

# Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

[github.com/danimalabares/top-alg](https://github.com/danimalabares/top-alg)

July 17, 2023

# Índice

<b>Índice</b>	<b>2</b>
<b>I Grupo fundamental</b>	<b>5</b>
<b>1 El grupo fundamental</b>	<b>6</b>
1.1 Caminos y homotopías	6
1.2 Definición del grupo fundamental	6
1.3 Cambio de punto base	7
1.4 El grupo fundamental del círculo	7
1.5 Consecuencias del grupo fundamental del círculo	8
1.5.1 El teorema fundamental del álgebra	8
1.5.2 Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2	8
1.5.3 El teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2	8
1.6 El grupo fundamental de un producto	8
1.7 Homomorfismos inducidos (functorialidad)	8
1.8 El grupo fundamental de la $n$ -esfera	8
1.9 $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$	9
1.10 Homotopía	9
<b>2 El teorema de Van Kampen</b>	<b>11</b>
2.1 Grupos libres	11
2.2 Productos libres	11
2.3 Subgrupos normalmente generados	12
2.4 El teorema de Van Kampen	12
2.5 El grupo fundamental de una cuña de espacios	13
2.6 Todo grupo es el grupo fundamental de algún espacio	13
2.6.1 Presentaciones de grupos	13
2.6.2 Todo grupo es isomorfo al grupo fundamental de algún espacio	14
2.7 El grupo fundamental no detecta células de dimensión mayor que 2	15

## II Espacios cubrientes 16

### 3 Espacios cubrientes 17

3.1	Definición de espacio cubriente . . . . .	17
3.2	Levantamiento de homotopía para cubrientes . . . . .	18
3.3	El homomorfismo inducido de la proyección cubriente . . . . .	18
3.4	El número de hojas de un cubriente y el grupo fundamental . . . . .	19
3.5	El criterio de levantamiento de funciones . . . . .	19
3.6	Unicidad del levantamiento de funciones . . . . .	20
3.7	El cubriente universal . . . . .	20
3.8	El teorema de clasificación de cubrientes . . . . .	21
3.9	Transformaciones de cubierta . . . . .	22
3.10	Acciones de grupos y cubrientes . . . . .	23

### 4 Ejercicios 25

## III Homología 27

### 5 Álgebra Homológica 28

5.1	Conceptos básicos . . . . .	28
5.2	Sucesiones exactas . . . . .	29
5.3	Homotopía . . . . .	30
5.4	El lema de la serpiente . . . . .	31
5.5	Teorema fundamental del álgebra homológica . . . . .	32
5.6	Naturalidad del homomorfismo de conexión . . . . .	33
5.7	Lema de los cinco . . . . .	33

### 6 Homología singular 34

6.1	Simplejos . . . . .	34
6.2	El complejo de cadenas singulares . . . . .	35
6.3	Primeras propiedades de la homología . . . . .	36
6.3.1	La homología y las componentes arco-conexas . . . . .	36
6.3.2	El 0-ésimo grupo de homología . . . . .	36
6.3.3	La homología de un punto . . . . .	37
6.4	Homología reducida . . . . .	37
6.5	Funtorialidad . . . . .	38
6.6	Invarianza homotópica . . . . .	38
6.7	Homología relativa . . . . .	39
6.7.1	Construcción . . . . .	39
6.7.2	Funciones inducidas . . . . .	40
6.7.3	La sucesión exacta de la tercia . . . . .	40
6.8	Escisión . . . . .	41
6.9	La homología de un cociente . . . . .	41
6.10	Homología de la esfera y aplicaciones . . . . .	42
6.11	La sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	42
6.12	Representantes de la homología de la esfera . . . . .	43

6.13	Grado de una función entre esferas	44
6.13.1	Grado local	45
6.13.2	Teorema de la bola peluda	46
6.13.3	Acciones libres en la esfera	46
<b>7</b>	<b>Complejos CW</b>	<b>47</b>
7.1	Construcción y propiedades básicas	47
7.1.1	Complejos CW para Lee (extra)	49
7.2	La homología singular de un complejo CW	50
7.3	Homología celular	51
7.4	Una fórmula para el homomorfismo frontera	52
7.5	Ejemplos	52
7.6	Característica de Euler	55
<b>8</b>	<b>Homología y homotopía</b>	<b>57</b>
8.1	El homomorfismo de Hurewicz	57
8.2	Grupos de homotopía superiores	58
<b>9</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>60</b>

## **Parte I**

# **Grupo fundamental**

# 1. El grupo fundamental

## 1.1 Caminos y homotopías

Denotaremos por  $I$  al intervalo unitario  $[0, 1]$  y por  $X$  a un espacio topológico cualquiera.

**Definición.** Un **camino** es una función  $f : I \rightarrow X$ .

**Definición.** Una **homotopía de caminos** en  $X$  es una familia  $f_t : I \rightarrow X$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , tal que la función asociada

$$\begin{aligned} F : I \times I &\rightarrow X \\ (s, t) &\mapsto f_t(s) \end{aligned}$$

es continua.

Decimos que la homotopía  $F : I \times I \rightarrow X$  es **relativa a los extremos** si

$$F(0, t) = x_0 \quad \forall t \in I \quad F(1, t) = x_1 \quad \forall t \in I$$

para  $x_0, x_1 \in X$ .

Por último, dos caminos  $f_0$  y  $f_1$  en  $X$  tales que  $f_0(0) = f_1(0)$  y  $f_0(1) = f_1(1)$  son **homotópicos rel 0, 1** si hay una homotopía entre ellos, y se denota  $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } 0, 1$ .

**Teorema.** La relación  $f_1 \sim f_2 \iff f_1 \simeq f_2 \text{ rel } 0, 1$  es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos en  $X$ , que denotaremos por  $\Omega(X) := \{f : I \rightarrow X\}$ .

## 1.2 Definición del grupo fundamental

En nuestro camino a definir el grupo fundamental, primero definiremos una operación entre caminos:

Denotaremos por  $[f]$  a la clase de homotopía rel 0, 1 de  $f \in \Omega(X)$ .

**Definición.** Dados  $f, g : I \rightarrow X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , podemos definir la **concatenación de caminos**

$$f \cdot g : I \rightarrow X$$

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

**Observación.** Si  $f \simeq f_1 \text{ rel } 0, 1$  y  $g \simeq g_1 \text{ rel } 0, 1$ , entonces  $f \cdot g \simeq f_1 \cdot g_1 \text{ rel } 0, 1$ .

Dicho de otra forma, si  $[f] = [f_1]$  y  $[g] = [g_1]$  entonces  $[f \cdot g] = [f_1 \cdot g_1]$ .

**Definición.** Decimos que  $f : I \rightarrow X$  es un **lazo basado en**  $x_0 \in X$  si  $f(0) = f(1) = x_0$ . Denotaremos por  $\Omega(X, x_0) = \{f : I \rightarrow X : f(0) = f(1) = x_0\}$  al conjunto de tales lazos.

La relación de equivalencia  $\text{rel } 0, 1$  se restringe correctamente a  $\Omega(X, x_0) \subseteq \Omega(X)$ , así que podemos por fin definir

**Definición.** El **grupo fundamental** de  $X$  basado en  $x_0$  es el conjunto

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \text{rel } 0, 1$$

**Teorema.** El grupo fundamental es un grupo con la operación concatenación.

*Demostración.* Hay que ver que:

- El producto está bien definido.
- Hay un neutro, el camino constante  $c_{x_0} : I \rightarrow X$  dado por  $c_{x_0}(t) = x_0$  para toda  $t \in I$ .
- Hay inversos.
- Hay asociatividad.

□

## 1.3 Cambio de punto base

¿Qué pasa cuando cambiamos del punto base? ¿Cambia el grupo fundamental? Es fácil notar que si los puntos están diferentes componentes arco-conexas, es muy fácil que cambien los grupos fundamentales. Pero, ¿qué pasa si están en la misma componente conexa?

**Teorema.** Si  $x_0, x_1 \in X$  se pueden conectar por un camino, entonces  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ .

## 1.4 El grupo fundamental del círculo

Pensemos que  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Teorema.**  $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$  para cualquier  $x_0 \in S^1$ .

## 1.5 Consecuencias del grupo fundamental del círculo

### 1.5.1 El teorema fundamental del álgebra

### 1.5.2 Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2

**Teorema.** Toda función  $f : D^2 \rightarrow D^2$  tiene un punto fijo.

### 1.5.3 El teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2

**Teorema.** Para cualquier función continua  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existe  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

## 1.6 El grupo fundamental de un producto

**Teorema.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ . Entonces

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

## 1.7 Homomorfismos inducidos (functorialidad)

Primero establezcamos algo de notación. Si  $f : X \rightarrow Y, x_0 \in X, y_0 \in Y$  y  $f(x_0) = y_0$ , escribimos  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

**Teorema** (El grupo fundamental es un functor  $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$ ). La función  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induce un homomorfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

tal que

1. Si  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ , entonces  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
2.  $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$

## 1.8 El grupo fundamental de la $n$ -esfera

**Proposición.**  $\pi_1(S^n) = 0$  si  $n \geq 2$ .

Para lo cual se usa el siguiente lema:

**Lema.** Sea  $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  tal que

- $A_\alpha$  son abiertos (es una cubierta abierta)
- Existe  $x_0 \in \bigcap A_\alpha$
- $A_\alpha$  es arco conexo
- $A_\alpha \cap A_\beta$  también es arcoconexo  $\forall \alpha, \beta$ .



Entonces todo lazo  $\gamma$  en  $X$  es homotópico rel 0,1 a un producto (concatenación) de lazos de la forma  $\gamma \cong \gamma_1 \dots \gamma_n$  tal que toda  $\gamma_i$  está completamente contenido en algún  $A_\alpha$ .

## 1.9 $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$

**Teorema.**  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  si  $n \neq 2$

**Observación.** Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbb{R}^n - \{x\}$  es homeomorfo a  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

**Teorema.**  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$ .

## 1.10 Homotopía

Dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si existe una función que llamaremos **homotopía** de la forma  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por  $f \simeq g$ .

Si tenemos  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$  y  $f$  es tal que  $f(A) \subseteq B$ , escribiremos

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

Una homotopía entre funciones de este estilo es una función  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que todas las funciones que obtenemos al cambiar el parámetro en el tiempo sean funciones que siguen enviando  $A$  en  $B$ . Es decir, que tenemos las funciones

$$H(., t) : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad \forall t \in I$$

tales que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

Y en particular, si  $A = \{x_0\}$  y  $B = \{y_0\}$ , igualito que antes, escribiremos

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

En este caso, diremos que **homotopía que preserva el punto base** es una función  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} H(x_0, t) &= y_0 & \forall t \in I \\ H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y diremos, así nomás, que  $f$  y  $g$  son homotópicas, especificando si es necesario que la homotopía preserva el punto base.

**Proposición.** Si  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  son homotópicas (preservando el punto base) entonces inducen el mismo homomorfismo en grupos fundamentales, es decir,  $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

**Definición.** Dos espacios  $X$  y  $Y$  son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas**  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq Id_X$  y  $f \circ g \simeq Id_Y$ . Y se denota por  $X \simeq Y$ .

**Corolario.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Supongamos que  $g : Y \rightarrow X$  es como en la definición anterior. Basta mostrar que  $f_*$  y  $g_*$  son inversas una de la otra. Y sí, porque  $Id_{\pi_1(X, x_0)} = (gf)_* = g_*f_*$  y análogamente  $Id_{\pi_1(Y, y_0)} = f_*g_*$ .  $\square$

**Ejercicio** (Hatcher 0.11). *Se pueden usar diferentes funciones para ir y regresar.  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica si existen  $g, h : Y \rightarrow X$  tales que  $fg \simeq Id_Y$  y  $gf \simeq Id_X$ . Y más generalmente,  $f$  es una equivalencia homotópica si  $fg$  y  $hf$  son equivalencias homotópicas.*

## 2. El teorema de Van Kampen

### 2.1 Grupos libres

### 2.2 Productos libres

En teoría de grupos, normalmente definimos el producto directo pensando en algo así:

$$\begin{array}{ccc} & G \times H & \\ g \mapsto (g,1) \nearrow & & \nwarrow h \mapsto (1,h) \\ G_\alpha & & H \end{array}$$

donde el producto es conmutativo, es decir

$$(g, 1)(1, h) = (1, h)(g, 1)$$

Ahora vamos a definir un producto que se llamará el **producto libre** donde los elementos no van a conmutar:

**Definición.** Sea  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una colección de grupos. Como conjunto, el producto libre  $*_{\alpha \in I} G_\alpha$  consiste de las palabras  $g_1 g_2 \dots g_m$  para  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  donde cada  $g_i$  está en algún  $G_\alpha$ . Además,  $g_i \neq 1$ , y  $g_i, g_{i+1}$  siempre pertenecen a diferentes  $G_\alpha$ , es decir  $g_i \in G_\alpha$  y  $g_{i+1} \in G_\beta$  con  $\alpha \neq \beta$ . En este caso, decimos que  $g_1 \dots g_m$  es una **palabra reducida**.

La operación binaria en  $*_{\alpha \in I}$  está dada por la concatenación.

**Observación.** Cada uno de los  $G_\alpha$  está contenido en  $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ , pues están en la forma de palabras de una sola letra. En símbolos:

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow *_{\alpha \in I} G_\alpha \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

**Teorema** (Propiedad universal del producto libre). Dados los homomorfismos  $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ , entonces existe un único homomorfismo  $\varphi : *_{\alpha \in I} G_\alpha \rightarrow H$  que extiende a los  $\varphi_\alpha$ , es

decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & H \\ & \searrow & \nearrow \varphi \\ & *_{\alpha \in I} G_\alpha & \end{array}$$

## 2.3 Subgrupos normalmente generados

## 2.4 El teorema de Van Kampen

Imagínense que queremos calcular el grupo fundamental de un espacio pero no sabemos cómo. (Esto pasa muy seguido). Pero resulta que podemos ver este espacio como la unión de muchos subespacios de los que conocemos sus grupos fundamentales. Éste es el escenario del teorema de Van Kampen.

Tomemos un espacio topológico  $X$ , un punto base  $x_0 \in X$  y supongamos que  $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  para ciertos espacios  $A_\alpha$  tales que  $x_0 \in A_\alpha$ , para toda  $\alpha \in I$ , y además supongamos que los  $A_\alpha$  son arco-conexos.

Así que como los  $A_\alpha$  son subespacios, podemos pensar en la inclusión  $A_\alpha \hookrightarrow X$  y en los homomorfismos inducidos en los grupos fundamentales, que llamaremos  $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Entonces, por la propiedad fundamental del producto libre, tenemos un homomorfismo que sale del producto libre de esos grupos al grupo fundamental de  $X$ , es decir

$$*_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

El teorema nos dirá que esta función es suprayectiva. Intuitivamente, nos dice que cualquier lazo en  $X$  es homotópico a otro lazo que es la concatenación de ciertos lazos, cada uno completamente contenido en alguno de los  $A_\alpha$ .

Ahora pensemos en un lazo que está en la intersección de dos de los  $A_\alpha$ . Podemos pensar el lazo está en, digamos,  $A_\alpha$ , y su inverso está en  $A_\beta$ . Entonces, como elemento en el producto libre  $*_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0)$ , este lazo no es la identidad. Pero al empujarlo al grupo  $\pi_1(X, x_0)$ , sí es la identidad. Bueno, todo esto para decir que el mapeo que hemos construido no es inyectivo.

Ahora pensemos que para  $\alpha, \beta \in I$ , tenemos la inclusión  $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$ , que induce un mapeo

$$i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$$

. (El orden de los subíndices fue importante, ya que el codominio está dado por el primer símbolo en el subíndice).

Juntemos lo que hemos dicho en los dos párrafos anteriores. El lazo no trivial  $1 \neq i_{\alpha\beta}[f]i_{\beta\alpha}[\bar{f}] \in *_{\alpha \in I} A_\alpha$  puede ser empujado a  $\pi_1(X, x_0)$ . El teorema de Van Kampen nos dirá que el kernel del homomorfismo (que ya dijimos que seguramente no es inyectivo) está generado justamente por elementos de ese estilo.

Ahora sí:

**Teorema** (de Van Kampen). Si  $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  con  $A_\alpha$  arco-conexo  $\forall \alpha \in I$ ,  $x_0 \in A_\alpha$ , y además  $A_\alpha \cap A_\beta$  es arco-conexo  $\forall \alpha, \beta \in I$ . Entonces el homomorfismo

$$\Phi : *_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es suprayectivo.

Si además  $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$  es arcoconexo  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$ , entonces

$$\ker \Phi = \langle \langle i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} : \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rangle \rangle$$

En particular,

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) / \ker \Phi$$

## 2.5 El grupo fundamental de una cuña de espacios

No encontré este video en la página del curso.

Consideremos una colección de espacios topológicos  $X_\alpha$  con  $\alpha \in I$  y escojamos un punto en cada espacio, digamos  $x_\alpha \in X_\alpha$ . Entonces, definimos la **cuña** de estos espacios como

$$\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha := \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha / \{x_\alpha \sim x_\beta, \forall \alpha, \beta \in I\}$$

Supongamos también que cada  $x_\alpha$  es una retracción por deformación de alguna vecindad  $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ .

Entonces tenemos:

**Teorema.** Dadas estas hipótesis, el homomorfismo que aparece en el teorema de Van Kampen

$$\Phi : *_{\alpha \in I} \pi_1(X_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1\left(\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$$

es un isomorfismo.

## 2.6 Todo grupo es el grupo fundamental de algún espacio

### 2.6.1 Presentaciones de grupos

Consideremos un grupo  $G$  y un conjunto generador  $S \subseteq G$ , es decir, tal que  $\langle S \rangle = G$ . Eso es equivalente a adedir que todo elemento de  $G$  se puede ver como un producto de elementos en  $S$ .

Consideremos también el grupo libre generado por  $S$ , digamos  $F_S$ , y usemos la propiedad universal de los grupos libres para ver que existe un único homomorfismo suprayectivo

$$\begin{array}{ccc}
 S & \hookrightarrow & G \\
 \downarrow & \nearrow \varphi & \\
 F_S & & 
 \end{array}$$

Hemos demostrado que

**Teorema.** Dado un grupo  $G$  existe un grupo libre  $F_S$  que se suprayecta a  $G$ . En particular, por el primer teorema de isomorfismo, todo grupo es cociente de un grupo libre.

Si además tenemos un conjunto  $R \subseteq \ker \varphi$  que genera normalmente al kernel, es decir,  $\langle\langle R \rangle\rangle = \ker \varphi$ , tenemos que  $G \cong F_S / \ker \varphi \cong F_S / \langle\langle R \rangle\rangle$  y decimos que

$$G = \langle S, R \rangle$$

es una **presentación** de  $G$ .

**Ejemplos.** 1.  $S$

**Proposición.** Si  $G = \langle S, R \rangle$  es una presentación de grupos,  $K$  es otro grupo, y  $f : S \rightarrow K$  es una función tal que para cualesquiera  $s_1, \dots, s_m \in R$ ,  $s_i \in S$ ,

$$f(s_1) \dots f(s_m) = 1,$$

entonces existe un único homomorfismo  $\bar{f} : G \rightarrow K$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \hookrightarrow & G \\
 f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 K & & 
 \end{array}$$

Es decir, para definir un homomorfismo que salga de un grupo dada una presentación, sólo hay que asegurarnos de que las relaciones “se respeten”.

### 2.6.2 Todo grupo es isomorfo al grupo fundamental de algún espacio

**Lema.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $x_0 \in X$  un punto base y  $f : S^1 \rightarrow X$  tal que  $f(1) = x_0$ . Para el espacio de adjunción  $Y = X \cup_f D^2$ ,

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle\langle [f] \rangle\rangle$$

donde estamos viendo a  $f$  como un lazo en el grupo fundamental.

Esto se llama “matar” un lazo.

**Lema.** Sea  $X$  un espacio topológico,  $x_0 \in X$  un punto base y  $f_\alpha : S^1 \rightarrow X$ , con  $\alpha \in I$ , tales que  $f(1) = x_0$ . Para el espacio de adjunción  $Y = X \cup_{\{f_\alpha\}} \{D^2\}$ ,

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle\langle [f_\alpha] : \alpha \in I \rangle\rangle$$

donde estamos viendo a  $f$  como un lazo en el grupo fundamental.

Y ahora sí,

**Teorema.** Para cualquier grupo  $G$  existe un espacio topológico  $X$  tal que  $\pi_1(X, x_0) \cong G$ .

## 2.7 El grupo fundamental no detecta células de dimensión mayor que 2

Para formalizar el nombre de esta sección, necesitaremos:

- Un espacio topológico conexo  $X$
- na célula  $e^n$  de dimensión  $n > 2$ , es decir, un espacio homeomorfo al  $n$ -disco cerrado.
- Una función de pegado  $f : S^{n-1} \rightarrow X$ .
- El espacio de adjunción  $Y \cup_f e^n$ .
- Un punto  $x_0 \in \text{img}(f)$ .

Entonces tenemos que:

**Teorema.** La inclusión  $i : X \hookrightarrow Y$  induce un isomorfismo  $i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

Es decir, cuando le pegamos a un espacio una célula de dimensión mayor que 2, el grupo fundamental quedó igual.

## **Parte II**

# **Espacios cubrientes**



## 3. Espacios cubrientes

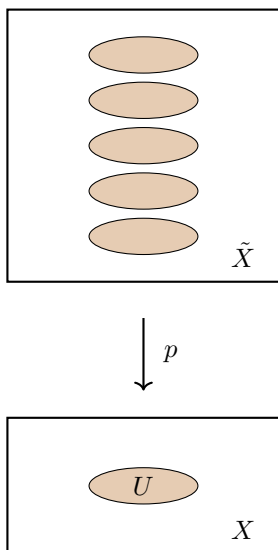
### 3.1 Definición de espacio cubriente

En la demostración del grupo fundamental del círculo ya habíamos usado la idea de espacio cubriente. Aquí está la definición general:

**Definición.** Un **espacio cubriente** de  $X$  es un espacio  $\tilde{X}$  junto con una función

$$p : \tilde{X} \rightarrow X$$

tal que cada punto  $x \in X$  tiene una vecindad abierta  $U \subseteq X$  tal que  $p^{-1}(U)$  es una unión disjunta de abiertos de  $\tilde{X}$  de manera que cada uno se proyecta homeomorfamente a  $U$  vía  $p$ .



Introducimos otros términos:

- A la función  $p$  le llamamos **proyección cubriente**.
- A  $U$  se le llama **vecindad regular**.
- A los abiertos de  $p^{-1}(U)$  que se proyectan homeomorfamente a  $U$  se les llama **hojas** de  $\tilde{X}$  sobre  $U$ .
- El conjunto  $p^{-1}(x)$  se llama la **fibra** de  $x$  bajo  $p$ .

**Observación.**

- Si  $U$  es conexo entonces las hojas de  $U$  son las componentes conexas de  $p^{-1}$ .
- El número de hojas sobre  $U$  es igual a la cardinalidad de  $p^{-1}(x)$ .
- Este número es *localmente constante*, es decir, es igual para cualquier punto:

**Ejemplos.**

1. La identidad  $Id : X \rightarrow X$ .
2. La proyección natural de la unión disjunta de copias de un espacio, es decir  $p : \bigsqcup_{\alpha \in I} X \rightarrow X$ .
3. Para cualesquiera dos cubrientes  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $q : \hat{X} \rightarrow X$ , la proyección desde la unión disjunta  $r : \tilde{X} \sqcup \hat{X} \rightarrow X$  definida de la manera natural, también es un cubriente. Esto para decir que nos interesan los cubrientes de espacios conexos cuyos cubrientes sean conexos.
4.  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  como en la prueba del grupo fundamental del círculo.
5. Para  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $p : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $p(z) = z^n$ .

**3.2 Levantamiento de homotopía para cubrientes**

**Definición.** Un **levantamiento** de una función  $f : Y \rightarrow X$  con respecto a un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es una función  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p\tilde{f} = f$ . Es decir, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

**Teorema** (Propiedad del levantamiento de homotopía para cubrientes). Dado un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y una homotopía  $h_t : Y \rightarrow X$  y un levantamiento  $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$  de  $f_0$ , entonces existe una única homotopía  $\tilde{f}_t : Y \rightarrow \tilde{X}$  que levanta a cada uno de los  $f_t$ .

Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Y \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & \tilde{X} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f}_t & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

**3.3 El homomorfismo inducido de la proyección cubriente**

Dada una proyección cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , ¿qué propiedades tendrá el mapeo inducido  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  donde  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Resultará que es inyectivo.

Para demostrar esto, se usará la **Propiedad del levantamiento de homotopía para cubrientes**. Entonces primero vamos a ver un par de casos sencillos de cómo se usa este teorema:

**Proposición** (Propiedad del levantamiento de caminos). Un camino tiene un único levantamiento una vez definido a dónde va a dar el punto inicial. Para verlo, escogemos el caso en que  $Y$  consta de un sólo punto, así que una homotopía de  $Y \times I$  es un camino en  $X$ .

**Observación.** El levantamiento de un camino constante es un camino constante.

**Observación.** Si  $Y = I$ , y  $H : I \times I$  es una homotopía rel  $0, 1$ , entonces el levantamiento  $\tilde{H}$  también es una homotopía rel  $0, 1$ .

Ahora sí,

**Proposición.** Dada una proyección cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , el mapeo inducido  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  es inyectivo. Más aún,  $p_* \left( \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right) \leq (X, x_0)$  consiste de los lazos basados en  $x_0$  que se levantan a lazos en  $\tilde{X}$  basados en  $\tilde{x}_0$ .

### 3.4 El número de hojas de un cubriente y el grupo fundamental

**Proposición.** Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un cubriente con  $\tilde{X}$  y  $X$  conexos por trayectorias. Entonces el número de hojas del cubriente es igual al índice de  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  en  $\pi_1(X, x_0)$ .

### 3.5 El criterio de levantamiento de funciones

Consideremos un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y una función cualquiera  $f : Y \rightarrow X$ . ¿Bajo qué condiciones será posible levantar esta función al cubriente? Queremos que este diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Estas funciones no siempre van a existir. Para saber cuándo sí, primero veamos:

**Definición.** Decimos que un espacio topológico  $Y$  es **localmente arco-conexo** si para todo punto  $y \in Y$  y cada vecindad  $U$  de  $y$ , existe  $V \subseteq U$  que es arcoconexa.

**Proposición.** Sean  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un cubriente y una función  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  con  $Y$  espacio arco-conexo y localmente arco-conexo. Entonces existe un levantamiento  $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  si y sólo si  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ .

### 3.6 Unicidad del levantamiento de funciones

¿Bajo qué condiciones un levantamiento es único? Cuando dos levantamientos coinciden en un punto, tienen que ser iguales. (Siempre que el dominio sea arco-conexo.)

**Proposición.** Sean  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un cubriente y  $f : Y \rightarrow X$  una función. Si dos levantamientos  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$  de  $f$  coinciden en un punto y  $Y$  es conexo, entonces  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f}_1 & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \nwarrow \tilde{f}_2 & \\ & & \end{array}$$

### 3.7 El cubriente universal

En esta sección intentaremos clasificar todos los cubrientes que puede tener un espacio. La primera pregunta que nos hacemos en qué casos un cubriente tiene un cubriente cuyo grupo fundamental sea trivial. Tal cubriente será llamado el **cubriente universal**, que será universal en cuanto a que va a cubrir a cualquier otro cubriente.

Supongamos que tenemos un espacio  $X$  que

- es arco-conexo.
- es localmente arco-conexo.

Ahora tomemos un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  como decíamos, simplemente conexo. Cuando tomamos un punto  $p \in X$  y una vecindad regular, cualquier lazo contenido en esa vecindad, podemos levantarlo a una de sus preimágenes. Pero como el cubriente  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, entonces el lazo levantado es contraíble, y esa homotopía se proyecta a una homotopía del lazo con el que empezamos al lazo constante.

**Definición.** Un espacio es **semilocalmente simplemente conexo** si para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $U$  tal que todo lazo contenido en  $U$  se retrae al lazo constante  $c_x$  en  $X$ . Equivalentemente, el homomorfismo inducido por la inclusión  $\pi_1(U, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  es constante.

O sea que ya demostramos que si  $X$  tiene cubriente universal entonces es semilocalmente simplemente conexo. Ahora queremos ver que el regreso también es cierto (cuando  $X$  también es arco-conexo y localmente arco-conexo).

**Proposición.** Un espacio  $Y$  es simplemente conexo si y sólo si para todo  $x, y \in Y$  existe una única clase de homotopía rel 0, 1 de caminos que unen  $x$  a  $y$ .

Esto implica que hay una biyección entre los puntos de  $Y$  y las clases de equivalencia de caminos que empiezan en  $x_0$ , es decir,  $Y \leftrightarrow \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\}$ .

Ahora consideremos un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  con  $\tilde{X}$  simplemente conexo y un punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Denotemos  $p(\tilde{x}_0) = x_0 \in X$ . Entonces, por lo dicho hace un momento los

puntos en el espacio cubriente  $\tilde{X}$  están en biyección con los caminos que empiezan en  $\tilde{x}$ , y proyectando mediante  $p$ , vamos a dar a los caminos que comienzan en  $x_0$ . Usando la propiedad del levantamiento de homotopía, se verifica que esa correspondencia es biyectiva:

$$\{[\gamma] : \gamma(0) = \tilde{x}_0\} \leftrightarrow \{[\beta] : \beta(0) = x_0\}$$

Ahora sí:

**Teorema.** Supongamos que  $X$  es un espacio topológico arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo, y tomemos un punto base  $x_0 \in X$ . El espacio

$$\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\}$$

acompañado de la función

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\rightarrow X \\ [\gamma] &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

son un cubriente universal de  $X$ . Es decir:

- $\tilde{X}$  tiene una topología.
- $p$  es continua.
- $p$  es cubriente.
- $\tilde{X}$  es simplemente conexo.

### 3.8 El teorema de clasificación de cubrientes

En esta sección veremos, grosso modo, que hay una correspondencia entre cubrientes universales (salvo isomorfismo) con los subgrupos del grupo fundamental.

**Proposición.** Sea  $X$  un espacio topológico arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonces para todo  $H \leq \pi_1(X, x_0)$  existe un cubriente  $p : X_H \rightarrow X$  tal que  $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ .

*Demostración.* Usando la construcción del cubriente universal, tomamos una relación de equivalencia determinada por  $H$  y proponemos el espacio cociente  $\tilde{X}/\sim$ .  $\square$

Ahora nos preguntamos si este cubriente es único de alguna manera. La respuesta es que sí, pero primero debemos definir la noción de isomorfismo de cubrientes.

**Definición.** Dos cubrientes  $\tilde{X}_1$  y  $\tilde{X}_2$  son **isomorfos** si existe un homeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\text{homeo}} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & X & \end{array}$$

**Proposición.** Si  $X$  es arco-conexo y localmente arco-conexo, entonces  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  y  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$  son isomorfos mediante  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , con ciertos puntos base tales que  $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$  y  $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0 \in X$  si y sólo si

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_2(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

Notemos que en la proposición anterior,  $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = H$  era un subgrupo arbitrario de  $\pi_1(X, x_0)$ . Hemos demostrado que dos cubrientes que provienen del mismo grupo son isomorfos. De hecho, ya demostramos:

**Teorema.** Sean  $X$  un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente arco-conexo, y  $x_0 \in X$ . Entonces la correspondencia

$$\begin{aligned} \{p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0) : p \text{ es un cubriente}\} / \text{isomorfismo} &\longleftrightarrow \{H \leq \pi_1(X, x_0)\} \\ \tilde{X} \xrightarrow{p} X &\mapsto p_* \left( \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right) \end{aligned}$$

es una biyectiva.

Notemos que si cambiamos la elección del punto base  $\tilde{x}_0$  en el cubriente, podemos ir a dar a un subgrupo muy diferente. Esto nos lleva a:

**Teorema.** Sean  $X$  un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente arco-conexo, y  $x_0 \in X$ . Entonces hay una biyección

$$\begin{aligned} \{p : \tilde{X} \rightarrow X : p \text{ es un cubriente}\} / \text{isomorfismo} &\longleftrightarrow \{H \leq \pi_1(X, x_0)\} / \text{conjugación} \\ \begin{array}{c} \tilde{X} \xrightarrow{p} X \\ \text{escojo } \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \end{array} &\mapsto p_* \left( \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right) \end{aligned}$$

### 3.9 Transformaciones de cubierta

**Definición.** Tomemos un espacio  $X$  y algún cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ . Una **transformación de cubierta** es un isomorfismo de  $\tilde{X}$  en sí mismo, es decir, homeomorfismos que hacen conmutar este diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ p \downarrow & \swarrow p & \\ X & & \end{array}$$

Es decir,  $pf = p$

El conjunto  $G(\tilde{X}) := \{f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} : f \text{ es transformación de cubierta}\}$  tiene estructura de grupo, y le llamaremos **el grupo de transformaciones de cubierta**.

**Ejemplo.** El cubriente  $f_n : S^1 \rightarrow S^1$  dado por  $z \mapsto z^n$  tiene grupo de transformaciones de cubierta  $G(f_n : S^1 \rightarrow S^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Además,  $f_{n*}\pi_1(S^1) = n\mathbb{Z}$ . O sea que  $G(f_n : S^1 \rightarrow S^1) \cong \pi_1(S^1)/f_{n*}\pi_1(S^1)$ . Y esto no es ninguna casualidad.

Además, para el cubriente universal de  $S^1$ , que es  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  también se cumple, ya que el grupo fundamental es trivial, es decir,  $G(\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1) \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$ .

**Proposición.** Si  $g, f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  son transformaciones de cubierta con  $\tilde{X}$  arco-conexo y tales que existe  $x \in \tilde{X}$  con  $g(x) = f(x)$ , entonces  $g = f$ .

*Demostración.* Basta pensar que la transformación de cubierta es un levantamiento de la proyección cubriente:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow f & \downarrow p \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Por el teorema del levantamiento de funciones,  $f$  es único una vez que escogemos un punto  $y \in f^{-1}(x)$  en la fibra de  $x$ .  $\square$

**Definición.** Decimos que un cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es **normal** si para cualquier  $x \in X$  y  $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$  existe una transformación de cubierta  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $f(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ . Es decir, que el grupo de transformaciones de cubierta actúa transitivamente en las fibras.

**Proposición.** Sea  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un cubriente con  $\tilde{X}$  y  $X$  arco-conexo y localmente arco-conexo. Sea  $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \leq \pi_1(X, x_0)$ . Entonces

- a) El cubriente es normal si y sólo si  $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$ .
- b)  $G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$  donde  $N(H) = \{g \in \pi_1(X, x_0) | g^{-1}Hg = H\}$

En particular, cuando  $\tilde{X}$  es normal,  $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$ . Y si además  $\tilde{X}$  es el cubriente universal, simplemente tenemos que  $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$ .

### 3.10 Acciones de grupos y cubrientes

**Definición.** Decimos que un grupo  $G$  actúa en  $X$  si hay un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Homeo}(X) \\ g &\mapsto \varphi(g) : X \rightarrow X \\ x &\mapsto \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

de forma que

- $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$
- $(g_1g_2)x = g_1(g_2(x))$
- $\varphi(1_G) = Id_X$

Y se denota  $G \curvearrowright X$ . La **órbita** de un punto  $x \in X$  es el conjunto  $\text{Orb}\{g(x) : g \in G\}$ .

Notemos que la relación  $x \sim y \iff y \in \text{Orb}(x)$  es de equivalencia, así que podemos pensar en el espacio cociente  $X/\sim := X/G$ . Nos hacemos la siguiente pregunta: dada una acción de grupos  $G \curvearrowright Y$ , ¿cuándo  $Y/G$  es un cubriente?

**Definición.** Decimos que  $G \curvearrowright Y$  es una **acción cubriente** si se cumple cualquiera de los dos siguientes condiciones equivalentes:

- Cualquier punto  $y \in Y$  tiene una vecindad  $U$  tal que  $(g_1U \cap g_2U) \neq \emptyset \implies g_1 = g_2$
- Cualquier punto  $y \in Y$  tiene una vecindad  $U$  tal que  $gU \cap U \neq \emptyset \implies g = 1_G$ .

En particular, estas condiciones implican que la acción es **libre**, es decir, que si  $g(y) = y$  para cualesquiera  $g \in G$  y  $y \in Y$ , entonces,  $g = 1_G$ .

**Proposición.** Dada una acción cubriente  $G \curvearrowright Y$ ,

- a) La proyección cociente  $p : Y \rightarrow Y/G$  dada por  $p(y) = Gy$  es un cubriente normal.
- b) Si  $Y$  es arco-conexo,  $G$  es el grupo de transformaciones de cubierta de  $p$ .
- c) Si  $Y$  es arco-conexo y localmente arco-conexo,  $G \cong \pi_1(Y/G, y_0)/p_*\pi_1(Y, \tilde{y}_0)$

**Corolario.** Si además  $Y$  es simplemente conexo, por b) y por c),  $G = G(\tilde{Y}) \cong \pi_1(Y/G, y_0)$ .



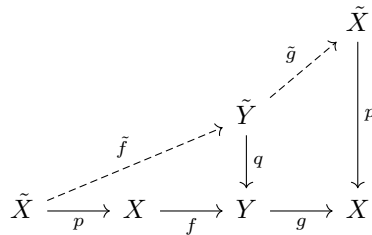
## 4. Ejercicios

**Ejercicio (2, General 2022-2).** Sean  $S$  la 2-esfera y  $T$  el 2-toro. Calcule el grupo fundamental  $G$  de  $X := S \vee T$ , construya el cubriente universal  $\tilde{X} \rightarrow X$  y describa la acción por transformaciones de cubierta de  $G$  en  $\tilde{X}$ .

*Solución.* Por el teorema de Van Kampen,  $\pi_1(S \vee T, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  para cualquier elección de  $x_0$ .  $\square$

**Ejercicio (Hatcher, 1.3.8).** Sean  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  espacios cubrientes simplemente conexos de espacios arco-conexos y simplemente conexos  $X$  y  $Y$ . Muestre que si  $X \simeq Y$ , entonces  $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$ . (Quizás convenga usar el ejercicio 0.11, Hatcher)

*Solución.* Todo está en el siguiente diagrama conmutativo:



Donde:

1.  $f$  y  $g$  son equivalencias homotópicas entre  $X$  y  $Y$ .
2.  $pf$  se levanta a una única función  $\tilde{f}$  por las hipótesis de conexidad. Lo mismo para encontrar  $\tilde{g}$ .
3. Como todo conmuta,  $\tilde{g}\tilde{f}$  es un levantamiento de  $gfp$ .
4. Como  $gf \simeq Id_X$ , entonces  $gfp \simeq p$ . Esta homotopía se levanta de manera única a una homotopía  $H : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$  ya que, como acabamos de ver,  $H(\_, 0) = \tilde{g}\tilde{f}$ . Luego,  $pH(\_, 1) = p$ .

5. Así que  $H(\_, 1) := h$  es un levantamiento de  $p$ , igual que la identidad. Si lográramos ver que coinciden en un sólo punto, es decir que  $h$  fija a cualquier punto, por unicidad del levantamiento de funciones, tendríamos que  $h = Id_{\tilde{X}}$ .

Pero no tenemos certeza de que eso ocurra. Lo que sí sabemos que como  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, entonces  $p$  es un cubriente normal. O sea que el grupo de transformaciones de cubierta actúa transitivamente en las fibras de los puntos.

Entonces tomemos un punto  $\xi \in \tilde{X}$ . Si  $h$  no lo fija, ni modo, pero sabemos que existe una transformación de cubierta  $u$  tal que  $u(h(\xi)) = \xi$ .

Ahora sí, por unicidad del levantamiento de funciones,  $uh = Id_{\tilde{X}}$ .

6. Entonces  $u\tilde{g}\tilde{f} \simeq Id_{\tilde{X}}$ .

7. El **ejercicio 0.11**, nos asegura que si encontramos dos funciones  $\phi, \psi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tales que  $\phi\tilde{f} \simeq Id_{\tilde{X}}$  y  $\tilde{f}\psi \simeq Id_{\tilde{Y}}$ , entonces  $\tilde{f}$  es una equivalencia homotópica y terminamos. Ya encontramos  $\phi$ .

Para encontrar  $\psi$ , simplemente hacemos el mismo razonamiento sólo que ahora necesitamos una transformación de cubierta  $w$  tal que  $\tilde{f}\tilde{g}w \simeq Id_{\tilde{Y}}$ .

Es decir, aquí hay que aplicar la  $w$  antes de la función que obtenemos mediante la homotopía, digamos  $\tilde{h}$ . Esto es legal: en vez de mover a  $\tilde{h}(\xi)$  de regreso a  $\xi$ , de antemano movemos a  $\xi$  mediante  $w$  a un punto en la preimagen de  $\xi$  bajo  $\tilde{h}$ . Aunque quizás  $\tilde{h}$  es suprayectiva, basta con escoger  $\xi \in \text{img } \tilde{h}$ .

□

## Parte III

# Homología

# 5. Álgebra Homológica

## 5.1 Conceptos básicos

En este capítulo  $R$  denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

Recordemos que un  $R$ -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están  $R$ .

**Definición.** Un  $R$ -complejo de cadenas es una sucesión de  $R$ -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que  $\partial_{p-1}\partial_p = 0$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$ , que es equivalente a que  $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$ .

**Definición.** Un morfismo de  $R$ -complejos de cadenas es  $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$  es una sucesión de  $R$ -homomorfismos  $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir  $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Definición.** Decimos que  $(D_\bullet, \delta)$  es un **subcomplejo de cadenas** de  $(C_\bullet, \partial)$  si  $D_p \leq C_p$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$  y  $\partial|_{D_p} = \delta_p$ . El cociente  $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$  es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma  $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$ .

**Definición.**

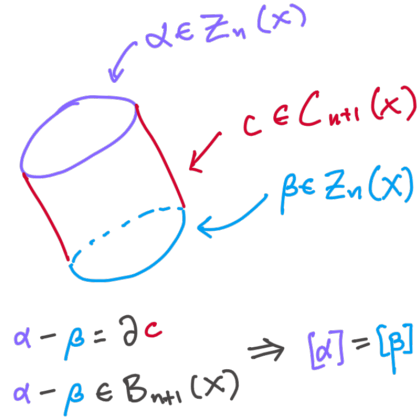
- Los elementos en  $C_p$  se llaman **cadena de dimensión  $p$** .
- Los elementos en  $\ker \partial_p := Z_p$  se llaman **ciclos de dimensión  $p$** .
- Los elementos en  $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$  se llaman **fronteras de dimensión  $p$** .

**Definición.** El  $p$ -ésimo grupo de homología de  $(C_\bullet, d)$  es

$$H_p(C) := Z_p / B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos  $c$  y  $c'$  son **homólogos** si  $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$ .

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



**Ejercicio** (Función inducida). Si  $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$  es un homeomorfismo, entonces  $f(Z_p) \subseteq Z'_p$  y  $f(B_p) \subseteq B'_p$  así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo  $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$ , entonces  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$ . Y por último,  $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$ .

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

## 5.2 Sucesiones exactas

**Definición.** Decimos que la sucesión

$$\cdots \rightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \cdots$$

es **exacta en  $C_p$**  si  $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$ . Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los  $C_p$ . Esto sucede si y sólo si  $H_p(C_\bullet) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Observación.**

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

**Definición.** Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

**Proposición.**

1.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$  es exacta si y sólo si  $\ker \alpha = 0$ , es decir  $\alpha$  es inyectiva.
  2.  $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\text{img } \alpha = B$ , es decir  $\alpha$  es suprayectiva.
  3.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\alpha$  es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
  4.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\alpha$  es inyectiva,  $\beta$  es suprayectiva y  $\ker \beta = \text{img } \alpha$ , de manera que  $\beta$  induce un isomorfismo  $C \cong B/\text{img } \alpha$ .
- Si pensamos que  $\alpha$  es la inclusión de  $A$  como subgrupo de  $B$ , podemos escribir  $C \cong B/A$ .

**Observación** (Primer teorema de isomorfismo). Si  $M' \subseteq M$ , entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

## 5.3 Homotopía

**Definición.** Dos homomorfismos

$$f, g : (C_{\bullet}, \partial) \rightarrow (C'_{\bullet}, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos  $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$  tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

**Lema.** Con la notación de arriba,  $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$ . Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

## 5.4 El lema de la serpiente

**Lema (de la serpiente).** Consideremos el diagrama conmutativo de  $R$ -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo  $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$  tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde  $\phi''$  y  $\psi''$  son las restricciones de  $\phi'$  y  $\psi'$ , y  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\psi}$  son homomorfismos inducidos por  $\phi$  y  $\psi$ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 & \xrightarrow{\delta_*} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \\ & & 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 & & \end{array}$$

donde  $\text{coker } \partial_i = Z_i / \partial_i$ . (Este diagrama fue tomado de [internet](#)).

**Observación.** Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

## 5.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

**Definición.** Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \rightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \rightarrow \cdots$$

es exacta en  $D_\bullet$  si

$$\cdots \rightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \rightarrow \cdots$$

es exacta para todo  $p \in \mathbb{Z}$

**Teorema** (fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \rightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Explicamos un poco cómo definir el homomorfismo de conexión haciendo cacería de diagrama. Comenzamos con un ciclo  $c \in C_p(A)$ . Como  $j_p$  es suprayectiva, existe un  $a \in B_p$  tal que  $j_p(a) = c$ . Luego,  $\partial_p(a) \in \ker j_{p-1}$ , ya que, como el diagrama conmuta,  $\partial_p j_p = j_{p-1} \partial_p$  y  $c$  es un ciclo. Como la sucesión es exacta,  $\ker j_{p-1} = \text{img } i_{p-1}$ , así que existe  $a \in A_{p-1}$  tal que  $i_{p-1}(a) = \partial_p(b)$ . Este  $a$  es un ciclo, ya que el diagrama conmuta,  $i_{p-2}(a) = \partial(\partial(b)) = 0$ , y la  $i_{p-2}$  es inyectiva por exactitud, es decir, el único elemento al que va a dar el cero es el cero. Así que definimos  $\delta_{*p}[c] = [a]$ .



## 5.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

**Teorema** (Naturalidad del homomorfismo de conexión).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{i} & B_{\bullet} & \xrightarrow{j} & C_{\bullet} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \rightarrow & A'_{\bullet} & \rightarrow & B'_{\bullet} & \rightarrow & C'_{\bullet} \rightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \rightarrow & H_p(A) & \rightarrow & H_p(B) & \rightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \rightarrow & H_{p-1}(B) & \rightarrow & H_{p-1}(C) & \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \rightarrow & H_p(A') & \rightarrow & H_p(B') & \rightarrow & H_p(C') & \rightarrow & H_{p-1}(A') & \rightarrow & H_{p-1}(B') & \rightarrow & H_{p-1}(C') & \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

## 5.7 Lema de los cinco

**Lema** (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

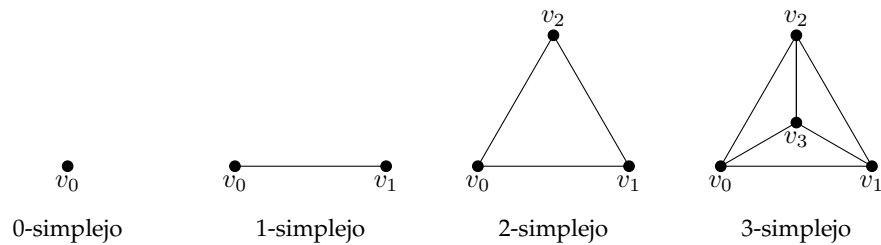
Si  $h_5, h_4, h_2$  y  $h_1$  son isomorfismos, entonces  $h_3$  también.

¿En dónde se usará esto?

# 6. Homología singular

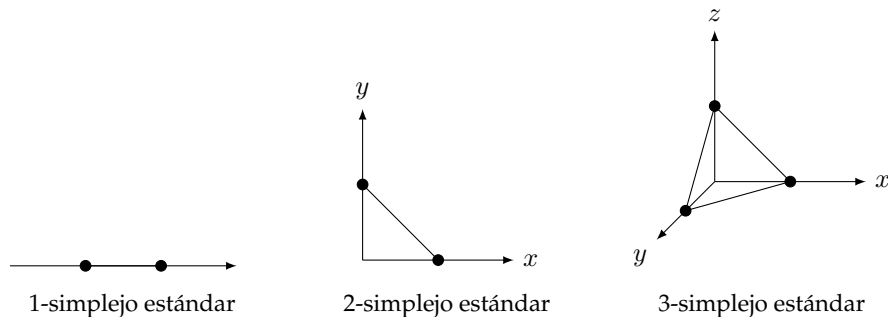
## 6.1 Simplejos

Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero  $n \geq 0$ . Un  **$n$ -simplejo** es el convexo más pequeño en  $\mathbb{R}^m$  ( $m > n$ ) que contiene  $n + 1$  puntos  $v_0, \dots, v_n$  que no viven en un hiperplano de dimensión menor que  $n$ .



Lo denotaremos por  $[v_0, \dots, v_n]$  y diremos que  $v_0, \dots, v_n$  son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así:  $[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$ .

El  **$n$ -simplejo estándar** es  $\Delta^n := [e_1, \dots, e_n]$  donde  $e_1, \dots, e_n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .



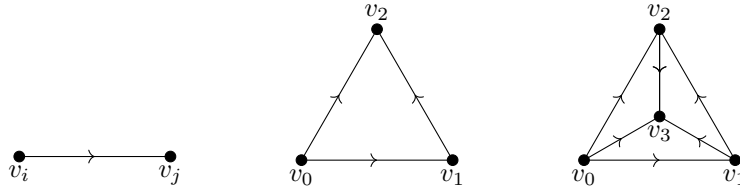
Y observemos que  $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\}$  Para nosotros el orden de los vértices en  $[v_0, \dots, v_n]$  es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un  $n$ -simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned} (v_0, \dots, v_n) : \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0 + \dots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Y diremos que  $(t_0, \dots, t_n)$  son las **coordenadas baricéntricas** del punto  $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in [v_0, \dots, v_n]$ .

Una **cara** de  $[v_0, \dots, v_n]$  es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de  $v_0, \dots, v_n$ . Cualquier cara 1-dimensional  $[v_i, v_j]$  con  $i < j$  vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

## 6.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico  $X$  y un anillo asociativo con unidad  $R$ . Un  **$n$ -simplejo singular** es una función  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ .

El término “singular” proviene de que no se le imponen condiciones a la función  $\sigma$  salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in R, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el  $R$ -módulo libre generado por el conjunto de  $n$ -simplejos singulares. Los elementos de  $C_n$  se llaman  $n$ -cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \quad (6.1)$$

Para lo cual basta definir  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  como sigue: para un  $n$ -simplejo singular  $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ ,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Donde  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  es el siguiente  $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la  $n - 1$ -cara de  $\Delta^n$  que se obtiene al quitar el vértice  $v_i$ , es decir,  $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Y luego simplemente componemos:  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  como sigue: para un  $n$ -simplejo singular  $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ ,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  es el siguiente  $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la  $n - 1$ -cara de  $\Delta^n$  que se obtiene al quitar el vértice  $v_i$ , es decir,  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Y luego simplemente componemos:

$$\begin{array}{ccc} [v_0, \dots, v_n] & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] & \longleftarrow & [v_0, \dots, v_{n-1}] = \Delta^{n-1} \end{array}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el  $i$ -ésimo. Y bueno, así queda definida la función  $\partial_n$  en la base de  $C_n$ , y simplemente extendemos por linealidad a todo  $C_n$ . Ahora veamos una proposición:

**Proposición.**  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (6.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de  $X$** , que denotaremos por  $C_\bullet(X)$ . Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X; R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$  con coeficientes en  $R$ .

## 6.3 Primeras propiedades de la homología

### 6.3.1 La homología y las componentes arco-conexas

**Proposición.** Sea  $X = \bigsqcup X_i$  la descomposición en componentes arco-conexas del espacio topológico  $X$ , entonces

$$H_n\left(\bigsqcup X_i, R\right) \cong \bigoplus H_n(X_i, R)$$

### 6.3.2 El 0-ésimo grupo de homología

**Proposición.** Para cualquier espacio  $X$ ,  $H_0(X; R)$  es una suma directa de copias de  $R$ , una por cada componente arcoconexa.

### 6.3.3 La homología de un punto

**Proposición.** Si  $X$  consiste de un sólo punto, entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Para que esto no es totalmente intuitivo: nos gustaría que la homología de este espacio fuera 0 en todas las dimensiones. Vamos a componer esto en la siguiente sección.

## 6.4 Homología reducida

La homología reducida es una variante de la homología singular que nos sirve para hacer cuentas en dimensiones bajas.

**Definición.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $R$  un anillo asociativo con unidad. Los grupos de **homología reducida** de  $X$  con coeficientes en  $R$ , que denotamos por  $\tilde{H}(X; R)$ , son los grupos de homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\cdots \rightarrow C_p(X) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

donde  $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$  es el **mapeo de aumentación**.

**Observación.** Como el complejo de cadenas es idéntico al complejo de cadenas singulares salvo en los términos hasta la derecha, la homología reducida sólo podrá ser distinta de la homología singular en dimensión 0. Es decir,  $\tilde{H}_n(X; R) = H_n(X; R)$  para toda  $n \geq 1$ .

**Ejercicio** (La homología reducida del espacio que es sólo un punto). Si  $X = \{x\}$ , entonces  $\tilde{H}_0(X; R) = 0$ .

*Demostración.* Recordemos cómo calculamos la 0-ésima homología singular de  $X$ . Como el último homomorfismo en el complejo de cadenas singulares es  $X \xrightarrow{\partial_0} 0$ , entonces el kernel es todo el grupo, así que  $H_0(X) = C_0(X)/\text{img}(\partial_1)$ . Demostramos usando el mapeo de aumentación que este cociente es isomorfo a  $R$ . Luego,

$$0 \rightarrow \text{img } \partial_1 \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. (Ver **prop** de sucesiones exactas).

Así que la sucesión del complejo de cadenas de la homología reducida es exacto en el nivel 0, es decir,  $\ker(\varepsilon) = \text{img}(\partial_1) = 0$ , de forma que  $\tilde{H}_0(X; R) = 0$   $\square$

**Ejercicio.** En general,  $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$ .

*Demostración.* Por la definición de  $\varepsilon$ , sabemos que  $\varepsilon|_{\text{img } \partial_1} = 0$ .

Recordemos que en general, un mapeo que sale de un grupo pasa al cociente respecto a un subgrupo normal si su kernel está contenido en ese subgrupo. Esto quiere decir que tenemos un mapeo inducido  $\bar{\varepsilon} : H_0(X; R) = C_0(X)/\text{img } \partial_1 \rightarrow R$ . Este mapeo resulta ser suprayectivo, y además su kernel es  $\ker \varepsilon / \text{img } \partial_1 = \tilde{H}_0$ . En el lenguaje que hemos desarrollado, esto es tanto como decir que tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X; R) \rightarrow H_0(X; R) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} R \rightarrow 0$$

Y a la mera hora  $H_0(X; R)/\tilde{H}_0(X; R) \cong R$ . De hecho, esto implica que  $H_0(X; R) \cong \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$ . Para verlo, simplemente hay que notar que  $\bar{\varepsilon}$  manda un elemento  $g \in H_0(X; R)$  o bien al elemento 0, en cuyo caso está en  $\tilde{H}_0(X; R)$ , o bien a un elemento en  $R$ , que es el resto de su imagen. Estos dos grupos tienen intersección trivial y generan la suma directa  $\tilde{H}_0(X; R) \oplus R$ .  $\square$

## 6.5 Funtorialidad

En esta sección vamos a demostrar que, en el lenguaje categórico, la asociación que a cada espacio topológico le asigna su complejo de cadenas es funtorial. Y también, que la asignación que a cada espacio le asigna su  $n$ -ésimo grupo de homología es funtorial.

Dicho de otra forma, lo que veremos es que funciones entre espacios topológicos inducen funciones entre los complejos de cadenas singulares y por lo tanto también funciones entre los grupos de homología singular, y además, composiciones van a composiciones y la identidad va a la identidad.

## 6.6 Invarianza homotópica

Primero **recordemos** que

**Definición.** Dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si existe una función  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por  $f \simeq g$ .

**Definición.** Dos espacios  $X$  y  $Y$  son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas**  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq \text{Id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ . Y se denota por  $X \simeq Y$ .

Ahora sí:

**Teorema.** Si dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo en el  $n$ -ésimo grupo de homología  $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  para toda  $n$ .

**Corolario.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  es un isomorfismo para toda  $n$ .

*Demostración.* Usando el teorema y las propiedades de funtorialidad.  $\square$

**Ejemplo.** Si  $X \simeq \{x_0\}$ , es decir  $X$  es **contraíble**, entonces

$$H_n(X, R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

## 6.7 Homología relativa

### 6.7.1 Construcción

La homología relativa es un tipo de homología singular que generaliza la homología reducida. El chiste será definir la homología del espacio “ignorando lo que pasa dentro del subespacio”.

Tomemos  $A \subseteq X$  espacios topológicos. Diremos que  $(X, A)$  es una **pareja**. Notemos que  $(C_\bullet(A))$  es un subcomplejo de  $C_\bullet(X)$ , así que podemos definir el complejo relativo

$$C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

Y esto simplemente quiere decir que para toda  $n$ ,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

de forma que las cadenas en  $A$  se vuelven triviales.

Es claro que el  $n$ -ésimo operador frontera restringido a  $C_n(A)$  se mapea a  $C_{n-1}(A)$ , (pues la frontera de una cadena en  $A$  no podría salirse de  $A$ ). Esto quiere decir que el mapeo frontera está bien definido en el cociente.

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

Esto induce la homología dada por

$$H_n(X, A) = \ker \partial_n / \text{img } \partial_{n-1}$$

Ahora lo primero que pasa es que tenemos una sucesión exacta corta a la que aplicaremos el teorema fundamental del álgebra homológica:

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \xhookrightarrow{i} C_\bullet(X) \xrightarrow{j} C_\bullet(X, A) \rightarrow 0$$

Así que obtenemos la **sucesión exacta larga de la pareja**

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

**Observación.** Si los grupos de homología de la pareja  $C_p(X, A)$  fueran triviales, automáticamente tendríamos que el mapeo inducido por la inclusión sería un isomorfismo. De hecho, esto es un si y sólo si. Así, los grupos de homología miden qué tan diferentes son los grupos de homología de  $A$  y los de  $X$ .

**Observación.** Agregamos el comentario de que aunque el mapeo  $\delta$  que usamos para completar la sucesión exacta larga de la pareja viene del teorema fundamental del álgebra homológica, y al recordar la demostración del teorema nos damos cuenta de que este mapeo actúa exactamente como el operador frontera original de  $X$ .

**Observación.** También es posible definir la **homología reducida de la pareja**. (Ver Hatcher). De hecho resulta que es igual a la homología de la pareja que acabamos de definir, es decir,  $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$

**Ejercicio.**  $H_n(X, \{x_0\}) = H_n(X)$ .

*Solución.* Usando la primera y la tercera de las observaciones anteriores, sabemos que existe la sucesión exacta larga de la pareja en homología reducida. Como  $\tilde{H}_n(\{x_0\}) \cong 0$  para toda  $n$ , tenemos el isomorfismo deseado.

Esta prueba está en el Hatcher (p.118). En el [video](#) este ejercicio aparece antes de definir la sucesión exacta larga de la pareja y sin el comentario sobre la homología reducida. ¿Será posible demostrarlo sin esas dos cosas?  $\square$

## 6.7.2 Funciones inducidas

**Observación.** Una **función entre parejas**  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induce una función  $f_\# : C_\bullet(X, A) \rightarrow C_\bullet(Y, B)$  y por lo tanto también otra función  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .

**Proposición.** Si dos funciones entre parejas  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  son homotópicas por funciones entre parejas, entonces los mapeos inducidos  $f_*$  y  $g_*$  son iguales.

## 6.7.3 La sucesión exacta de la tertia

Si  $Z \subseteq Y \subseteq X$  son espacios topológicos, es inmediato por definición que

$$C_\bullet(Z) \leq C_\bullet(Y \leq C_\bullet(X))$$

Y al tomar el cociente por  $Z$ , obtenemos

$$C_\bullet(Y, Z) \hookrightarrow C_\bullet(X, Z) \rightarrow \frac{C_\bullet(X, Z)}{C_\bullet(Y, Z)} = C_\bullet(X, Y)$$

Usando un teorema de isomorfismo en la última igualdad para ver que  $\frac{C_\bullet(X)/C_\bullet(Z)}{C_\bullet(Y)/C_\bullet(Z)} = C_\bullet(X, Y)$ . Aplicamos el teorema fundamental del álgebra homológica y obtenemos la **sucesión exacta de la tertia**

$$\cdots \rightarrow H_n(Y, Z) \xrightarrow{i_*} H_n(X, Z) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y, Z) \xrightarrow{i_*} \cdots$$



## 6.8 Escisión

Este resultado hace mucho más precisa la noción de que la homología de la pareja es la homología del espacio “ignorando lo que pasa en el subespacio”.

Sean  $Z \subseteq A \subseteq X$  tales que la cerradura de  $Z$  está contenida en el interior de  $A$ . Entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Equivalentemente, para subespacios  $A, B \subseteq X$  cuyos interiores cubren a  $X$ , la inclusión

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

## 6.9 La homología de un cociente

Dados un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $A \subseteq X$ , podemos considerar el espacio  $X/A$ , que consiste en identificar todos los puntos de  $A$ . Este espacio es como  $X$  pero ignorando todo lo que pasa en  $A$ . Esto nos recuerda a la homología de la pareja, y surge naturalmente la pregunta: ¿hay alguna relación entre  $H_n(X, A)$  y  $H_n(X/A)$ ? Necesitamos ciertas condiciones:

**Definición.** Decimos que  $(X, A)$  es una **buena pareja** si  $A$  es cerrado y es retracto fuerte por deformación de alguna vecindad en  $X$ .

El arete hawaiano con el punto de pegado no es un buen par porque cualquier vecindad de dicho punto contiene un círculo entero, así que no se puede retraer por deformación.

**Teorema.** Sea  $(X, A)$  un buen par, entonces

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$$

induce isomorfismos para toda  $n$  de la forma

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

donde la tilde denota la homología reducida.

En la demostración se usa lema de los 5, invarianza homotópica, etc.

**Corolario.** Sea  $(X, A)$  un buen par. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X/A) \rightarrow \cdots$$

## 6.10 Homología de la esfera y aplicaciones

**Teorema** (Homología de la esfera).

$$\tilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

**Teorema** (del punto fijo de Bruwer). Sean  $n \geq 2$  y  $f : D^n \rightarrow D^n$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.

**Teorema** (Homología de la cuña). Consideremos una cuña de espacios  $\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha$  tal que  $(X_\alpha, x_\alpha)$  es una buena pareja para toda  $\alpha$ , donde  $x_\alpha$  es el punto de pegado. Entonces, las inclusiones  $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha$  inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_{\alpha \in I} i_{\alpha*} : \bigoplus_{\alpha \in I} \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n\left(\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha\right)$$

**Teorema** (Invarianza de la dimensión). Sean  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  abiertos. Si  $U$  y  $V$  son homeomorfos, entonces  $n = m$ .

## 6.11 La sucesión de Mayer-Vietoris

Sea  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subseteq X$  tales que  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ . Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga en homología reducida:

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

Para entender de dónde salió esta sucesión, debemos fijarnos en los subgrupos de cadenas  $C_n(A+B)$  formado por sumas de cadenas en  $A$  y cadenas en  $B$ . Es posible construir un complejo de cadenas, ya que el homomorfismo frontera de todo el espacio,  $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  se restringe correctamente a  $C_n(A+B) \rightarrow C_{n-1}(A+B)$ . Usando la maquinaria del **teorema de escisión**, se demuestra que la inclusión  $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$  induce isomorfismos en la homología. Luego, tenemos para toda  $n$  la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A+B) \rightarrow 0$$

donde  $\varphi(x) = (x, -x)$  y  $\psi(x, y) = x + y$ . Esta forma de definir las funciones nos asegura que la sucesión sea exacta, como sigue. Es fácil ver que  $\psi\varphi = 0$ , por lo que  $\text{img } \varphi \subseteq \ker \psi$ .

También  $\ker \psi \subseteq \text{img } \varphi$ , ya que si  $(x, y) \xrightarrow{\psi} (0, 0)$ , entonces  $x = -y$ , así que tanto  $x$  como  $y$  están en  $A$  y en  $B$ , es decir,  $(x, y) \in C_n(A \cap B)$ ; y claramente está en la imagen de  $\varphi$ . También es fácil ver que  $\ker \varphi = 0$ , y que  $\text{img } \psi = C_n(A+B)$ .

Aplicando el teorema fundamental del álgebra en la sucesión exacta corta de complejos de cadenas inducidos por estas sucesiones exactas cortas en cada  $n$ , se obtiene la sucesión de Mayer-Vietoris.

Es posible decir cómo actúa el mapeo de aumentación. Por lo que dijimos sobre el teorema de escisión, un elemento en  $[w] \in H_n(X) \cong H_n(A + B)$  es de la forma  $[a + b]$  para cadenas  $a \in C_n(A)$  y  $b \in C_n(B)$  cuya suma  $a + b$  es un ciclo, es decir,  $\partial(a + b) = 0$ . Luego,  $\partial(a) = -\partial(b)$  es un ciclo en  $H_{n-1}(A \cap B)$ , así que es el representante perfecto para la clase de equivalencia a la que vamos a mandar a  $[w]$ .

Todo lo dicho hasta ahora se resume a continuación

$$\begin{aligned} i : A \cap B &\hookrightarrow A \\ j : A \cap B &\hookrightarrow B & \Phi(x) &= (i_*x, -j_*x) \\ k : A &\hookrightarrow X & \Psi(y, z) &= k_*y + \ell_*z \\ \ell : B &\hookrightarrow X \end{aligned}$$

$$[w] = [a + b] \xrightarrow{\delta} [\partial(a)] = [-\partial(b)] \quad \text{para ciertos } a \in A, b \in B$$

**Ejemplo.** Es posible calcular la homología del toro usando la sucesión de Mayer-Vietoris, aunque no basta con escribir la sucesión exacta: hay que entender cómo actúan los homomorfismos.

**Observación.** Se puede dar una versión de esta sucesión para  $X = A \cup B$  tales que  $A$  y  $B$  son retratos por deformación de ciertas vecindades  $U$  y  $V$  donde  $U \cap V$  es retracto de  $A \cap B$ .

En particular, si  $X$  es un complejo CW y  $A, B \subseteq X$  son subcomplejos CW, entonces es posible demostrar que existen tales vecindades, y obtenemos la misma sucesión de Mayer-Vietoris,

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

Sólo que ahora  $A$  y  $B$  no tienen que ser abiertos y no tiene que ser cierto que  $\text{int } A \cup \text{int } B = X$ .

**Ejemplo.** En mis notas de clase hay un modo de calcular  $H_1$  y  $H_0$  del toro visto como complejo CW con subcomplejos:

Cuando vemos el toro  $S^1 \times S^1$  como el cociente de un cuadrado con los lados identificados, tenemos una estructura de complejo CW con una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda. Aquí, podemos tomar  $A = D^2$  y  $B = S^1 \vee S^1$ .

Casi todos los grupos de homología se hacen cero (no veo por qué) (aquí hay que usar que la homología de la cuña es la suma de las homologías de los "cuñandos"), y que la homología de  $S^1$  es cero cuando el subíndice es mayor o igual que 2.

En fin, para  $m > 2$ ,  $\tilde{H}_m(X) = 0$ . Y es fácil ver que  $H_1(S^1 \times S^1) \cong R \oplus R$ . Pero para  $H_2(S^1 \times S^1)$  algo falta...

## 6.12 Representantes de la homología de la esfera

En esta sección usaremos  $R = \mathbb{Z}$ .

Nuestro método será encontrar generadores para la homología relativa  $H_n(D^n, \partial D^n)$  ya que ésta debe ser isomorfa a  $H_n(S^n)$ . Y lo primero que vamos a hacer va a ser reemplazar esa pareja por la siguiente, a la que también es isomorfa:  $(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ .

**Proposición.** La función identidad  $Id : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  es un ciclo que genera  $H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Primero notemos que la identidad sí es un ciclo en el grupo de homología relativa, ya que el kernel mapeo frontera  $C_n(\Delta^n) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\Delta^n)$  justamente está metido en el subgrupo  $C_n(\partial \Delta^n) \leq C_n(\Delta^n)$ . (Un homomorfismo de grupos pasa al cociente si el kernel está metido en el subgrupo normal).

Ahora sí, hacemos inducción en  $n$ . (...)

□

Ahoara pensemos que  $S^n$  es la unión de dos simplejos estándar pegados por su frontera, que denotaremos por  $\Delta_1^n \cup_{\partial \Delta^n} \Delta_2^n$ .

**Proposición.**  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$  es un generador de  $H_n(S^n)$  para  $n > 0$ .

### 6.13 Grado de una función entre esferas

Consideremos  $f : S^n \rightarrow S^n$ , que induce una función  $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  de manera que  $f_*$  no tiene de otra que ser de la forma  $f_*(n\alpha) = dn\alpha$ .

**Definición.** En la notación de arriba, el **grado** de  $f$  es  $d$ .

**Proposición.**

1.  $\deg Id = 1$ . Por funtorialidad.
2. Si  $f$  no es suprayectiva, entonces  $\deg(f) = 0$ . Como  $f$  no es suprayectiva podemos escoger un punto  $x \notin \text{img } f$ . Tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} S^2 - x & & \tilde{H}_n(S^2 - x) \cong 0 \\ f \uparrow & \searrow & \uparrow f_* \\ S^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ & & \tilde{H}_n(S^2) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(S^2) \end{array}$$

Y como el primero es conmutativo, el segundo también, y entonces  $f_*$  es constante.

3.  $f \simeq g$  entonces  $\deg f = \deg g$ . Por invarianza homotópica las funciones inducidas son iguales.
4.  $\deg(fg) = \deg(f) \deg(g)$

5. Si  $f$  es una reflexión que intercambia los hemisferios, entonces  $\deg(f) = -1$ .

Esto se debe a que, como vimos en la sección anterior, la  $n$ -esfera vista como la unión de dos simplejos estándar,  $S^n = \Delta_1^n \cup_{\partial \Delta^n} \Delta_2^n$ , tiene como generador del  $n$ -ésimo grupo de homología a la cadena  $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ . La reflexión que intercambia estos simplejos justamente envía el generador a su negativo.

6. La función antipodal  $-Id : S^n \rightarrow S^n$  tiene grado  $(-1)^{n+1}$ . Es decir,

$$\deg(-Id) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

7. Si  $f$  no tiene puntos fijos, entonces  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ . Más aún, si  $f$  no tiene puntos fijos, es homotópica al mapeo identidad.

Si  $x \neq f(x)$ , el segmento de línea en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por  $f(x)$  y  $-x$ , dado por  $(1 - tf(x)) - tx$ , no pasa por el origen. Esto nos permite definir una homotopía  $(1 - tf(x)) - tx / |(1 - tf(x)) - tx|$  entre  $f$  y el mapeo antipodal.

### 6.13.1 Grado local

Siguiendo a Hatcher,

**Definición.** Supongamos que  $f : S^n \rightarrow S^n$  es tal que la imagen inversa de algún  $y \in S^n$  consiste de una cantidad finita de puntos, digamos  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Tomemos una familia de abiertos disjuntos  $U_1, \dots, U_m$  que contengan a cada  $x_i$ , y que vayan a dar a una vecindad  $V$  de  $y$  bajo  $f$ . Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo  $f_*$  originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma  $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , la multiplicación por un número que se llama el **\*\*grado local\*\*** de  $f$  y se denota  $\deg f|_{x_i}$ .

Supongamos que  $f : S^n \rightarrow S^n$  es tal que la imagen inversa de algún  $y \in S^n$  consiste de una cantidad finita de puntos, digamos  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Tomemos una familia de abiertos disjuntos  $U_1, \dots, U_m$  que contengan a cada  $x_i$ , y que vayan a dar a una vecindad  $V$  de  $y$  bajo  $f$ . Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo  $f_*$  originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma  $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , la multiplicación por un número que se llama el **\*\*grado local\*\*** de  $f$  y se denota  $\deg f|_{x_i}$ .

Y luego:

**Teorema.**  $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$

Agregamos otra proposición:

**Proposición.** El grado de la **suspensión**  $Sf : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$  de una función  $f : S^n \rightarrow S^n$  es igual al grado de  $f$ .

### 6.13.2 Teorema de la bola peluda

**Teorema** (de la bola peluda).  $S^n$  tiene un campo vectorial que no se anula en ningún punto si y sólo si  $n$  es impar.

### 6.13.3 Acciones libres en la esfera

**Teorema** (Acciones libres en la esfera).  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  es el único grupo no trivial que **actúa** libremente en  $S^n$  si  $n$  es par.

# 7. Complejos CW

## 7.1 Construcción y propiedades básicas

Establezcamos algo de notación

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  es el  $n$ -disco cerrado.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  es la  $n$ -esfera.
- $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  es la  $n$ -célula abierta o sólo la  $n$ -célula.

De tal forma que

- $\partial D^n = S^{n-1}$
- $D^n = e^n \cup S^{n-1}$  como conjuntos (no se usa la topología de la unión disjunta)
- Y bueno debe ser cierto que  $e^0 = \{pt\}$ .

**Definición.** Un espacio  $X$  es un complejo  $CW$  si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con un espacio discreto  $X^0$  que se llama el 0-esqueleto.
2. El  $n$ -esqueleto  $X^n$  lo obtengo a partir del  $n - 1$ -esqueleto  $X^{n-1}$  pegando  $n$ -células  $e_\alpha^n$  vía funciones  $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Formalmente tenemos el espacio

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n / \sim \quad x \sim \varphi_{\alpha}(x) \quad \text{si} \quad x \in \partial D_{\alpha}^n$$

*Se trata de tomar puntos y unirlos con líneas, y luego tomar líneas y rellenar con discos, etc...*

3. Podríamos terminar en una cantidad finita de pasos, digamos  $m$ , y obtenemos que  $X = X^m$ , pero también puedo continuar pegando células de dimensión arbitrariamente grande y obtenemos  $X = \bigcup_n X^n$ . En este caso  $X$  tiene la topología débil:  $A \subseteq X^n$  es abierto (cerrado)  $\iff A \cap X^n$  es abierto (cerrado)  $\forall n$ .

**Definición.** Si  $X = X^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $X$  es de dimensión finita y definimos la dimensión de  $X$  como la dimensión de la célula más grande que adjunté. Formalmente,  $\dim X = \min\{n : X^n = X\}$ .

**Ejemplo.**

- Los 0-complejos CW son gráficas.
- $S^n$  es un complejo CW.
- El espacio proyectivo real. Inicialmente definido como  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/x \sim \lambda x$  para  $\lambda \neq 0$ , podemos tomar representantes de las líneas en la esfera para obtener que  $\mathbb{R}P^n = S^n/x \sim -x$ .

Esto es equivalente a tomar cualquiera de los hemisferios de la esfera,  $D^n$ , e identificar los puntos de su frontera con el mapeo antipodal. A su vez, esto es equivalente a tomar la esfera de dimensión  $n-1$ , que es la frontera del disco, identificar antipodalmente, y agregar el interior del  $n$ -disco. ¡Y la  $n-1$  esfera con esa identificación es justamente  $\mathbb{R}P^{n-1}$ !

En resumen, y haciendo inducción:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/x \sim \lambda x, & \lambda \neq 0 \\
 &= S^n/x \sim -x \\
 &= D^n/x \sim -x, & x \in \partial D^n = S^{n-1} \\
 &= \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n \\
 &= \mathbb{R}P^{n-2} \cup e^{n-1} \cup e^n \\
 &= e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n
 \end{aligned}$$

donde las funciones de pegado son justamente las antipodales.

- El espacio proyectivo complejo. Como en el caso real, el espacio proyectivo complejo, inicialmente definido como  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/x \sim \lambda x$  para  $\lambda \neq 0$ , se puede definir únicamente en la esfera  $S^{2n+1}$ . Igualito que en el caso real, es posible tomar un disco  $D^{2n}$  e identificar los puntos antípodas en su frontera. Por ahora no especificaremos cómo, pero resulta que:

$$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$$

**Ejercicio.** Todo complejo CW es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, todo complejo CW tiene cubriente universal.

**Definición.** La función característica es  $\Phi_\alpha$ :

$$\begin{array}{ccc}
 e_\alpha^n & & X^{n-1} \sqcup D_\alpha^n \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{proyección al cociente} \\
 D_\alpha^n & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & X^n
 \end{array}$$



**Definición.** Sea  $X$  un complejo  $CW$ . Un **subcomplejo CW**  $Z$  es un subespacio cerrado que además es unión de células de  $X$ .

**Observación.** Para un subcomplejo  $Z$ ,

- $Z \subseteq X$  es una buena pareja ( $Z$  es retracto por deformación de una vecindad de  $X$ )
- $X/Z$  (el espacio que obtiene al colapsar  $Z$  a un punto) es un complejo  $CW$ .

**Observación** (Muy importante).  $X$  complejo  $CW$ . El cociente por el  $n - 1$  esqueleto es una cuña de esferas, tantas como células en el  $n - 1$  esqueleto. En símbolos,  $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$ , donde  $I_n$  es el conjunto que indexa las  $n - 1$ -celdas.

**Teorema.** Si  $X$  y  $Y$  son complejos  $CW$  con a lo más una cantidad numerable de células, entonces  $X \times Y$  es un complejo  $CW$ .

Aquí, la dimensión del producto de dos células, digamos  $e_\alpha^1 \times e_\beta^2$  es la suma de las dimensiones de cada una (en este ejemplo, tenemos una 3-célula).

**Definición.** Sea  $X$  un espacio. La **suspensión** de  $X$  es el espacio

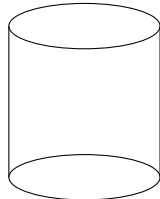
$$SX = X \times I / \sim$$

Donde la relación de equivalencia  $\sim$  es identificar las tapas, es decir,

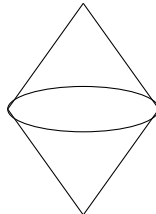
$$(x, 1) \sim (y, 1) \quad \text{y} \quad (x, 0) \sim (y, 0) \quad \forall x, y \in X$$

El **cono** de  $X$  se obtiene identificando sólo una tapa:

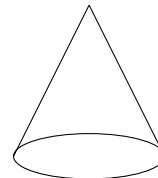
$$CX = X \times I / \sim \quad (x, 1) \sim (y, 1) \quad \forall x, y \in X$$



Cilindro



Suspensión



Cono

Y también es posible definir la **suspensión de una función**  $f : X \rightarrow Y$ , que es de la forma  $Sf : SX \rightarrow SY$  simplemente tomando el cociente de  $f \times Id : X \times I \rightarrow Y \times I$ .

**Teorema.** El cono y la suspensión de un espacio complejo  $CW$  son complejos  $CW$ .

### 7.1.1 Complejos CW para Lee (extra)

Veamos cómo define Lee los complejos  $CW$  en su libro Introduction to Topological Manifolds:

**Definición.** Si  $X$  un espacio topológico no vacío, una **descomposición celular** de  $X$  es una partición  $\mathcal{E}$  de  $X$  en subespacios que son células abiertas de manera que para cada  $e \in \mathcal{E}$  de dimensión  $n \geq 1$  existe una **función característica**  $\phi$  de una  $n$ -célula cerrada  $D$  a  $X$  que se restringe a un homeomorfismo de  $\text{Int}D$  en  $e$  y manda  $\partial D$  en la unión de células en  $\mathcal{E}$  de dimensión menor estricta que  $n$ .

Un **complejo celular** es un espacio Hausdorff  $X$  junto con una descomposición celular.

**Observación.** Las células, aunque son homeomorfas a discos abiertos, no tienen por qué ser abiertos de  $X$ .

**Definición.** Un **complejo CW** es un complejo celular  $(X, \mathcal{E})$  tal que:

**C (Closure finiteness)** La cerradura de cada célula intersecta a una cantidad finita de células de  $X$ .

**W (Weak topology)** La topología de  $X$  es coherente con la familia de subespacios cerrados  $\{\bar{e} : e \in \mathcal{E}\}$ , es decir,  $U \subseteq X$  es cerrado en  $X$  si y sólo si  $U \cap \bar{e}$  es cerrado para cada  $e \in \mathcal{E}$ .

Una equivalencia entre esta definición y la de Hatcher cuando  $X$  es Hausdorff está en el apéndice de Hatcher.

## 7.2 La homología singular de un complejo CW

**Lema.**

- Si las  $n$ -células están indexadas por el conjunto  $I_n$ ,

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in I_n} R & \text{si } k = n \end{cases}$$

*Demostración.*  $H_k = \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in I_n} S^n) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} H_k(S^n) \quad \square$

- $H_k(X^n) = 0$  para toda  $k > n$ .

Nuevamente, la homología, lo que aclance a ver la homología, lo ve solamente hasta la dimensión del espacio

- La inclusión  $X^n \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X) \quad k > n$ .

Aquí la idea es que adjuntar células de dimensión mayor que la homología que estamos calculando no cambia la homología. Es decir, para  $n > k$  se tiene que  $H_k(X \cup D^n) = H_k(X)$ .

*Demostración.* Fijémonos en  $(X^n, X^{n-1})$ , hay una sucesión exacta corta de la pareja:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Usando el inciso 1, si  $k \neq n, n-1$  entonces  $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ .

Bueno para demostrar (2), justamente tenemos  $k > n$  y entonces resultará, fijando  $k$  y bajando uno por uno,  $H_k(X^n) \cong H_k(X^0)$  que es un espacio discreto y la homología de grado mayor que cero en espacios discretos es cero. Terminamos el inciso (2).

Para (3), si  $k < n < n+1 < n+2 < \dots$ , simplemente tenemos que

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m})$$

y si pedimos que  $X$  sea de dimensión finita entonces terminaremos en algún punto y listo. El caso de dimensión infinita queda para el futuro.  $\square$

### 7.3 Homología celular

A continuación construimos un nuevo tipo de homología para complejos CW:

**Definición.** Consideremos

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & \\
 \nearrow \partial_n & & \searrow j_{n-1} & & \\
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & & \searrow \partial_{n-1} & \nearrow j_{n-2} & \\
 & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & 
 \end{array}$$

Resultará que las flechas horizontales que definimos con los triangulitos, es decir las  $d_i$ , satisfacen que

$$d_{n+1} \circ d_n = 0$$

así que podemos bautizar el **complejo de cadenas celular**  $C_\bullet^{CW}(X, R)$ . Y ahora podemos definir la **homología celular**:

$$H_n^{CW}(X; R) = H_n(C_\bullet^{CW}(X))$$

**Teorema.**

$$H_n^{CW}(X; R) \cong H_n(X; R) \quad \forall n \geq 0$$

El primero depende de la estructura celular del espacio  $X$ , pero el segundo no. Así, la homología de un complejo CW es independiente de la estructura celular.

**Observación.** Estos grupos  $H_n(X^n, X^{n-1})$  son las sumas directas de  $R$ , uno por cada  $n$ -célula de  $X$ .

**Proposición** (Consecuencias de la definición). Tomemos  $X$  un complejo CW y  $R = \mathbb{Z}$ .

1.  $H_n(X) = 0$  si  $X$  no tiene  $n$ -células.
2. Supongamos que  $X$  tiene exactamente  $k$   $n$ -células. Entonces  $H_n(X)$  está generado por a lo más  $k$  elementos, pues, como  $H_n(X^n, X^{n-1})$  es abeliano libre en  $n$  elementos, también lo son el subgrupo  $\ker d_n$  y  $\ker d_n / \text{img } d_{n-1} = H_n(X)$ .

3. Si  $X$  no tiene células de dimensiones adyacentes, entonces  $H_n(X)$  es libre para todo  $n$  de rango el número de  $n$ -células.

## 7.4 Una fórmula para el homomorfismo frontera

Bueno, ahora tratemos de entender cómo es la  $d$ . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ed, " \varphi_{\alpha\beta} " ] & & X^{n-1} \\ & \downarrow & \\ S_{\beta}^{n-1} & \longleftarrow & \bigvee_{\gamma \in I_n} S_{\gamma}^{n-1} = X^{n-1} / X^{n-2} \end{array}$$

Esta función que descubrimos  $\varphi_{\alpha\beta}$  es una función entre esferas que tiene un grado  $d_{\alpha\beta}$ .

**Teorema.** Para  $n \geq 2$ , el homomorfismo  $d_n$  manda  $e_{\alpha}^n \mapsto \sum d_{\alpha\beta} e_{\beta}^{n-1}$ .

## 7.5 Ejemplos

**Ejemplo.** Calculamos de dos maneras distintas la homología de  $X = \bigvee_{\alpha \in I} S_{\alpha}^1$ , por un lado usando directamente que  $H_0(X) = R$  y otro usando el teorema anterior. Para el teorema anterior, descubrimos que para como sólo hay una 0-célula, para cualquier  $\alpha$ ,  $e_{\alpha}^1 \mapsto x_0 - x_0 = 0$ , así que de hecho  $d_1 = 0$ . Resulta que  $H_1 = \bigoplus_I R$ .

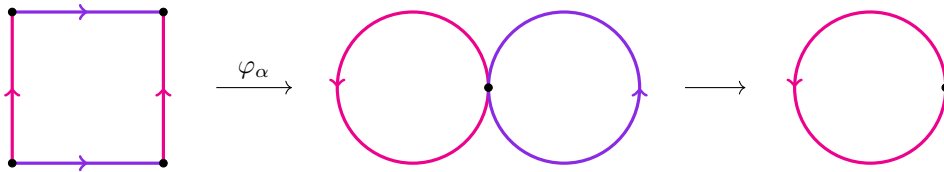
De hecho, esto es cierto en general:

**Lema.** Si  $X$  es un complejo con una única 0-célula, entonces  $d_1 = 0$ .

**Ejemplo (El toro).** Sabemos que hay una descomposición del toro como complejo CW en una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda. Esto nos el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Sabemos que  $d_1 = 0$  porque sólo hay una 0-celda. Para descubrir cómo actúa  $d_2$  echemos un vistazo al siguiente diagrama:

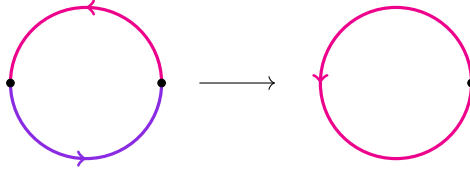


La frontera de la 2-celda,  $S^1$  va a dar mediante la función de pegado a la cuña de dos círculos, y **recorre cada uno dos veces y en direcciones contrarias**. El cociente  $X^1/X^0$  no hace nada, pues de por sí  $X^0$  ya era sólo un punto, y en el último, paso, al escoger uno de los dos círculos en la cuña, nos damos cuenta de nuestra función lo recorre **de ida y luego de regreso**. Esta función es homotópica a una constante, así que es de grado cero. Al hacer esto para los dos círculos, concluimos que,  $d_2 = 0$ . Luego,  $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y  $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$ .

**Teorema (Extra).** Una superficie compacta y conexa sólo puede ser una esfera, un toro, una suma conexa de toros, el plano proyectivo o una suma conexa de planos proyectivos.

**Ejemplo** (El toro de género  $g$ ). Resulta que el toro doble se puede ver como el cociente de un octágono identificando aristas. Y en general, el  $g$ -toro es el cociente de un  $4g$ -ágono. El resultado final es que  $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$  y  $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo** (El plano proyectivo). Recordemos la descomposición más sencilla del plano proyectivo con un célula de cada dimensión:



Aquí,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Formalmente, para descubrir cómo actúa la función de pegado hacemos el siguiente razonamiento usando el **grado local**. La función que tenemos el dibujo envía el hemisferio norte (sin su frontera) en el círculo de la derecha sin el punto. La restricción de la función al hemisferio norte no ayuda a descomponer la función para calcular el grado. Como la restricción es un homeomorfismo, el grado local aquí es 1.

Lo mismo sucede para el pedazo de la función en el hemisferio sur. La observación clave es que cada una de estas funciones locales se obtiene de la otra al componer con la función antípoda, que tiene grado 1 en  $S^1$ . El grado de la función completa es la suma de los grados locales, así que el grado es 2. Y como sólo hay una célula de cada dimensión,  $d_2 = 2$ . Luego,  $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$  y  $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$ .

**Ejemplo** ( $\mathbb{R}P^n$ ). Sólo debemos generalizar el ejemplo anterior. La descomposición de  $\mathbb{R}P^n$  como complejo  $CW$  es  $\mathbb{R}P^n = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n$ . El diagrama de arriba se vuelve:

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathbb{R}P^{k-1} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow q \\ S^{k-1} & \longleftarrow & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \end{array}$$

Las funciones de pegado  $\varphi_\alpha$  son la proyección al cociente función antipodal en la esfera (el cubriente del plano proyectivo). Estas funciones son dos a dos, y esto hace que el hemisferio norte de  $S^{k-1}$  se mapee homeomorficamente a  $S^{k-1}$  menos un punto, justo como en el caso de dimesión 2.

Como dijimos, las funciones que obtenemos cuando restringimos  $\bar{\varphi}$  a cada hemisferio difieren una de la otra por el mapeo antipodal. A la hora de calcular el grado, obtenemos la fórmula  $\deg(\bar{\varphi}) = 1 + (-1)^k$ .

Luego,

$$d_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto genera la homología siguiente:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{para } n \text{ par}$$

Así que  $H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}$ ,  $H_k(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$  para  $k < n$  impar, y  $H_n(\mathbb{R}P^n)$  es 0 si  $n$  es par, y  $\mathbb{Z}$  si  $n$  es impar.

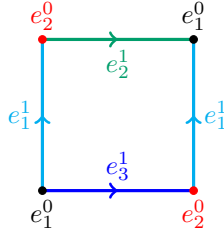
**Ejemplo** (Primer ejemplo donde cambian las cosas si cambiamos de anillo). Tomemos  $\mathbb{R}P^n$  y el anillo  $R = \mathbb{Q}$ .

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Pero ahora la función multiplicar por 2 manda  $\mathbb{Q}$  en todo  $\mathbb{Q}$ , algo que no pasaba con  $\mathbb{Z}$ . Esto hace que la homología sea trivial, es decir,  $H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Q}) = 0$  para toda  $n \geq 1$ .

**Ejemplo.** ¿Y si tomamos  $R = \mathbb{Z}/2$ ? Multiplicar por 2 es la función 0, así que  $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$  para  $0 \leq m \leq n$ .

**Ejemplo** (La banda de Möbius). Tomemos la siguiente descomposición de la banda de Möbius:



Que corresponde al complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0$$

En este caso  $d_1$  no es automáticamente cero porque tenemos dos 0-celdas. Sin embargo, sabemos que la banda es conexa, así que  $H_0 \approx \mathbb{Z}$ .

Podemos hacer el cálculo de  $d_1$  explícito (lo necesitamos para calcular  $H_1(M)$ ) porque sabemos que se comporta exactamente como la frontera de la homología simplicial. De acuerdo a los nombres en el diagrama, podemos simplemente ver que

$$d_1(e_1^1) = e_2^0 - e_1^0 \quad d_1(e_2^1) = e_1^0 - e_2^0 \quad d_1(e_3^1) = e_2^0 - e_1^0$$

Equivalentemente,

$$(1, 0, 0) \xrightarrow{d_1} (-1, 1) \quad (0, 1, 0) \xrightarrow{d_1} (1, -1) \quad (0, 0, 1) \xrightarrow{d_1} (-1, 1)$$

Así que  $\text{img } d_1 \approx \mathbb{Z}$ , como esperábamos, y  $\ker d_1 \approx \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Para calcular  $d_2$ , notemos que la 2-celda está pegada sólo a lo largo de las aristas  $e_2^1$  y  $e_3^1$ . Al colapsar el 0-esqueleto obtenemos la cuña de tres círculos, uno por cada arista. Las funciones inducidas en nuestro diagrama conmutativo son de grado 0 para  $e_1^1$  y 1 para  $e_2^1$  y  $e_3^1$ , así que  $d_2(e^2) = 0 \cdot e_1^1 + e_2^1 + e_3^1$ , o bien,  $1 \xrightarrow{d_2} (0, 1, 1)$ , de manera que  $\text{img } d_2 \approx \mathbb{Z}$  y  $\ker d_2 \approx 0$ . Luego,  $H_1(M) \approx (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$  y  $H_2(M) \approx 0$ .

## 7.6 Característica de Euler

Sea  $Y$  un complejo  $CW$  finito (con un número finito de células). De hecho esta propiedad es equivalente a que el espacio  $Y$  sea compacto. Definimos la característica de Euler como

$$\begin{aligned}\chi(Y) &= (\# \text{ 0-células}) - (\# \text{ 1-células}) + (\# \text{ 2-células}) - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\# \text{ } i\text{-células}) \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

**Ejemplos.**

- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$
- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$
- $\chi(\bigvee_{i=0}^n S^1) = 1 - n$
- $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

**Teorema.** Sean  $X, Y$  complejos  $CW$ -finitos Si  $X \simeq Y$  entonces  $\chi(X) = \chi(Y)$ .

**Proposición.** Sea  $Y$  un complejo  $CW$  finito. Entonces,

$$\chi(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{ran } H_i(Y; \mathbb{Z})$$

Para entender qué es  $\text{ran } H_i$ , notemos que el complejo de cadenas está hecho por grupos abelianos finitamente generados, ya que  $Y$  es finito. De hecho, la homología de  $Y$  es una sucesión exacta de grupos finitos finitamente generados. Luego, por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados podemos descomponer un grupo en una expresión de la forma

$$A = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}}_{\text{libre de torsión}} \oplus \underbrace{\text{finito}}_{\text{torsión}}$$

donde  $r = \text{ran}(A)$  es el rango del grupo. Éste es el número que aparece en la proposición.

**Ejercicio.** Sea  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Entonces  $\text{ran } B = \text{ran } A + \text{ran } C$ .

Ahora demostremos la proposición:

*Demostración.* Tomemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

y recordemos que  $Z_n = \ker d_n$  y  $B_n = \text{img } d_{n+1}$  y  $H_n = Z_n/B_n$ . Sólo por eso tenemos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando el ejercicio, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ran } C_n &= \text{ran } Z_n + \text{ran } B_{n-1} \\ \text{ran } Z_n &= \text{ran } B_n + \text{ran } H_n \end{aligned}$$

Ahora primero por definición y luego usando lo anterior,

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{ran } C_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\text{ran } B_i + \text{ran } H_i + \text{ran } B_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{ran } H_i \quad \square \end{aligned}$$

□

Y con eso se demuestra fácilmente el teorema.



## 8. Homología y homotopía

### 8.1 El homomorfismo de Hurewicz

Comenzamos con algunas ideas algebraicas:

Sea  $G$  un grupo y sean  $g, h \in G$ . El conmutador de estos elementos es  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Dos elementos conmutan si y sólo si el conmutador es trivial. El subgrupo **derivado** o **subgrupo conmutador** es:

$$G' = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle \leq G$$

Ahora notemos que un homomorfismo de  $G$  se restringe a un homomorfismo de  $G'$ . Es decir, la restricción es un automorfismo de  $G'$ . Decimos que  $G'$  es un **subgrupo característico**. Luego, esto implica que es un subgrupo normal así que hago el cociente, y resultará ser un grupo abeliano porque todo lo que no conmuta se identificó. Este grupo es  $G^{\text{ab}} := G/G'$  y se llama la **abelianización** de  $G$ .

**Observación.** Al hacer esto con un grupo simple, cuyos subgrupos normales son él y el trivial, el cociente  $G/G'$  es el grupo trivial. Pero bueno, en general la idea es producir un grupo abeliano con cualquier grupo.

**Proposición.** Sean  $G$  un grupo y  $A$  un grupo abeliano. Si  $\varphi : G \rightarrow A$  es un homomorfismo, entonces  $\exists ! \bar{\varphi} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$  tal que

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow & \uparrow \varphi \\ & & G^{\text{ab}} \end{array}$$

conmuta.

**Definición.** El **homomorfismo de Hurewicz** es

$$\begin{aligned} h : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow H_1(X) \\ [f] &\mapsto [f] \end{aligned}$$

que está bien definido porque en efecto los lazos son ciclos (y no depende del representante).

**Teorema.** Si  $X$  es arco-conexo,  $h$  es suprayectivo y además  $\ker h = (\pi_1(X, x_0))'$ . Es decir, el abelianizado del grupo fundamental es isomorfo al primer grupo de homología de  $X$ .

**Corolario.**

- $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong H_1(S^1)$
- $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong H_1(S^1)$
- También se puede deducir para el toro que  $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ .

## 8.2 Grupos de homotopía superiores

Recordemos que el grupo fundamental quedó definido como

$$\begin{aligned}\pi_1(X, x_0) &= \{f : I \rightarrow X : f(0) = f(1) = x_0\} / \simeq \text{rel } 0, 1 \\ &= \{f : (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)\} / \simeq \text{rel } s_0\end{aligned}$$

En esta segunda expresión del grupo fundamental, podemos pensar que la operación del grupo está dada por una función definida en la cuña de dos círculos ya que debemos: (1) recorrer  $S^1$  al doble de velocidad y luego (2) identificar el punto base con su antípoda.

Así, podemos definir para  $n \geq 2$

$$\pi_n(X, x_0) = \{f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)\} / \simeq \text{rel } s_0$$

donde la operación del grupo está definida en la cuña de dos esferas  $n$ -dimensionales.

**Proposición.** Para todo  $n \geq 2$  y  $(X, x_0)$  espacio topológico punteado,  $\pi_n(X, x_0)$  es abeliano.

**Observación.** Cada elemento de  $\pi_0(X, x_0)$  representa una componente arco-conexa de  $X$ . ¡Pero  $\pi_0(X, x_0)$  no tiene estructura de grupo!

**Proposición.**  $\pi_n : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$  es un funtor para  $n \geq 1$ . Es decir, está bien definido en objetos y flechas, y manda la identidad en la identidad y es asociativo.

**Proposición.** Aquí también hay invarianza homotópica: si  $\varphi, \psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  son homotópicas, las inducidas en grupos de homotopía son la misma. En particular, si dos espacios son homotópicos vía una homotopía que preserva el punto base, entonces sus grupos de homotopía son el mismo.

El recíproco no es cierto, hay espacios con el mismo grupo de homotopía pero que no son equivalentemente homotópicos:  $\mathbb{R}^2$  y  $S^2$  tienen el mismo grupo fundamental pero su segundo grupo de homología es diferente.

El recíproco no es cierto, hay espacios con el mismo grupo de homotopía pero que no son equivalentemente homotópicos:  $\mathbb{R}^2$  y  $S^2$  tienen el mismo grupo fundamental pero su segundo grupo de homología es diferente. **Aquí** hay otro ejemplo.

Ahora, si pedimos que tengan el mismo grupo de homotopía y el mismo grupo de homología, ¿serán homotópicamente equivalentes?

**Teorema** (Whitehead). Sean  $X, Y$  complejos CW. Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  es tal que  $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  es un isomorfismo para toda  $n \geq 0$ . Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica.

De hecho sí hay espacios cuyos grupos de homotopía son isomorfos pero los espacios no son homotópicamente equivalentes, pero en estos casos el isomorfismo no está inducido por una función entre los espacios.

**Teorema.** Sea  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un cubriente entre espacios conexos. Entonces,  $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  es un isomorfismo para  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Tomamos un lazo  $f : S^n \rightarrow X$  y sabemos que hay un levantamiento. Eso prueba suprayectividad. Y para ver inyectividad, al tomar un lazo en el cubriente cuya proyección es homotópica a cero, podemos de hecho levantar la homotopía y obtenemos que el lazo arriba también es homotópico al constante.  $\square$

**Ejemplo.** Los grupos de homotopía del toro para  $n \geq 2$  son triviales por su cubriente universal,  $\mathbb{R}^2$ , que es contraíble. En general, cualquier espacio que tenga un cubriente contraíble tiene grupos de homotopía de orden superior triviales.

## 9. Ejercicios

**Ejercicio.** Calcule la homología de la pareja  $(X, A)$  cuando  $A$  es un subconjunto finito del toro  $X = S^1 \times S^1$ .

*Solución.* Como  $C_n(A) \cong 0$  para  $n \geq 1$ , tenemos que  $H_n(X, A) \cong H_n(X)$  para  $n > 1$ .

Para el caso  $n = 0$  primero notemos que  $(X, A)$  es una buena pareja tomando la unión de vecindades disjuntos alrededor de cada punto en  $A$  para hacer la retracción. Luego, la homología reducida **cumple** que

$$H_0(X/A) \cong \tilde{H}_0(X/A) \oplus R$$

Y como  $X/A$  es arco-conexo, entonces  $H_0(X/A) \cong R$ , así que  $\tilde{H}_0(X/A) \cong 0$ , es decir  $H_0(X, A) \cong 0$ .

**¿Cómo demostramos que  $H_1(X/A) \cong R^{k+1}$ , donde  $|A| = k$ ? Aquí** □

**Ejercicio.** Demuestre que  $S^1 \times S^1$  y  $S^1 \vee S^1 \vee S^2$  tienen grupos de homología (con coeficientes enteros) isomorfos pero no son homotópicamente equivalentes.

*Solución.* Por sus descomposiciones como complejos CW, sabemos que la homología de ambos espacios está dada por el complejo de cadenas

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

**Ya hemos visto que  $d_2 = 0$**  para el caso del toro. Ver que también es cierto para el espacio  $S^1 \vee S^1 \times S^2$  es sencillo, ya que la función de pegado colapsa la frontera de la única 2-celda a un sólo punto, así que induce funciones de grado cero en la homología.

Si estos espacios fueran homotópicamente equivalentes, entonces, **sus grupos fundamentales serían isomorfos**. Sabemos que el grupo fundamental del toro es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , y el de  $S^1 \vee S^1 \vee S^2$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , ya que **el grupo fundamental de una cuña de espacios** es isomorfo al producto libre de sus grupos fundamentales. □

**Ejercicio.** Construya una función suprayectiva  $f : S^n \rightarrow S^n$  de grado 0,  $n \geq 1$ .

*Solución.* Como el grado de la suspensión de una función es el mismo que el de la función, y  $S^{n+1} = SS^n$ , basta demostrar el enunciado para  $S^1$ .

Proponemos [esta idea](#) para demostrar mostrar el caso  $n = 1$ :

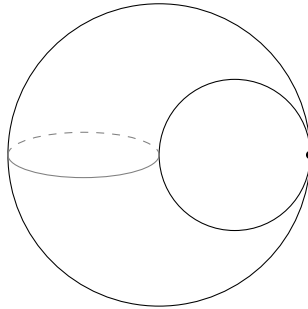
Definir una función  $g$  que sea recorrer el hemisferio sur de ida y de regreso. No es suprayectiva así que es de grado 0.

Componer  $g$  con  $f$ , donde  $f(z) = z^2$ . La composición es suprayectiva y su grado es el producto de los grados, 0.  $\square$

**Ejercicio.** Calcule los grupos de homología del espacio obtenido de  $S^2$  al identificar el polo norte y el polo sur en un sólo punto.

*Solución.* La descomposición más sencilla (que pude encontrar) de este espacio como complejo CW está dada así:

- Una 0-celda, que es el punto que resaltamos en el dibujo.
- Dos 1-celdas, que son los círculos que se tocan en el punto.
- Dos 2-celdas. Cada una está pegada a lo largo de las dos 1-celdas. Es como cuando pegamos dos discos a lo largo de una circunferencia para construir una esfera, pero aquí pegamos dos discos a lo largo de la cuña de dos circunferencias.



Esto genera el siguiente complejo de cadenas:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} 0$$

Como sólo hay una 0-celda, sabemos que  $d_1 = 0$ . Sólo nos falta encontrar  $d_2$ . Para esto, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^1_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^1 = S^1 \vee S^1 \\ \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & & \downarrow \\ S^1_\beta & \leftarrow & X^1/X^0 = S^1 \vee S^1 \end{array}$$

¿Qué está pasando aquí? Estamos pensando que  $S_\alpha^1$  es la frontera de una de las dos 2-celdas que pegamos mediante  $\varphi_\alpha$ . Como sólo hay una 0-celda, el cociente  $X^1/X^0$  no hizo nada, y la última flecha consiste en simplemente escoger cualquier de los dos círculos son 1-celdas.

El mapeo  $\varphi_\alpha$  tiene la gracia de enviar la circunferencia inicial en dos circunferencias. Cuando nos quedamos con una sólo de ellas, vemos que el efecto de la composición  $\varphi_{\alpha\beta}$  fue enviar  $S_\alpha^1$  en  $S_\beta^1$ , así que es una función de grado 1. Lo mismo sucede cuando escogemos la otra circunferencia,  $S_\gamma^1$ . De acuerdo a nuestro teorema, tenemos que  $d_2(e_\alpha^2) = 1 \cdot e_\beta^1 + 1 \cdot e_\gamma^1$ .

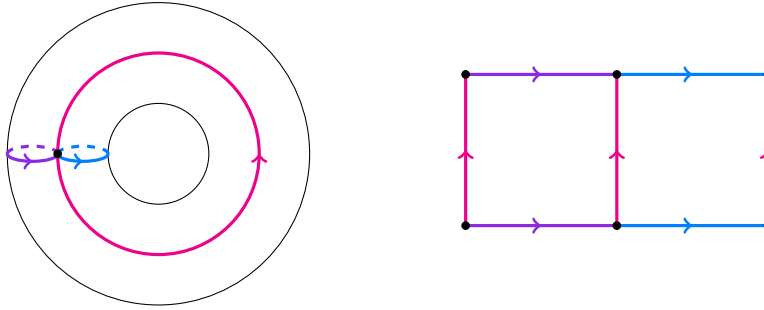
Y lo mismo para la otra 2-celda. Luego,

$$\begin{aligned} d_2 : \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (1, 0) &\mapsto (1, 1) \\ (0, 1) &\mapsto (1, 1) \end{aligned}$$

Así que  $\text{img } d_2 \cong \mathbb{Z}$  y  $\ker d_2 \cong \langle (1, 0) - (0, 1) \rangle \cong \mathbb{Z}$ , y entonces  $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong H_1(X, \mathbb{Z}) \cong H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_n(X, \mathbb{Z}) \cong 0$  para  $n \geq 3$ .  $\square$

**Ejercicio.** Calcule los grupos de homología de  $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$ .

*Solución.* Se trata del siguiente espacio:



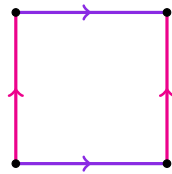
Cuyo complejo de cadenas celular es:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

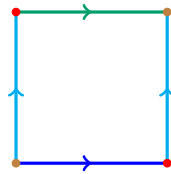
Y por un razonamiento análogo al cálculo de la **homología del toro**,  $d_2 = 0$  y concluimos que  $H_2(X) = \mathbb{Z}^2$ ,  $H_1(X) = H_0(X) = \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Ejercicio.** Use la sucesión de Mayer-Vietoris para calcular los grupos de homología del espacio obtenido de pegar una banda de Möbius  $M$  al toro  $S^1 \times S^1$  vía un homeomorfismo del círculo frontera de  $M$  al ecuador  $S^1 \times \{0\}$  del toro.

*Solución.* Primero recordemos las estructuras celulares que le dimos a estos espacios:



Toro



Banda de Möbius

No es obvio cómo pegarlos porque el círculo frontera de la banda de Möbius está formado por dos aristas (la verde y la azul fuerte), que deberían ir pegadas a una sola de las aristas del toro. Entonces, técnicamente no nos conviene usar la sucesión de Mayer-Vietoris en su versión para complejos CW. Pero esto no es problema, porque, aunque ni el toro ni la banda son abiertos de nuestro espacio, sí son retracts por deformación de ciertas vecindades.

Una vez dicho esto, tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow H_2(T^2 \cap M) \xrightarrow{(i_{*2}, -j_{*2})} H_2(T^2) \oplus H_2(M) \xrightarrow{k_{*2} + \ell_{*2}} H_2(X) \xrightarrow{\delta} H_1(T^2 \cap M) \\
 &\longrightarrow H_1(T^2 \cap M) \xrightarrow{(i_{*1}, -j_{*1})} H_1(T^2) \oplus H_1(M) \xrightarrow{k_{*1} + \ell_{*1}} H_1(X) \xrightarrow{\delta} H_0(T^2 \cap M)
 \end{aligned}$$

\*Falta\*

□