

Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

June 30, 2023

Índice

I	Grupo fundamental	3
II	Espacios cubrientes	4
III	Homología	5
1	Álgebra Homológica	6
1.1	Conceptos básicos	6
1.2	Sucesiones exactas	7
1.3	Homotopía	8
1.4	El lema de la serpiente	9
1.5	Teorema fundamental del álgebra homológica	10
1.6	Natrualidad del homomorfismo de conexión	11
1.7	Lema de los cinco	11
2	Homología singular	12
2.1	Simplejos	12
2.2	El complejo de cadenas singulares	13

Parte I

Grupo fundamental

Parte II

Espacios cubrientes

Parte III

Homología

1. Álgebra Homológica

1.1 Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R .

Definición. Un R -complejo de cadenas es una sucesión de R -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un morfismo de R -complejos de cadenas es $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R -homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que (D_\bullet, δ) es un **subcomplejo de cadenas** de (C_\bullet, ∂) si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

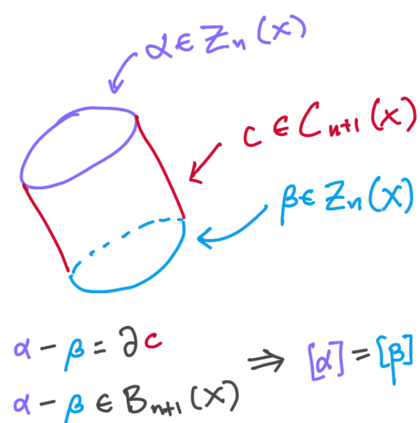
- Los elementos en C_p se llaman **cadena de dimensión p** .
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión p** .
- Los elementos en $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión p** .

Definición. El p -ésimo grupo de homología de (C_\bullet, d) es

$$H_p(C) := Z_p / B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida). Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

1.2 Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en C_p** si $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p . Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
 2. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si $\text{img } \alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
 3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
 4. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker \beta = \text{img } \alpha$, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img } \alpha$.
- Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B , podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo). Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

1.3 Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_{\bullet}, \partial) \rightarrow (C'_{\bullet}, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

1.4 El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente). Consideremos el diagrama conmutativo de R -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' , y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 & \xrightarrow{\delta_*} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 & \end{array}$$

donde $\text{coker } \partial_i = Z_i / \partial_i$. (Este diagrama fue tomado de **internet**).

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

1.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es exacta en D_\bullet si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

1.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{i} & B_{\bullet} & \xrightarrow{j} & C_{\bullet} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \longrightarrow & B'_{\bullet} & \longrightarrow & C'_{\bullet} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

1.7 Lema de los cinco

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

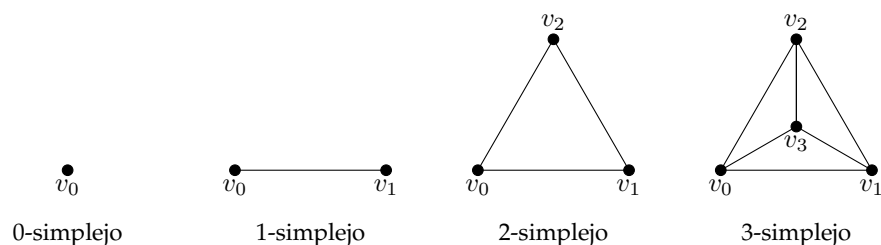
Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

¿En dónde se usará esto?

2. Homología singular

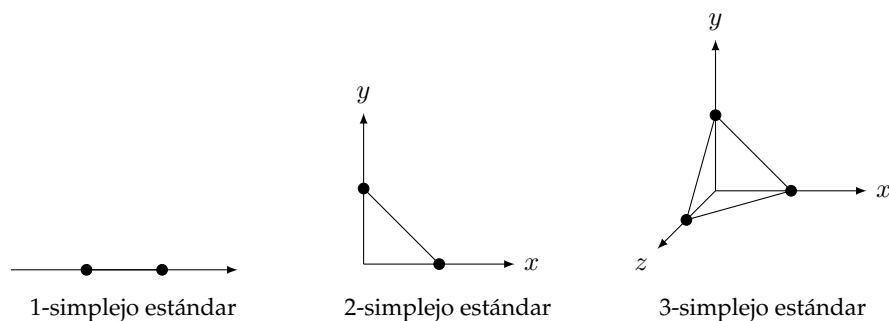
2.1 Simplejos

Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero $n \geq 0$. Un n -**simplejo** es el convexo más pequeño en \mathbb{R}^m ($m > n$) que contiene $n + 1$ puntos v_0, \dots, v_n que no viven en un hiperplano de dimensión menor que n .



Lo denotaremos por $[v_0, \dots, v_n]$ y diremos que v_0, \dots, v_n son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así: $[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$.

El n -**simplejo estándar** es $\Delta^n := [e_1, \dots, e_n]$ donde e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} .



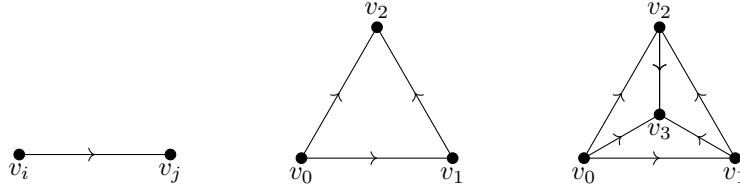
Y observemos que $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\}$ Para nosotros el orden de los vértices en $[v_0, \dots, v_n]$ es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un n -simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned} (v_0, \dots, v_n) : \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0 + \dots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Y diremos que (t_0, \dots, t_n) son las **coordenadas baricéntricas** del punto $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in [v_0, \dots, v_n]$.

Una **cara** de $[v_0, \dots, v_n]$ es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de v_0, \dots, v_n . Cualquier cara 1-dimensional $[v_i, v_j]$ con $i < j$ vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

2.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico X y un anillo asociativo con unidad R . Un **n -simplejo singular** es una función $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

El término “singular” proviene de que no se le imponen condiciones a la función σ salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in R, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el R -módulo libre generado por el conjunto de n -simplejos singulares. Los elementos de C_n se llaman n -cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \quad (2.1)$$

Para lo cual basta definir $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos: $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos:

$$\begin{array}{ccc} [v_0, \dots, v_n] & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] & \longleftarrow & [v_0, \dots, v_{n-1}] = \Delta^{n-1} \end{array}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el i -ésimo. Y bueno, así queda definida la función ∂_n en la base de C_n , y simplemente extendemos por linealidad a todo C_n . Ahora veamos una proposición:

Proposición. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (2.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de X** , que denotaremos por $C_\bullet(X)$. Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X; R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el n -ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en R .