la mitad de caras y la mitad de facetas de lo que tiene el 4-cubo. Las facetas son poliedros quirales (combinatorialmente regulares). Esta construcción se pudo generalizar para crear otros poliedros quirales, como mostramos en la siguiente sección.

## 2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction

Dado un 4-politopo regular  $\mathcal{T}$ , la construcción central es:

1. Calcular el poliedro de Petrie-Coxeter  $PC_\alpha(\mathcal{T})$ . Resulta ser regular o de clase  $2_{\{0,2\}}$ .
2. Aplicar la halving operation para obtener  $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$ .
3. Aplicar la operación de 2-facetting (2-hole) para obtener  $(PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi := H_\alpha(\mathcal{T})$ . Éste es un poliedro regular o quiral.

Cuando comenzamos con el 4-cubo, para ciertos valores de  $\alpha$  (creo que 1 o 2) obtenemos las facetas del Cubo de Roli.

A continuación desglosaremos este proceso.

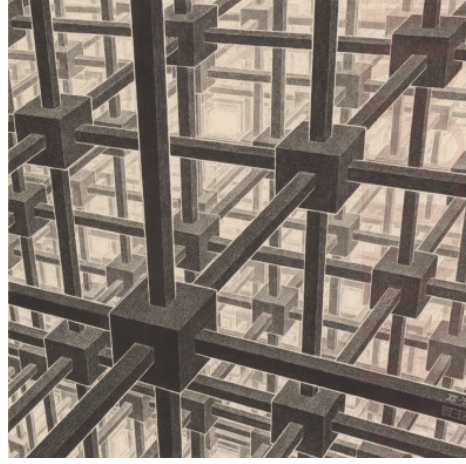
### 2.1 Definiciones

**Definición.** Un poliedro  $\mathcal{P}$  es

- **regular** (resp. **combinatorialmente regular**) si su grupo de simetrías  $G(\mathcal{P})$  (resp. grupo de automorfismos  $\Gamma(\mathcal{P})$ ) actúa transitivamente en las banderas.
- **quiral** (resp. **combinatorialmente quiral**) si  $G(\mathcal{P})$  (resp.  $\Gamma(\mathcal{P})$ ) induce dos órbitas en las banderas con la propiedad de que dos banderas adyacentes están en órbitas diferentes.

**Observación.** Si  $\mathcal{P}$  es regular o quiral, el grupo de simetrías actúa transitivamente en caras, aristas y vértices.

## 2.2 La construcción de Petrie-Coxeter



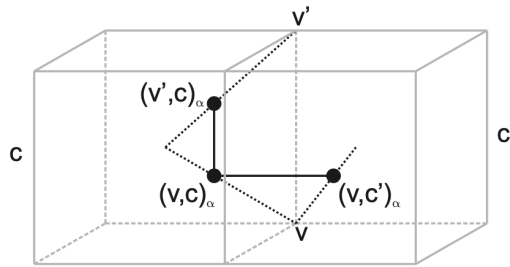
La construcción de Petrie-Coxeter y los valores de  $\alpha$ .

Dado un 4-politopo regular  $\mathcal{T}$ , mostraremos cómo construir un poliedro regular o quiral  $PC(\mathcal{T})$ . Suponemos por el resto del texto que  $\mathcal{T}$  tiene caras planas.

Se escoge número  $\alpha$  entre 0 y 1. Para un vértice  $v$  de  $\mathcal{T}$  y una cara que contiene a  $v$ , definimos el punto  $(v, c)_\alpha$  sobre el segmento que une  $v$  con  $c$  a distancia  $d\alpha$  desde  $v$ , donde  $d$  es la distancia entre ellos. Estos puntos serán los vértices del poliedro  $PC_\alpha(\mathcal{T})$ .

Las aristas son (1) los segmentos que unen  $(v, c)_\alpha$  con  $(v', c)_\alpha$ , donde  $v$  y  $v'$  son vértices en una misma arista de  $\mathcal{T}$ ; y (2) los segmentos que unen  $(v, c)_\alpha$  con  $(v, c')_\alpha$  donde  $c$  y  $c'$  son caras que comparten una cara donde está  $v$ .

Las caras son los cuadrados  $(v, c)_\alpha$ ,  $(v', c)_\alpha$ ,  $(v, c')_\alpha$  y  $(v', c')_\alpha$  donde  $c$  y  $c'$  son caras que contienen a la arista entre  $v$  y  $v'$ .



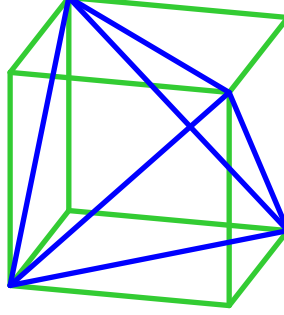
Tenemos algunos resultados sobre esta construcción:

**Teorema.** Para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$  y cualquier politopo regular  $\mathcal{T}$ ,  $PC_\alpha(\mathcal{T})$  es un poliedro.

**Observación.** Para cualesquiera  $\alpha \in (0, 1)$ , un 4-politopo regular  $\mathcal{T}$  y su dual  $\mathcal{T}^*$ ,  $PC_\alpha(\mathcal{T}) = PC_{1-\alpha}(\mathcal{T})$ .

**Teorema.** Para cualesquiera  $\alpha \in (0, 1)$ , un 4-politopo regular  $\mathcal{T}$ , el grupo de simetría de  $\mathcal{T}$  es isomorfo a un subgrupo de índice a lo más 2 de  $G(PC_\alpha(\mathcal{T}))$ . Además,  $PC_\alpha(\mathcal{T})$  es regular o un poliedro de dos órbitas en la clase  $2_{\{0,2\}}$ .

### 2.3 Halving operation



Esta operación transforma un poliedro  $\mathcal{P}$  con caras cuadradas en otro poliedro  $\mathcal{P}^\eta$ , cuyos vértices son algunos de los vértices de  $\mathcal{P}$ , donde dos de ellos son adyacentes si y sólo si son vértices opuestos en una cara de  $\mathcal{P}$ . Las caras de  $\mathcal{P}^\eta$  con figuras de vértice de algunos de los vértices de  $\mathcal{P}$ .

Como  $PC_\alpha(\mathcal{T})$  tiene caras cuadradas, le podemos aplicar esta operación. Y como además es regular o de clase  $2_{\{0,2\}}$ , cualquier de los resultados de aplicarle la operación Halving son isomorfos.

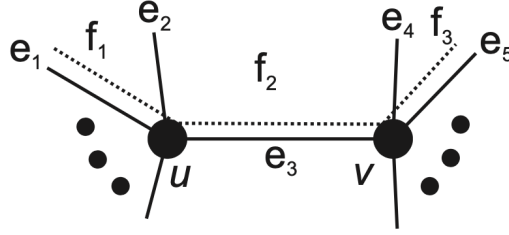
### 2.4 2-Hole

A 2-hole is constructed by traversing an edge to one of its endpoints, skipping the first edge on the left according to some local orientation, and then traversing a second edge. This procedure is repeated until an edge is traversed twice in the same direction.

La operación Facetting o 2-Hole convierte un poliedro  $\mathcal{P}$  con vértices de grado al menos 5 en una estructura  $\mathcal{P}^\phi$  cuyo 1-esqueleto está contenido en el 1-esqueleto de  $\mathcal{P}$  y sus caras son un subconjunto de los 2-hoyos de  $\mathcal{P}$ .

Dados un vértice, arista y 2-hoyo incidentes, se va construyendo  $\mathcal{P}^\phi$  por pasos de forma que el 1-esqueleto sea conexo y cada arista pertenezca a exactamente dos 2-hoyos. El resultado no siempre es un poliedro, pero en nuestro caso sí lo es. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

**Teorema.** Cuando  $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$  es un poliedro, es regular o de clase  $2_{\{1\}}$ .



Construcción de un 2-hoyo

## 2.5 Los quiralitos

Finalmente podemos definir

$$H_\alpha(\mathcal{T}) = (PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi$$

Para entender cómo construir los grupos de simetrías de los quiralitos, debemos recordar algunas cosas. Dado un poliedro  $\mathcal{P}$  regular o quiral, el subgrupo de automorfismos  $\Gamma^+(\mathcal{P})$  está generado por dos rotaciones distinguidas: la de la cara,  $\sigma_1$  y la del vértice  $\sigma_2$ .

Cuando  $\mathcal{P}$  es plano (todas sus caras están en un plano, por ejemplo, el hemicubo en  $\mathbb{P}^2$ ), es posible que haya más de una isometría que actúa como  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Sin embargo, si  $\mathcal{P}$  no es plano, son únicas.:

**Teorema.** Si  $\mathcal{P}$  es un poliedro regular o quiral con caras planas, existen únicas isometrías  $S_1$  y  $S_2$  que actúan como  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  con respecto a alguna bandera base  $\Phi$ .

Y luego,

**Proposición.** Si  $H_\alpha(\mathcal{T})$  es un poliedro, es regular o quiral.

*Demostración.* Basta mostrar que existe la rotación de la cara  $S_1$  y la rotación del vértice  $S_2$ . ¿Por qué? Si el grupo de simetrías del poliedro está generado por estas dos simetrías, queremos deducir que hay una o dos órbitas en banderas.  $\square$

Se hizo este procedimiento para cada uno de los 4-politopos regulares (6 convexos y 10 estrellados). Veamos cómo analizar los poliedros resultantes.

De la regularidad de  $\mathcal{T}$  podemos estudiar la simetría de  $H_\alpha(\mathcal{T})$ . Mientras que  $G(\mathcal{T}) = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$  como en la construcción Wythoff, resulta que  $G(H_\alpha(\mathcal{T})) \leq \langle S_1, S_2 \rangle$ , donde

$$S_1 = R_0 R_1 R_3 R_2$$

$$S_2 = R_2 R_1$$

Aquí,  $S_1$  es un tornillo y  $S_2$  una rotación, dando lugar a la notación  $\left\{ \frac{p}{p_1, p_2}, q \right\}$  donde  $q$  es el orden de la rotación y los enteros  $p, p_1$  y  $p_2$  caracterizan al tornillo. Esto sugiere qué clase de poliedro es  $H_\alpha(\mathcal{T})$ : tiene caras helicoidales,  $q$  en cada vértice.

Se encontraron los siguientes Quiralitos o Halving-2-Holes:

	4-politopo $\mathcal{T}$	Quiralito $H_\alpha(T)$	$\#(G)$	$[G : \Gamma^+]$	Colapsa cuando $\alpha = (0, 1)$
Convexos	$\{3,3,3\}$	$\{\frac{5}{1,2}, 3\}$	60	1	(4,4)
	$\{4,3,3\}$	$\{\frac{8}{1,3}, 3\}$	48	4	(1,2)
	$\{3,4,3\}$	$\{\frac{12}{1,5}, 4\}$	192	3	(2,2)
	$\{5,3,3\}$	$\{\frac{30}{1,11}, 3\}$	1440	5	(1,4)
Estrellados	$\{3,5,5/2\}$	$\{\frac{20}{1,9}, 5\}$	1200	6	(2,2)
	$\{5,5/2,5\}$	$\{\frac{15}{1,4}, 5/2\}$	7200	1	(12,12)
	$\{5,3,5/2\}$	$\{\frac{12}{1,5}, 3\}$	144	50	(1,1)
	$\{3,3,5/2\}$	$\{\frac{30}{7,13}, 3\}$	1440	5	(4,1)
	$\{3,5/2,5\}$	$\{\frac{20}{3,7}, 5/2\}$	1200	6	(2,2)
	$\{5/2,5,5/2\}$	$\{\frac{15}{2,7}, 5\}$	7200	1	(12,12)

Donde  $G$  es el grupo de simetrías del quiralito.

Distintos valores de  $\alpha$  en la construcción de Petrie-Coxeter dan lugar a distintos poliedros. Hay ciertos valores para los cuales las simetrías que generan  $H_\alpha(\mathcal{T})$  son simetrías de  $\mathcal{T}$ . Cuando  $\alpha = 0$ , los vértices de  $PC_\alpha(\mathcal{P})$  son los vértices de  $\mathcal{P}$ .

Cuando  $\alpha = 0, 1$ , es posible que algunos de los vértices en la construcción "colapsen". Eso quiere decir que algunos vértices terminan siendo el mismo, y el resultado puede no ser un poliedro. Si, en cambio, aparece el valor 1, leemos que "la cantidad de vértices que colapsan es 1" (para  $\alpha = 0$  si el 1 está a la izquierda, y respectivamente  $\alpha = 1$  derecha). Es decir, no hay colapso.

Conviene entonces estudiar los casos donde no hay colapso para  $\alpha = 0$  pues en este caso la construcción de Petrie-Coxeter nos devuelve una estructura cuyos vértices son los mismos vértices del 4-politopo. Así, podremos usar las simetrías del 4-politopo original.

### 3 Quiralitos estrellados

Aquí comienza nuestro trabajo, basado en la siguiente sospecha: así como el cubo de Roli es la faceta de un 4-politopo quiral,

**hay tres de los quiralitos que son las facetas de ciertos 4-politopos quirales.**

Los sospechosos son  $H_1\{5, 3, 5/2\}$ ,  $H_0\{5, 3, 5/2\}$  y  $H_1\{3, 3, 5/2\}$ . Se trata de los quiralitos obtenidos a partir de los 4-politopos estrellados "Gran 120-celda" y "Gran 600-celda", resp. Dos de ellos están escogidos para valores de  $\alpha = 1$ , de forma que en estos dos casos estaremos trabajando con los 4-politopos duales, el  $\{5/2, 5, 3\}$  "Pequeño 120-celda estelado" y el  $\{5/2, 3, 3\}$ , "Gran gran 120-celda estelada".

El primer paso es obtener los grupos de estos dos 4-politopos.

### 3.1 Del convexo al estrellado

Comenzamos con el grupo del  $\{5,3,5/2\}$ , la gran 120-celda. El grupo se denota  $[5,3,5/2]$ . La idea es tomar el grupo de simetrías de alguno de los convexos y expresar las relaciones del estrellado en términos de aquéllas.

En nuestro caso, partimos de que el grupo de la 600-celda,  $[3,3,5]$ , está generado por  $R_0, R_1, R_2$  y  $R_3$  como Wythoff, queremos expresar el grupo en términos de cuatro generadores  $P_0, P_1, P_2$  y  $P_3$ .

Buscamos las siguientes presentaciones de grupos:

$$[3, 3, 5] = \langle R_i | R_i^2 = (R_0 R_1)^3 = (R_1 R_2)^3 = (R_2 R_3)^5 = 1 \\ (R_0 R_2)^2 = (R_0 R_3)^2 = (R_1 R_3)^2 = 1 \rangle$$

$$[5, 3, 5/2] = \langle P_i | P_i^2 = (P_0 P_1)^5 = (P_1 P_2)^3 = (P_2 P_3)^5 = 1 \\ (P_0 P_2)^2 = (P_0 P_3)^2 = (P_1 P_3)^2 = 1 \rangle$$

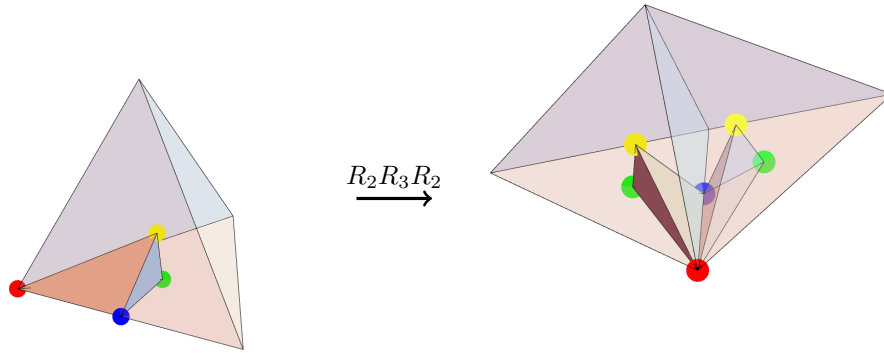
**Afirmación** (La idea de Roli). Pensemos que el icosaedrito de los no-vértices del  $\{5/2,3\}$  es la figura de vértice del  $\{3,3,5\}$ . Al hacer actuar las isometrías  $R_i$  sobre el  $\{5/2,3\}$  obtenemos el  $\{5/2,3,5\}$ .

*Demostración.* Basta dar una presentación del  $[5,3,5/2]$  como arriba. Definamos

$$P_0 = R_0, \quad P_2 = R_3, \quad P_3 = R_2$$

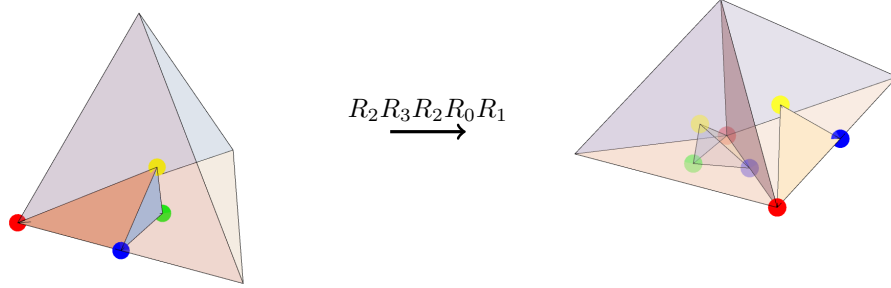
Para  $P_1$  hay que hacer un poquito más de chamba.

Mostraremos algunos dibujos *aproximados* de lo que está pasando (no pueden ser exactos porque los objetos están en dimensión 4). La conjugación  $R_2 R_3 R_2$  es reflejar respecto a la cara de "enfrente":



Ahora rotemos respecto a la recta amarillo-verde en dirección antihoraria (vista desde arriba),  $R_0 R_1$ :





La observación clave es que la reflexión que buscamos está dada por el plano al que acaban de ir a dar los puntos rojo, verde y amarillo, de manera que  $P_1$  es el conjugado de  $R_1$  por la transformación que tenemos arriba.

$$\begin{aligned} P_1 &:= (R_2 R_3 R_2 R_0 R_1)^{-1} R_1 (R_2 R_3 R_2 R_0 R_1) \\ &= R_1 R_0 R_2 R_3 R_2 R_1 R_2 R_3 R_2 R_0 R_1 \end{aligned}$$

Ahora veamos que se satisfacen las relaciones. Sustituyendo,

$$(P_0 P_2)^2 = (R_0 R_3)^2 = 1 \quad (P_0 P_3)^2 = (R_0 R_2)^2 = 1 \quad (P_2 P_3)^5 = (R_3 R_2)^5 = 1$$

□

Ahora sustituimos en las fórmulas que teníamos para las  $S_i$  y obtenemos las isometrías que generan un poliedro quiral:

$$\begin{aligned} S_1 &= P_0 P_1 P_3 P_2 \\ S_2 &= P_2 P_1 \end{aligned}$$

Seguramente se trata de  $H_1(\{5, 3, 5/2\})$ . Ahora hay que buscar una  $S_3$  para construir un 4-politopo quiral, a la cual pediremos...

Primero las condiciones combinatorias:

- $(S_1 S_2 S_3)^2 = 1$  [Pensamos que esta es giro de brocheta por un palillo que va del vértice al centro de la cara]
- $(S_2 S_3)^2 = 1$ .

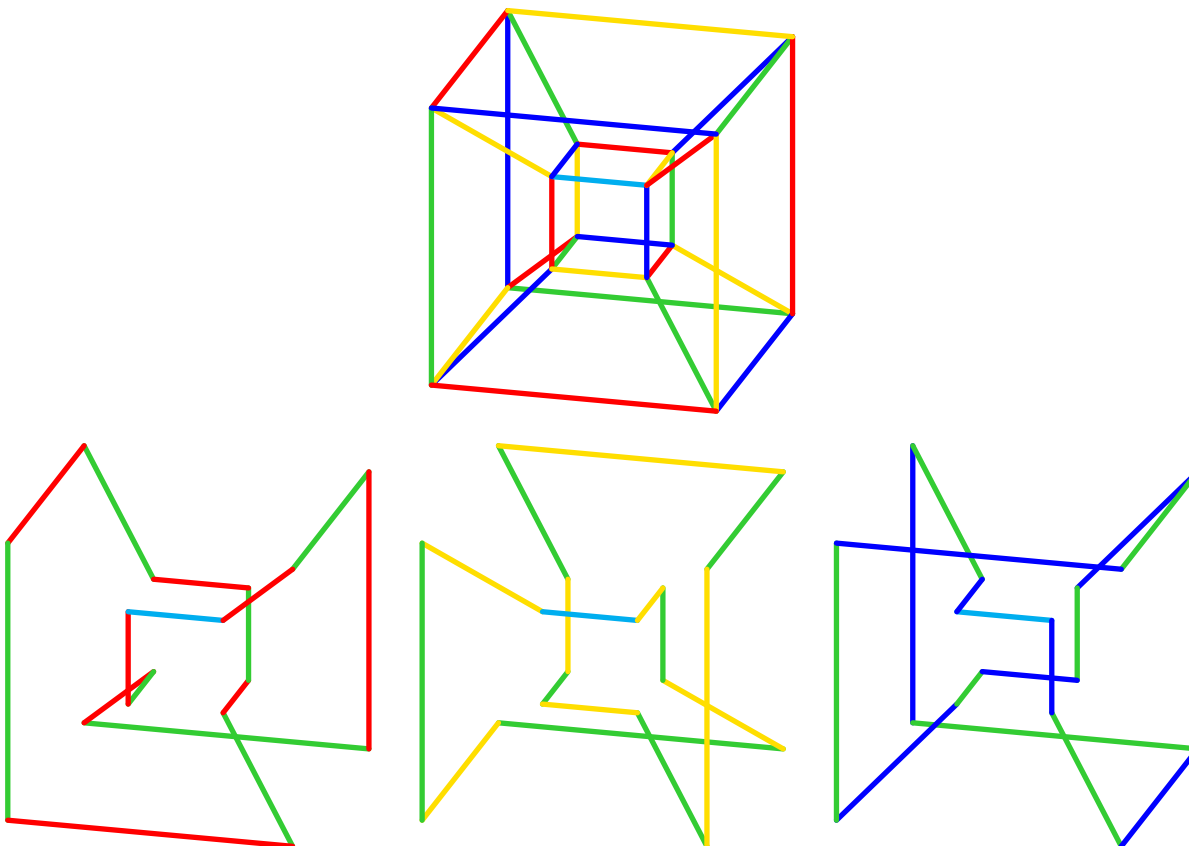
Y luego las geométricas:

- $v S_3 = v$
- $e S_3 = e$

**Observación.** Bueno,  $S_1 S_2$  es el medio giro en la arista o en la arista adyacente (depende del orden).

## 4 Busca $S_3$

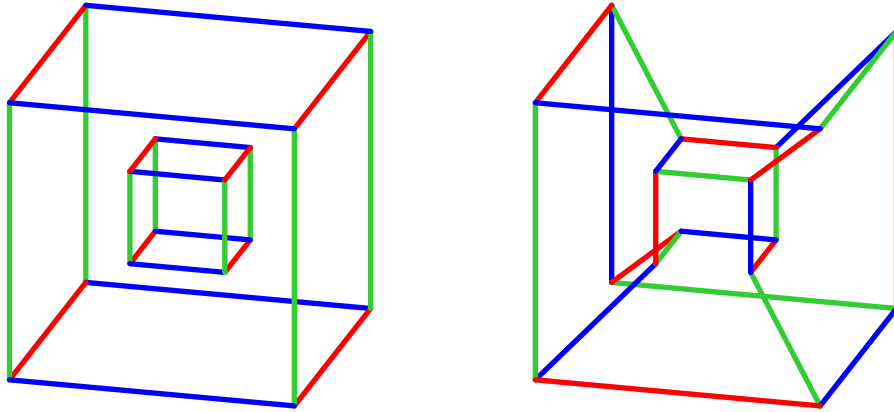
Analicemos el caso del Cubo de Roli para encontrar inspiración. Escojamos una arista base, color azul clarito. ¿Qué debería hacer  $S_3$ ? Bueno, simplemente debe girar el 4-politopo alrededor de la arista. Esto es justo lo que vemos en los diagramas de abajo:  $S_3$  relaciona las tres figuras.



Intuitivamente, esta transformación es algo así como  $P_2P_3$ . Sólo que debemos cambiar  $P_3$ , ya que la cara del poliedro quiral no es la misma que la del poliedro regular (recordemos que en nuestro caso son los estrellados). Se nos antoja que sea una rotorreflexión. No será que: ¿tomamos el plano obvio para la reflexión, y la rotación de orden 8 respecto al normal a ese plano? ¡Pero éste debería ser el tornillo!

**¿No será que  $S_3 = P_3S_1$ ?**

De hecho, como es quiral, quizás no deberíamos pensar en una reflexión de la cara, sino más bien inspirarnos en las  $S_1$  y  $S_2$ . ¿Cómo podemos expresar  $S_3$  en términos de  $S_1$  y  $S_2$ ?



## 5 En busca de otros poliedros quirales

Esta sección es una transcripción del trabajo de Bris.

### 5.1 Definiciones y resultados

Damos algunas definiciones, explicamos el método básico para construir poliedros usando la construcción de Wythoff y mostramos un par de teoremas.

**Definición.** Un **polígono (geométrico)** en  $\mathbb{R}^d$  es:

- Un conjunto discreto de puntos llamados **vértices**
- Un conjunto de segmentos que los unen llamados **aristas**

tales que la gráfica resultante es 2-regular.

**Definición.** Un **poliedro (geométrico)** en  $\mathbb{R}^d$  es un conjunto de polígonos llamados **caras** tal que:

- Los vértices son un conjunto discreto
- Cada arista pertenece exactamente a dos caras.
- La gráfica determinada por los vértices y las aristas es conexa.
- La figura de vértice en cada vértice es un polígono.

**Definición (Banderas).**

- Una **bandera** de un poliedro es un vértice, una arista y una cara mutuamente incidentes.
- Si  $\Phi$  es una bandera,  $\Phi^i$  es la bandera que difiere de  $\Phi$  sólo por en la cara  $i \in \{0, 1, 2\}$  y se llama la  **$i$ -bandera adyacente**.

**Definición.** Un poliedro  $\mathcal{P}$  es **(geométricamente) quiral** si  $G(\mathcal{P})$  induce dos órbitas en banderas y las banderas adyacentes están en órbitas distintas.

**Observación.** Un poliedro geométricamente quiral puede ser combinatoriamente quiral o regular.

**Construcción de Wythoff para poliedros regulares.** Sean  $R_0, R_1$  y  $R_2$  isometrías en  $\mathbb{R}^n$  que queremos usar para construir un poliedro regular  $\mathcal{P}$  y sea  $G = \langle R_0, R_1, R_2 \rangle$ . Ahora

- Escogemos un vértice  $v$  que será el **vértice base** de  $\mathcal{P}$  tal que  $v \in \text{Fix } R_1 \cap \text{Fix } R_2$  y  $v \notin \text{Fix } R_0$ .
- La **arista base** es el segmento de línea que une  $v$  con  $vR_0$ .
- La **cara base** es la órbita de  $v$  y  $e$  bajo  $\langle R_1, R_2 \rangle$ .

Luego,

$V := \{vR : R \in G\}$  son los vértices de  $\mathcal{P}$ .

$E := \{eR : R \in G\}$  son las aristas de  $\mathcal{P}$ .

$F := \{fR : R \in G\}$  son las caras de  $\mathcal{P}$ .

Esta estructura se nota por  $\mathcal{P}$  o  $\mathcal{P}(R_0, R_1, R_2; v)$

**Construcción de Wythoff para poliedros quirales.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  isometrías en  $\mathbb{R}^n$  que queremos usar para construir un poliedro quiral  $\mathcal{P}$  y sea  $G = \langle S_1, S_2 \rangle$ . Ahora

- Necesitamos suponer que  $(S_1 S_2)^2 = 1$ .
- Escogemos un vértice  $v$  que será el **vértice base** de  $\mathcal{P}$  tal que  $v \in \text{Fix } S_2$  y  $v \notin \text{Fix } S_1$ .
- La **arista base** es el segmento de línea que une  $v$  con  $vS_1^{-1} = vS_2^{-1}S_1^{-1} = vS_1S_2$ . Necesitamos suponer que  $eS_1 \neq e$  y  $eS_2 \neq e$ .
- La **cara base** es  $\{vS, eS : S \in \langle S_1 \rangle\}$ . Necesitamos suponer que  $fS_2 \neq f$ .

Luego,

$V := \{vR : R \in G\}$  son los vértices de  $\mathcal{P}$ .

$E := \{eR : R \in G\}$  son las aristas de  $\mathcal{P}$ .

$F := \{fR : R \in G\}$  son las caras de  $\mathcal{P}$ .

Esta estructura se nota por  $\mathcal{P}$  o  $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$ .

**¿Cómo podemos estar seguros de que esta construcción nos da un poliedro?**

**Teorema.** Sea  $G = \langle S_1, S_2 \rangle$  un grupo discreto, donde  $S_1$  y  $S_2$  son isometrías de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $(S_1 S_2)^2 = 1$  y sea  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_1, S_2; v)$ . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{1\}$ .
- $S_1$  y  $S_2$  son de orden mayor estricto que 2.

- $\text{Stab}_G v = \langle S_2 \rangle$ ,  $\text{Stab}_G e = \langle S_1 S_2 \rangle$  y  $\text{Stab}_G f = \langle S_1 \rangle$ .

Entonces  $\mathcal{P}$  es un poliedro geométrico regular o quiral cuyo grupo de simetrías “es  $G$  como un subgrupo de índice 2 en  $G(\mathcal{P})$ ”.

**Teorema** (Bracho, Hubbard, Pellicer).  $\mathcal{P}$  es un poliedro quiral en  $\mathbb{S}^3$  si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- $\mathcal{P}$  tiene caras holanes y figuras de vértices holanes.
- $\mathcal{P}$  tiene caras helicoidales y figuras de vértice planas, y el plano que contiene a la figura de vértice de  $v$  no contiene a  $v$ .

**Observación.** En el segundo caso, si el vértice está en la figura de vértice, el poliedro es regular.

## 5.2 Looking for chiral polyhedra

El trabajo de Bris está planteado de la siguiente manera:

Sean  $\mathcal{T} = \{p, q, r\}$  un 4-politopo regular esférico y  $R_0, R_1, R_2$  y  $R_3$  las isometrías que generan a  $\mathcal{T}$  con respecto a  $\Phi$ . Denotaremos  $[p, q, r] := \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$ .

Escogemos un vértice  $v$  y una arista  $e$  de  $\mathcal{T}$  para construir un poliedro usando el método de Wythoff, es decir, queremos que  $v$  y  $e$  estén en  $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$ .

Definimos  $S_1 = R_0 R_1 R_2 R_3$  (recordemos que  $\text{Stab } f = \langle S_1 \rangle$  en el teorema). La arista  $e$  es el segmento de línea que une  $v$  con  $vS_1^{-1}$ . Luego, la cara  $f = \{v, e\}\langle S_1 \rangle$  es un **polígono de petrie**.

El objetivo es encontrar una  $S_2$  con figuras de vértice planas, y tales que contienen al vértice del cual son la figura de vértice. Como queremos usar el teorema, tendremos que  $v \in \text{Fix } S_2$ , así que debemos buscar  $S_2$  en  $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$ .

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Poliedros quirales con caras Petrie				
4-politopo $\mathcal{T}$	Poliedro $\mathcal{P}$	$S_1$	$S_2$	$ \langle S_1, S_2 \rangle $
$\{3, 3, 3\}$	—	$R_0 R_1 R_2 R_3$	—	—
$\{3, 3, 4\}$	$\{8, 4\}$		$R_3 R_2 R_1 R_2$	32
$\{4, 3, 3\}$	$\{8, 3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	48
$\{3, 4, 3\}$	—		—	—
$\{3, 3, 5\}$	—		—	—
$\{5, 3, 3\}$	$\{30, 3\}$		$R_3 R_2 R_1 R_3$ $R_3 R_2 R_1 R_2$	1440

Después de esto hubo una búsqueda por poliedros quirales con caras helicoidales:

Poliedros quirales con caras helicoidales				
4-politopo $\mathcal{T}$	Poliedro $\mathcal{P}$	$S_1$	$S_2$	$ \langle S_1, S_2 \rangle $
$\{3, 3, 3\}$	—	—	—	—
$\{3, 3, 4\}$	—	—	—	—
$\{3, 3, 5\}$	$\{12, 3\}$	$(R_1 R_2 R_3)^3 R_0$	$R_2 R_3 (R_2 R_3 R_1)^2 R_2 R_1$ $R_3 R_2 R_3 R_1 R_2 R_3 R_2 R_1$	144