

Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

July 1, 2023

Índice

I	Grupo fundamental	4
II	Espacios cubrientes	5
III	Homología	6
1	Álgebra Homológica	7
1.1	Conceptos básicos	7
1.2	Sucesiones exactas	8
1.3	Homotopía	9
1.4	El lema de la serpiente	10
1.5	Teorema fundamental del álgebra homológica	11
1.6	Natrualidad del homomorfismo de conexión	12
1.7	Lema de los cinco	12
2	Homología singular	13
2.1	Simplejos	13
2.2	El complejo de cadenas singulares	14
2.3	Primeras propiedades de la homología	15
2.3.1	La homología y las componentes arco-conexas	15
2.3.2	El 0-ésimo grupo de homología	15
2.3.3	La homología de un punto	16
2.4	Homología reducida	16
2.5	Funtorialidad	16
2.6	Invarianza homotópica	16
2.7	Homología relativa	17
2.8	Escisión	17
2.9	La sucesión de Mayer-Vietoris	18

<i>ÍNDICE</i>	3
3 Complejos CW	20
3.1 Construcción	20
3.2 Homología de complejos CW	21
3.3 Ejemplos	23
3.4 Característica de Euler	24

Parte I

Grupo fundamental

Parte II

Espacios cubrientes

Parte III

Homología

1. Álgebra Homológica

1.1 Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R .

Definición. Un R -complejo de cadenas es una sucesión de R -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un morfismo de R -complejos de cadenas es $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R -homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que (D_\bullet, δ) es un **subcomplejo de cadenas** de (C_\bullet, ∂) si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

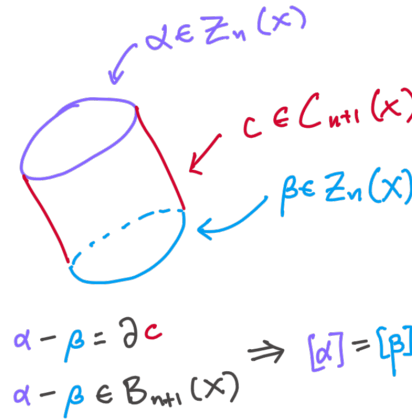
- Los elementos en C_p se llaman **cadena de dimensión p** .
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión p** .
- Los elementos en $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión p** .

Definición. El p -ésimo grupo de homología de (C_\bullet, d) es

$$H_p(C) := Z_p / B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida). Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

1.2 Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en C_p** si $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p . Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si $\text{img } \alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
3. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
4. $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker \beta = \text{img } \alpha$, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img } \alpha$.

Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B , podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo). Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

1.3 Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_{\bullet}, \partial) \rightarrow (C'_{\bullet}, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

1.4 El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente). Consideremos el diagrama conmutativo de R -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' , y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 & \xrightarrow{\delta_*} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 & \end{array}$$

donde $\text{coker } \partial_i = Z_i / \partial_i$. (Este diagrama fue tomado de **internet**).

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

1.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es exacta en D_\bullet si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

1.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{i} & B_{\bullet} & \xrightarrow{j} & C_{\bullet} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \longrightarrow & B'_{\bullet} & \longrightarrow & C'_{\bullet} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

1.7 Lema de los cinco

Lema (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

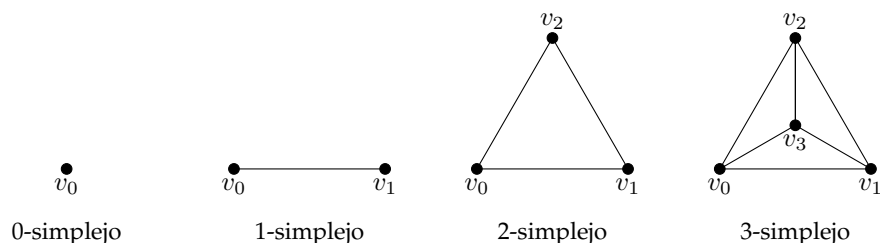
Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

¿En dónde se usará esto?

2. Homología singular

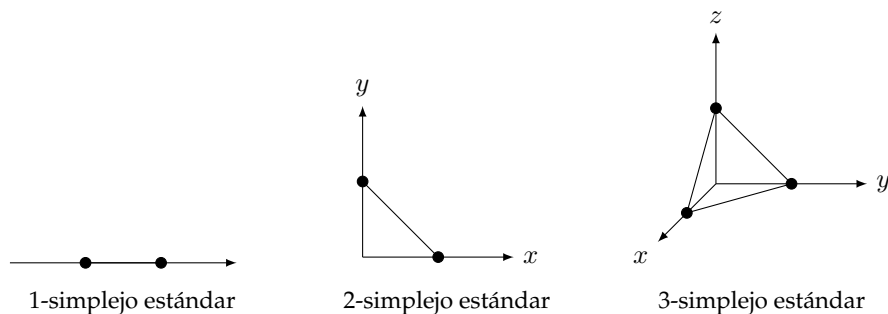
2.1 Simplejos

Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero $n \geq 0$. Un n -**simplejo** es el convexo más pequeño en \mathbb{R}^m ($m > n$) que contiene $n + 1$ puntos v_0, \dots, v_n que no viven en un hiperplano de dimensión menor que n .



Lo denotaremos por $[v_0, \dots, v_n]$ y diremos que v_0, \dots, v_n son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así: $[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$.

El n -**simplejo estándar** es $\Delta^n := [e_1, \dots, e_n]$ donde e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} .



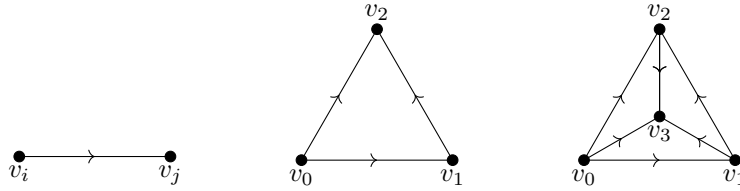
Y observemos que $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\}$ Para nosotros el orden de los vértices en $[v_0, \dots, v_n]$ es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un n -simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned} (v_0, \dots, v_n) : \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0 + \dots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Y diremos que (t_0, \dots, t_n) son las **coordenadas baricéntricas** del punto $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in [v_0, \dots, v_n]$.

Una **cara** de $[v_0, \dots, v_n]$ es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de v_0, \dots, v_n . Cualquier cara 1-dimensional $[v_i, v_j]$ con $i < j$ vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

2.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico X y un anillo asociativo con unidad R . Un **n -simplejo singular** es una función $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

El término “singular” proviene de que no se le imponen condiciones a la función σ salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el R -módulo libre generado por el conjunto de n -simplejos singulares. Los elementos de C_n se llaman n -cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \quad (2.1)$$

Para lo cual basta definir $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos: $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n -simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ es el siguiente $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la $n - 1$ -cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i , es decir, $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$. Y luego simplemente componemos:

$$\begin{array}{ccc} [v_0, \dots, v_n] & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] & \longleftarrow & [v_0, \dots, v_{n-1}] = \Delta^{n-1} \end{array}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el i -ésimo. Y bueno, así queda definida la función ∂_n en la base de C_n , y simplemente extendemos por linealidad a todo C_n . Ahora veamos una proposición:

Proposición. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (2.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de X** , que denotaremos por $C_\bullet(X)$. Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X; R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el n -ésimo grupo de homología singular de X con coeficientes en R .

2.3 Primeras propiedades de la homología

2.3.1 La homología y las componentes arco-conexas

Proposición. Sea $X = \sqcup X_i$ la descomposición en componentes arco-conexas del espacio topológico X , entonces

$$H_n(\sqcup X_i, R) \cong \bigoplus H_n(X_i, R)$$

2.3.2 El 0-ésimo grupo de homología

Proposición. Para cualquier espacio X , $H_0(X; R)$ es una suma directa de copias de R , una por cada componente arcoconexa.

2.3.3 La homología de un punto

Proposición. Si X consiste de un sólo punto, entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

2.4 Homología reducida

Considera

$$\cdots \rightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

donde $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$ es el **mapeo de aumentación**.

Va a resultar que $\tilde{H}_n(X; R) = H_n(X; R)$ para toda $n \geq 1$.

Sobre la homología reducida del espacio que es un sólo punto

Sabemos por la proposición de la homología de un punto que si $X = \{x\}$, entonces $H_0(X) = R$, es decir, $\ker \partial_0 / \text{img } \partial_1 = R$. Esto implica que la sucesión corta $0 \rightarrow \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\partial_1} \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ es exacta.

¿Cómo deducimos de aquí que $\tilde{H}_0(X; R) = 0$? Bueno resulta que como el espacio es un punto, $\partial_1 = 0$, así que de entrada $\text{img } \partial_1 = 0$. Luego, en realidad tenemos la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ que hace a ∂_0 un isomorfismo que en particular es inyectivo.

Como $\tilde{H}_0 = \ker \partial_0 / \text{img } \partial_1$, entonces $\tilde{H}_0(X; R) = 0$.

Y en general $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$

2.5 Funtorialidad

2.6 Invarianza homotópica

Teorema. Si dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Corolario 1. Si dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

2.7 Homología relativa

Sean $A \subseteq X$ espacios topológicos. Diremos que (X, A) es una buena pareja. Notemos que $(C_\bullet(A))$ es un subcomplejo de $C_\bullet(X)$, así que podemos definir el complejo relativo

$$C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

Y esto simplemente quiere decir que para toda n ,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

de forma que las cadenas en A se vuelven triviales.

Es claro que el n -ésimo operador frontera restringido a $C_n(A)$ se mapea a $C_{n-1}(A)$, (pues la frontera de una cadena en A no podría salirse de A). Esto quiere decir que el mapeo frontera está bien definido en el cociente.

$$\cdots \rightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

Esto induce la homología dada por

$$H_n(X, A) = \ker \partial_n / \text{img } \partial_{n-1}$$

Ejercicio. $H_n(X, \{x_0\}) = H_n(X)$.

Ahora lo primero que pasa es que tenemos una sucesión exacta corta a la que aplicaremos el teorema fundamental del álgebra homológica: Así que obtenemos la **sucesión exacta larga de la pareja**

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_{*n}} H_n(X) \xrightarrow{j_{*n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_{*n-1}^{-1}} \cdots$$

Como primera observación notemos que si los grupos de homología de la pareja $C_p(X, A)$ fueran triviales, automáticamente tendríamos que el mapeo inducido por la inclusión sería un isomorfismo. De hecho, esto es un si y sólo si. Así, los grupos de homología miden qué tan diferentes son los grupos de homología de A y los de X .

Finalmente agregamos el comentario de que aunque el mapeo ∂ que usamos para completar la sucesión exacta larga de la pareja viene del teorema fundamental del álgebra homológica, y al recordar la demostración del teorema nos damos cuenta de que este mapeo actúa exactamente como el operador frontera original de X .

2.8 Escisión

Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ tales que la cerradura de Z está contenida en el interior de A . Entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Equivalentemente, para subespacios $A, B \subseteq X$ cuyos interiores cubren a X , la inclusión

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Definición. Decimos que (X, A) es un **buen par** si A es cerrado y es retracto fuerte por deformación de una vecindad en X .

El arete hawaiano no es un buen par porque cualquier vecindad del punto de pegado contiene un círculo entero, así que no se puede retraer por deformación.

Teorema. Sea (X, A) un buen par, entonces

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$$

induce isomorfismos para toda n de la forma

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

donde la tilde denota la homología reducida.

En la demostración se usa lema de los 5, invarianza homotópica, etc.

Corolario 2. Sea (X, A) un buen par. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X/A) \rightarrow \cdots$$

Teorema (Homología de la esfera).

$$\tilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

Teorema (del punto fijo de Bruwer). Sean $n \geq 2$ y $f : D^n \rightarrow D^n$, entonces f tiene un punto fijo.

2.9 La sucesión de Mayer-Vietoris

Sea X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ tales que $X = \text{int } A \cup \text{int } B$. Entonces tenemos la siguiente sucesión larga en homología reducida:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X) \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Ejemplo. Veamos el toro $S^1 \times S^1$ visto como en el examen, con $A = D^2$ y $B = S^1 \vee S^1$, casi todos los grupos de homología se hacen cero (aquí hay que usar que la homología de la cuña es la suma de las homologías de los "cuñandos"), y que la homología de S^1 es cero cuando el subíndice es mayor o igual que 2. En fin, para $m > 2$, $\tilde{H}_m(X) = 0$.

Ahora para la parte que sí nos toca, *Falta*

3. Complejos CW

3.1 Construcción

Establezcamos algo de notación

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ es el n -disco cerrado.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ es la n -esfera.
- $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ es la n -célula abierta o sólo la n -célula.

De tal forma que

- $\partial D^n = S^{n-1}$
- $D^n = e^n \cup S^{n-1}$ como conjuntos (no se usa la topología de la unión disjunta)
- Y bueno debe ser cierto que $e^0 = \{pt\}$.

Definición. Un espacio X es un complejo CW si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con un espacio discreto X^0 que se llama el 0-esqueleto.
2. El n -esqueleto X^n lo obtengo a partir del $n - 1$ -esqueleto X^{n-1} pegando n -células e_α^n vía funciones $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Formalmente tenemos el espacio

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n / \sim \quad x \sim \varphi_{\alpha}(x) \quad \text{si} \quad x \in \partial D_{\alpha}^n$$

Realmente es tomar puntos y unirlos con líneas, y luego tomar líneas y rellenar con discos, etc...

3. Realmente es tomar puntos y unir líneas entre ellos, y luego pegar puntos o líneas con discos, etc...

Definición. Si $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, decimos que X es de dimensión finita y definimos la dimensión de X como la dimensión de la célula más grande que adjunté. Formalmente, $\dim X = \min\{n : X^n = X\}$.

Ejemplo. • Los 0-complejos CW son gráficas.

- S^n es un complejo CW.
- Los espacios proyectivos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / x \sim \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\
 &= S^n / x \sim -x \\
 &= D^n / x \sim -x, \quad x \in \partial D^n = S^{n-1} \\
 &= \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n \\
 &= \mathbb{R}P^{n-2} \cup e^{n-1} \cup e^n \\
 &= e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n
 \end{aligned}$$

donde las funciones de pegado son justamente las antipodales, que ya conocíamos por ser el cubriente universal.

Ejercicio. Todo complejo CW es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, todo complejo CW tiene cubriente universal.

Definición. La función característica es Φ_α :

$$\begin{array}{ccc}
 e_\alpha^n & & X^{n-1} \sqcup D_\alpha^n \\
 \text{inclusión} \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{proyección al cociente} \\
 D_\alpha^n & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & X^n
 \end{array}$$

Definición. Sea X un complejo CW. Un subcomplejo Z es un subespacio cerrado que además es unión de células de X .

Observación. Para un subcomplejo Z ,

- $Z \subseteq X$ es una buena pareja (Z es retracto por deformación de una vecindad de X)
- X/Z es un complejo CW.

Observación (Muy importante). X complejo CW. El cociente por el $n-1$ esqueleto es una cuña de esferas, tantas como células en el $n-1$ esqueleto. En símbolos, $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$, donde I_n es el conjunto que indexa las $n-1$ -celdas.

3.2 Homología de complejos CW

Lema.

•

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in I_n} R & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\text{Express. } H_k = \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in I_n} S^n) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} H_k(S^n)$$

□

- $H_k(X^n) = 0$ para toda $k > n$.

Nuevamente, la homología, lo que aclance a ver la homología, lo ve solamente hasta la dimensión del espacio

- La inclusión $X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $H_k(X^n) \hookrightarrow H_k(X)$ $k > n$.

Aquí la idea es que adjuntar células de dimensión mayor que la homología que estamos calculando no cambia la homología. Es decir, para $n > k$ se tiene que $H_k(X \cup D^n) = H_k(X)$.

Demostración. content...Fijémonos en (X^n, X^{n-1}) , hay una sucesión exacta corta de la pareja:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Usando el inciso 1, si $k \neq n, n-1$ entonces $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$.

Bueno para demostrar (2), justamente tenemos $k > n$ y entonces resultará, fijando k y bajando uno por uno, $H_k(X^n) \cong H_k(X^0)$ que es un espacio discreto y la homología de grado mayor que cero en espacios discretos es cero. Terminamos el inciso (2).

Para (3), si $k < n < n+1 < n+2 < \dots$, simplemente tenemos que

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m})$$

y si pedimos que X sea de dimensión finita entonces terminaremos en algún punto y listo. El caso de dimensión infinita queda para el futuro. \square

Definición (Homología celular). Consideremos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \\
 & \nearrow \partial_n & & \searrow j_{n-1} & & & \\
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & & \\
 & & \searrow \partial_{n-1} & & \nearrow j_{n-2} & & \\
 & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & & &
 \end{array}$$

Resultará que las flechas horizontales que definimos con los triangulitos, es decir las d_i , satisfacen que

$$d_{n+1} \circ d_n = 0$$

así que podemos bautizar el complejo de cadenas $C_\bullet^{CW}(X, R)$. Y ahora podemos definir la homología celular:

$$H_n^{CW}(X; R) = H_n(C_\bullet^{CW}(X))$$

Teorema.

$$H_n^{CW}(X; R) \cong H_n(X; R) \quad \forall n \geq 0$$

El primero depende de la estructura celular del espacio X , pero el segundo no. Así, la homología de un complejo CW es independiente de la estructura celular.

Observación. Estos grupos $H_n(X^n, X^{n-1})$ son las sumas directas de R , uno por cada n -célula de X ie $\bigoplus_{n\text{-células de } X} R = \{\sum r_\alpha e_\alpha^n | e_\alpha^n \text{ es una } n\text{-célula } r_\alpha \in R\}$.

Bueno, ahora tratemos de entender cómo es la d . Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^{n-1} \\ \downarrow \varphi_{\alpha\beta} & & \downarrow \\ S_\beta^{n-1} & \longleftarrow & \bigvee_{\gamma \in I_n} S_\gamma^{n-1} = X^{n-1}/X^{n-2} \end{array}$$

Esta función que descubrimos $\varphi_{\alpha\beta}$ es una función entre esferas que tiene un grado $d_{\alpha\beta}$.

3.3 Ejemplos

Usaremos que

Teorema. Para $n \geq 2$, la diferencial d_n manda $e_\alpha^n \mapsto \sum d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$.

Ejemplo. Calculamos de dos maneras distintas la homología de $X = \bigvee_{\alpha \in I} S_\alpha^1$, por un lado usando directamente que $H_0(X) = R$ y otro usando el teorema anterior. Para el teorema anterior, descubrimos que para como sólo hay una 0-célula, para cualquier α , $e_\alpha^1 \mapsto x_0 - x_0 = 0$, así que de hecho $d_1 = 0$. Resulta que $H_1 = \bigoplus_I R$.

De hecho, esto es cierto en general:

Lema. Si X es un complejo con una única 0-célula, entonces $d_1 = 0$.

Ejemplo (El toro). Hemos visto que hay una descomposición del toro pegando los lados de un cuadrado. Eventualmente se descubre que $d_2 = 0$.

Teorema (Extra). Una superficie compacta y conexa sólo puede ser una esfera, un toro, una suma conexa de toros, el plano proyectivo o una suma conexa de planos proyectivos.

Ejemplo (El toro de género g). Resulta que el toro doble se puede ver como el cociente de un octágono identificando aristas. Y en general, el g -toro es el cociente de un $4g$ -ágono. El resultado final es que $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$, $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ y $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (El plano proyectivo). Aquí, $d_2 = 2$. $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$ y $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$.

Observación. Esta clase de ejercicios viene en los exámenes generales.

Ejemplo ($\mathbb{R}P^n$). Recordemos la descomposición de $\mathbb{R}P^n$ como complejo CW : $\mathbb{R}P^n = e_0 \cup e_1 \cup \dots \cup e_n$. El diagrama de arriba se vuelve:

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^{k-1} \\ \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow q \\ S^{k-1} & \longleftarrow & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \end{array}$$

Las funciones de pegado φ_α son la proyección al cociente función antipodal en la esfera (el cubriente del plano proyectivo). Estas funciones son dos a dos, y esto hace que el hemisferio norte de S^{k-1} se mapee homeomorficamente a S^{k-1} menos un punto (a donde va a dar el hemisferio sur).

Ahora observemos que la funciones que obtenemos cuando restringimos $\bar{\varphi}$ a cada hemisferio difieren una de la otra por el mapeo antipodal. A la hora de calcular el grado, obtenemos la fórmula $\deg(q\varphi) = 1 + (-1)^k$ usando que de alguna forma, escogiendo una orientación, podemos hacer que estos mapeos tengan grado ± 1 (Hatcher usa lo del grado local).

En fin,

$$\deg \bar{\varphi} = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto genera la homología siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Para $\mathbb{R}P^3$, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2 = 0$ y $H_3 = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (Primer ejemplo donde cambian las cosas si cambiamos de anillo). Tomemos $\mathbb{R}P^n$ y el anillo $R = \mathbb{Q}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Pero ahora la función multiplicar por 2 manda \mathbb{Q} en todo \mathbb{Q} , algo que no pasaba con \mathbb{Z} . Esto hace que la homología sea trivial, es decir, $H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Q}) = 0$ para toda $n \geq 1$.

Ejemplo. ¿Y si tomamos $R = \mathbb{Z}/2$? Multiplicar por 2 es la función 0, así que $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ para $0 \leq m \leq n$.

3.4 Característica de Euler

Sea Y un complejo CW finito (con un número finito de células). De hecho esta propiedad es equivalente a que el espacio Y sea compacto. Definimos la característica de Euler como

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= (\# \text{ 0-células}) - (\# \text{ 1-células}) + (\# \text{ 2-células}) - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\# \text{ } i\text{-células}) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplos.

$$\bullet \chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$$

- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2 & n \text{ par} \end{cases}$
- $\chi(\bigvee_{i=0}^n S^1) = 1 - n$
- $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

Teorema. Sean X, Y complejos CW -finitos Si $X \simeq Y$ entonces $\chi(X) = \chi(Y)$.

Proposición. Sea Y un complejo CW finito. Entonces,

$$\chi(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \text{ran } H_i(Y; \mathbb{Z})$$

Para entender qué es $\text{ran } H_i$, notemos que el complejo de cadenas está hecho por grupos abelianos finitamente generados, ya que Y es finito. De hecho, la homología de Y es una sucesión exacta de grupos finitos finitamente generados. Luego, por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados podemos descomponer un grupo en una expresión de la forma

$$A = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}}_{\text{libre de torsión}} \oplus \underbrace{\text{finito}}_{\text{torsión}}$$

donde $r = \text{ran}(A)$ es el rango del grupo. Éste es el número que aparece en la proposición.

Ejercicio. Sea $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Entonces $\text{ran } B = \text{ran } A + \text{ran } C$.

Ahora demostremos la proposición:

Demostración. Tomemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

y recordemos que $Z_n = \ker d_n$ y $B_n = \text{img } d_{n+1}$ y $H_n = Z_n/B_n$. Sólo por eso tenemos las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando el ejercicio, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ran } C_n &= \text{ran } Z_n + \text{ran } B_{n-1} \\ \text{ran } Z_n &= \text{ran } B_n + \text{ran } H_n \end{aligned}$$

Ahora primero por definición y luego usando lo anterior,

$$\begin{aligned}
 \chi(Y) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{ran} C_i \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\operatorname{ran} B_i + \operatorname{ran} H_i + \operatorname{ran} B_{i-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{ran} H_i \quad \square
 \end{aligned}$$

□

Y con eso se demuestra fácilmente el teorema.