Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

29 de junio de 2023

Índice

I Grupo fundamental 3

II Espacios cubrientes 4

III Homología 5

1. Álgebra Homológica 6
- 1.1. Conceptos básicos 6
- 1.2. Sucesiones exactas 7
- 1.3. Homotopía 8
- 1.4. El lema de la serpiente 9

2. El teorema fundamental del álgebra homológica 10
- 2.1. Teorema fundamental del álgebra homológica 10
- 2.2. Natrualidad del homomorfismo de conexión 11

Parte I

Grupo fundamental

Parte II

Espacios cubrientes

Parte III

Homología

Capítulo 1

Álgebra Homológica

1.1. Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R-módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R.

Definición. Un **R-complejo de cadenas** es una sucesión de R-módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \quad \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que $\operatorname{img} \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un **morfismo de R-complejos de cadenas** es $(C_\bullet, \partial) \to (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R-homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_p} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que $(D_\bullet, \delta)$ es un **subcomplejo de cadenas** de $(C_\bullet, \partial)$ si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

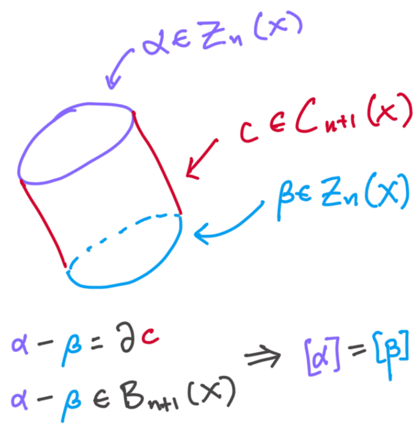
- Los elementos en C_p se llaman **cadenas de dimensión** p.
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión** p.
- Los elementos en img $\partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión** p.

Definición. El p**-ésimo grupo de homogía** de $(C_\bullet, d)$ es

$$H_p(C) := Z_p/B_p = \ker \partial_p / \text{img}\, \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida)**.** Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\to H_p(C_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\overline{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

1.2. Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en** C_p si img $f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p. Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to P \to Q \to R \to 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker \alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ es exacta si y sólo si img $\alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
3. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
4. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker \beta =$ img α, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img}\,\alpha$.

   Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B, podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo)**.** Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

1.3. Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \to C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1}\partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}-g_{p+1}"'] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "f_p-g_p"] \arrow[dl, "H_p"'] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}-g_{p-1}"] \arrow[dl, "H_{p-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{p+1} \arrow[r, "\partial'_{p+1}"'] & C'_p \arrow[r, "\partial'_p"'] & C'_{p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \to H_(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

1.4. El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente)**.** Consideremos el diagrama conmutativo de R-módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial_1"] & Z_2' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\partial_2"] & Z_3' \arrow[r] \arrow[d, "\partial_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r, "\phi"'] & Z_2 \arrow[r, "\psi"'] & Z_3 &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \to Z_1/\operatorname{img} \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1/\operatorname{img} \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2/\operatorname{img} \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3/\operatorname{img} \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ', y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ. ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \partial_1 \arrow[r, dashed, no head, "\phi''"] \arrow[d, no head] & \ker \partial_2 \arrow[r, dashed, no head, "\psi''"] \arrow[d, no head] & \ker \partial_3 \arrow[d, no head] \arrow[dddll, dashed, no head, "\partial_*"] & \\
 & Z_1' \arrow[r, no head, "\phi'"] \arrow[d, no head, "\partial_1"] & Z_2' \arrow[r, no head, "\psi'"] \arrow[d, no head, "\partial_2"] & Z_3' \arrow[r, no head] \arrow[d, no head, "\partial_3"] & 0 \\
0 \arrow[r, no head] & Z_1 \arrow[r, no head, "\phi"] \arrow[d, no head] & Z_2 \arrow[r, no head, "\psi"] \arrow[d, no head] & Z_3 \arrow[d, no head] & \\
 & \operatorname{coker} \partial_1 \arrow[r, dashed, no head, "\bar{\phi}"] & \operatorname{coker} \partial_2 \arrow[r, dashed, no head, "\bar{\psi}"] & \operatorname{coker} \partial_3 &
\end{tikzcd}$$

donde $\operatorname{coker} \partial_i = Z_i/\partial_i$. (En la versión **original** de este diagrama sí están las flechas).

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

Capítulo 2

El teorema fundamental del álgebra homológica

2.1. Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es exacta en $D_\bullet$ si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$\cdots \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C.) \to H_{p-1}(A.)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

2.2. Natrualidad del homomorfismo de conexión

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.**

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_\bullet \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r] & B'_\bullet \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_p(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\bar{h}"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_{p-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_{p-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(A') \arrow[r] & H_p(B') \arrow[r] & H_p(C') \arrow[r] & H_{p-1}(A') \arrow[r] & H_{p-1}(B') \arrow[r] & H_{p-1}(C') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(Para acomodar este diagrama **aquí hay soluciones**)