Notas de Topología Algebraica

Prof. Luis Jorge Sánchez Saldaña

Notas por Dani

github.com/danimalabares/top-alg

July 7, 2023

Índice

Parte I

Grupo fundamental

1. El grupo fundamental

1.1 Caminos y homotopías

Denotaremos por I al intervalo unitario $[0, 1]$ y por X a un espacio topológico cualquiera.

Definición. Un **camino** es una función $f : I \to X$.

Definición. Una **homotopía de caminos** en X es una familia $f_t : I \to X$, con $0 \leq t \leq 0$, tal que la función asociada

$$\begin{aligned} F : I \times I &\to X \\ (s,t) &\mapsto f_t(s) \end{aligned}$$

es continua.

Decimos que la homotopía $F : I \times I \to X$ es **relativa a los extremos** si

$$F(0,t) = x_0 \qquad \forall t \in IF(0,t) = x_1 \qquad \forall t \in I$$

para $x_0, x_1 \in X$.

Por último, dos caminos f_0 y f_1 en X tales que $f_0(0) = f_1(0)$ y $f_0(1) = f_1(1)$ son **homotópicos rel $\mathbf{0}, \mathbf{1}$** si hay una homotopía entre ellos, y se denota $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} 0, 1$.

Teorema. La relación $f_1 \sim f_2 \iff f_1 \simeq f_2 \operatorname{rel} 0, 1$ es una relación de equivalencia en en conjunto de caminos en X, que denotaremos por $\Omega(X) := \{f : I \to X\}$.

1.2 Definición del grupo fundamental

En nuestro camino a definir el grupo fundamental, primero definiremos una operación entre caminos:

Denotaremos por $[f]$ a la clase de homotoía $\operatorname{rel} 0, 1$ de $f \in \Omega(X)$.

Definición. Dados $f, g : I \to X$ tales que $f(1) = g(0)$, podemos definir la **concatenación de caminos**

$$f \cdot g : I \to X$$
$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, 1/2] \\ g(2s-1) & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Observación. Si $f \simeq f_1 \operatorname{rel} 0, 1$ y $g \simeq g_1 \operatorname{rel} 0, 1$, entonces $f \cdot g \simeq f_1 \cdot g_1 \operatorname{rel} 0, 1$.

Dicho de otra forma, si $[f] = [f_1]$ y $[g] = [g_1]$ entonces $[f \cdot g] = [f_1 \cdot g]$.

Definición. Decimos que $f : I \to X$ es un **lazo basado en** $x_0 \in X$ si $f(0) = f(1) = x_0$. Denotaremos por $\Omega(X, x_0) = \{f : I \to X : f(0) = f(1) = x_0\}$ al conjunto de tales lazos.

La relación de equivalencia $\operatorname{rel} 0, 1$ se restringe correctamente a $\Omega(X, x_0) \subseteq \Omega(X)$, así que podemos por fin definir

Definición. El **grupo fundamental** de X basado en x_0 es el conjunto

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/ \operatorname{rel} 0, 1$$

Teorema. El grupo fundamental es un grupo con la operación concatenación.

Demostración. Hay que ver que:

- El producto está bien definido.
- Hay un neutro, el camino constante $c_{x_0} : I \to X$ dado por $c_{x_0}(t) = x_0$ para toda $t \in I$.
- Hay inversos.
- Hay asociatividad.

□

1.3 Cambio de punto base

¿Qué pasa cuando cambiamos del punto base? ¿Cambia el grupo fundamental? Es fácil notar que si los puntos están diferentes componentes arco-conexas, es muy fácil que cambien los grupos fundamentales. Pero, ¿qué pasa si están en la misma componente conexa?

Teorema. Si $x_0, x_1 \in X$ se pueden conectar por un camino, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

1.4 El grupo fundamental del círculo

Pensemos que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Teorema. $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ para cualquier $x_0 \in S^1$.

1.5 Consecuencias del grupo fundamental del círculo

1.5.1 El teorema fundamental del álgebra

1.5.2 Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2

Teorema. Toda función $f : D^2 \to D^2$ tiene un punto fijo.

1.5.3 El teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2

Teorema. Para cualquier función continua $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

1.6 El grupo fundamental de un producto

Teorema. Sean X y Y espacios topológicos y $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Entonces

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

1.7 Homomorfismos inducidos (funtorialidad)

Primero establezcamos algo de notación. Si $f : X \to Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y $f(x_0) = y_0$, escribimos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$.

Teorema (El grupo fundamental es un funtor $\pi_1 : \mathrm{Top}^* \to \mathrm{Grp}$)**.** La función $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induce un homomorfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

tal que

1. Si $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
2. $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$

1.8 El grupo fundamental de la n-esfera

Proposición. $\pi_1(S^n) = 0$ si $n \geq 2$.

Para lo cual se usa el siguiente lema:

Lema. Sea $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ tal que

- A_α son abiertos (es una cubierta abierta)
- Existe $x_0 \in \bigcap A_\alpha$
- A_α es arco conexo
- $A_\alpha \cap A_\beta$ también es arcoconexo $\forall \alpha, \beta$.

Entonces todo lazo γ en X es homotópico rel 0,1 a un producto (concatenación) de lazos de la forma $\gamma \cong \gamma_1 ... \gamma_n$ tal que toda γ_i está completamente contenido en algún A_α.

1.9 $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$

Teorema. $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si $n \neq 2$

Observación. Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n - \{x\}$ es homeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Teorema. $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$.

1.10 Homotopía

Dos funciones $f, g : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una función que llamaremos **homotopía** de la forma $H : X \times I \to Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \qquad \forall x \in X \\ H(x,1) &= g(x) \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por $f \simeq g$.

Si tenemos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ y f es tal que $f(A) \subseteq B$, escribiremos

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

Una homotopía entre funciones de este estilo es una función $H : X \times I \to Y$ tal que todas las funciones que obtenemos al cambiar el parámetro en el tiempo sean funciones que siguen enviando A en B. Es decir, que tenemos las funciones

$$H(\_, t) : (X, A) \to (Y, B) \qquad \forall t \in I$$

tales que

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \qquad \forall x \in X \\ H(x,1) &= g(x) \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

Y en particular, si $A = \{x_0\}$ y $B = \{y_0\}$, igualito que antes, escribiremos

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

En este caso, diremos que **homotopía que preserva el punto base** es una función $H : X \times I \to Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x_0,t) &= y_0 \qquad \forall t \in I \\ H(x,0) &= f(x) \qquad \forall x \in X \\ H(x,1) &= g(x) \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

y diremos, así nomás, que f y g son homotópicas, especificando si es necesario que la homotopía preserva el punto base.

Proposición. Si $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son homotópicas (preservando el punto base) entonces inducen el mismo homomorfismo en grupos fundamentales, es decir, $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Definición. Dos espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas** $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. Y se denota por $X \simeq Y$.

Corolario. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $g : Y \to X$ es como en la definición anterior. Basta mostrar que f_* y g_* son inversas una de la otra. Y sí, porque $Id_{\pi_1(X,x_0)} = (gf)_* = g_* f_*$ y análogamente $Id_{\pi_1(Y,y_0)} = f_* g_*$. $\square$

Ejercicio (Hatcher 0.11)**.** *Se pueden usar diferentes funciones para ir y regresar.* $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica si existen $g, h : Y \to X$ tales que $fg \simeq Id_Y$ y $gf \simeq Id_X$. Y más generalmente, f es una equivalencia homotópica si fg y hf son equivalencias homotópicas.

2. El teorema de Van Kampen

2.1 Grupos libres

2.2 Productos libres

En teoría de grupos, normalmente definimos el producto directo pensando en algo así:

$$\begin{tikzcd}
 & G \times H & \\
G_\alpha \arrow[ur, hook, "g \mapsto (g,1)"] & & H \arrow[ul, hook', "h \mapsto (1,h)"']
\end{tikzcd}$$

donde el producto es conmutativo, es decir

$$(g,1)(1,h) = (1,h)(g,1)$$

Ahora vamos a definir un producto que se llamará el **producto libre** donde los elementos no van a conmutar:

Definición. Sea $\{G_\alpha\}_{\{}\alpha \in I\}$ una colección de grupos. Como conjunto, el producto libre $*_{\alpha \in I} G_\alpha$ consiste de las palabras $g_1 g_2 \dots g_m$ para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ donde cada g_i está en algún G_α. Además, $g_i \neq 1$, y g_i, g_{i+1} siempre pertenecen a diferentes G_α, es decir $g_i \in G_\alpha$ y $g_{i+1} \in G_\beta$ con $\alpha \neq \beta$. En este caso, decimos que $g_1 \dots g_m$ es una **palabra reducida**.

La operación binaria en $*_{\alpha \in I}$ está dada por la concatenación.

Observación. Cada uno de los G_α está contenido en $*_{\alpha \in I} G_\alpha$, pues están en la forma de palabras de una sola letra. En símbolos:

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow *_{\alpha \in I} G_\alpha \\ g &\mapsto g \end{aligned}$$

Teorema (Propiedad universal del producto libre)**.** Dados los homomorfismos $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$, entonces existe un único homomorfismo $\varphi : *_{\alpha \in I} G_\alpha \to H$ que extiende a los φ_α, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & H \\ & *_{\alpha\in I} G_\alpha \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

2.3 Subgrupos normalmente generados

2.4 El teorema de Van Kampen

Imagínense que queremos calcular el grupo fundamental de un espacio pero no sabemos cómo. (Esto pasa muy seguido). Pero resulta que podemos ver este espacio como la unión de muchos subespacios de los que conocemos sus grupos fundamentales. Éste es el escenario del teorema de Van Kampen.

Tomemos un espacio topológico X, un punto base $x_0 \in X$ y supongamos que $X = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ para ciertos espacios A_α tales que $x_0 \in A_\alpha$, para toda $\alpha \in I$, y además supongamos que los A_α son arco-conexos.

Así que como los A_α son subespacios, podemos pensar en la inclusión $A_\alpha \hookrightarrow X$ y en los homomorfismos inducidos en los grupos fundamentales, que llamaremos $j_\alpha : \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Entonces, por la propiedad fundamental del producto libre, tenemos un homomorfismo que sale del producto libre de esos grupos al grupo fundamental de X, es decir

$$*_{\alpha\in I}\pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

El teorema nos dirá que esta función es suprayectiva. Intuitivamente, nos dice que cualquier lazo en X es homotópico a otro lazo que es la concatenación de ciertos lazos, cada uno completamente contenido en alguno de los A_α.

Ahora pensemos en un lazo que está en la intersección de dos de los A_α. Podemos pensar el lazo está en, digamos, A_α, y su inverso está en A_β. Entonces, como elemento en el producto libre $*_{\alpha\in I}\pi_1(A_\alpha, x_0)$, este lazo no es la identidad. Pero al empujarlo al grupo $\pi_1(X, x_0)$, sí es la identidad. Bueno, todo esto para decir que el mapeo que hemos construido no es inyectivo.

Ahora pensemos que para $\alpha, \beta \in I$, tenemos la inclusión $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, que induce un mapeo

$$i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \to \pi_1(A_\alpha)$$

. (El orden de los subíndices fue importante, ya que el codominio está dado por el primer símbolo en el subíndice).

Juntemos lo que hemos dicho en los dos párrafos anteriores. El lazo no trivial $1 \neq i_{\alpha\beta}[f]i_{\beta\alpha}[\bar{f}] \in *_{\alpha\in I} A_\alpha$ puede ser empujado a $\pi_1(X, x_0)$. El teorema de Van Kampen nos dirá que el kernel del homomorfismo (que ya dijimos que seguramente no es inyectivo) está generado justamente por elementos de ese estilo.

Ahora sí:

Teorema (de Van Kampen)**.** Si $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ con A_α arco-conexo $\forall \alpha \in I$, $x_0 \in A_\alpha$, y además $A_\alpha \cap A_\beta$ es arco-conexo $\forall \alpha, \beta \in I$. Entonces el homomorfismo

$$\Phi : *_{\alpha \in I} \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

es suprayectivo.

Si además $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ es arcoconexo $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$, entonces

$$\ker \Phi = \langle \langle i_{\alpha\beta}(\omega) i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1} : \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta \rangle \rangle$$

En particular,

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha \in I} \pi_(A_\alpha, x_0) / \ker \Phi$$

2.5 El grupo fundamental de una cuña de espacios

No encontré este video en la página del curso.

Consideremos una colección de espacios topológicos X_α con $\alpha \in I$ y escojamos un punto en cada espacio, digamos $x_\alpha \in X_\alpha$. Entonces, definimos la **cuña** de estos espacios como

$$\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha := \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \Big/ \{x_\alpha \sim x_\beta, \forall \alpha, \beta \in I\}$$

Supongamos también que cada x_α es una retracción por deformación de alguna vecindad $U_\alpha \subseteq X_\alpha$.

Entonces tenemos:

Teorema. Dadas estas hipótesis, el homomorfismo que aparece en el teorema de Van Kampen

$$\phi *_{\alpha \in I} \pi_1(X_\alpha, x_0) \to \pi_1(\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha)$$

es un isomorfismo.

2.6 Todo grupo es el grupo fundamental de algún espacio

2.6.1 Presentaciones de grupos

Consideremos un grupo G y un conjunto generador $S \subseteq G$, es decir, tal que $\langle S \rangle = G$. Eso es equivalente a adecir que todo elemento de G se puede ver como un producto de elementos en S.

Consideremos también el grupo libre generado por S, digamos F_S, y usemos la propiedad universal de los grupos libres para ver que existe un único homomorfismo suprayectivo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & G \\ F_S \arrow[ur, dashed, two heads, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Hemos demostrado que

Teorema. Dado un grupo G existe un grupo libre F_S que se suprayecta a G. En particular, por el primer teorema de isomorfismo, todo grupo es cociente de un grupo libre.

Si además tenemos un conjunto $R \subseteq \ker \varphi$ que genera normalmente al kernel, es decir, $\langle\langle R \rangle\rangle = \ker \varphi$, tenemos que $G \cong F_S / \ker \varphi \cong F_S / \langle\langle R \rangle\rangle$ y decimos que

$$G = \langle S, R \rangle$$

es una **presentación** de G.

Ejemplos. 1. S

Proposición. Si $G = \langle S, R \rangle$ es una presentación de grupos, K es otro grupo, y $f : S \to K$ es una función tal que para cualesquiera $s_1, \ldots, s_m \in R$, $s_i \in S$,

$$f(s_1) \ldots f(s_m) = 1,$$

entonces existe un único homomorfismo $\bar{f} : G \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Es decir, para definir un homomorfismo' que salga de un grupo dada una presentación, sólo hay que asegurarnos de que las relaciones "se respeten".

2.6.2 Todo grupo es isomorfo al grupo fundamental de algún espacio

Lema. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ un punto base y $f : S^1 \to X$ tal que $f(1) = x_0$. Para el espacio de adjunción $Y = X \cup_f D^2$,

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle\langle [f] \rangle\rangle$$

donde estamos viendo a f como un lazo en el grupo fundamental.

Esto se llama "matar" un lazo.

Lema. Sea X un espacio topológico, $x_0 \in X$ un punto base y $f_\alpha : S^1 \to X$, con $\alpha \in I$, tales que $f(1) = x_0$. Para el espacio de adjunción $Y = X \cup_{\{f_\alpha\}} \{D^2\}$,

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle\langle [f_\alpha] : \alpha \in I \rangle\rangle$$

donde estamos viendo a f como un lazo en el grupo fundamental.

Y ahora sí,

Teorema. Para cualquier grupo G existe un espacio topológico X tal que $\pi_1(X, x_0) \cong G$.

2.7 El grupo fundamental no detecta células de dimensión mayor que 2

Para formalizar el nombre de esta sección, necesitaremos:

- Un espacio topológico conexo X
- na célula e^n de dimensión $n > 2$, es decir, un espacio homeomorfo al n-disco cerrado.
- Una función de pegado $f : S^{n-1} \to X$.
- El espacio de adjunción $Y \cup_f e^n$.
- Un punto $x_0 \in \operatorname{img}(f)$.

Entonces tenemos que:

Teorema. La inclusión $i : X \hookrightarrow Y$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Es decir, cuando le pegamos a un espacio una célula de dimensión mayor que 2, el grupo fundamental quedó igual.

Parte II

Espacios cubrientes

3. Espacios cubrientes

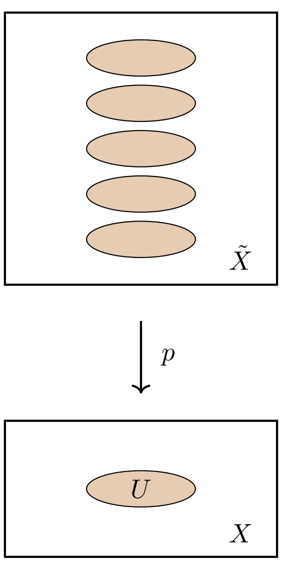
3.1 Definición de espacio cubriente

En la demostración del grupo fundamental del círculo ya habíamos usado la idea de espacio cubriente. Aquí está la definición general:

Definición. Un **espacio cubriente** de X es un espacio $\tilde{X}$ junto con una función

$$p : \tilde{X} \to X$$

tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos de $\tilde{X}$ de manera que cada uno se proyecta homeomorfamente a U vía p.



Introducimos otros términos:

- A la función p le llamamos **proyección cubriente**.
- A U se le llama **vecindad regular**.
- A los abiertos de $p^{-1}(U)$ que se proyectan homeomorfamente a U se les llama **hojas** de $\tilde{X}$ sobre U.
- El conjunto $p^{-1}(x)$ se llama la **fibra** de x bajo p.

Observación.

- Si U es conexo entonces las hojas de U son las componentes conexas de p^{-1}.
- El número de hojas sobre U es igual a la cardinalidad de $p^{-1}(x)$.
- Este número es *localmente constante*, es decir, es igual para cualquier punto:

Ejemplos.

1. La identidad $Id : X \to X$.
2. La proyección natural de la unión disjunta de copias de un espacio, es decir $p : \bigsqcup_{\alpha \in I} X \to X$.
3. Para cualesquiera dos cubrientes $p : \tilde{X} \to X$ y $q : \hat{X} \to X$, la proyección desde la unión disjunta $r : \tilde{X} \sqcup \hat{X} \to X$ definida de la manera natural, también es un cubriente. Esto para decir que nos interesan los cubrientes de espacios conexos cuyos cubrientes sean conexos.
4. $p : \mathbb{R} \to S^1$ como en la prueba del grupo fundamental del círculo.
5. Para $n \in \mathbb{N}$, la función $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$

3.2 Levantamiento de homotopía para cubrientes

Definición. Un **levantamiento** de una función $f : Y \to X$ con respecto a un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ es una función $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $p\tilde{f} = f$. Es decir, que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Teorema (Propiedad del levantamiento de homotopía para cubrientes)**.** Dado un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ y una homotopía $h_t : Y \to X$ y un levantamiento $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$ de f_0, entonces existe una única homotopía $\tilde{f}_t : Y \to \tilde{X}$ que levanta a cada uno de los f_t.

Es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f_0"] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

3.3 El homomorfismo inducido de la proyección cubriente

Dada una proyección cubriente $p : \tilde{X} \to X$, ¿qué propiedades tendrá el mapeo inducido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ donde $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Resultará que es inyectivo.

Para demostrar esto, se usará la Propiedad del levantamiento de homotopía para cubrientes. Entonces primero vamos a ver un par de casos sencillos de cómo se usa este teorema:

Proposición (Propiedad del levantamiento de caminos)**.** Un camino tiene un único levantamiento una vez definido a dónde va a dar el punto inicial. Para verlo, escogemos el caso en que Y consta de un sólo punto, así que una homotopía de $Y \times I$ es un camino en X.

Observación. El levantamiento de un camino constante es un camino constante.

Observación. Si $Y = I$, y $H : I \times I$ es una homotopía $\operatorname{rel} 0, 1$, entonces el levantamiento $\tilde{H}$ también es una homotopía $\operatorname{rel} 0, 1$.

Ahora sí,

Proposición. Dada una proyección cubriente $p : \tilde{X} \to X$, el mapeo inducido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ es inyectivo. Más aún, $p_*\Big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\Big) \leq (X, x_0)$ consiste de los lazos basados en x_0 que se levantan a lazos en $\tilde{X}$ basados en $\tilde{x}_0$.

3.4 El número de hojas de un cubriente y el grupo fundamental

Proposición. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un cubriente con $\tilde{X}$ y X conexos por trayectorias. Entonces el número de hojas del cubriente es igual al índice de $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.

3.5 El criterio de levantamiento de funciones

Consideremos un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ y una función cualquiera $f : Y \to X$. ¿Bajo qué condiciones será posible levantar esta función al cubriente? Queremos que este diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Estas funciones no siempre van a existir. Para saber cuándo sí, primero veamos:

Definición. Decimos que un espacio topológico Y es **localmente arco-conexo** si para todo punto $y \in Y$ y cada vecindad U de y, existe $y \in V \subseteq U$ que es arcoconexa.

Proposición. Sean $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un cubriente y una función $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ con Y espacio arco-conexo y localmente arco-conexo. Entonces existe un levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, x_0)$ si y sólo si $f_*\left(\pi_1(Y, y_0)\right) \subseteq p_*\Big(\pi_1(\tilde{X}, x_0)\Big)$.

3.6 Unicidad del levantamiento de funciones

¿Bajo qué condiciones un levantamiento es único? Cuando dos levantamientos coincidan en un punto, tienen que ser iguales. (Siempre que el dominio sea arco-conexo.)

Proposición. Sean $p : \tilde{X} \to X$ un cubriente y $f : Y \to X$ una función. Si dos levantamientos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ de f coinciden en un punto y Y es conexo, entonces $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}_1", "\tilde{f}_2"'] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

3.7 El cubriente universal

En esta sección intentaremos clasificar todos los cubrientes que puede tener un espacio. La primera pregunta que nos hacemos en qué casos un cubriente tiene un cubriente cuyo grupo fundamental sea trivial. Tal cubriente será llamado el **cubriente universal**, que será universal en cuanto a que va a cubrir a cualquier otro cubriente.

Supongamos que tenemos un espacio X que

- es arco-conexo.
- es localmente arco-conexo.

Ahora tomemos un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ como decíamos, simplemente conexo. Cuando tomamos un punto $p \in X$ y una vecindad regular, cualquier lazo contenido en esa vecindad, podemos levantarlo a una de sus preimágenes. Pero como el cubriente $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces el lazo levantado es contraible, y esa homotopía se proyecta a una homotopía del lazo con el que empezamos al lazo constante.

Definición. Un espacio es **semilocalmente simplemente conexo** si para cada $x \in X$ existe una vecindad U tal que todo lazo contenido en U se retrae al lazo constante c_x en X. Equivalenetemente, el homomorfismo inducido por la inclusión $\pi_1(U, x_0) \to (X, x_0)$ es constante.

O sea que ya demostramos que si X tiene cubriente universal entonces es semilocalmente simplemente conexo. Ahora queremos ver que el regreso también es cierto (cuando X también es arco-conexo y localmente arco-conexo).

Proposición. Un espacio Y es simplemente conexo si y sólo si para todo $x, y \in Y$ existe una única clase de homotopía $\mathrm{rel}\, 0, 1$ de caminos que unen x a y.

Esto implica que hay una biyección entre los puntos de Y y las clases de equivalencia de caminos que empiezan en x_0, es decir, $Y \leftrightarrow \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\}$.

Ahora consideremos un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ simplemente conexo y un punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Denotemos $p(\tilde{x}_0) = x_0 \in X$. Entonces, por lo dicho hace un momento los puntos en el espacio cubriente $\tilde{X}$ están in biyección con los caminos que empiezan en $\tilde{x}$, y proyectando mediante p, vamos a dar a los caminos que comienzan en x_0. Usando la propiedad del levantamiento de homotopía, se verifica que esa correspondencia es biyectiva:

$$\{[\gamma] : \gamma(0) = \tilde{x}_0\} \leftrightarrow \{[\beta] : \beta(0) = x_0\}$$

Ahora sí:

Teorema. Supongamos que X es un espacio topológico arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo, y tomemos un punto base $x_0 \in X$. El espacio

$$\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\}$$

acompañado de la función

$$\begin{aligned} p : \tilde{X} &\to X \\ [\gamma] &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

son un cubriente universal de X. Es decir:

- $\tilde{X}$ tiene una topología.
- p es continua.
- p es cubriente.
- $\tilde{X}$ es simplemente conexo.

3.8 El teorema de clasificación de cubrientes

En esta sección veremos, grosso modo, que hay una correspondencia entre cubrientes universales (salvo isomorfismo) con los subgrupos del grupo fundamental.

Proposición. Sea X un espacio topológico arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonce spara todo $H \leq \pi_1(X, x_0)$ existe un cubriente $p : X_H \to X$ tal que $p_*(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$.

Demostración. Usando la construcción del cubriente universal, tomamos una relación de equivalencia determinada por H y proponemos el espacio cociente $\tilde{X}/\sim$. □

Ahora nos preguntamos si este cubriente es único de alguna manera. La respuesta es que sí, pero primero debemos definir la noción de isomorfismo de cubrientes.

Definición. Dos cubrientes $\tilde{X}_1$ y $\tilde{X}_2$ son **isomorfos** si existe un homeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "homeo"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Proposición. Si X es arco-conexo y localmente arco-conexo, entonces $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ y $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ son isomorfos mediante $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, con ciertos puntos base tales que $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ y $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0 \in X$ si y sólo si

$$p_{1*}\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right) = p_{2*}\left(\pi_2(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\right)$$

Notemos que en la proposición anterior, $p_{1*}\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right) = H$ era un subgrupo arbitrario de $\pi_1(X, x_0)$. Hemos demostrado que dos cubrientes que provienen del mismo grupo son isomorfmos. De hecho, ya demostramos:

Teorema. Sean X un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente arco-conexo, y $x_0 \in X$. Entonces la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \{p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0) : p \text{ es un cubriente}\}\big/\text{isomorfismo} & \longleftrightarrow & \{H \leq \pi_1(X, x_0)\} \\ \tilde{X} \xrightarrow{p} X & \mapsto & p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right) \end{array}$$

es una biyectiva.

Notemos que si cambiamos la elección del punto base $\tilde{x}_0$ en el cubriente, podemos ir a dar a un subgrupo muy diferente. Esto nos lleva a:

Teorema. Sean X un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente arco-conexo, y $x_0 \in X$. Entonces hay una biyección

$$\begin{array}{ccc} \{p : \tilde{X} \to X : p \text{ es un cubriente}\}\big/\text{isomorfismo} & \longleftrightarrow & \{H \leq \pi_1(X, x_0)\}\big/\text{conjugación} \\ \begin{array}{c}\tilde{X} \xrightarrow{p} X \\ \text{escojo } \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\end{array} & \mapsto & p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right) \end{array}$$

3.9 Transfromaciones de cubierta

Definición. Tomemos un espacio X y algún cubriente $p : \tilde{X} \to X$. Una **transformación de cubierta** es un isomorfismo de $\tilde{X}$ en sí mismo, es decir, homeomorfismos que hacen conmutar este diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Es decir, $pf = p$

El conjunto $G(\tilde{X}) := \left\{f : \tilde{X} \to \tilde{X} : f \text{ es transformación de cubierta}\right\}$ tiene estructura de grupo, y le llamaremos **el grupo de transformaciones de cubierta**.

Ejemplo. El cubriente $f_n : S^1 \to S^1$ dado por $z \mapsto z^n$ tiene grupo de transformaciones de cubierta $G(f_n : S^1 \to S^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Además, $f_{n*}\pi_1(S^1) = n\mathbb{Z}$. O sea que $G(f_n : S^1 \to S^1) \cong \pi_1(S^1)/f_{n*}\pi_1(S^1)$. Y esto no es ninguna casualidad.

Además, para el cubriente universal de S^1, que es $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ también se cumple, ya que el grupo fundamental es trivial, es decir, $G(\exp : \mathbb{R} \to S^1) \cong \mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$.

Proposición. Si $g, f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ son transformaciones de cubierta con $\tilde{X}$ arco-conexo y tales que existe $x \in \tilde{X}$ con $g(x) = f(x)$, entonces $g = f$.

Demostración. Basta pensar que la transformación de cubierta es un levantamiento de la proyección cubriente:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Por el teorema del levantamiento de funciones, f es único una vez que escogemos un punto $y \in f^{-1}(x)$ en la fibra de x. $\square$

Definición. Decimos que un cubriente $p : \tilde{X} \to X$ es **normal** si para cualquier $x \in X$ y $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$ existe una transformación de cubierta $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{x}'$. Es decir, que el grupo de transformaciones de cubierta actúa transitivamente en las fibras.

Proposición. Sea $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un cubriente con $\tilde{X}$ y X arco-conexo y localmente arco-conexo. Sea $H = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \leq \pi_1(X, x_0)$. Entonces

a) El cubriente es normal si y sólo si $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$.

b) $G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$ donde $N(H) = \{g \in \pi_1(X, x_0) | g^{-1}Hg = H)\}$

En particular, cuando $\tilde{X}$ es normal, $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)/H$. Y si además $\tilde{X}$ es el cubriente universal, simplemente tenemos que $G(\tilde{X}) \cong \pi_(X, x_0)$.

3.10 Acciones de grupos y cubrientes

Definición. Decimos que un grupo G **actúa** en X si hay un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{Homeo}(X) \\ g &\mapsto \varphi(g) : X \to X \\ &\qquad\qquad x \mapsto \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

de forma que

- $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$
- $(g_1 g_2)x = g_1(g_2(x))$
- $\varphi(1_G) = Id_X$

Y se denota $G \curvearrowright X$. La **órbita** de un punto $x \in X$ es el conjunto $\mathrm{Orb}\{g(x) : g \in G)\}$.

Notemos que la relación $x \sim y \iff y \in \mathrm{Orb}(x)$ es de equivalencia, así que podemos pensar en el espacio cociente $X/\sim \; := X/G$. Nos hacemos la siguiente pregunta: dada una acción de grupos $G \curvearrowright Y$, ¿cuándo Y/G es un cubriente?

Definición. Decimos que $G \curvearrowright Y$ es una **acción cubriente** si se cumple cualquiera de los dos siguientes condiciones equivalentes:

- Cualquier punto $y \in Y$ tiene una vecindad U tal que $(g_1U \cap g_2U) \neq \emptyset \implies g_1 = g_2$
- Cualquier punto $y \in Y$ tiene una vecindad U tal que $gU \cap U \neq \emptyset \implies g = 1_G$.

En particular, estas condiciones implican que la acción es **libre**, es decir, que si $g(y) = y$ para cualesquiera $g \in G$ y $y \in Y$, entonces, $g = 1_G$.

Proposición. Dada una acción cubriente $G \curvearrowright Y$,

a) La proyección cociente $p : Y \to Y/G$ dada por $p(y) = Gy$ es un cubriente normal.

b) Si Y es arco-conexo, G es el grupo de transformaciones de cubierta de p.

c) Si Y es arco-conexo y localmente arco-conexo, $G \cong \pi_1(Y/G, y_0)/p_*\pi_1(Y, \tilde{y}_0)$

Corolario. Si además Y es simplemente conexo, por b) y por c), $G = G(\tilde{Y}) \cong \pi_1(Y/G, y_0)$.

4. Ejercicios

Ejercicio (2, General 2022-2). **Sean S la 2-esfera y T el 2-toro. Calcule el grupo fundamental G de $X := S \vee T$, construya el cubriente universal $\widetilde{X} \to X$ y describa la acción por transformaciones de cubierta de G en $\widetilde{X}$.**

Solución. Por el teorema de Van Kampen, $\pi_1(S \vee T, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para cualquier elección de x_0. □

Ejercicio (Hatcher, 1.3.8). **Sean $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ espacios cubrientes simplemente conexos de espacios arco-conexos y simplemente conexos X y Y. Muestre que si $X \simeq Y$, entonces $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$. (Quizás convenga usar el ejercicio 0.11, Hatcher)**

Solución. Todo está en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& & & \tilde{X} \arrow[dd, "p"] \\
& & \tilde{Y} \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[d, "q"] & \\
\tilde{X} \arrow[r, "p"'] \arrow[urr, dashed, "\tilde{f}"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

Donde:

1. f y g son equivalencias homotópicas entre X y Y.
2. pf se levanta a una única función $\tilde{f}$ por las hipótesis de conexidad. Lo mismo para encontrar $\tilde{g}$.
3. Como todo conmuta, $\tilde{g}\tilde{f}$ es un levantamiento de gfp.
4. Como $gf \simeq Id_X$, entonces $gfp \simeq p$. Esta homotopía se levanta de manera única a una homotopía $H : \tilde{X} \times I \to \tilde{X}$ ya que, como acabamos de ver, $H(\_, 0) = \tilde{g}\tilde{f}$. Luego, $pH(\_, 1) = p$.

5. Así que $H(\_, 1) := h$ es un levantamiento de p, igual que la identidad. Si lográramos ver que coinciden en un sólo punto, es decir que h fija a cualquier punto, por unicidad del levantamiento de funciones, tendríamos que $h = Id_{\tilde{X}}$.

   Pero no tenemos certeza de que eso ocurra. Lo que sí sabemos que como $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces p es un cubriente normal. O sea que el grupo de transformaciones de cubierta actúa transitivamente en las fibras de los puntos.

   Entonces tomemos un punto $\xi \in \tilde{X}$. Si h no lo fija, ni modo, pero sabemos que existe una transformación de cubierta u tal que $u(h(\xi)) = \xi$.

   Ahora sí, por unicidad del levantamiento de funciones, $uh = Id_{\tilde{X}}$.

6. Entonces $u\tilde{g}\tilde{f} \simeq Id_{\tilde{X}}$.

7. El ejercicio 0.11, nos asegura que si encontramos dos funciones $\phi, \psi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tales que $\phi\tilde{f} \simeq Id_{\tilde{X}}$ y $\tilde{f}\psi \simeq Id_{\tilde{Y}}$, entonces $\tilde{f}$ es una equivalencia homotópica y terminamos. Ya encomtramos ϕ.

   Para encontrar ψ, simplemente hacemos el mismo razonamiento sólo que ahora necesitamos una transformación de cubierta w tal que $\tilde{f}\tilde{g}w \simeq Id_{\tilde{Y}}$.

   Es decir, aquí hay que aplicar la w antes de la función que obtenemos mediante la homotopía, digamos $\bar{h}$. Esto es legal: en vez de mover a $\bar{h}(\xi)$ de regreso a ξ, de antemano movemos a ξ mediante w a un punto en la preimagen de ξ bajo $\bar{h}$. Aunque quizás $\bar{h}$ es suprayectiva, basta con escoger $\xi \in \operatorname{img} \bar{h}$.

□

Ejercicio. Para el sábado: hacer de homología y quizás uno de grupo fundamental.

Parte III

Homología

5. Álgebra Homológica

5.1 Conceptos básicos

En este capítulo R denotará un anillo asociativo con unidad (no necesariamente conmutativo). Normalmente pensaremos que es alguno de los siguientes: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Recordemos que un R-módulo es básicamente un espacio vectorial pero los escalares están R.

Definición. Un **R-complejo de cadenas** es una sucesión de R-módulos y homomorfismos

$$(C_\bullet, \partial) := \quad \cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

tal que $\partial_{p-1}\partial_p = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que img $\partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$.

Definición. Un **morfismo de R-complejos de cadenas** es $(C_\bullet, \partial) \to (D_\bullet, \delta)$ es una sucesión de R-homomorfismos $C_p \xrightarrow{f_p} D_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_{p-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & D_{p+1} & \xrightarrow{\delta_p} & D_p & \xrightarrow{\delta_p} & D_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

es decir $f_{p-1}\partial_p = \delta_p f_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$.

Definición. Decimos que $(D_\bullet, \delta)$ es un **subcomplejo de cadenas** de $(C_\bullet, \partial)$ si $D_p \leq C_p$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ y $\partial|_{D_p} = \delta_p$. El cociente $(C_\bullet/D_\bullet, \partial)$ es el complejo de cadenas dado por

$$\cdots \longrightarrow C_{p+1}/D_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p/D_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}/D_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

donde los mapeos frontera son de la forma $\partial_p/\delta_p([c]) = [\partial_p(c)]$.

Definición.

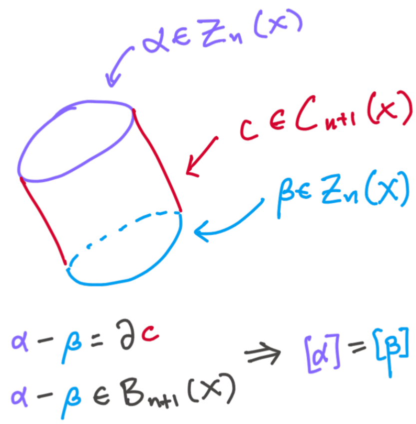
- Los elementos en C_p se llaman **cadenas de dimensión** p.
- Los elementos en $\ker \partial_p := Z_p$ se llaman **ciclos de dimensión** p.
- Los elementos en img $\partial_{p+1} := F_p := B_p$ se llaman **fronteras de dimensión** p.

Definición. El **p-ésimo grupo de homogía** de $(C_\bullet, d)$ es

$$H_p(C) := Z_p/B_p = \ker \partial_p / \text{img}\, \partial_{p+1}$$

Y decimos que dos ciclos c y c' son **homólogos** si $[c] = [c'] \in H_p(C_\bullet)$.

Veamos una figura de dos ciclos homólogos:



Ejercicio (Función inducida)**.** Si $(C_\bullet, \partial) \xrightarrow{f} (C'_\bullet, \partial')$ es un homeomorfismo, entonces $f(Z_p) \subseteq Z'_p$ y $f(B_p) \subseteq B'_p$ así que la función inducida

$$\begin{aligned} \bar{f}_p : H_p(C_\bullet) &\to H_p(C_\bullet) \\ a + B_p &\mapsto f_p(a) + B'_p \end{aligned}$$

está bien definida. Si además tenemos un segundo homomorfismo $(C'_\bullet, \partial') \xrightarrow{g} (C''_\bullet, \partial'')$, entonces $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$. Y por último, $\overline{Id}_{C_p} = Id_{H_p(C)}$.

Con este ejercicio comenzamos a ver las propiedades funtoriales de la homología, aunque por ahora no profundizaremos en este lenguaje.

5.2 Sucesiones exactas

Definición. Decimos que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} C_{p-1} \xrightarrow{f_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta en** C_p si img $f_p = \ker f_{p-1}$. Y la sucesión es **exacta** si es exacta en todos los C_p. Esto sucede si y sólo si $H_p(C_\bullet) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Observación.

- El grupo de homología mide qué tan lejos está la sucesión de ser exacta.
- La sucesión puede ser "finita", o sea pueden haber muchos módulos que son cero.

Definición. Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to P \to Q \to R \to 0$$

se llama **sucesión exacta corta**. Las sucesiones exactas infinitas en ambas direcciones se llaman **sucesiones exactas largas**.

Proposición.

1. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si $\ker\alpha = 0$, es decir α es inyectiva.
2. $A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ es exacta si y sólo si img $\alpha = B$, es decir α es suprayectiva.
3. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ es exacta si y sólo si α es un isomorfismo por los dos incisos anteriores.
4. $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es exacta si y sólo si α es inyectiva, β es suprayectiva y $\ker\beta =$ img α, de manera que β induce un isomorfismo $C \cong B/\text{img}\,\alpha$.

   Si pensamos que α es la inclusión de A como subgrupo de B, podemos escribir $C \cong B/A$.

Observación (Primer teorema de isomorfismo)**.** Si $M' \subseteq M$, entonces

$$0 \longrightarrow M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

5.3 Homotopía

Definición. Dos homomorfismos

$$f, g : (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$$

son **homotópicos** si existen homomorfismos $H_p : C_p \to C'_{p+1}$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_p - g_p = \partial'_{p+1} H_p + H_{p-1}\partial_p$$

Estas flechas se pueden visualizar aquí:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "f_{p+1}-g_{p+1}"'] & C_p \arrow[r, "\color{blue}\partial_p"] \arrow[dl, "\color{blue}H_p"'] \arrow[d, "\color{red}f_p-g_p"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\color{blue}H_{p-1}"] \arrow[d, "f_{p-1}-g_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{p+1} \arrow[r, "\color{blue}\partial'_{p+1}"'] & C'_p \arrow[r, "\partial'_p"'] & C'_{p-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Así que la suma de las flechas azules es igual a la flecha roja. (No estamos diciendo que el diagrama sea conmutativo).

Lema. Con la notación de arriba, $\bar{f}_p = \bar{g}_p : H_p(C_\bullet) \to H_(C'_\bullet)$. Es decir, funciones homotópicas inducen funciones iguales en homología.

5.4 El lema de la serpiente

Lema (de la serpiente)**.** Consideremos el diagrama conmutativo de R-módulos y supongamos que sus filas son exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial_1"] & Z_2' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\partial_2"] & Z_3' \arrow[r] \arrow[d, "\partial_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r, "\phi"'] & Z_2 \arrow[r, "\psi"'] & Z_3 &
\end{tikzcd}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \ker \partial_3 \to Z_1/\operatorname{img} \partial_1$ tal que

$$\ker \partial_1 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_2 \xrightarrow{\phi''} \ker \partial_3 \xrightarrow{\delta_*} Z_1/\operatorname{img} \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2/\operatorname{img} \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3/\operatorname{img} \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ', y $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son homomorfismos inducidos por ϕ y ψ. ¿Dónde está la serpiente?

$$\begin{tikzcd}
 & \ker \partial_1 \arrow[r, dashed, "\phi''"] \arrow[d] & \ker \partial_2 \arrow[r, dashed, "\psi''"] \arrow[d] & \ker \partial_3 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, "\partial_*"] & \\
 & Z_1' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\partial_1"] & Z_2' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\partial_2"] & Z_3' \arrow[r] \arrow[d, "\partial_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & Z_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Z_3 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} \partial_1 \arrow[r, dashed, "\bar{\phi}"] & \operatorname{coker} \partial_2 \arrow[r, dashed, "\bar{\psi}"] & \operatorname{coker} \partial_3 &
\end{tikzcd}$$

donde $\operatorname{coker} \partial_i = Z_i/\partial_i$. (Este diagrama fue tomado de **internet**).

Observación. Intuitivamente, el coker nos da información de qué tan lejos está un homomorfismo de ser suprayectivo.

5.5 Teorema fundamental del álgebra homológica

Primero introduciremos algo de notación

Definición. Diremos que una sucesión de complejos de cadena

$$\cdots \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es exacta en $D_\bullet$ si

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{f_p} D_p \xrightarrow{g_p} E_p \longrightarrow \cdots$$

es exacta para todo $p \in \mathbb{Z}$

Teorema (fundamental del álgebra homológica)**.** Si

$$\cdots \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\phi} B_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de complejos de cadena, entonces existen homomorfismos

$$\partial_{*p} : H_p(C.) \to H_{p-1}(A.)$$

tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

En el siguiente diagrama conmutativo se ve claramente qué está pasando:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "i_{p+1}"] & A_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "i_p"] & A_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d, "j_{p+1}"] & B_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "j_p"] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "j_{p-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1} \arrow[r, "\partial_{p+1}"] \arrow[d] & C_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

5.6 Natrualidad del homomorfismo de conexión

Teorema (Naturalidad del homomorfismo de conexión)**.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_\bullet & \xrightarrow{i} & B_\bullet & \xrightarrow{j} & C_\bullet & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \longrightarrow & B'_\bullet & \longrightarrow & C'_\bullet & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde las filas son exactas.

Entonces, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_p(A) & \longrightarrow & H_p(B) & \longrightarrow & H_p(C) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(A) & \longrightarrow & H_{p-1}(B) & \longrightarrow & H_{p-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{g}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_p(A') & \longrightarrow & H_p(B') & \longrightarrow & H_p(C') & \longrightarrow & H_{p-1}(A') & \longrightarrow & H_{p-1}(B') & \longrightarrow & H_{p-1}(C') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Parece que ésta es una propiedad relacionada con la estructura de funtor de la homología.

5.7 Lema de los cinco

Lema (de los cinco)**.** Consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
\downarrow{\scriptstyle h_5} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\
N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
\end{array}$$

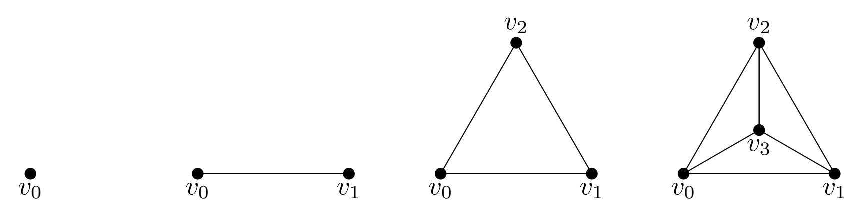
Si h_5, h_4, h_2 y h_1 son isomorfismos, entonces h_3 también.

¿En dónde se usará esto?

6. Homología singular

6.1 Simplejos

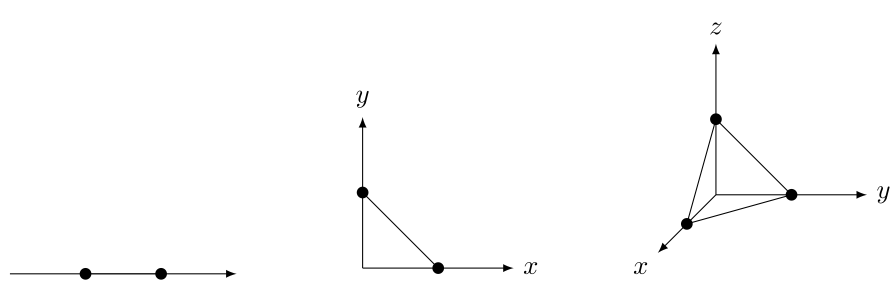
Comenzaremos definiendo varios conceptos nuevos. Fijemos un entero $n \geq 0$. Un n-**simplejo** es el convexo más pequeño en $\mathbb{R}^m$ $(m > n)$ que contiene $n+1$ puntos $v_0, ..., v_n$ que no viven en un hiperplano de dimensión menor que n.



0-simplejo 1-simplejo 2-simplejo 3-simplejo

Lo denotaremos por $[v_0, \ldots, v_n]$ y diremos que $v_0, \ldots, v_n$ son sus **vértices**. Y podemos escribirlo así: $[v_0, ..., v_n] = \{t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n | t_i \geq 0, t_0 + \ldots + t_n = 1\}$.

El n-**simplejo estándar** es $\Delta^n := [e_1, \ldots, e_n]$ donde $e_1, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$.



1-simplejo estándar 2-simplejo estándar 3-simplejo estándar

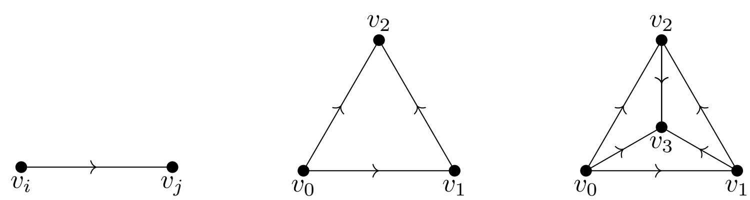
Y observemos que $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_0 + \ldots + t_n = 1\}$ Para nosotros el orden de los vértices en $[v_0, \ldots, v_n]$ es importante y siempre hay que tenerlo en mente.

Dado un n-simplejo siempre tenemos la función:

$$\begin{aligned}(v_0, \ldots, v_n) : \Delta^n &\to [v_0, \ldots, v_n] \\ (t_0 + \ldots + t_n) &\mapsto t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n\end{aligned}$$

Y diremos que $(t_0, \cdots + t_n$ son las **coordenadas baricéntricas** del punto $t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n \in [v_0, \ldots, v_n]$.

Una **cara** de $[v_0, \ldots, v_n]$ es el subsimplejo de generado por cualquier subconjunto no vacío de $v_0, \ldots, v_n$. Cualquier cara 1-dimensional $[v_i, v_j]$ con $i < j$ vamos a considerarla orientada en orden ascendente:



¿Cómo quedan orientadas las caras de dimensión 2?

6.2 El complejo de cadenas singulares

Tomemos un espacio topológico X y un anillo asociativo con unidad R. Un n**-simplejo singular** es una función $\sigma : \Delta^n \to X$.

El término "singular" proviene de que no se le imponen condiciones a la función σ salvo continuidad. Esto quiere decir que un simplejo singular puede verse bastante diferente de como lo imaginamos inicialmente.

Definamos el siguiente conjunto

$$C_n(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i \sigma_i | m \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R}, \sigma_i \text{ es un simplejo singular} \right\}$$

Que es el R-módulo libre generado por el conjunto de n-simplejos singulares. Los elementos de C_n se llaman n-cadenas singulares. Queremos construir la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial n-1} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \qquad (6.1)$$

Para lo cual basta definir $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n-simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0, \ldots, v_n] \to X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma | [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

Donde $\sigma|[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ es el siguiente $n-1$-simplejo singular: primero tomemos la $n-1$-cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i, es decir, $[v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n]$. Y luego simplemente componemos: $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n-simplejo singular $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ como sigue: para un n-simplejo singular $\sigma : \Delta^n = [v_0,\dots,v_n] \to X$,

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$$

Donde $\sigma|[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]$ es el siguiente $n-1$-simplejo singular: primero tomemos la $n-1$-cara de Δ^n que se obtiene al quitar el vértice v_i, es decir, $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n] := [v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n]$. Y luego simplemente componemos:

$$\begin{tikzcd}
{[v_0,\dots,v_n]} \arrow[rr, "\sigma"] & & X \\
{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]} \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {[v_0,\dots,v_{n-1}] = \Delta^{n-1}} \arrow[l] \arrow[ur, "{\sigma|[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}"']
\end{tikzcd}$$

Donde la flecha de abajo es la función obvia: manda los vértices en orden y se brinca el i-ésimo. Y bueno, así queda definida la función ∂_n en la base de C_n, y simplemente extendemos por linealidad a todo C_n. Ahora veamos una proposición:

Proposición. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Con lo que la sucesión (6.1) es un complejo de cadenas que podemos llamar el **complejo de cadenas singulares de** X, que denotaremos por $C_\bullet(X)$. Y ahora podemos considerar sus grupos de homología y definir

$$H_n(X;R) := H_n(C_\bullet(X))$$

como el n**-ésimo grupo de homología singular de** X **con coeficientes en** R**.**

6.3 Primeras propiedades de la homología

6.3.1 La homología y las componentes arco-conexas

Proposición. Sea $X = \bigsqcup X_i$ la descomposición en componentes arco-conexas del espacio topológico X, entonces

$$H_n(\bigsqcup X_i, R) \cong \bigoplus H_n(X_i, R)$$

6.3.2 El 0-ésimo grupo de homología

Proposición. Para cualquier espacio X, $H_0(X;R)$ es un suma directa de copias de R, una por cada componente arcoconexa.

6.3.3 La homología de un punto

Proposición. Si X consiste de un sólo punto, entonces

$$H_n(X;R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

6.4 Homología reducida

Considera

$$\cdots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

donde $\varepsilon(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i$ es el **mapeo de aumentación**.

Va a resultar que $\tilde{H}_n(X;R) = H_n(X;R)$ para toda $n \geq 1$.

Sobre la homología reducida del espacio que es un sólo punto

Sabemos por la proposición de la homología de un punto que si $X = \{x\}$, entonces $H_0(X) = R$, es decir, $\ker \partial_0/\text{img } \partial_1 = R$. Esto implica que la sucesión corta $0 \to \text{img } \partial_1 \xrightarrow{\partial_1} \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ es exacta.

¿Cómo deducimos de aquí que $\tilde{H}_0(X;R) = 0$? Bueno resulta que como el espacio es un punto, $\partial_1 = 0$, así que de entrada img $\partial_1 = 0$. Luego, en realidad tenemos la sucesión exacta corta $0 \to \ker \partial_0 \xrightarrow{\partial_0} R \xrightarrow{\varepsilon} 0$ que hace a ∂_0 un isomorfismo que en particular es inyectivo.

Como $\tilde{H}_0 = \ker \partial_0/\text{img } \partial_1$, entonces $\tilde{H}_0(X;R) = 0$.

Y en general $H_0(X;R) = \tilde{H}_0(X;R) \oplus R$

6.5 Funtorialidad

6.6 Invarianza homotópica

Primero recordemos que

Definición. Dos funciones $f, g : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una función $H : X \times I \to Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \qquad \forall x \in X \\ H(x,1) &= g(x) \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

y se denota por $f \simeq g$.

Definición. Dos espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existen dos funciones llamadas **equivalencias homotópicas** $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. Y se denota por $X \simeq Y$.

Ahora sí:

Teorema. Si dos funciones $f, g : X \to Y$ son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo en el n-ésimo grupo de homología $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ para toda n.

Corolario. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces la función inducida $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ es un isomorfismo para toda n.

Demostración. Usando el teorema y las propiedades de funtorialidad. □

Ejemplo. Si $X \simeq \{x_0\}$, es decir X es **contraible**, entonces

$$H_n(X, R) = \begin{cases} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

6.7 Homología relativa

Sean $A \subseteq X$ espacios topológicos. Diremos que (X, A) es una buena pareja. Notemos que $(C_\bullet(A))$ es un subcomplejo de $C_\bullet(X)$, así que podemos definir el complejo relativo

$$C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$$

Y esto simplemente quiere decir que para toda n,

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$$

de forma que las cadenas en A se vuelven triviales.

Es claro que el n-ésimo operador frontera restringido a $C_n(A)$ se mapea a $C_{n-1}(A)$, (pues la frontera de una cadena en A no podría salirse de A). Esto quiere decir que el mapeo frontera está bien definido en el cociente.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Esto induce la homología dada por

$$H_n(X, A) = \ker \partial_n / \text{img } \partial_{n-1}$$

Ejercicio. $H_n(X, \{x_0\}) = H_n(X)$.

Ahora lo primero que pasa es que tenemos una sucesión exacta corta a la que aplicaremos el teorema fundamental del álgebra homológica: Así que obtenemos la **sucesión exacta larga de la pareja**

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_{*n}} H_n(X) \xrightarrow{j_{*n}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{*n-1}} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_{*p-1}} \cdots$$

Como primera observación notemos que si los grupos de homología de la pareja $C_p(X, A)$ fueran triviales, autimáticamente tedríamos que el mapeo inducido por la inclusión sería un isomorfismo. De hecho, esto es un si y sólo si. Así, los grupos de homología miden qué tan diferentes son los grupos de homología de A y los de X.

Finalmente agregamos el comentario de que aunque el mapeo ∂ que usamos para completar la sucesión exacta larga de la pareja viene del teorema fundamental del álgebra homológica, y al recordar la demostración del teorema nos damos cuenta de que este mapeo actúa exactamente como el operador frontera original de X.

6.8 Escisión

Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ tales que la cerradura de Z está contenida en el interior de A. Entonces

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(X - Z, A - Z) \to H_n(X, A) \qquad \forall n$$

Equivalentemente, para subespacios $A, B \subseteq X$ cuyos interiores cubren a X, la inclusión

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo

$$H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A) \qquad \forall n$$

Definición. Decimos que (X, A) es un **buen par** si A es cerrado y es retracto fuerte por deformación de una vecindad en X.

El arete hawaiiano no es un buen par porque cualquier vecindad del punto de pegado contiene un círculo entero, así que no se puede retraer por deformación.

Teorema. Sea (X, A) un buen par, entonces

$$q : (X, A) \to (X/A, A/A)$$

induce isomorfismos para toda n de la forma

$$q_* : H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

donde la tilde denota la homología reducida.

En la demostración se usa lema de los 5, invarianza homotópica, etc.

Corolario. Sea (X, A) un buen par. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X/A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(X/A) \longrightarrow \cdots$$

Teorema (Homología de la esfera)**.**

$$\tilde{H}_i(S^n; R) = \begin{cases} R & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

Teorema (del punto fijo de Bruwer)**.** Sean $n \geq 2$ y $f : D^n \to D^n$, entonces f tiene un punto fijo.

6.9 La sucesión de Mayer-Vietoris

Sea X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ tales que $X = \text{int } A \cup \text{int } B$. Entonces tenemos la siguiente sucesión larga en homología reducida:

$$\cdots \to \tilde{H}_{n+1}(X) \to \tilde{H}_n(A \cap B) \to \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \to \cdots$$

Ejemplo. Veamos el toro $S^1 \times S^1$ visto como en el examen, con $A = D^2$ y $B = S^1 \vee S^1$, casi todos los grupos de homología se hacen cero (aquí hay que usar que la homología de la cuña es la suma de las homologías de los "cuñandos"), y que la homología de S^1 es cero cuando el subíndice es mayor o igual que 2. En fin, para $m > 2$, $\tilde{H}_m(X) = 0$.

Ahora para la parte que sí nos toca, *Falta*

6.10 Representantes de la homología de la esfera

En esta sección usaremos $R = \mathbb{Z}$.

Proposición. $Id : \Delta^n \to \Delta^n$ representa un generador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

Demostración. Por inducción en n. Si $n = 0$, entonces $\Delta^0 = \{e_0\}$ es un punto y su frontera es el vacío. Luego $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) = H_0(\Delta^0) = \mathbb{Z} = \langle [e_0] \rangle$.

Ahora supongamos para n y demostremos para $n + 1$. Definamos Λ como la unión de todas las $n - 1$ caras en la frontera salvo alguna. Luego

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to^{\delta} H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \leftarrow^{\iota} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

Luego como puedo retraer el simplejo en el Λ,

$$H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) = 0$$

Así que (creo que) incluyendo el de en medio la primera ecuación en este anterior, obtenemos que δ es un isomorfismo.

Para checar ι,

$$H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n / \Lambda) H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^{n-1} / \partial\Delta^{n-1})$$

Y los dos de la derecha deben ser isomorfos. Hay un cuadrado conmutativo abajo de la inclusión ι. Luego ι_{n-1} genera por hipótesis inductiva... $\square$

$$\begin{tikzcd} S^2 - x \arrow[dr, hook] & \\ S^2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"] & S^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{H}_n(S^2 - x) \cong 0 \arrow[dr, hook] & \\ \tilde{H}_n(S^2) \arrow[u, "f_*"] \arrow[r, "f_*"] & \tilde{H}_n(S^2) \end{tikzcd}$$

6.11 Generadores para la homología de la esfera

Observación.

- $H_i(D^n, \partial D^n) \cong H_i(S^n)$
- Usaremos los homeomorfismos $(D^n, \partial D^n) \cong (\Delta^n, \partial\Delta^n)$

Proposición. Pensando que que S^n es $\Delta^n \bigcup_{\partial\Delta^n} \Delta^n$, y denotado cada copia de Δ^n con un subíndice, tenemos que $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ es un generador de $H_n(S^n)$ para $n > 0$.

6.12 Grado de una función entre esferas

Hagamos dos observaciones básicas:

- $H_i(D^n, \partial D^n) \cong H_i(S^n)$
- Usaremos los homeomorfismos $(D^n, \partial D^n) \cong (\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Proposición. content...Pensando que que S^n es $\Delta^n \bigcup_{\partial\Delta^n} \Delta^n$, y denotado cada copia de Δ^n con un subíndice, tenemos que $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ es un generador de $H_n(S^n)$ para $n > 0$.

Definición. En la notación de arriba, el **grado** de f es d.

Proposición.

1. deg $Id = 1$

   Demostración. Por funtorialidad. □

2. Si f no es suprayectiva, entonces deg $(f) = 0$.

   Demostración. Como f no es suprayectiva puedo escoger un punto $x \notin$ img f. Entonces puedo pensar en el diagrama y su inducido. Y como el primero es conmutativo, el segundo también, y entonces f_* es constante. □

3. $f \simeq g$ entonces $\deg f = \deg g$

   Demostración. Por invarianza homotópica las funciones inducidas son iguales. □

4. $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$
5. Si f es una reflexión que intercambia los hemisferios, entonces $\deg(f) = -1$.
6. La función antipodal $-Id : S^n \to S^n$ tiene grado $(-1)^{n+1}$. Es decir,

$$\deg(-Id) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

7. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

6.12.1 Grado local

Siguiendo a Hatcher,

Definición. Supongamos que $f : S^n \to S^n$ es tal que la imagen inversa de algún $y \in S^n$ consiste de una cantidad finita de puntos, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_m\}$. Tomemos una familia de abiertos disjuntos $U_1, ..., U_m$ que contengan a cada x_i, y que vayan a dar a una vecindad V de y bajo f. Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo f_* originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la multiplicación por un número que se llama el **grado local** de f y se denota $\deg f|x_i$.

Supongamos que $f : S^n \to S^n$ es tal que la imagen inversa de algún $y \in S^n$ consiste de una cantidad finita de puntos, digamos $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_m\}$. Tomemos una familia de abiertos disjuntos $U_1, ..., U_m$ que contengan a cada x_i, y que vayan a dar a una vecindad V de y bajo f. Mediante un diagrama conmutativo, usando escisión y la sucesión exacta larga, Hatcher argumenta que el homomorfismo f_* originalmente definido así:

$$H_n(S^n, S^n - x_i) \xleftarrow{\cong} H_n(U_i, U_i - x_i) \xrightarrow{f_*} H_n(V, V - y)$$

es de la forma $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, la multiplicación por un número que se llama el **grado local** de f y se denota $\deg f|x_i$.

Y luego:

Teorema. $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$

7. Complejos CW

7.1 Construcción

Establezcamos algo de notación

- $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ es el n-disco cerrado.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ es la n-esfera.
- $e^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ es la n-célula abierta o sólo la n-célula.

De tal forma que

- $\partial D^n = S^{n-1}$
- $D^n = e^n \cup S^{n-1}$ como conjuntos (no se usa la topología de la unión disjunta)
- Y bueno debe ser cierto que $e^0 = \{pt\}$.

Definición. Un espacio X es un complejo CW si se puede construir mediante el siguiente procedimiento:

1. Comenzamos con un espacio discreto X^0 que se llama el 0-esqueleto.
2. El n-esqueleto X^n lo obtengo a partir del $n-1$-esqueleto X^{n-1} pegando n-células e^n_α vía funciones $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Formalmente tenemos el espacio
$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_\alpha D^n_\alpha \Big/ \sim \qquad\qquad x \sim \varphi_\alpha(x) \quad \text{si} \quad x \in \partial D^n_\alpha$$
Realmente es tomar puntos y unirlos con líneas, y luego tomar líneas y rellenar con discos, etc...
3. Realmente es tomar puntos y unir líneas entre ellos, y luego pegar puntos o líneas con discos, etc...

Definición. Si $X = X^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, decimos que X es de dimensión finita y definimos la dimensión de X como la dimensión de la célula más grande que adjunté. Formalmente, $\dim X = \min\{n : X^n = X\}$.

Ejemplo.

- Los 0-complejos CW son gráficas.
- S^n es un complejo CW.
- Los espacios proyectivos:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^n &= \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/x \sim \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\\ &= S^n/x \sim -x\\ &= D^n/x \sim -x, \qquad x \in \partial D^n = S^{n-1}\\ &= \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n\\ &= \mathbb{R}P^{n-2} \cup e^{n-1} \cup e^n\\ &= e^0 \cup e^1 \cup ... \cup e^n\end{aligned}$$

  donde las funciones de pegado son justamente las antipodales, que ya conocíamos por ser el cubriente universal.

Ejercicio. Todo complejo CW es semilocalmente simplemente conexo. Es decir, todo complejo CW tiene cubriente universal.

Definición. La función característica es Φ_α:

$$\begin{tikzcd} e^n_\alpha \arrow[d, "\text{inclusión}"'] \arrow[dr] & X^{n-1} \sqcup D^n_\alpha \arrow[d, "\text{proyección al cociente}"] \\ D^n_\alpha \arrow[r, "\Phi_\alpha"'] \arrow[ur] & X^n \end{tikzcd}$$

Definición. Sea X un complejo CW. Un subcomplejo Z es un subespacio cerrado que además es unión de células de X.

Observación. Para un subcomplejo Z,

- $Z \subseteq X$ es una buena pareja (Z es retracto por deformación de una vecindad de X)
- X/Z es un complejo CW.

Observación (Muy importante)**.** X complejo CW. El cociente por el $n-1$ esqueleto es una cuña de esferas, tantas como células en el $n-1$ esqueleto. En símbolos, $X^n/X^{n-1} = \bigvee_{\alpha \in I_n} S^n$, donde I_n es el conjunto que indexa las $n-1$-celdas.

7.2 Homología de complejos CW

Lema.

- $$H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in I_n} R & \text{si } k = n \end{cases}$$

  Demostración. $H_k = \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \tilde{H}_k(\bigvee_{\alpha \in I_n} S^n) = \bigoplus_{\alpha \in I_n} H_k(S^n)$ □

- $H_k(X^n) = 0$ para toda $k > n$.

  Nuevamente, la homología, lo que aclance a ver la homología, lo ve solamente hasta la dimensión del espacio

- La inclusión $X^n \hookrightarrow X$ induce un isomorfismo $H_k(X^n) \hookrightarrow H_k(X) \qquad k > n$.

  Aquí la idea es que adjuntar células de dimensión mayor que la homología que estamos calculando no cambia la homología. Es decir, para $n > k$ se tiene que $H_k(X \cup D^n) = H_k(X)$.

Demostración. Fijémonos en (X^n, X^{n-1}), hay una sucesión exacta corta de la pareja:

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Usando el inciso 1, si $k \neq n, n-1$ entonces $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$.

Bueno para demostrar (2), justamente tenemos $k > n$ y entonces resultará, fijando k y bajando uno por uno, $H_k(X^n) \cong H_k(X^0)$ que es un espacio discreto y la homología de grado mayor que cero en espacios discretos es cero. Terminamos el inciso (2).

Para (3), si $k < n < n+1 < n+2 < ...$, simplemente tenemos que

$$H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong ... \cong H_k(X^{n+m})$$

y si pedimos que X sea de dimensión finita entonces terminaremos en algún punto y listo. El caso de dimensión infinita queda para el futuro. $\square$

Definición (Homología celular)**.** Consideremos

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[dr, "j_{n-1}"] & & & \\
H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[ur, "\partial_n"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[rr, "d_{n-1}"] \arrow[dr, "\partial_{n-1}"] & & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & & & H_{n-2}(X^{n-2}) \arrow[ur, "j_{n-2}"] &
\end{tikzcd}$$

Resultará que las flechas horizontales que definimos con los triangulitos, es decir las d_i, satisfacen que

$$d_{n+1} \circ d_n = 0$$

así que podemos bautizar el **complejo de cadenas celular** $C_\bullet^{CW}(X, R)$. Y ahora podemos definir la **homología celular**:

$$H_n^{CW}(X; R) = H_n(C_\bullet^{CW}(X))$$

Teorema.

$$H_n^{CW}(X; R) \cong H_n(X; R) \qquad \forall n \geq 0$$

El primero depende de la estructura celular del espacio X, pero el segundo no. Así, la homología de un complejo CW es independiente de la estructura celular.

Observación. Estos grupos $H_n(X^n, X^{n-1})$ son las sumas directas de R, uno por cada n-célula de X.

Bueno, ahora tratemos de entender cómo es la d. Consideremos sl siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1}_\alpha \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, dashed, "\varphi_{\alpha\beta}"] & & X^{n-1} \arrow[d] \\ S^{n-1}_\beta & \bigvee_{\gamma\in I_n} S^{n-1}_\gamma \arrow[l] & = X^{n-1}/X^{n-2} \end{tikzcd}$$

Esta función que descubrimos $\varphi_{\alpha\beta}$ es una función entre esferas que tiene un grado $d_{\alpha\beta}$.

Teorema. Para $n \geq 2$, la diferencial d_n manda $e^n_\alpha \mapsto \sum d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta$.

7.3 Ejemplos

Ejemplo. Calculamos de dos maneras distintas la homología de $X = \bigvee_{\alpha\in I} S^1_\alpha$, por un lado usando directamente que $H_0(X) = R$ y otro usando el teorema anterior. Para el teorema anterior, descubrimos que para como sólo hay una 0-célula, para cualquier α, $e^1_\alpha \mapsto x_0 - x_0 = 0$, así que de hecho $d_1 = 0$. Resulta que $H_1 = \bigoplus_I R$.

De hecho, esto es cierto en general:

Lema. Si X es un complejo con una única 0-célula, entonces $d_1 = 0$.

Ejemplo (El toro)**.** Hemos visto que hay una descomposición del toro pegando los lados de un cuadrado. De acuerdo a este lema, y a la observación hecha hace unos momentos, contando los vértices y las aristas de esa descomposición obtenemos la siguiente homología:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(Eventualemente se descubre que $d_2 = 0$.)

Teorema (Extra)**.** Una superficie compacta y conexa sólo puede ser una esfera, un toro, una suma conexa de toros, el plano proyectivo o una suma conexa de planos proyectivos.

Ejemplo (El toro de género g)**.** Resulta que el toro doble se puede ver como el cociente de un octágono identificando aristas. Y en general, el g-toro es el cociente de un $4g$-ágono. El resultado final es que $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$, $H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ y $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (El plano proyectivo)**.** Aquí, $d_2 = 2$. $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$ y $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2$.

Observación. Esta clase de ejercicios viene en los exámenes generales.

Ejemplo ($\mathbb{R}P^n$)**.** Recordemos la descomposición de $\mathbb{R}P^n$ como complejo CW: $\mathbb{R}P^n = e_0 \cup e_1 \cup ... \cup e_n$. El diagrama de arriba se vuelve:

$$\begin{tikzcd} S^{k-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] & \mathbb{R}P^{k-1} \arrow[d, "q"] \\ S^{k-1} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Las funciones de pegado φ_α son la proyección al cociente función antipodal en la esfera (el cubriente del plano proyectivo). Estas funciones son dos a dos, y esto hace que el hemisferio norte de S^{k-1} se mapee homeomorfamente a S^{k-1} menos un punto (a donde va a dar el hemisferio sur).

Ahora observemos que la funciones que obtenemos cuando restringimos $\bar{\varphi}$ a cada hemisferio difieren una de la otra por el mapeo antipodal. A la hora de calcular el grado, obtenemos la fórmula $\deg(q\varphi) = 1 + (-1)^k$ usando que de alguna forma, escogiendo una orientación, podemos hacer que estos mapeos tengan grado ± 1 (Hatcher usa lo del grado local).

En fin,

$$\deg \bar{\varphi} = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto genera la homología siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Para $\mathbb{R}P^3$, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2 = 0$ y $H_3 = \mathbb{Z}$.

Ejemplo (Primer ejemplo donde cambian las cosas si cambiamos de anillo)**.** Tomemos $\mathbb{R}P^n$ y el anillo $R = \mathbb{Q}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \mathbb{Q} \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{d_1=0} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Pero ahora la función multiplicar por 2 manda $\mathbb{Q}$ en todo $\mathbb{Q}$, algo que no pasaba con $\mathbb{Z}$. Esto hace que la homología sea trivial, es decir, $H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Q}) = 0$ para toda $n \geq 1$.

Ejemplo. ¿Y si tomamos $R = \mathbb{Z}/2$? Multiplicar por 2 es la función 0, así que $H_m(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ para $0 \leq m \leq n$.

7.4 Característica de Euler

Sea Y un complejo CW finito (con un número finito de células). De hecho esta propiedad es equivalente a que el espacio Y sea compacto. Definimos la característica de Euler como

$$\begin{aligned} \chi(Y) &= (\#\ 0\text{-células}) - (\#\ 1\text{-células}) + (\#\ 2\text{-células}) - ... \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\#\ i\text{-células}) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplos.

- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \quad \text{impar} \\ 2 & n \quad \text{par} \end{cases}$
- $\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & n \quad \text{impar} \\ 2 & n \quad \text{par} \end{cases}$
- $\chi(\bigvee_{i=0}^{n} S^1) = 1 - n$
- $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

Teorema. Sean X, Y complejos CW-finitos Si $X \simeq Y$ entonces $\chi(X) = \chi(Y)$.

Proposición. Sea Y un complejo CW finito. Entonces,

$$\chi(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{ran} H_i(Y; \mathbb{Z})$$

Para entender qué es $\operatorname{ran} H_i$, notemos que el complejo de cadenas está hecho por grupos abelianos finitamente generados, ya que Y es finito. De hecho, la homología de Y es una sucesión exacta de grupos finitos finitamente generados. Luego, por el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados podemos descomponer un grupo en una expresión de la forma

$$A = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}}_{\text{libre de torsión}} \oplus \underbrace{\text{finito}}_{\text{torsión}}$$

donde $r = \operatorname{ran}(A)$ es el rango del grupo. Éste es el número que aparece en la proposición.

Ejercicio. Sea $0 \to A \to B \to C \to 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados. Entonces ran $B =$ ran $A +$ ran C.

Ahora demostremos la proposición:

Demostración. Tomemos el complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

y recordemos que $Z_n = \ker d_n$ y $B_n =$ img d_{n+1} y $H_n = Z_n/B_n$. Sólo por eso tenemos las sucesiones exactas

$$0 \to Z_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$$
$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n \to 0$$

Usando el ejercicio, tenemos que

$$\text{ran } C_n = \text{ran } Z_n + \text{ran } B_{n-1}$$
$$\text{ran } Z_n = \text{ran } B_n + \text{ran } H_n$$

Ahora primero por definición y luego usando lo anterior,

$$\begin{aligned}\chi(Y) &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \text{ran } C_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \Big(\text{ran } B_i + \text{ran } H_i + \text{ran } B_{i-1}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \text{ran } H_i \qquad \square\end{aligned}$$

□

Y con eso se demuestra fácilmente el teorema.

8. Homología y homotopía

8.1 El homomorfismo de Hurewicz

8.2 Grupos de homotopía superiores

9. Ejercicios

Ejercicio. Demuestre que $S^1 \times S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tienen grupos de homología (con coeficientes enteros) isomorfos pero no son homotópicamente equivalentes.

Solución. Por sus descomposiciones como complejos CW, sabemos que la homología de ambos espacios está dada por

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Si estos espacios fueran homotópicamente equivalementes, entonces, sus grupos fundamentales serían isomorfos. Sabemos que el grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y el de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$, por Van Kampen, es isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Para confirmar está última observación basta notar que el espacio se puede ver naturalmente como la unión de dos copias de S^1 y otra de S^2. La intersección de las tres es un sólo punto, que es arcoconexo, así que podemos aplicar Van Kampen. De hecho, como la intersección es contraible, el kernel del isomorfismo de Van Kampen es trivial, así que el grupo fundamental es simplemente el producto libre de los grupos fundamentales de cada compoenente. Obtenemos $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. $\square$