

# Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

July 1, 2023

# Índice

<b>I</b>	<b>Grupo fundamental</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Espacios cubrientes</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Homología</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Álgebra Homológica</b>	<b>7</b>
1.1	Conceptos básicos . . . . .	7
1.2	Sucesiones exactas . . . . .	8
1.3	Homotopía . . . . .	9
1.4	El lema de la serpiente . . . . .	10
1.5	Teorema fundamental del álgebra homológica . . . . .	11
1.6	Natrualidad del homomorfismo de conexión . . . . .	12
1.7	Lema de los cinco . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Homología singular</b>	<b>13</b>
2.1	Simplejos . . . . .	13
2.2	El complejo de cadenas singulares . . . . .	14
2.3	Primeras propiedades de la homología . . . . .	15
2.3.1	La homología y las componentes arco-conexas . . . . .	15
2.3.2	El 0-ésimo grupo de homología . . . . .	15
2.3.3	La homología de un punto . . . . .	16
2.4	Homología reducida . . . . .	16
2.5	Funtorialidad . . . . .	16
2.6	Invarianza homotópica . . . . .	16
2.7	Homología relativa . . . . .	17
2.8	Escisión . . . . .	17
2.9	La sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	18

<i>ÍNDICE</i>	3
<b>3 Complejos CW</b>	<b>19</b>
3.1 Construcción . . . . .	19
3.2 Homología de complejos CW . . . . .	20

## **Parte I**

# **Grupo fundamental**

## **Parte II**

# **Espacios cubrientes**

## Parte III

# Homología

# 1. Álgebra Homológica

## 1.1 Conceptos básicos

En este capítulo  $R$  denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

Recordemos que un  $R$ -módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están  $R$ .

**Definición.** Un  $R$ -complejo de cadenas es una sucesión de  $R$ -módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que  $\partial_{p-1}\partial_p = 0$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$ , que es equivalente a que  $\text{img } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$ .

**Definición.** Un morfismo de  $R$ -complejos de cadenas es  $(C_\bullet, \partial) \rightarrow (D_\bullet, \delta)$  es una sucesión de  $R$ -homomorfismos  $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{p+1} & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_{p+1}} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es decir  $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Definición.** Decimos que  $(D_\bullet, \delta)$  es un **subcomplejo de cadenas** de  $(C_\bullet, \partial)$  si  $D_p \leq C_p$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$  y  $\partial|_{D_p} = \delta_p$ . El cociente  $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$  es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma  $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$ .

**Definición.**

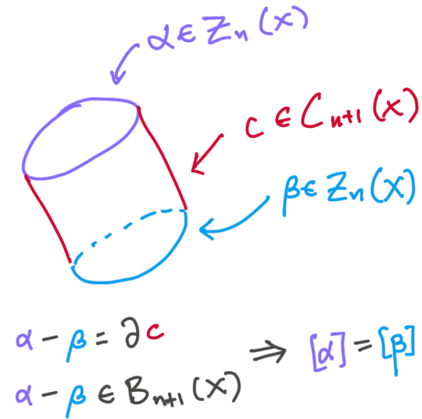
- Los elementos en  $C_p$  se llaman **cadena de dimensión  $p$** .
- Los elementos en  $\ker \partial_p := Z_p$  se llaman **ciclos de dimensión  $p$** .
- Los elementos en  $\text{img } \partial_{p+1} := F_p := B_p$  se llaman **fronteras de dimensión  $p$** .

**Definición.** El  $p$ -ésimo grupo de homología de  $(C_\bullet, d)$  es

$$H_p(C) := Z_p/B_p = \ker \partial_p / \text{img } \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos  $c$  y  $c'$  son **homólogos** si  $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$ .

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



**Ejercicio** (Función inducida). Si  $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$  es un homeomorfismo, entonces  $f(Z_p) \subseteq Z'_p$  y  $f(B_p) \subseteq B'_p$  así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\rightarrow H_p(C'_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo  $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$ , entonces  $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$ . Y por último,  $\bar{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$ .

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

## 1.2 Sucesiones exactas

**Definición.** Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en  $C_p$**  si  $\text{img } f_p = \ker f_{p-1}$ . Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los  $C_p$ . Esto sucede si y sólo si  $H_p(C_\bullet) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .



**Observación.**

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

**Definición.** Una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

**Proposición.**

1.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$  es exacta si y sólo si  $\ker \alpha = 0$ , es decir  $\alpha$  es inyectiva.
2.  $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\text{img } \alpha = B$ , es decir  $\alpha$  es suprayectiva.
3.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\alpha$  es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
4.  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$  es exacta si y sólo si  $\alpha$  es inyectiva,  $\beta$  es suprayectiva y  $\ker \beta = \text{img } \alpha$ , de manera que  $\beta$  induce un isomorfismo  $C \cong B/\text{img } \alpha$ .

Si pensamos que  $\alpha$  es la inclusión de  $A$  como subgrupo de  $B$ , podemos escribir  $C \cong B/A$ .

**Observación** (Primer teorema de isomorfismo). Si  $M' \subseteq M$ , entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

## 1.3 Homotopía

**Definición.** Dos homomorfismos

$$f, g : (C_{\bullet}, \partial) \rightarrow (C'_{\bullet}, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos  $H_p : C_p \rightarrow C'_{p+1}$  para toda  $p \in \mathbb{Z}$  tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1} \partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_{p+1}-g_{p+1} & \swarrow H_p & \downarrow f_p-g_p & \swarrow H_{p-1} & \downarrow f_{p-1}-g_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

**Lema.** Con la notación de arriba,  $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_p(C'_\bullet)$ . Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

## 1.4 El lema de la serpiente

**Lema** (de la serpiente). Consideremos el diagrama conmutativo de  $R$ -módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo  $\delta_* : \ker \partial_3 \rightarrow Z_1 / \text{img } \partial_1$  tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\psi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{img } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{img } \partial_3$$

es exacta, donde  $\phi''$  y  $\psi''$  son las restricciones de  $\phi'$  y  $\psi'$ , y  $\bar{\phi}$  y  $\bar{\psi}$  son homomorfismos inducidos por  $\phi$  y  $\psi$ . ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{array}{ccccccc} & \ker \partial_1 & \xrightarrow{\phi''} & \ker \partial_2 & \xrightarrow{\psi''} & \ker \partial_3 & \xrightarrow{\delta_*} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{coker } \partial_1 & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \text{coker } \partial_2 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \text{coker } \partial_3 & \end{array}$$

donde  $\text{coker } \partial_i = Z_i / \partial_i$ . (Este diagrama fue tomado de **internet**).

**Observación.** Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

## 1.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

**Definición.** Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es exacta en  $D_\bullet$  si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo  $p \in \mathbb{Z}$

**Teorema** (fundamental del álgebra homológica). Si

$$\cdots \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C_\bullet) \rightarrow H_{p-1}(A_\bullet)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow i_{p+1} & & \downarrow i_p & & \downarrow i_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow j_p & & \downarrow j_{p-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

## 1.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

**Teorema** (Naturalidad del homomorfismo de conexión).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \xrightarrow{i} & B_{\bullet} & \xrightarrow{j} & C_{\bullet} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A'_{\bullet} & \longrightarrow & B'_{\bullet} & \longrightarrow & C'_{\bullet} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

## 1.7 Lema de los cinco

**Lema** (de los cinco). Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \downarrow h_5 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

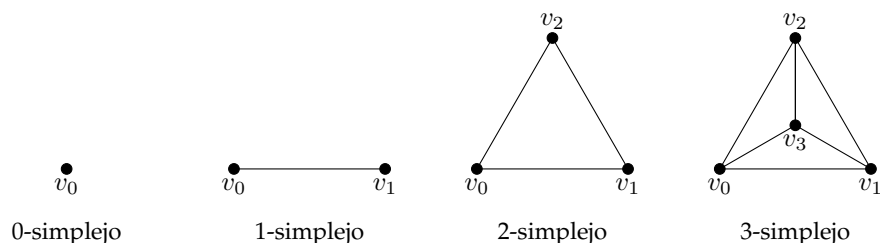
Si  $h_5, h_4, h_2$  y  $h_1$  son isomorfismos, entonces  $h_3$  también.

¿En dónde se usará esto?

## 2. Homología singular

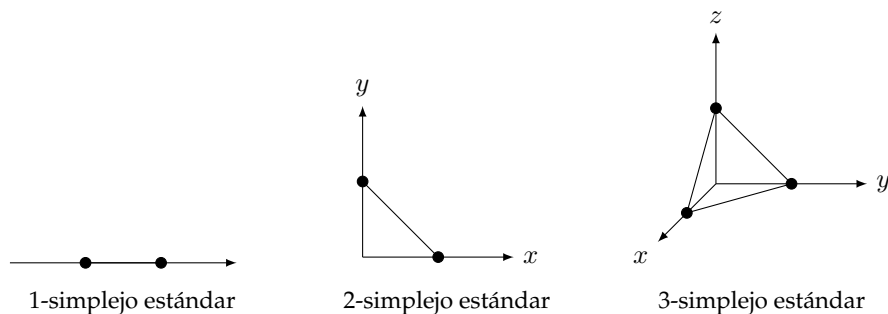
### 2.1 Simplejos

Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero  $n \geq 0$ . Un  $n$ -**simplejo** es el convexo más pequeño en  $\mathbb{R}^m$  ( $m > n$ ) que contiene  $n + 1$  puntos  $v_0, \dots, v_n$  que no viven en un hiperplano de dimensión menor que  $n$ .



Lo denotaremos por  $[v_0, \dots, v_n]$  y diremos que  $v_0, \dots, v_n$  son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así:  $[v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$ .

El  $n$ -**simplejo estándar** es  $\Delta^n := [e_1, \dots, e_n]$  donde  $e_1, \dots, e_n$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .



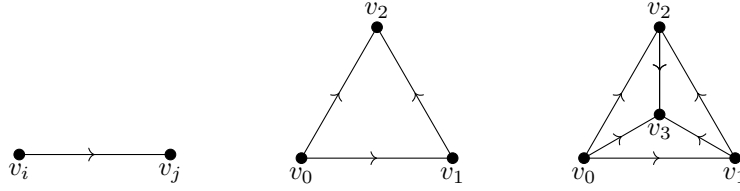
Y observemos que  $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \dots + t_n = 1\}$  Para nosotros el orden de los vértices en  $[v_0, \dots, v_n]$  es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un  $n$ -simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned} (v_0, \dots, v_n) : \Delta^n &\rightarrow [v_0, \dots, v_n] \\ (t_0 + \dots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Y diremos que  $(t_0, \dots, t_n)$  son las **coordenadas baricéntricas** del punto  $t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \in [v_0, \dots, v_n]$ .

Una **cara** de  $[v_0, \dots, v_n]$  es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de  $v_0, \dots, v_n$ . Cualquier cara 1-dimensional  $[v_i, v_j]$  con  $i < j$  vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

## 2.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico  $X$  y un anillo asociativo con unidad  $R$ . Un  **$n$ -simplejo singular** es una función  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ .

El término “singular” proviene de que no se le imponen condiciones a la función  $\sigma$  salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m r_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{Z}, r_i \in R, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el  $R$ -módulo libre generado por el conjunto de  $n$ -simplejos singulares. Los elementos de  $C_n$  se llaman  $n$ -cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \quad (2.1)$$

Para lo cual basta definir  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  como sigue: para un  $n$ -simplejo singular  $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ ,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Donde  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  es el siguiente  $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la  $n - 1$ -cara de  $\Delta^n$  que se obtiene al quitar el vértice  $v_i$ , es decir,  $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Y luego simplemente componemos:  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  como sigue: para un  $n$ -simplejo singular  $\sigma : \Delta^n = [v_0, \dots, v_n] \rightarrow X$ ,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

Donde  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  es el siguiente  $n - 1$ -simplejo singular: primero tomemos la  $n - 1$ -cara de  $\Delta^n$  que se obtiene al quitar el vértice  $v_i$ , es decir,  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] := [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Y luego simplemente componemos:

$$\begin{array}{ccc} [v_0, \dots, v_n] & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\ [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] & \longleftarrow & [v_0, \dots, v_{n-1}] = \Delta^{n-1} \end{array}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el  $i$ -ésimo. Y bueno, así queda definida la función  $\partial_n$  en la base de  $C_n$ , y simplemente extendemos por linealidad a todo  $C_n$ . Ahora veamos una proposición:

**Proposición.**  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (2.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de  $X$** , que denotaremos por  $C_\bullet(X)$ . Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X; R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el  $n$ -ésimo grupo de homología singular de  $X$  con coeficientes en  $R$ .

## 2.3 Primeras propiedades de la homología

### 2.3.1 La homología y las componentes arco-conexas

**Proposición.** Sea  $X = \sqcup X_i$  la descomposición en componentes arco-conexas del espacio topológico  $X$ , entonces

$$H_n(\sqcup X_i, R) \cong \bigoplus H_n(X_i, R)$$

### 2.3.2 El 0-ésimo grupo de homología

**Proposición.** Para cualquier espacio  $X$ ,  $H_0(X; R)$  es una suma directa de copias de  $R$ , una por cada componente arcoconexa.

### 2.3.3 La homología de un punto

**Proposición.** Si  $X$  consiste de un sólo punto, entonces

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

## 2.4 Homología reducida

Considera

$$\dots \rightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

donde  $\varepsilon(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i$  es el **mapeo de aumentación**.

Va a resultar que  $\tilde{H}_n(X; R) = H_n(X; R)$  para toda  $n \geq 1$ .

### Sobre la homología reducida del espacio que es un sólo punto

Sabemos por la proposición de la homología de un punto que si  $X = \{x\}$ , entonces  $H_0(X) = R$ , es decir,  $\ker \partial_0 / \text{img } \partial_1 = R$ . Esto implica que la sucesión corta  $0 \rightarrow \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\partial_1} \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$  es exacta.

¿Cómo deducimos de aquí que  $\tilde{H}_0(X; R) = 0$ ? Bueno resulta que como el espacio es un punto,  $\partial_1 = 0$ , así que de entrada  $\text{img } \partial_1 = 0$ . Luego, en realidad tenemos la sucesión exacta corta  $0 \rightarrow \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$  que hace a  $\partial_0$  un isomorfismo que en particular es inyectivo.

Como  $\tilde{H}_0 = \ker \partial_0 / \text{img } \partial_1$ , entonces  $\tilde{H}_0(X; R) = 0$ .

**Y en general**  $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$

## 2.5 Funtorialidad

## 2.6 Invarianza homotópica

**Teorema.** Si dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo  $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .

**Corolario 1.** Si dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo  $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .



## 2.7 Homología relativa

Sean  $A \subseteq X$  espacios topológicos. Diremos que  $(X, A)$  es una buena pareja. Notemos que  $(C_\bullet(A))$  es un subcomplejo de  $C_\bullet(X)$ , así que podemos definir el complejo relativo

$$C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

Y esto simplemente quiere decir que para toda  $n$ ,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

de forma que las cadenas en  $A$  se vuelven triviales.

Es claro que el  $n$ -ésimo operador frontera restringido a  $C_n(A)$  se mapea a  $C_{n-1}(A)$ , (pues la frontera de una cadena en  $A$  no podría salirse de  $A$ ). Esto quiere decir que el mapeo frontera está bien definido en el cociente.

$$\dots \rightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

Esto induce la homología dada por

$$H_n(X, A) = \ker \partial_n / \text{img } \partial_{n-1}$$

**Ejercicio.**  $H_n(X, \{x_0\}) = H_n(X)$ .

Ahora lo primero que pasa es que tenemos una sucesión exacta corta a la que aplicaremos el teorema fundamental del álgebra homológica: Así que obtenemos la **sucesión exacta larga de la pareja**

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_{*n}} H_n(X) \xrightarrow{j_{*n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_{*p-1}} \dots$$

Como primera observación notemos que si los grupos de homología de la pareja  $C_p(X, A)$  fueran triviales, automáticamente tendríamos que el mapeo inducido por la inclusión sería un isomorfismo. De hecho, esto es un si y sólo si. Así, los grupos de homología miden qué tan diferentes son los grupos de homología de  $A$  y los de  $X$ .

Finalmente agregamos el comentario de que aunque el mapeo  $\partial$  que usamos para completar la sucesión exacta larga de la pareja viene del teorema fundamental del álgebra homológica, y al recordar la demostración del teorema nos damos cuenta de que este mapeo actúa exactamente como el operador frontera original de  $X$ .

## 2.8 Escisión

Sean  $Z \subseteq A \subseteq X$  tales que la cerradura de  $Z$  está contenida en el interior de  $A$ . Entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

Equivalentemente, para subespacios  $A, B \subseteq X$  cuyos interiores cubren a  $X$ , la inclusión

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A) \quad \forall n$$

**Definición.** Decimos que  $(X, A)$  es un **buen par** si  $A$  es cerrado y es retracto fuerte por deformación de una vecindad en  $X$ .

El arete hawaiano no es un buen par porque cualquier vecindad del punto de pegado contiene un círculo entero, así que no se puede retraer por deformación.

**Teorema.** Sea  $(X, A)$  un buen par, entonces

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$$

induce isomorfismos para toda  $n$  de la forma

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

donde la tilde denota la homología reducida.

En la demostración se usa lema de los 5, invarianza homotópica, etc.

**Corolario 2.** Sea  $(X, A)$  un buen par. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X/A) \rightarrow \dots$$

**Teorema** (Homología de la esfera).

$$\tilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

**Teorema** (del punto fijo de Bruwer). Sean  $n \geq 2$  y  $f : D^n \rightarrow D^n$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.

## 2.9 La sucesión de Mayer-Vietoris

Sea  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subseteq X$  tales que  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ . Entonces tenemos la siguiente sucesión larga en homología reducida:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(X) \rightarrow \tilde{H}_n(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

**Ejemplo.** Veamos el toro  $S^1 \times S^1$  visto como en el examen, con  $A = D^2$  y  $B = S^1 \vee S^1$ , casi todos los grupos de homología se hacen cero (aquí hay que usar que la homología de la cuña es la suma de las homologías de los "cuñandos"), y que la homología de  $S^1$  es cero cuando el subíndice es mayor o igual que 2. En fin, para  $m > 2$ ,  $\tilde{H}_m(X) = 0$ .

Ahora para la parte que sí nos toca, \*Falta\*

## 3. Complejos CW

### 3.1 Construcción

Establezcamos algo de notación

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  es el  $n$ -disco cerrado.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  es la  $n$ -esfera.
- $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  es la  $n$ -célula abierta o sólo la  $n$ -célula.

De tal forma que

- $\partial D^n = S^{n-1}$
- $D^n = e^n \cup S^{n-1}$  como conjuntos (no se usa la topología de la unión disjunta)
- Y bueno debe ser cierto que  $e^0 = \{pt\}$ .

**Definición.** Un espacio  $X$  es un complejo  $CW$  si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con un espacio discreto  $X^0$  que se llama el 0-esqueleto.
2. El  $n$ -esqueleto  $X^n$  lo obtengo a partir del  $n - 1$ -esqueleto  $X^{n-1}$  pegando  $n$ -células  $e_\alpha^n$  vía funciones  $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ . Formalmente tenemos el espacio

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n / \sim \quad x \sim \varphi_{\alpha}(x) \quad \text{si} \quad x \in \partial D_{\alpha}^n$$

*Realmente es tomar puntos y unirlos con líneas, y luego tomar líneas y rellenar con discos, etc...*

3. Realmente es tomar puntos y unir líneas entre ellos, y luego pegar puntos o líneas con discos, etc...

**Definición.** Si  $X = X^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $X$  es de dimensión finita y definimos la dimensión de  $X$  como la dimensión de la célula más grande que adjunté. Formalmente,  $\dim X = \min\{n : X^n = X\}$ .

**Ejemplo.** • Los 0-complejos CW son gráficas.

- $S^n$  es un complejo CW.
- Los espacios proyectivos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / x \sim \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\
 &= S^n / x \sim -x \\
 &= D^n / x \sim -x, \quad x \in \partial D^n = S^{n-1} \\
 &= \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n \\
 &= \mathbb{R}P^{n-2} \cup e^{n-1} \cup e^n \\
 &= e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n
 \end{aligned}$$

donde las funciones de pegado son justamente las antipodales, que ya conocíamos por ser el cubriente universal.

**Ejercicio.** Todo complejo CW es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, todo complejo CW tiene cubriente universal.

**Definición.** La función característica es  $\Phi_\alpha$ :

$$\begin{array}{ccc}
 e_\alpha^n & & X^{n-1} \sqcup D_\alpha^n \\
 \text{inclusión} \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{proyección al cociente} \\
 D_\alpha^n & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & X^n
 \end{array}$$

**Definición.** Sea  $X$  un complejo CW. Un subcomplejo  $Z$  es un subespacio cerrado que además es unión de células de  $X$ .

**Observación.** Para un subcomplejo  $Z$ ,

- $Z \subseteq X$  es una buena pareja ( $Z$  es retracto por deformación de una vecindad de  $X$ )
- $X/Z$  es un complejo CW.

**Observación** (Muy importante).  $X$  complejo CW. El cociente por el  $n-1$  esqueleto es una cuña de esferas, tantas como células en el  $n-1$  esqueleto. En símbolos,  $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$ , donde  $I_n$  es el conjunto que indexa las  $n-1$ -celdas.

## 3.2 Homología de complejos CW

**Lema.**

•

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in I_n} R & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\text{Express. } H_k = \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in I_n} S^n) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} H_k(S^n)$$

□

- $H_k(X^n) = 0$  para toda  $k > n$ .

Nuevamente, la homología, lo que aclance a ver la homología, lo ve solamente hasta la dimensión del espacio

- La inclusión  $X^n \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $H_k(X^n) \hookrightarrow H_k(X)$   $k > n$ .

Aquí la idea es que adjuntar células de dimensión mayor que la homología que estamos calculando no cambia la homología. Es decir, para  $n > k$  se tiene que  $H_k(X \cup D^n) = H_k(X)$ .

*Proof.* content...Fijémonos en  $(X^n, X^{n-1})$ , hay una sucesión exacta corta de la pareja:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Usando el inciso 1, si  $k \neq n, n-1$  entonces  $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ .

Bueno para demostrar (2), justamente tenemos  $k > n$  y entonces resultará, fijando  $k$  y bajando uno por uno,  $H_k(X^n) \cong H_k(X^0)$  que es un espacio discreto y la homología de grado mayor que cero en espacios discretos es cero. Terminamos el inciso (2).

Para (3), si  $k < n < n+1 < n+2 < \dots$ , simplemente tenemos que

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \dots \cong H_k(X^{n+m})$$

y si pedimos que  $X$  sea de dimensión finita entonces terminaremos en algún punto y listo. El caso de dimensión infinita queda para el futuro.  $\square$

**Definición** (Homología celular). Consideremos

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & \\
 \nearrow \partial_n & & \searrow j_{n-1} & & \\
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & & \searrow \partial_{n-1} & & \nearrow j_{n-2} \\
 & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & 
 \end{array}$$

Resultará que las flechas horizontales que definimos con los triangulitos, es decir las  $d_i$ , satisfacen que

$$d_{n+1} \circ d_n = 0$$

así que podemos bautizar el complejo de cadenas  $C_{\bullet}^{CW}(X, R)$ . Y ahora podemos definir la homología celular:

$$H_n^{CW}(X; R) = H_n(C_{\bullet}^{CW}(X))$$

**Teorema.**

$$H_n^{CW}(X; R) \cong H_n(X; R) \quad \forall n \geq 0$$

El primero depende de la estructura celular del espacio  $X$ , pero el segundo no. Así, la homología de un complejo  $CW$  es independiente de la estructura celular.

**Observación.** Estos grupos  $H_n(X^n, X^{n-1})$  son las sumas directas de  $R$ , uno por cada  $n$ -célula de  $X$  ie  $\bigoplus_{n\text{-células de } X} R = \{\sum r_\alpha e_\alpha^n | e_\alpha^n \text{ es una } n\text{-célula } r_\alpha \in R\}$ .