

Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

July 3, 2023

Índice

Índice	2
I Grupo fundamental	4
1 El grupo fundamental	5
1.1 Homomorfismos inducidos (functorialidad)	5
1.2 Homotopía	5
2 El teorema de Van Kampen	7
2.1 Grupos libres	7
2.2 Productos libres	7
2.3 Subgrupos normalmente generados	8
2.4 El teorema de Van Kampen	8
II Espacios cubrientes	10
III Homología	11
3 Álgebra Homológica	12
3.1 Conceptos básicos	12
3.2 Sucesiones exactas	13
3.3 Homotopía	14
3.4 El lema de la serpiente	15
3.5 Teorema fundamental del álgebra homológica	16
3.6 Naturalidad del homomorfismo de conexión	17
3.7 Lema de los cinco	17

4	Homología singular	18
4.1	Simplejos	18
4.2	El complejo de cadenas singulares	19
4.3	Primeras propiedades de la homología	20
4.3.1	La homología y las componentes arco-conexas	20
4.3.2	El 0-ésimo grupo de homología	20
4.3.3	La homología de un punto	21
4.4	Homología reducida	21
4.5	Funtorialidad	21
4.6	Invarianza homotópica	21
4.7	Homología relativa	22
4.8	Escisión	23
4.9	La sucesión de Mayer-Vietoris	24
4.10	Representantes de la homología de la esfera	24
4.11	Generadores para la homología de la esfera	25
4.12	Grado de una función entre esferas	25
4.12.1	Grado local	26
5	Complejos CW	27
5.1	Construcción	27
5.2	Homología de complejos CW	28
5.3	Ejemplos	30
5.4	Característica de Euler	31
5.5	Ejercicios	33

Parte I

Grupo fundamental

1. El grupo fundamental

1.1 Homomorfismos inducidos (funtorialidad)

Primero establezcamos algo de notación. Si $f : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y $f(x_0) = y_0$, escribimos $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Teorema (El grupo fundamental es un funtor $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Grp}$). La función $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce un homomorfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

tal que

1. Si $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
2. $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$

1.2 Homotopía

Dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una función que llamaremos **homotopía** de la forma $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por $f \simeq g$.

Si tenemos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ y f es tal que $f(A) \subseteq B$, escribiremos

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

Una homotopía entre funciones de este estilo es una función $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que todas las funciones que obtenemos al cambiar el parámetro en el tiempo sean funciones que siguen enviando A en B . Es decir, que tenemos las funciones

$$H(., t) : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad \forall t \in I$$

tales que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

Y en particular, si $A = \{x_0\}$ y $B = \{y_0\}$, igualito que antes, escribiremos

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

En este caso, diremos que **homotopía que preserva el punto base** es una función $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x_0, t) &= y_0 & \forall t \in I \\ H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y diremos, así nomás, que f y g son homotópicas, especificando si es necesario que la homotopía preserva el punto base.

Proposición. Si $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ son homotópicas (preservando el punto base) entonces inducen el mismo homomorfismo en grupos fundamentales, es decir, $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Definición. Dos espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas** $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. Y se denota por $X \simeq Y$.

Corolario. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $g : Y \rightarrow X$ es como en la definición anterior. Basta mostrar que f_* y g_* son inversas una de la otra. Y sí, porque $Id_{\pi_1(X, x_0)} = (gf)_* = g_*f_*$ y análogamente $Id_{\pi_1(Y, y_0)} = f_*g_*$. \square

2. El teorema de Van Kampen

2.1 Grupos libres

2.2 Productos libres

En teoría de grupos, normalmente definimos el producto directo pensando en algo así:

$$\begin{array}{ccc} & G \times H & \\ g \mapsto (g,1) \nearrow & & \nwarrow h \mapsto (1,h) \\ G_\alpha & & H \end{array}$$

donde el producto es conmutativo, es decir

$$(g, 1)(1, h) = (1, h)(g, 1)$$

Ahora vamos a definir un producto que se llamará el **producto libre** donde los elementos no van a conmutar:

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de grupos. Como conjunto, el producto libre $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ consiste de las palabras $g_1 g_2 \dots g_m$ para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ donde cada g_i está en algún G_α . Además, $g_i \neq 1$, y g_i, g_{i+1} siempre pertenecen a diferentes G_α , es decir $g_i \in G_\alpha$ y $g_{i+1} \in G_\beta$ con $\alpha \neq \beta$. En este caso, decimos que $g_1 \dots g_m$ es una **palabra reducida**.

La operación binaria en $*_{\alpha \in I}$ está dada por la concatenación.

Observación. Cada uno de los G_α está contenido en $*_{\alpha \in I} G_\alpha$, pues están en la forma de palabras de una sola letra. En símbolos:

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow *_{\alpha \in I} G_\alpha \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad universal del producto libre). Dados los homomorfismos $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : *_{\alpha \in I} G_\alpha \rightarrow H$ que extiende a los φ_α , es

decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & H \\ & \searrow & \nearrow \varphi \\ & *_{\alpha \in I} G_\alpha & \end{array}$$

2.3 Subgrupos normalmente generados

2.4 El teorema de Van Kampen

Imagínense que queremos calcular el grupo fundamental de un espacio pero no sabemos cómo. (Esto pasa muy seguido). Pero resulta que podemos ver este espacio como la unión de muchos subespacios de los que conocemos sus grupos fundamentales. Éste es el escenario del teorema de Van Kampen.

Tomemos un espacio topológico X , un punto base $x_0 \in X$ y supongamos que $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ para ciertos espacios A_α tales que $x_0 \in A_\alpha$, para toda $\alpha \in I$, y además supongamos que los A_α son arco-conexos.

Así que como los A_α son subespacios, podemos pensar en la inclusión $A_\alpha \hookrightarrow X$ y en los homomorfismos inducidos en los grupos fundamentales, que llamaremos $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Entonces, por la propiedad fundamental del producto libre, tenemos un homomorfismo que sale del producto libre de esos grupos al grupo fundamental de X , es decir

$$*_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

El teorema nos dirá que esta función es suprayectiva. Intuitivamente, nos dice que cualquier lazo en X es homotópico a otro lazo que es la concatenación de ciertos lazos, cada uno completamente contenido en alguno de los A_α .

Ahora pensemos en un lazo que está en la intersección de dos de los A_α . Podemos pensar el lazo está en, digamos, A_α , y su inverso está en A_β . Entonces, como elemento en el producto libre $*_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0)$, este lazo no es la identidad. Pero al empujarlo al grupo $\pi_1(X, x_0)$, sí es la identidad. Bueno, todo esto para decir que el mapeo que hemos construido no es inyectivo.

Ahora pensemos que para $\alpha, \beta \in I$, tenemos la inclusión $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, que induce un mapeo

$$i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$$

. (El orden de los subíndices fue importante, ya que el codominio está dado por el primer símbolo en el subíndice).

Juntemos lo que hemos dicho en los dos párrafos anteriores. El lazo no trivial $1 \neq i_{\alpha\beta}[f]i_{\beta\alpha}[\bar{f}] \in *_{\alpha \in I} A_\alpha$ puede ser empujado a $\pi_1(X, x_0)$. El teorema de Van Kampen nos dirá que el kernel del homomorfismo (que ya dijimos que seguramente no es inyectivo) está generado justamente por elementos de ese estilo.

Ahora sí:

Teorema (de Van Kampen). Si $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ con A_α arco-conexo $\forall \alpha \in I$, $x_0 \in A_\alpha$, y además $A_\alpha \cap A_\beta$ es arco-conexo $\forall \alpha, \beta \in I$. Entonces el homomorfismo

$$\Phi : *_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es suprayectivo.

Si además $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es arcoconexo $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$, entonces

$$\ker \Phi = \langle \langle i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} : \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rangle \rangle$$

En particular,

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) / \ker \Phi$$

Parte II

Espacios cubrientes

Parte III

Homología

3. Álgebra Homológica

3.1 Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R .

Definición. Un R -complejo de cadenas es una sucesión de R -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un morfismo de R -complejos de cadenas es $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R -homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que (D_\bullet, δ) es un **subcomplejo de cadenas** de (C_\bullet, ∂) si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

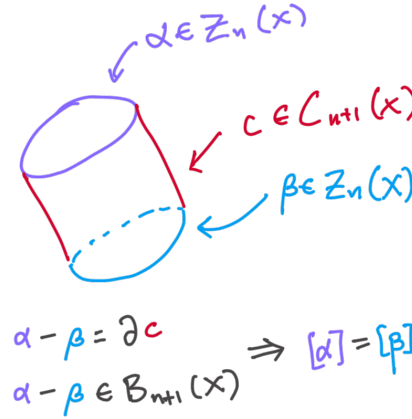
- Los elementos en C_p se llaman **cadena de dimensión p** .
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión p** .
- Los elementos en $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión p** .

Definición. El p -ésimo grupo de homología de (C_\bullet, d) es

$$H_p(C) := Z_p / B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida). Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

3.2 Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en C_p** si $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p . Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
 2. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si $\text{img } \alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
 3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
 4. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker \beta = \text{img } \alpha$, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img } \alpha$.
- Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B , podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo). Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

3.3 Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_{\bullet}, \partial) \rightarrow (C'_{\bullet}, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

3.4 El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente). Consideremos el diagrama conmutativo de R -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' , y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 & \xrightarrow{\delta_*} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 & \end{array}$$

donde $\text{coker } \partial_i = Z_i / \partial_i$. (Este diagrama fue tomado de [internet](#)).

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

3.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_{\bullet} \xrightarrow{f} D_{\bullet} \xrightarrow{g} E_{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

es exacta en D_{\bullet} si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\phi} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi} C_{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C_{\bullet}) \rightarrow H_{p-1}(A_{\bullet})$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

3.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{i} & B_{\bullet} & \xrightarrow{j} & C_{\bullet} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \longrightarrow & B'_{\bullet} & \longrightarrow & C'_{\bullet} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

3.7 Lema de los cinco

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

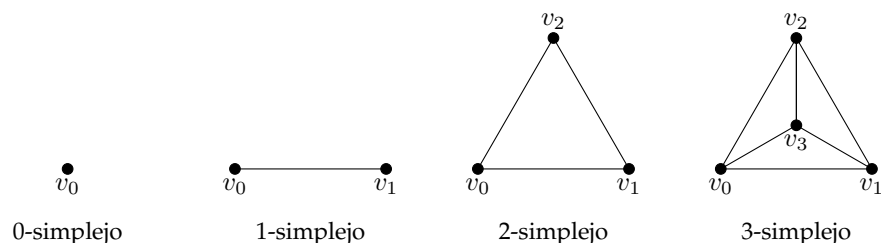
Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

¿En dónde se usará esto?

4. Homología singular

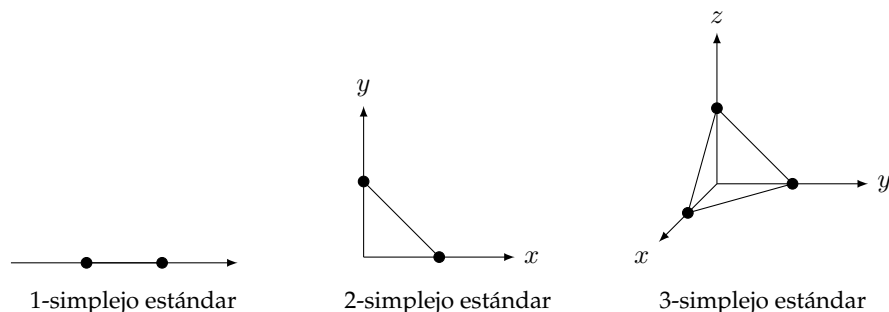
4.1 Simplejos

Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero $n \geq 0$. Un n -**simplejo** es el convexo más pequeño en \mathbb{R}^m ($m > n$) que contiene $n + 1$ puntos v_0, \dots, v_n que no viven en un hiperplano de dimensión menor que n .



Lo denotaremos por $[v_0, \dots, v_n]$ y diremos que v_0, \dots, v_n son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así: $[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$.

El n -**simplejo estándar** es $\Delta^n := [e_1, \dots, e_n]$ donde e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} .



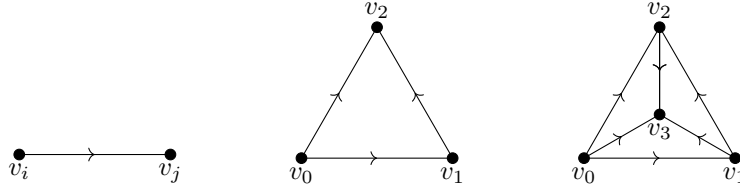
Y observemos que $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\}$ Para nosotros el orden de los vértices en $[v_0, \dots, v_n]$ es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un n -simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned} (v_0, \dots, v_n) : \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0 + \dots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Y diremos que (t_0, \dots, t_n) son las **coordenadas baricéntricas** del punto $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in [v_0, \dots, v_n]$.

Una **cara** de $[v_0, \dots, v_n]$ es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de v_0, \dots, v_n . Cualquier cara 1-dimensional $[v_i, v_j]$ con $i < j$ vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

4.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico X y un anillo asociativo con unidad R . Un **n -simplejo singular** es una función $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

El término “singular” proviene de que no se le imponen condiciones a la función σ salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in R, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el R -módulo libre generado por el conjunto de n -simplejos singulares. Los elementos de C_n se llaman n -cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \quad (4.1)$$

Para lo cual basta definir $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos: $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos:

$$\begin{array}{ccc} [v_0, \dots, v_n] & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] & \longleftarrow & [v_0, \dots, v_{n-1}] = \Delta^{n-1} \end{array}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el i -ésimo. Y bueno, así queda definida la función ∂_n en la base de C_n , y simplemente extendemos por linealidad a todo C_n . Ahora veamos una proposición:

Proposición. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (4.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de X** , que denotaremos por $C_\bullet(X)$. Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X; R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el n -ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en R .

4.3 Primeras propiedades de la homología

4.3.1 La homología y las componentes arco-conexas

Proposición. Sea $X = \bigsqcup X_i$ la descomposición en componentes arco-conexas del espacio topológico X , entonces

$$H_n(\bigsqcup X_i, R) \cong \bigoplus H_n(X_i, R)$$

4.3.2 El 0-ésimo grupo de homología

Proposición. Para cualquier espacio X , $H_0(X; R)$ es una suma directa de copias de R , una por cada componente arcoconexa.

4.3.3 La homología de un punto

Proposición. Si X consiste de un sólo punto, entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

4.4 Homología reducida

Considera

$$\cdots \rightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

donde $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$ es el **mapeo de aumentación**.

Va a resultar que $\tilde{H}_n(X; R) = H_n(X; R)$ para toda $n \geq 1$.

Sobre la homología reducida del espacio que es un sólo punto

Sabemos por la proposición de la homología de un punto que si $X = \{x\}$, entonces $H_0(X) = R$, es decir, $\ker \partial_0 / \text{img } \partial_1 = R$. Esto implica que la sucesión corta $0 \rightarrow \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\partial_1} \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ es exacta.

¿Cómo deducimos de aquí que $\tilde{H}_0(X; R) = 0$? Bueno resulta que como el espacio es un punto, $\partial_1 = 0$, así que de entrada $\text{img } \partial_1 = 0$. Luego, en realidad tenemos la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ que hace a ∂_0 un isomorfismo que en particular es inyectivo.

Como $\tilde{H}_0 = \ker \partial_0 / \text{img } \partial_1$, entonces $\tilde{H}_0(X; R) = 0$.

Y en general $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$

4.5 Funtorialidad

4.6 Invarianza homotópica

Primero [recordemos](#) que

Definición. Dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe una función $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por $f \simeq g$.

Definición. Dos espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas** $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. Y se denota por $X \simeq Y$.

Ahora sí:

Teorema. Si dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo en el n -ésimo grupo de homología $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ para toda n .

Corolario. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para toda n .

Demostración. Usando el teorema y las propiedades de funtorialidad. □

Ejemplo. Si $X \simeq \{x_0\}$, es decir X es **contraíble**, entonces

$$H_n(X, R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

4.7 Homología relativa

Sean $A \subseteq X$ espacios topológicos. Diremos que (X, A) es una buena pareja. Notemos que $(C_\bullet(A))$ es un subcomplejo de $C_\bullet(X)$, así que podemos definir el complejo relativo

$$C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

Y esto simplemente quiere decir que para toda n ,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

de forma que las cadenas en A se vuelven triviales.

Es claro que el n -ésimo operador frontera restringido a $C_n(A)$ se mapea a $C_{n-1}(A)$, (pues la frontera de una cadena en A no podría salirse de A). Esto quiere decir que el mapeo frontera está bien definido en el cociente.

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

Esto induce la homología dada por

$$H_n(X, A) = \ker \partial_n / \text{img } \partial_{n-1}$$

Ejercicio. $H_n(X, \{x_0\}) = H_n(X)$.

Ahora lo primero que pasa es que tenemos una sucesión exacta corta a la que aplicaremos el teorema fundamental del álgebra homológica: Así que obtenemos la **sucesión exacta larga de la pareja**

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

Como primera observación notemos que si los grupos de homología de la pareja $C_p(X, A)$ fueran triviales, automáticamente tendríamos que el mapeo inducido por la inclusión sería un isomorfismo. De hecho, esto es un si y sólo si. Así, los grupos de homología miden qué tan diferentes son los grupos de homología de A y los de X .

Finalmente agregamos el comentario de que aunque el mapeo ∂ que usamos para completar la sucesión exacta larga de la pareja viene del teorema fundamental del álgebra homológica, y al recordar la demostración del teorema nos damos cuenta de que este mapeo actúa exactamente como el operador frontera original de X .

4.8 Escisión

Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ tales que la cerradura de Z está contenida en el interior de A . Entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Equivalentemente, para subespacios $A, B \subseteq X$ cuyos interiores cubren a X , la inclusión

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Definición. Decimos que (X, A) es un **buen par** si A es cerrado y es retracto fuerte por deformación de una vecindad en X .

El arete hawaiano no es un buen par porque cualquier vecindad del punto de pegado contiene un círculo entero, así que no se puede retraer por deformación.

Teorema. Sea (X, A) un buen par, entonces

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$$

induce isomorfismos para toda n de la forma

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

donde la tilde denota la homología reducida.

En la demostración se usa lema de los 5, invarianza homotópica, etc.

Corolario. Sea (X, A) un buen par. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X/A) \rightarrow \cdots$$

Teorema (Homología de la esfera).

$$\tilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

Teorema (del punto fijo de Bruwer). Sean $n \geq 2$ y $f : D^n \rightarrow D^n$, entonces f tiene un punto fijo.

4.9 La sucesión de Mayer-Vietoris

Sea X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ tales que $X = \text{int } A \cup \text{int } B$. Entonces tenemos la siguiente sucesión larga en homología reducida:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X) \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Ejemplo. Veamos el toro $S^1 \times S^1$ visto como en el examen, con $A = D^2$ y $B = S^1 \vee S^1$, casi todos los grupos de homología se hacen cero (aquí hay que usar que la homología de la cuña es la suma de las homologías de los "cuñandos"), y que la homología de S^1 es cero cuando el subíndice es mayor o igual que 2. En fin, para $m > 2$, $\tilde{H}_m(X) = 0$.

Ahora para la parte que sí nos toca, *Falta*

4.10 Representantes de la homología de la esfera

En esta sección usaremos $R = \mathbb{Z}$.

Proposición. $Id : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ representa un generador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

Demostración. Por inducción en n . Si $n = 0$, entonces $\Delta^0 = \{e_0\}$ es un punto y su frontera es el vacío. Luego $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) = H_0(\Delta^0) = \mathbb{Z} = \langle [e_0] \rangle$.

Ahora supongamos para n y demostremos para $n + 1$. Definamos Λ como la unión de todas las $n - 1$ caras en la frontera salvo alguna. Luego

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\delta} H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\iota} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

Luego como puedo retraer el simplejo en el Λ ,

$$H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) = 0$$

Así que (creo que) incluyendo el de en medio la primera ecuación en este anterior, obtenemos que δ es un isomorfismo.

Para checar ι ,

$$H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n / \Lambda) H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^{n-1} / \partial\Delta^{n-1})$$

Y los dos de la derecha deben ser isomorfos. Hay un cuadrado conmutativo abajo de la inclusión ι . Luego ι_{n-1} genera por hipótesis inductiva... \square

$$\begin{array}{ccc}
S^2 - x & & \tilde{H}_n(S^2 - x) \cong 0 \\
\uparrow f & \searrow & \uparrow f_* \\
S^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\
& & \tilde{H}_n(S^2) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(S^2)
\end{array}$$

4.11 Generadores para la homología de la esfera

Observación.

- $H_i(D^n, \partial D^n) \cong H_i(S^n)$
- Usaremos los homeomorfismos $(D^n, \partial D^n) \cong (\Delta^n, \partial \Delta^n)$

Proposición. Pensando que S^n es $\Delta^n \cup_{\partial \Delta^n} \Delta^n$, y denotado cada copia de Δ^n con un subíndice, tenemos que $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ es un generador de $H_n(S^n)$ para $n > 0$.

4.12 Grado de una función entre esferas

Hagamos dos observaciones básicas:

- $H_i(D^n, \partial D^n) \cong H_i(S^n)$
- Usaremos los homeomorfismos $(D^n, \partial D^n) \cong (\Delta^n, \partial \Delta^n)$.

Proposición. content...Pensando que S^n es $\Delta^n \cup_{\partial \Delta^n} \Delta^n$, y denotado cada copia de Δ^n con un subíndice, tenemos que $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ es un generador de $H_n(S^n)$ para $n > 0$.

Definición. En la notación de arriba, el **grado** de f es d .

Proposición. 1. $\deg Id = 1$

Demostración. Por funtorialidad. □

2. Si f no es suprayectiva, entonces $\deg(f) = 0$.

Demostración. Como f no es suprayectiva puedo escoger un punto $x \notin \text{img } f$. Entonces puedo pensar en el diagrama y su inducido. Y como el primero es conmutativo, el segundo también, y entonces f_* es constante. □

3. $f \simeq g$ entonces $\deg f = \deg g$

Demostración. Por invarianza homotópica las funciones inducidas son iguales. □

4. $\deg(fg) = \deg(f) \deg(g)$

5. Si f es una reflexión que intercambia los hemisferios, entonces $\deg(f) = -1$.

6. La función antipodal $-Id : S^n \rightarrow S^n$ tiene grado $(-1)^{n+1}$. Es decir,

$$\deg(-Id) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

7. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

4.12.1 Grado local

Siguiendo a Hatcher,

Definición. Supongamos que $f : S^n \rightarrow S^n$ es tal que la imagen inversa de algún $y \in S^n$ consiste de una cantidad finita de puntos, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Tomemos una familia de abiertos disjuntos U_1, \dots, U_m que contengan a cada x_i , y que vayan a dar a una vecindad V de y bajo f . Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo f_* originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, la multiplicación por un número que se llama el ****grado local**** de f y se denota $\deg f|_{x_i}$.

Supongamos que $f : S^n \rightarrow S^n$ es tal que la imagen inversa de algún $y \in S^n$ consiste de una cantidad finita de puntos, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Tomemos una familia de abiertos disjuntos U_1, \dots, U_m que contengan a cada x_i , y que vayan a dar a una vecindad V de y bajo f . Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo f_* originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, la multiplicación por un número que se llama el ****grado local**** de f y se denota $\deg f|_{x_i}$.

Y luego:

Teorema. $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$

5. Complejos CW

5.1 Construcción

Establezcamos algo de notación

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ es el n -disco cerrado.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ es la n -esfera.
- $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ es la n -célula abierta o sólo la n -célula.

De tal forma que

- $\partial D^n = S^{n-1}$
- $D^n = e^n \cup S^{n-1}$ como conjuntos (no se usa la topología de la unión disjunta)
- Y bueno debe ser cierto que $e^0 = \{pt\}$.

Definición. Un espacio X es un complejo CW si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con un espacio discreto X^0 que se llama el 0-esqueleto.
2. El n -esqueleto X^n lo obtengo a partir del $n - 1$ -esqueleto X^{n-1} pegando n -células e_α^n vía funciones $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Formalmente tenemos el espacio

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n / \sim \quad x \sim \varphi_{\alpha}(x) \quad \text{si} \quad x \in \partial D_{\alpha}^n$$

Realmente es tomar puntos y unirlos con líneas, y luego tomar líneas y rellenar con discos, etc...

3. Realmente es tomar puntos y unir líneas entre ellos, y luego pegar puntos o líneas con discos, etc...

Definición. Si $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, decimos que X es de dimensión finita y definimos la dimensión de X como la dimensión de la célula más grande que adjunté. Formalmente, $\dim X = \min\{n : X^n = X\}$.

Ejemplo. • Los 0-complejos CW son gráficas.

- S^n es un complejo CW.
- Los espacios proyectivos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / x \sim \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\
 &= S^n / x \sim -x \\
 &= D^n / x \sim -x, \quad x \in \partial D^n = S^{n-1} \\
 &= \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n \\
 &= \mathbb{R}P^{n-2} \cup e^{n-1} \cup e^n \\
 &= e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n
 \end{aligned}$$

donde las funciones de pegado son justamente las antipodales, que ya conocíamos por ser el cubriente universal.

Ejercicio. Todo complejo CW es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, todo complejo CW tiene cubriente universal.

Definición. La función característica es Φ_α :

$$\begin{array}{ccc}
 e_\alpha^n & & X^{n-1} \sqcup D_\alpha^n \\
 \text{inclusión} \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{proyección al cociente} \\
 D_\alpha^n & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & X^n
 \end{array}$$

Definición. Sea X un complejo CW. Un subcomplejo Z es un subespacio cerrado que además es unión de células de X .

Observación. Para un subcomplejo Z ,

- $Z \subseteq X$ es una buena pareja (Z es retracto por deformación de una vecindad de X)
- X/Z es un complejo CW.

Observación (Muy importante). X complejo CW. El cociente por el $n-1$ esqueleto es una cuña de esferas, tantas como células en el $n-1$ esqueleto. En símbolos, $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$, donde I_n es el conjunto que indexa las $n-1$ -celdas.

5.2 Homología de complejos CW

Lema.

•

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in I_n} R & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\text{Demostración. } H_k = \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in I_n} S^n) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} H_k(S^n)$$

□

- $H_k(X^n) = 0$ para toda $k > n$.

Nuevamente, la homología, lo que aclance a ver la homología, lo ve solamente hasta la dimensión del espacio

- La inclusión $X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $H_k(X^n) \hookrightarrow H_k(X)$ $k > n$.

Aquí la idea es que adjuntar células de dimensión mayor que la homología que estamos calculando no cambia la homología. Es decir, para $n > k$ se tiene que $H_k(X \cup D^n) = H_k(X)$.

Demostración. Fijémonos en (X^n, X^{n-1}) , hay una sucesión exacta corta de la pareja:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Usando el inciso 1, si $k \neq n, n-1$ entonces $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$.

Bueno para demostrar (2), justamente tenemos $k > n$ y entonces resultará, fijando k y bajando uno por uno, $H_k(X^n) \cong H_k(X^0)$ que es un espacio discreto y la homología de grado mayor que cero en espacios discretos es cero. Terminamos el inciso (2).

Para (3), si $k < n < n+1 < n+2 < \dots$, simplemente tenemos que

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m})$$

y si pedimos que X sea de dimensión finita entonces terminaremos en algún punto y listo. El caso de dimensión infinita queda para el futuro. \square

Definición (Homología celular). Consideremos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \\
 & \nearrow \partial_n & & \searrow j_{n-1} & & & \\
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & & \\
 & & \searrow \partial_{n-1} & & \nearrow j_{n-2} & & \\
 & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & & &
 \end{array}$$

Resultará que las flechas horizontales que definimos con los triangulitos, es decir las d_i , satisfacen que

$$d_{n+1} \circ d_n = 0$$

así que podemos bautizar el **complejo de cadenas celular** $C_\bullet^{CW}(X, R)$. Y ahora podemos definir la **homología celular**:

$$H_n^{CW}(X; R) = H_n(C_\bullet^{CW}(X))$$

Teorema.

$$H_n^{CW}(X; R) \cong H_n(X; R) \quad \forall n \geq 0$$

El primero depende de la estructura celular del espacio X , pero el segundo no. Así, la homología de un complejo CW es independiente de la estructura celular.

Observación. Estos grupos $H_n(X^n, X^{n-1})$ son las sumas directas de R , uno por cada n -célula de X .

Bueno, ahora tratemos de entender cómo es la d . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^{n-1} \\ \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & & \downarrow \\ S_\beta^{n-1} & \longleftarrow & \bigvee_{\gamma \in I_n} S_\gamma^{n-1} = X^{n-1}/X^{n-2} \end{array}$$

Esta función que descubrimos $\varphi_{\alpha\beta}$ es una función entre esferas que tiene un grado $d_{\alpha\beta}$.

Teorema. Para $n \geq 2$, la diferencial d_n manda $e_\alpha^n \mapsto \sum d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$.

5.3 Ejemplos

Ejemplo. Calculamos de dos maneras distintas la homología de $X = \bigvee_{\alpha \in I} S_\alpha^1$, por un lado usando directamente que $H_0(X) = R$ y otro usando el teorema anterior. Para el teorema anterior, descubrimos que para como sólo hay una 0-célula, para cualquier α , $e_\alpha^1 \mapsto x_0 - x_0 = 0$, así que de hecho $d_1 = 0$. Resulta que $H_1 = \bigoplus_I R$.

De hecho, esto es cierto en general:

Lema. Si X es un complejo con una única 0-célula, entonces $d_1 = 0$.

Ejemplo (El toro). Hemos visto que hay una descomposición del toro pegando los lados de un cuadrado. De acuerdo a este lema, y a la [observación](#) hecha hace unos momentos, contando los vértices y las aristas de esa descomposición obtenemos la siguiente homología:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(Eventualmente se descubre que $d_2 = 0$.)

Teorema (Extra). Una superficie compacta y conexa sólo puede ser una esfera, un toro, una suma conexa de toros, el plano proyectivo o una suma conexa de planos proyectivos.

Ejemplo (El toro de género g). Resulta que el toro doble se puede ver como el cociente de un octágono identificando aristas. Y en general, el g -toro es el cociente de un $4g$ -ágono. El resultado final es que $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$, $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ y $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (El plano proyectivo). Aquí, $d_2 = 2$. $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$ y $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$.

Observación. Esta clase de ejercicios viene en los exámenes generales.

Ejemplo ($\mathbb{R}P^n$). Recordemos la descomposición de $\mathbb{R}P^n$ como complejo CW : $\mathbb{R}P^n = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n$. El diagrama de arriba se vuelve:

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^{k-1} \\ \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow q \\ S^{k-1} & \longleftarrow & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \end{array}$$

Las funciones de pegado φ_α son la proyección al cociente función antipodal en la esfera (el cubriente del plano proyectivo). Estas funciones son dos a dos, y esto hace que el hemisferio norte de S^{k-1} se mapee homeomorfamente a S^{k-1} menos un punto (a donde va a dar el hemisferio sur).

Ahora observemos que la funciones que obtenemos cuando restringimos $\bar{\varphi}$ a cada hemisferio difieren una de la otra por el mapeo antipodal. A la hora de calcular el grado, obtenemos la fórmula $\deg(q\varphi) = 1 + (-1)^k$ usando que de alguna forma, escogiendo una orientación, podemos hacer que estos mapeos tengan grado ± 1 (Hatcher usa lo del grado local).

En fin,

$$\deg \bar{\varphi} = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto genera la homología siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Para $\mathbb{R}P^3$, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2 = 0$ y $H_3 = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (Primer ejemplo donde cambian las cosas si cambiamos de anillo). Tomemos $\mathbb{R}P^n$ y el anillo $R = \mathbb{Q}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Pero ahora la función multiplicar por 2 manda \mathbb{Q} en todo \mathbb{Q} , algo que no pasaba con \mathbb{Z} . Esto hace que la homología sea trivial, es decir, $H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Q}) = 0$ para toda $n \geq 1$.

Ejemplo. ¿Y si tomamos $R = \mathbb{Z}/2$? Multiplicar por 2 es la función 0, así que $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ para $0 \leq m \leq n$.

5.4 Característica de Euler

Sea Y un complejo CW finito (con un número finito de células). De hecho esta propiedad es equivalente a que el espacio Y sea compacto. Definimos la característica de Euler como

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= (\# \text{ 0-células}) - (\# \text{ 1-células}) + (\# \text{ 2-células}) - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\# \text{ } i\text{-células}) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplos.

- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$
- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$
- $\chi(\bigvee_{i=0}^n S^1) = 1 - n$
- $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

Teorema. Sean X, Y complejos CW-finitos Si $X \simeq Y$ entonces $\chi(X) = \chi(Y)$.

Proposición. Sea Y un complejo CW finito. Entonces,

$$\chi(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{ran } H_i(Y; \mathbb{Z})$$

Para entender qué es $\text{ran } H_i$, notemos que el complejo de cadenas está hecho por grupos abelianos finitamente generados, ya que Y es finito. De hecho, la homología de Y es una sucesión exacta de grupos finitos finitamente generados. Luego, por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados podemos descomponer un grupo en una expresión de la forma

$$A = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}}_{\text{libre de torsión}} \oplus \underbrace{\text{finito}}_{\text{torsión}}$$

donde $r = \text{ran}(A)$ es el rango del grupo. Éste es el número que aparece en la proposición.

Ejercicio. Sea $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Entonces $\text{ran } B = \text{ran } A + \text{ran } C$.

Ahora demostremos la proposición:

Demostración. Tomemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

y recordemos que $Z_n = \ker d_n$ y $B_n = \text{img } d_{n+1}$ y $H_n = Z_n/B_n$. Sólo por eso tenemos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando el ejercicio, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ran } C_n &= \text{ran } Z_n + \text{ran } B_{n-1} \\ \text{ran } Z_n &= \text{ran } B_n + \text{ran } H_n \end{aligned}$$

Ahora primero por definición y luego usando lo anterior,

$$\begin{aligned}
 \chi(Y) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{ran} C_i \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\operatorname{ran} B_i + \operatorname{ran} H_i + \operatorname{ran} B_{i-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{ran} H_i \quad \square
 \end{aligned}$$

□

Y con eso se demuestra fácilmente el teorema.

5.5 Ejercicios

Ejercicio. Demuestre que $S^1 \times S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tienen grupos de homología (con coeficientes enteros) isomorfos pero no son homotópicamente equivalentes.

Solución. Por sus descomposiciones como complejos CW, [sabemos](#) que la homología de ambos espacios está dada por

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Si estos espacios fueran homotópicamente equivalentes, entonces, [sus grupos fundamentales serían isomorfos](#). Sabemos que el grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y el de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$, por Van Kampen, es isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Para confirmar esta última observación basta notar que el espacio se puede ver naturalmente como la unión de dos copias de S^1 y otra de S^2 . La intersección de las tres es un sólo punto, que es arcoconexo, así que podemos aplicar Van Kampen. De hecho, como la intersección es contraíble, el kernel del isomorfismo de Van Kampen es trivial, así que el grupo fundamental es simplemente el producto libre de los grupos fundamentales de cada componente. Obtenemos $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □