

Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

28 de junio de 2023

Índice

I	Grupo fundamental	3
II	Espacios cubrientes	4
III	Homología	5
1.	Álgebra Homológica	6
1.1.	Conceptos básicos	6
1.2.	Sucesiones exactas	7
1.3.	Homotopía	8
1.4.	El lema de la serpiente	9
2.	El teorema fundamental del álgebra homológica	10

Parte I

Grupo fundamental

Parte II

Espacios cubrientes

Parte III

Homología

Capítulo 1

Álgebra Homológica

1.1. Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R .

Definición. Un R -complejo de cadenas es una sucesión de R -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un morfismo de R -complejos de cadenas es $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R -homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que (D_\bullet, δ) es un subcomplejo de cadenas de (C_\bullet, ∂) si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

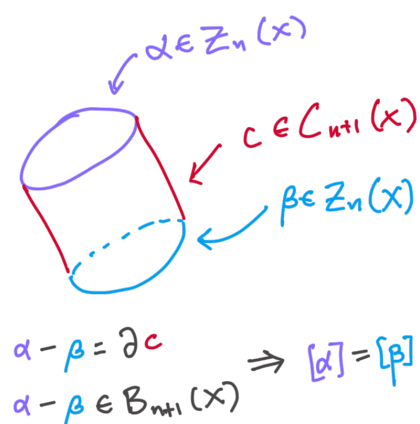
- Los elementos en C_p se llaman **cadenas de dimensión p** .
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión p** .
- Los elementos en $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión p** .

Definición. El p -ésimo grupo de homología de (C_\bullet, d) es

$$H_p(C) := Z_p / B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida). Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

1.2. Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en** C_p si $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p . Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si $\text{img } \alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
4. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker \beta = \text{img } \alpha$, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img } \alpha$.

Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B , podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo). Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

1.3. Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

1.4. El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente). Consideremos el diagrama conmutativo de R -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' , y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 \\ & & 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 \xrightarrow{\psi} Z_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 \end{array}$$

}

donde $\text{coker } \partial_i = Z_i / \text{img } \partial_i$.

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

Capítulo 2

El teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_{\bullet} \xrightarrow{f} D_{\bullet} \xrightarrow{g} E_{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

es exacta en D_{\bullet} si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (Fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\phi} B_{\bullet} \xrightarrow{\psi} C_{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C_{\bullet}) \rightarrow H_{p-1}(A_{\bullet})$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_{\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$