Politopos

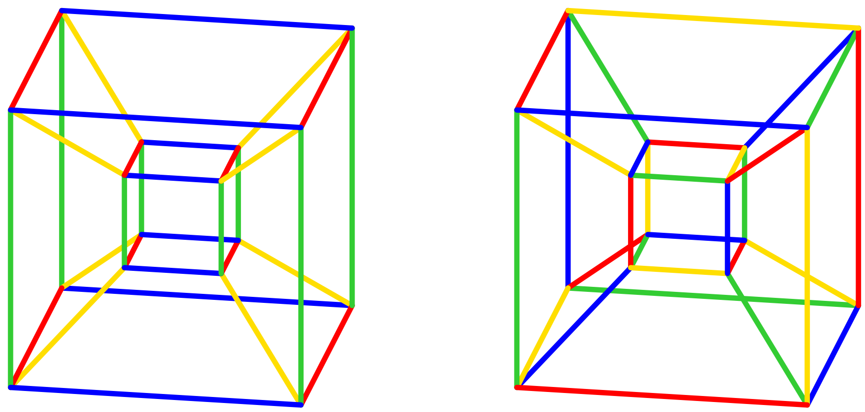
August 11, 2023

Índice

1 El cubo de Roli

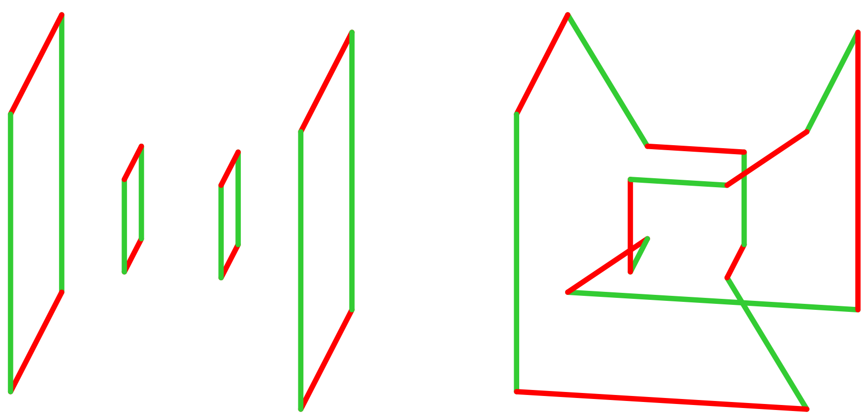
En 2014, J. Bracho, I. Hubard y D. Pellicer encontraron un 4-politopo quiral en $\mathbb{R}^4$. Es el único ejemplo conocido de un 4-politopo en $\mathbb{R}^4$.

Mostramos una construcción muy sencilla de este cubo. Comenzamos con dos coloraciones de las aristas del 4-cubo:

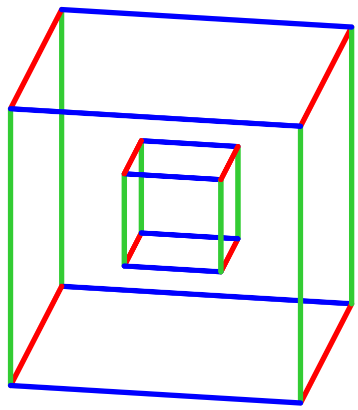


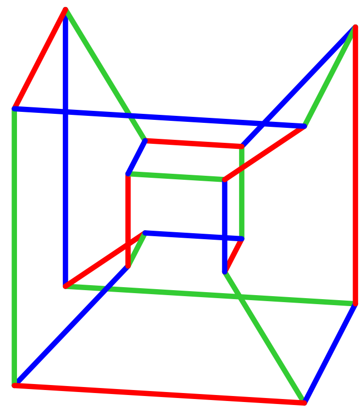
En cada vértice de cualquiera de las coloraciones inciden cuatro aristas de colores distintos.

En el 4-cubo normal, las caras son 4-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Definamos en el 4-cubo de la derecha que las caras sean los 8-ciclos de aristas de dos colores que van alternando. Aquí están las caras verde-rojo:



Ahora las facetas: en ambos cubos definamos las facetas como las componentes conexas de tres colores. Aquí están las facetas verde-rojo-azul:





El cubo de la derecha se llama Cubo de Roli. Como dijimos, es un 4-politopo quiral. Parece que tiene la mitad de caras y la mitad de facetas de lo que tiene el 4-cubo. Las facetas son poliedros quirales (combintorialmente regulares). Esta construicción se pudo generalizar para crear otros poliedros quirales, como mostramos en la siguiente sección.

2 Resumen: Quiral polyhedra from a PC construction

Dado un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, la construcción central es:

1. Calcular el poliedro de Petrie-Coxeter $PC_\alpha(\mathcal{T})$. Resulta ser regular o de clase $2_{\{0,2\}}$.
2. Aplicar la halving operation para obtener $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$.
3. Aplicar la operación de 2-facetting (2-hole) para obtener $(PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi := H_\alpha(\mathcal{T})$. Éste es un poliedro regular o quiral.

Cuando comenzamos con el 4-cubo, para ciertos valores de α (creo que 1 o 2) obtenemos las facetas del Cubo de Roli.

A continuación desglosaremos este proceso.

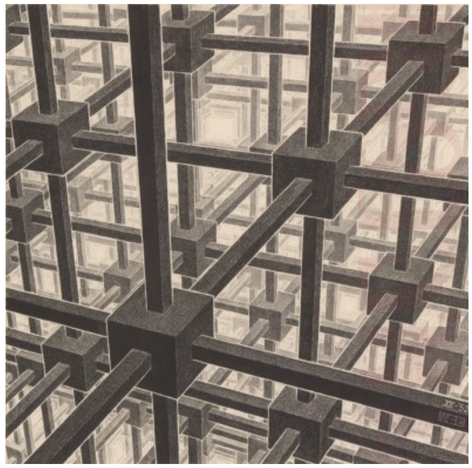
2.1 Definiciones

Definición. Un poliedro $\mathcal{P}$ es

- **regular** (resp. **combinatoriamente regular**) si su grupo de simetrías $G(\mathcal{P})$ (resp. grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$) actúa transitivamente en las banderas .
- **quiral** (resp. **combinatoriamente quiral**) si $G(\mathcal{P})$ (resp. $\Gamma(\mathcal{P})$) induce dos órbitas en las banderas con la propiedad de que dos banderas adyacentes están en órbitas diferentes.

Observación. Si $\mathcal{P}$ es regular o quiral, el grupo de simetrías actúa transitivamente en caras, aristas y vértices.

2.2 La construcción de Petrie-Coxeter



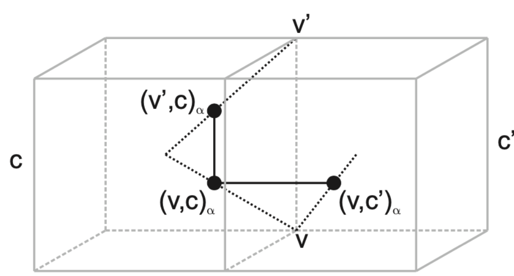
La construcción de Petrie-Coxeter y los valores de α.

Dado un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, mostraremos cómo constuir un poliedro regular o quiral $PC(\mathcal{T})$. Suponemos por el resto del texto que $\mathcal{T}$ tiene caras planas.

Se escoge número α entre 0 y 1. Para un vértice v de $\mathcal{T}$ y una cara que contiene a v, definimos el punto $(v, c)_\alpha$ sobre el segmento que une v con c a distancia $d\alpha$ desde v, donde d es la distancia entre ellos. Estos puntos serán los vértices del poliedro $PC_\alpha(\mathcal{T})$.

Las aristas son (1) los segmentos que unen $(v, c)_\alpha$ con $(v', c)_\alpha$, donde v y v' son vértices en una misma arista de $\mathcal{T}$; y (2) los semgentos que unen $(v, c)_\alpha$ con $(v, c')_\alpha$ donde c y c' son facetas que comparten una cara conde está v.

Las caras son los cuadrados $(v, c)_\alpha$, $(v', c)_\alpha$, $(v, c')_\alpha$ y $(v', c')_\alpha$ donde c y c' son caras que contienen a la arista entre v y v'.



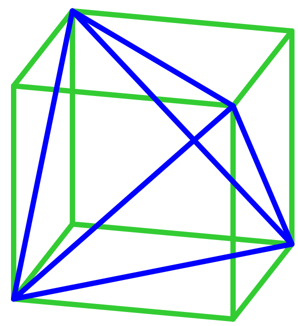
Tenemos algunos resultados sobre esta construcción:

Teorema. Para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ y cualquier politopo regular $\mathcal{T}$, $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro.

Observación. Para cualesquiera $\alpha \in (0,1)$, un 4-politopo regular $\mathcal{T}$ y su dual $\mathcal{T}^*$, $PC_\alpha(\mathcal{T}) = PC_{1-\alpha}(\mathcal{T})$.

Teorema. Para cualesquiera $\alpha \in (0,1)$, un 4-politopo regular $\mathcal{T}$, el grupo de simetría de $\mathcal{T}$ es isomorfo a un subgrupo de índice a lo más 2 de $G(PC_\alpha(\mathcal{T}))$. Además, $PC_\alpha(\mathcal{T})$ es regular o un poliedro de dos órbitas en la clase $2_{\{0,2\}}$.

2.3 Halving operation



Esta operación transforma un poliedro $\mathcal{P}$ con caras cuadradas en otro poliedro $\mathcal{P}^\eta$, cuyos vértices son algunos de los vértices de $\mathcal{P}$, donde dos de ellos son adyacentes si y sólo si son vértices opuestos en una cara de $\mathcal{P}$. Las caras de $\mathcal{P}^\eta$ con figuras de vértice de algunos de los vértices de $\mathcal{P}$.

Como $PC_\alpha(\mathcal{T})$ tiene caras cuadradas, le podemos aplicar esta operación. Y como además es regular o de clase $2_{\{0,2\}}$, cualquier de los resultados de aplicarle la operación Halving son isomorfos.

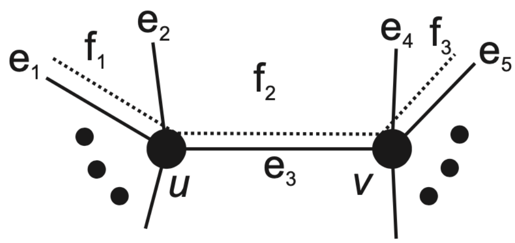
2.4 2-Hole

A 2-hole is constructed by traversing an edge to one of its endpoints, skipping the first edge on the left according to some local orientation, and then traversing a second edge. This procedure is repeated until an edge is traversed twice in the same direction.

La operación Facetting o 2-Hole convierte un poliedro $\mathcal{P}$ con vértices de grado al menos 5 en una estructura $\mathcal{P}^\phi$ cuyo 1-esqueleto está contenido en el 1-esqueleto de $\mathcal{P}$ y sus caras son un subconjunto de los 2-hoyos de $\mathcal{P}$.

Dados un vértice, arista y 2-hoyo incidentes, se va construyendo $\mathcal{P}^\phi$ por pasos de forma que el 1-esqueleto sea conexo y cada arista pertenezca a exactamente dos 2-hoyos. El resultado no siempre es un poliedro, pero en nuestro caso sí lo es. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema. Cuando $PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta$ es un poliedro, es regular o de clase $2_{\{1\}}$.



Construcción de un 2-hoyo

2.5 Los quiralitos

Finalmente podemos definir

$$H_\alpha(\mathcal{T}) = (PC_\alpha(\mathcal{T})^\eta)^\phi$$

Para entender cómo construir los grupos de simetrías de los quiralitos, debemos recordar algunas cosas. Dado un poliedro $\mathcal{P}$ regular o quiral, el subgrupo de automorfismos $\Gamma^+(\mathcal{P})$ está generado por dos rotaciones distinguidas: la de la cara, σ_1 y la del vértice σ_2.

Cuando $\mathcal{P}$ es plano (todas sus caras están en un plano, por ejemplo, el hemicubo en $\mathbb{P}^2$), es posible que haya más de una isometría que actúa como σ_1 y σ_2. Sin embargo, si $\mathcal{P}$ no es plano, son únicas.:

Teorema. Si $\mathcal{P}$ es un poliedro regular o quiral con caras planas, existen únicas isometrías S_1 y S_2 que actúan como σ_1 y σ_2 con respecto a alguna bandera base Φ.

Y luego,

Proposición. Si $H_\alpha(\mathcal{T})$ es un poliedro, es regular o quiral.

Demostración. Basta mostrar que existe la rotación de la cara S_1 y la rotación del vértice S_2. ¿Por qué? Si el grupo de simetrías del poliedro está generado por estas dos simetrías, tenemos que deducir que hay una o dos órbitas en banderas. □

Se hizo este procedimiento para cada uno de los 4-politopos regulares (6 convexos y 10 estrellados). Veamos cómo analizar los poliedros resultantes.

De la regularidad de $\mathcal{T}$ podemos estudiar la simetría de $H_\alpha(\mathcal{T})$. Mientras que $G(\mathcal{T}) = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$ como en la construcción Wythoff, resulta que $G(H_\alpha(\mathcal{T})) \leq \langle S_1, S_2 \rangle$, donde

$$S_1 = R_0 R_1 R_3 R_2$$
$$S_2 = R_2 R_1$$

Aquí, S_1 es un tornillo y S_2 una rotación, dando lugar a la notación $\left\{\frac{p}{p_1,p_2}, q\right\}$ donde q es el orden de la rotación y los enteros p, p_1 y p_2 caracterizan al tornillo. Esto sugiere qué clase de poliedro es $H_\alpha(\mathcal{T})$: tiene caras helicoidales, q en cada vértice.

Se encontraron los siguientes Quiralitos o Halving-2-Holes:

	4-politopo $\mathcal{T}$	Quiralito $H_\alpha(T)$	$\#(G)$	$[G : \Gamma^+]$	Colapsa cuando $\alpha = (0, 1)$
Convexos	{3,3,3}	$\{\frac{5}{1,2}, 3\}$	60	1	(4,4)
	{4,3,3}	$\{\frac{8}{1,3}, 3\}$	48	4	(1,2)
	{3,4,3}	$\{\frac{12}{1,5}, 4\}$	192	3	(2,2)
	{5,3,3}	$\{\frac{30}{1,11}, 3\}$	1440	5	(1,4)
Estrellados	{3,5,5/2}	$\{\frac{20}{1,9}, 5\}$	1200	6	(2,2)
	{5,5/2,5}	$\{\frac{15}{1,4}, 5/2\}$	7200	1	(12,12)
	{5,3,5/2}	$\{\frac{12}{1,5}, 3\}$	144	50	(1,1)
	{3,3,5/2}	$\{\frac{30}{7,13}, 3\}$	1440	5	(4,1)
	{3,5/2,5}	$\{\frac{20}{3,7}, 5/2\}$	1200	6	(2,2)
	{5/2,5,5/2}	$\{\frac{15}{2,7}, 5\}$	7200	1	(12,12)

Donde G es el grupo de simetrías del quiralito.

Distintos valores de α en la construcción de Petrie-Coxeter dan lugar a distintos poliedros. Hay ciertos valores para los cuales las simetrías que generan $H_\alpha(\mathcal{T})$ son simetrías de $\mathcal{T}$. Cuando $\alpha = 0$, los vértices de $PC_\alpha(\mathcal{P})$ son los vértices de $\mathcal{P}$.

Cuando $\alpha = 0, 1$, es posible que algunos de los vértices en la construcción ”colapsen”. Eso quiere decir que algunos vértices terminan siendo el mismo, y el resultado puede no ser un poliedro. Si, en cambio, aparece el valor 1, leemos que ”la cantidad de vértices que colapsan es 1” (para $\alpha = 0$ si el 1 está a la izquierda, y respectivamente $\alpha = 1$ derecha). Es decir, no hay colapso.

Conviene entonces estudiar los casos donde no hay colapso para $\alpha = 0$ pues en este caso la construcción de Petrie-Coxeter nos devuelve una estructura cuyos vértices son los mismos vértices del 4-politopo. Así, podremos usar las simetrías del 4-politopo original.

3 Quiralitos estrellados

Aquí comienza nuestro trabajo, basado en la siguiente sospecha: así como el cubo de Roli es la faceta de un 4-politopo quiral,

hay tres de los quiralitos que son las facetas de ciertos 4-politopos quirales.

Los sospechosos son $H_1\{5, 3, 5/2\}$, $H_0\{5, 3, 5/2\}$ y $H_1\{3, 3, 5/2\}$. Se trata de los quiralitos obtenidos a partir de los 4-politopos estrellados ”Gran 120-celda” y ”Gran 600-celda”, resp. Dos de ellos están escogidos para valores de $\alpha = 1$, de forma que en estos dos casos estaremos trabajando con los 4-politopos duales, el {5/2,5,3} ”Pequeño 120-celda estelado” y el {5/2,3,3}, ”Gran gran 120-celda estelada”.

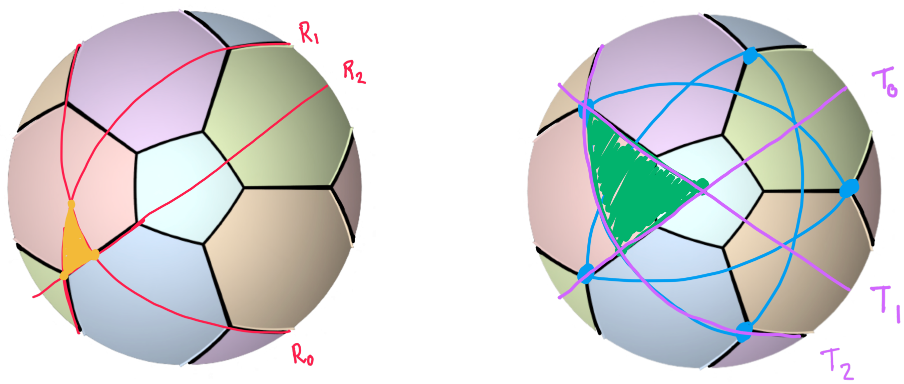
El primer paso es obtener los grupos de estos dos 4-politopos.

3.1 Del convexo al estrellado

Comenzamos con el grupo del {5,3,5/2}, la gran 120-celda. El grupo se denota [5,3,5/2]. La idea es tomar el grupo de simetrías de alguno de los convexos y expresar las relaciones del estrellado en términos de aquéllas.

En nuestro caso, partimos de que el grupo de la 120-celda, [5,3,3], está generado por R_0, R_1, R_2 y R_3 como Wythoff, queremos expresar el grupo en términos de cuatro generadores T_0, T_1, T_2 y T_4.

Comenzemos en dimensión 3, intentando expresar el [5/3,3] a partir del grupo del dodecaedro. Después de muchos intentos logramos esto:



Es decir:

$$T_0 = R_2, \qquad T_2 = R_0, \qquad T_1 = (R_0R_1)^2R_2(R_0R_1)^{-2}$$

ya que T_1 es rotar R_2 en sentido antihorario con centro en el centro de la cara base

Ahora para encontrar la reflexión T_3 recordemos que la composición T_2T_3 es la rotación en la arista de orden 3. Aunque esta intuición es correcta, **no es claro cómo encontrar T_3 en términos de las R_i con esta información.** ¿Y luego qué pasó?

En los notebooks, resulta que el grupo $[5/2, 3, 3] = [3, 3, 5/2] := \langle T_i \rangle$ está dado en términos del grupo $[5, 3, 5/2] := \langle P_i \rangle$ de acuerdo a:

$$T_0 = P_3, \qquad T_1 = (P_2P_1P_0)P_1(P_2P_1P_0)^{-1}, \qquad T_2 = P_0, \qquad T_3 = (P_1P_0)P_1(P_1P_0)^{-1}$$

¿Qué podemos hacer? Decir cómo están dadas las P_i en términos de las R_i y habríamos terminado. Bueno, de hecho,

$$P_0 = R_0, \qquad P_1 = (R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1}, \qquad P_2 = R_3R_2R_3, \qquad P_3 = R_2$$

Así que a la mera hora:

$$T_0 = R_2, \qquad T_2 = R_0,$$

$$T_1 = \big((R_3R_2R_3)((R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1})\big)(R_0)(R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1}\big(R_3R_2R_3)((R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1})\big)^{-1},$$

$$T_3 = \big((R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1})(R_0)\big)((R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1})\big((R_1R_2)R_3(R_1R_2)^{-1})(R_0)\big)^{-1}$$

Antes de pasar a estudiar las T_i, hicimos esta cuenta con las P_i. Tenemos las presentaciones de los grupos:

$$
\begin{aligned}
[3,3,5] = \langle R_i | R_i^2 = (R_0R_1)^3 = (R_1R_2)^3 = (R_2R_3)^5 = 1 \\
(R_0R_2)^2 = (R_0R_3)^2 = (R_1R_3)^2 = 1\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[5,3,5/2] = \langle P_i | P_i^2 = (P_0P_1)^5 = (P_1P_2)^3 = (P_2P_3)^5 = 1 \\
(P_0P_2)^2 = (P_0P_3)^2 = (P_1P_3)^2 = 1\rangle
\end{aligned}
$$

Así que hay que checar que las P_i satisfagan eso. **Se comprobaron todas excepto que $(P_1P_2)^3 = 1$.**

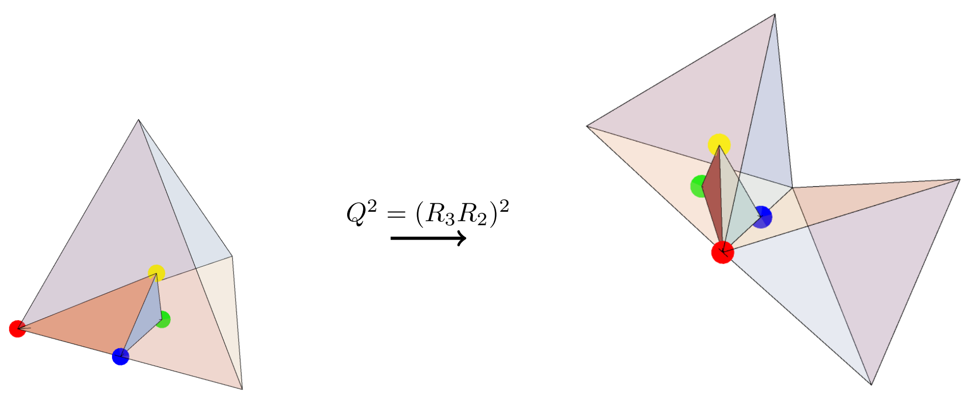
La búsqueda por la bandera Se logró identificar cómo está situada la bandera del {5,3,5/2} con respecto a la bandera del {3,3,5}.

Afirmación (La idea de Roli)**.** Pensemos que el icosaedrito de los no-vértices del {5/2,3} es la figura de vértice del {3,3,5}. Al hacer actuar las isometrías R_i sobre el {5/2,3} obtenemos el {5/2,3,5}

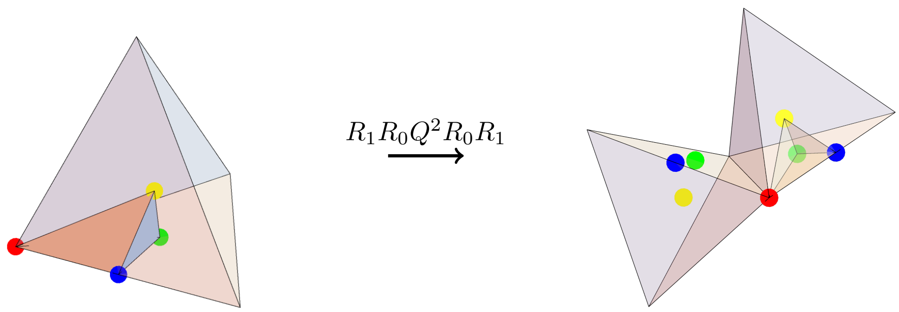
Demostración. Definamos

$$P_0 = R_0, \qquad P_2 = R_3, \qquad P_3 = R_2$$

Para P_1 hay que hacer un poquito más de chamba. Apliquemos primero la rotación en la arista base "hacia nosotros", R_3R_2, dos veces:



Ahora rotemos respecto a la recta amarillo-verde en dirección horaria (vista desde arriba), R_0R_1:



Hemos destacado a dónde van a dar los puntos azul, amarillo y verde, que corresponden al plano de reflexión de R_0. Definamos

$$\begin{aligned}
P_1 &= (R_1R_0Q^2R_0R_1)^{-1}R_0(R_1R_0Q^2R_0R_1)\\
&= (R_1R_0(R_3R_2)^2R_0R_1)^{-1}R_0(R_1R_0(R_3R_2)^2R_0R_1)\\
&= (R_1R_0R_3R_2R_3R_2R_0R_1)^{-1}R_0(R_1R_0R_3R_2R_3R_2R_0R_1)\\
&= R_1R_0R_2R_3R_2R_3R_0R_1R_0R_1R_0R_3R_2R_3R_2R_0R_1\\
&= R_1R_0R_2R_3R_2R_3R_1R_0R_1R_1R_0R_3R_2R_3R_2R_0R_1\\
&= R_1R_0R_2R_3R_2R_3R_1R_3R_2R_3R_2R_0R_1\\
&= R_1R_0R_2R_3R_2R_1R_3R_3R_2R_3R_2R_0R_1\\
&= R_1R_0R_2R_3R_2R_1R_2R_3R_2R_0R_1
\end{aligned}$$

Ahora veamos que se satisfacen las relaciones. Sustituyendo,

$$(P_0P_2)^2 = (R_0R_3)^2 = 1 \qquad (P_0P_3)^2 = (R_0R_2)^2 = 1 \qquad (P_2P_3)^5 = (R_3R_2)^5 = 1$$

□

Ahora

- Sustituir en las fórmulas de las S_i pero usando estas P_i.
- Ya sabemos que cuando haces esto queda un poliedro.
- Hay que buscar una S_3. ¿Qué necesitas que cumpla? Bueno, S_1S_2 es el medio giro en la arista o en la arista adyacente(depende del orden)
- Necesitas:
  - $(S_1S_2S_3)^2 = 1$ [Pensamos que esta es giro de brocheta por un palillo que va del vértice al centro de la cara]
  - $(S_2S_3)^2 = 1$.
  - Y después $vS_3 = v$
  - $eS_3 = v$

4 En busca de otros poliedros quirales

Esta sección es una transcripción del trabajo de Bris.

4.1 Definiciones y resultados

Damos algunas definiciones, explicamos el método básico para construir poliedros usando la construcción de Wythoff y mostramos un par de teoremas.

Definición. Un **polígono (geométrico)** en $\mathbb{R}^d$ es:

- Un conjunto discreto de puntos llamados **vértices**
- Un conjunto de segmentos que los unen llamados **aristas**

tales que la gráfica resultante es 2-regular.

Definición. Un **poliedro (geométrico)** en R^d es un conjunto de polígonos llamados **caras** tal que:

- Los vértices son un conjunto discreto
- Cada arista pertenece exactamente a dos caras.
- La gráfica determinada por los vértices y las aristas es conexa.
- La figura de vértice en cada vértice es un polígono.

Definición (Banderas)**.**
- Una **bandera** de un poliedro es un vértice, una arista y una cara mutualmente incidentes.
- Si Φ es una bandera, $\mathbf{\Phi^i}$ es la bandera que difiere de Φ sólo por en la cara $i \in \{0, 1, 2\}$ y se llama la i**-bandera adyacente**.

Definición. Un poliedro $\mathcal{P}$ es **(geométricamente) quiral** si $G(\mathcal{P}$ induce dos órbitas en banderas y las banderas adyacentes están en órbitas distintas.

Observación. Un poliedro geométricamente quiral puede ser combinatoriamente quiral o regular.

Construcción de Wythoff para poliedros regulares. Sean R_0, R_1 y R_2 isometrías en $\mathbb{R}^n$ que queremos usar para construir un poliedro regular $\mathcal{P}$ y sea $G = \langle R_0, R_1, R_2\rangle$. Ahora

- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de $\mathcal{P}$ tal que $v \in \operatorname{Fix} R_1 \cap \operatorname{Fix} R_2$ y $v \notin \operatorname{Fix} R_0$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con vR_0.
- La **cara base** es la órbita de v y e bajo $\langle R_1, R_1\rangle$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
V &:= \{vR : R \in G\} \text{ son los vértices de } \mathcal{P}.\\
E &:= \{eR : R \in G\} \text{ son las aristas de } \mathcal{P}.\\
F &:= \{fR : R \in G\} \text{ son las caras de } \mathcal{P}.
\end{aligned}
$$

Esta estructura se nota por $\mathcal{P}$ o $\mathcal{P}(R_0, R_1, R_2; v)$

Construcción de Wythoff para poliedros quirales. Sean S_1 y S_2 isometrías en $\mathbb{R}^n$ que queremos usar para construir un poliedro quiral $\mathcal{P}$ y sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$. Ahora

- Necesitamos suponer que $(S_1 S_2)^2 = 1$.
- Escogemos un vértice v que será el **vértice base** de $\mathcal{P}$ tal que $v \in \operatorname{Fix} S_2$ y $v \notin \operatorname{Fix} S_1$.
- La **arista base** es el segmento de línea que une v con $vS_1^{-1} = vS_2^{-1}S_1^{-1} = vS_1S_2$. Necesitamos suponer que $eS_1 \neq e$ y $eS_2 \neq e$.
- La **cara base** es $\{vS, eS : S \in \langle S_1 \rangle\}$. Necesitamos suponer que $fS_2 \neq f$.

Luego,

$$V := \{vR : R \in G\} \text{ son los vértices de } \mathcal{P}.$$
$$E := \{eR : R \in G\} \text{ son las aristas de } \mathcal{P}.$$
$$F := \{fR : R \in G\} \text{ son las caras de } \mathcal{P}.$$

Esta estructura se nota por $\mathcal{P}$ o $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

¿Cómo podemos estar seguros de que esta construcción nos da un poliedro?

Teorema. Sea $G = \langle S_1, S_2 \rangle$ un grupo discreto, donde S_1 y S_2 son isometrías de $\mathbb{R}^n$ tales que $(S_1S_2)^2 = 1$ y sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S_1, S_2; v)$. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{1\}$.
- S_1 y S_2 son de orden mayor estricto que 2.
- $\operatorname{Stab}_G v = \langle S_2 \rangle$, $\operatorname{Stab}_G e = \langle S_1 S_2 \rangle$ y $\operatorname{Stab}_G f = \langle S_1 \rangle$.

Entones $\mathcal{P}$ es un poliedro geométrico regular o quiral cuyo grupo de simetrías "es G como un subgrupo de índice 2 en $G(\mathcal{P})$".

Teorema (Bracho, Hubard, Pellicer). $\mathcal{P}$ es un poliedro quiral en $\mathbb{S}^3$ si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- $\mathcal{P}$ tiene caras holanes y figuras de vértices holanes.
- $\mathcal{P}$ tiene caras helicoidales y figuras de vértice planas, y el plano que contiene a la figura de vértice de v no contiene a v.

Observación. En el segundo caso, si el vértice está en la figura de vértice, el poliedro es regular.

4.2 Looking for chiral polyhedra

El trabajo de Bris está planteado de la siguiente manera:

Sean $\mathcal{T} = \{p, q, r\}$ un 4-politopo regular esférico y R_0, R_1, R_2 y R_3 las isometrías que generan a $\mathcal{T}$ con respecto a Φ. Denotaremos $[p, q, r] := \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Escogemos un vértice v y una arista e de $\mathcal{T}$ para construir un poliedro usando el método de Wythoff, es decir, queremos que v y e estén en $\mathcal{P}(S_1, S_2; v)$.

Definimos $S_1 = R_0R_1R_2R_3$ (recordemos que $\mathrm{Stab}\, f = \langle S_1 \rangle$ en el teorema). La arista e es el segmento de línea que une v con vS_1^{-1}. Luego, la cara $f = \{v, e\}\langle S_1 \rangle$ es un **polígono de petrie**.

El objetivo es encontrar una S_2 con figuras de vértice planas, y tales que contienen al vértice del cual son la figura de vértice. Como queremos usar el teorema, tendremos que $v \in \mathrm{Fix}\, S_2$, así que debemos buscar S_2 en $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

<table>
<tr><th colspan="5">Poliedros quirales con caras Petrie</th></tr>
<tr><th>4-politopo $\mathcal{T}$</th><th>Poliedro $\mathcal{P}$</th><th>S_1</th><th>S_2</th><th>$|\langle S_1, S_2 \rangle|$</th></tr>
<tr><td>$\{3,3,3\}$</td><td>—</td><td rowspan="6">$R_0R_1R_2R_3$</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$\{3,3,4\}$</td><td>$\{8,4\}$</td><td>$R_3R_2R_1R_2$</td><td>32</td></tr>
<tr><td>$\{4,3,3\}$</td><td>$\{8,3\}$</td><td>$R_3R_2R_1R_3$
$R_3R_2R_1R_2$</td><td>48</td></tr>
<tr><td>$\{3,4,3\}$</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$\{3,3,5\}$</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$\{5,3,3\}$</td><td>$\{30,3\}$</td><td>$R_3R_2R_1R_3$
$R_3R_2R_1R_2$</td><td>1440</td></tr>
</table>

Después de esto hubo una búsqueda por poliedros quirales con caras helicoidales:

<table>
<tr><th colspan="5">Poliedros quirales con caras helicoidales</th></tr>
<tr><th>4-politopo $\mathcal{T}$</th><th>Poliedro $\mathcal{P}$</th><th>S_1</th><th>S_2</th><th>$|\langle S_1, S_2 \rangle|$</th></tr>
<tr><td>$\{3,3,3\}$</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$\{3,3,4\}$</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>$\{3,3,5\}$</td><td>$\{12,3\}$</td><td>$(R_1R_2R_3)^3R_0$</td><td>$R_2R_3(R_2R_3R_1)^2R_2R_1$
$R_3R_2R_3R_1R_2R_3R_2R_1$</td><td>144</td></tr>
</table>