Karlsruher Institut für Technologie

Bachelorarbeit

Maße auf polnischen Räumen und die Wassersteinmetrik

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Abschnitt Grundlagen folgt im Wesentlichen [Sim15, Kapitel 4.14].

Einleitung, Zielsetzung

2 Grundlagen

In diesem Abschnitt möchten wir zunächst einige maßtheoretische Grundlagen vorstellen, die wir später benötigen werden.

Definition 2.1 (Polnischer Raum)**.** *Ein* polnischer Raum *ist ein separabler topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$*, dessen Topologie von einer Metrik, bezüglich der* X *vollständig ist, erzeugt wird.*

Definition 2.2 (Borelsche σ-Algebra)**.** *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Dann definieren wir die* Borelsche σ-Algebra

$$\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$$

über X*. Ferner sei*

$$\mathcal{M}_{+,1}(X) := \{\, \mu\colon \mathcal{B} \to [0,1] \mid \mu \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \,\}\,.$$

Definition 2.3 (Schwache Regularität von Maßen)**.** *In der Situation von Definition 2.2, wobei zusätzlich* μ *ein endliches Maß auf* $\mathcal{B}$ *sei, nennen wir* $B \in \mathcal{B}$ schwach von innen bzw. von außen regulär*, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

gelten. Wir nennen $B \in \mathcal{B}$ schwach regulär*, wenn* B *schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle* $B \in \mathcal{B}$ *schwach regulär, so nennen wir* μ *ein* schwach reguläres Maß*.*

Bemerkung. *Ersetzen wir in der obigen Definition „abgeschlossen“ durch „kompakt“, so erhalten wir analog den Begriff der* Regularität*. (Schwache) Regularität ist eine Approximationseigenschaft von Maßen, die es uns etwa erlaubt, gewisse Aussagen zunächst für abgeschlossene bzw. kompakte und für offene Mengen zu zeigen, um diese anschließend auf ganz* $\mathcal{B}$ *auszuweiten.*

Offenbar ist eine abgeschlossene (bzw. offene) Menge schwach regulär von innen (bzw. außen).

Im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf metrischen Räumen kann schwache Regularität recht einfach gezeigt werden, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 2.4. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch zwei Hilfssätze. Hilfssatz 2.5 wird uns zunächst ermöglichen, die schwache Regularität nur auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}$ zu zeigen (für den wir dann die abgeschlossenen Mengen wählen).

Hilfssatz 2.5. *In der Situation von Definition 2.3 ist*

$$\mathcal{S} := \{ B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Offensichtlich liegen $\emptyset$ und X in $\mathcal{S}$. Sei $B \in \mathcal{S}$ und damit schwach regulär von innen und von außen. Wegen $\mu(X) < \infty$ gilt dann

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(C) = \inf_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(C)) = \inf_{\substack{U \supseteq B^{\mathsf{c}} \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(C) = \sup_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(U)) = \sup_{\substack{C \subseteq B^{\mathsf{c}} \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

Also ist auch B^{c} schwach regulär.

Es bleibt also zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ auch $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür beweisen wir zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wir wählen nun N so groß, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht). Für die abgeschlossene Menge $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(C) = \mu(B \setminus C) &= \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus C\right)\right) \\ &\leq \mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n \setminus C_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{3^n} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist B schwach regulär von innen.

Ferner existieren für alle n offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ mit $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wir setzen $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ und berechnen

$$\mu(U) - \mu(B) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B_n) < \varepsilon.$$

Weil U offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von μ. $\square$

Bemerkung. *Sofern X kompakt ist, bleibt der obige Hilfssatz 2.5 gültig, wenn man „schwach regulär“ durch „regulär“ ersetzt. Der hier vorgestellte Beweis ist eine Anpassung von [Sim15, Lemma 4.5.5], wo die Aussage für kompakte X bewiesen wird.*

Der folgende Hilfssatz 2.6 liefert uns noch eine Möglichkeit, abgeschlossene Mengen von außen durch offene Mengen zu approximieren, womit wir im Beweis von Satz 2.4 die äußere Regularität von abgeschlossenen Mengen zeigen werden können. Insbesondere die in Hilfssatz 2.6 definierten Funktionen f_n werden auch im weiteren Verlauf noch nützlich sein.

Hilfssatz 2.6. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$A_n := \left\{ y \in X \mid d(y, C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \textit{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x, C)\},$$

wobei wir $d(y, C) := \inf_{x \in C} d(y, x)$ setzen. Dann gilt:

(a) A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, insbesondere ist C also eine G_δ-Menge.
(c) Für alle n ist $f_n|_{A_n^{\mathsf{c}}} = 0$ und f_n ist lipschitzstetig.
(d) $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$.

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y, C)$.

Weiter ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von C liegt y damit in C, sodass (b) gezeigt ist.

Aussage (c) ist klar (f_n ist als Komposition lipschitzstetiger Funktionen selbst lpschitzstetig).

Schließlich fällt f_n und für $x \in C$ gilt $f_n(x) = 1$. Für $x \in C^{\mathsf{c}}$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

womit die Behauptung folgt. □

Ausgestattet mit den Hilfssätzen 2.5 und 2.6 kann nun, wie oben bereits angedeutet wurde, Satz 2.4 bewiesen werden.

Beweis von Satz 2.4. Es ist nun zu zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ die Menge

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

bereits ganz $\mathcal{B}$ ist. Da $\mathcal{S}$ nach Hilfssatz 2.5 eine σ-Algebra ist und $\mathcal{B}$ von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Sei $C \in \mathcal{B}$. Dann ist C sicherlich schwach regulär von innen. Nun verwenden wir die offenen Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.6. Wegen $A_n \downarrow C$ und $\mu(X) < \infty$ folgt mit der Maßstetigkeit von oben die Konvergenz $\mu(A_n) \downarrow \mu(C)$, sodass C auch schwach regulär von außen ist. □

Satz 2.7. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu = \nu$.
(ii) Für alle gleichmäßig stetigen Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$ ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\nu$.
(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \in \mathcal{B}$ ist $\mu(C) = \nu(C)$.

Beweis. Die Implikation (i) ⇒ (ii) ist klar und (iii) ⇒ (i) folgt aus Satz 2.4.

(ii) ⇒ (iii): Gelte (ii) und sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt für die gleichmäßig stetigen Funktionen f_n aus Hilfssatz 2.6

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|f_n| \leq 1$ und $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \;\to\; \mu(C) \quad \text{und} \quad \int f_n \,\mathrm{d}\nu \;\to\; \nu(C)$$

und damit gilt (iii). □

Hier steht ein Kommentar. $C(X)$ bezeichne im Folgenden die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.

Definition 2.8 (Schwache Konvergenz von Maßen)**.** *Sei $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann sagen wir, dass $(\mu_n)_n$* schwach *gegen $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$* konvergiert*, falls für alle $f \in C(X)$*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu.$$

Eine Charakterisierung der schwachen Konvergenz von Maßen liefert der folgende Satz:

Satz 2.9 (Portmanteau)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.
(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq X$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \;\leq\; \mu(C).$$

(iii) Für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \;\geq\; \mu(U).$$

(iv) Für alle $B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial B) = 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \;=\; \mu(A).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien f_m, $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen aus Hilfssatz 2.6. Diese sind stetig und beschränkt. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(C) \;=\; \int \mathbb{1}_C \,\mathrm{d}\mu_n \;\leq\; \int f_m \,\mathrm{d}\mu_n \to \int f_m \,\mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty,$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \;\leq\; \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen $f_m \downarrow \mathbb{1}_C$ und $|f_m| \leq 1$ liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$\int f_m \,\mathrm{d}\mu \int \mathbb{1}_C \,\mathrm{d}\mu \;=\; \mu(C), \quad m \to \infty,$$

woraus

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \;\leq\; \mu(C)$$

folgt.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es gelte (ii). Sei U offen, also $C := U^{\mathsf{c}}$ abgeschlossen. Dann erhalten wir

$$\mu(X) - \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \;=\; \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \;\leq\; \mu(C) \;=\; \mu(X) - \mu(U)$$

und damit (iii). Die andere Richtung zeigt man analog.

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial A) = 0$. Wegen $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ und $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ gilt $\mu(A^\circ) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Ferner liefern die Annahmen

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \;\leq\; \mu(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \;\geq\; \mu(A^\circ).$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \;\leq\; \mu(A) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A),$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \;=\; \mu(A).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $f \in C(X)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ mit $a < f < b$. Die Menge

$$S := \{\, c \in (a,b) \mid \mu(\{f = c\}) > 0 \,\},$$

ist abzählbar, da $S_n := \left\{ c \in (a,b) \mid \mu(\{f = c\}) > \frac{1}{n} \right\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ gilt. Damit können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $c_j^{(m)} \notin S$ mit

$$a = c_0^{(m)} < \cdots < c_{2m}^{(m)} = b, \qquad c_{j+1}^{(m)} - c_j^{(m)} \leq \frac{b-a}{m} \tag{2.1}$$

finden. Wir setzen

$$A_j^{(m)} := \left\{ c_j^{(m)} < f \leq c_{j+1}^{(m)} \right\}, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}.$$

Die Stetigkeit von f impliziert $\partial A_j^{(m)} \subseteq \left\{ f = c_j^{(m)} \right\} \cup \left\{ f = c_{j+1}^{(m)} \right\}$, woraus sich

$$\mu(\partial A_j^{(m)}) = 0, \qquad j \in \{0, \dots, 2m-1\}$$

ergibt. Für $m \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$u_m := \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}$$

und Aussage (iv) führt dann auf

$$\int u_m \, \mathrm{d}\mu_n \;=\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu_n(A_j^{(m)}) \;\to\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu(A_j^{(m)}) \;=\; \int u_m \, \mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Außerdem folgen aus (2.1) die Ungleichungen

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu_n - \int u_m \, \mathrm{d}\mu_n \right| \;\leq\; \frac{b-a}{m}, \qquad \left| \int f \, \mathrm{d}\mu - \int u_m \, \mathrm{d}\mu \right| \;\leq\; \frac{b-a}{m}. \tag{2.3}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Mit (2.3) gilt nun für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int f \, \mathrm{d}\mu - \int f \, \mathrm{d}\mu_n \right| \;&\leq\; \left| \int f \, \mathrm{d}\mu - \int u_m \, \mathrm{d}\mu \right| + \left| \int u_m \, \mathrm{d}\mu - \int u_m \, \mathrm{d}\mu_n \right| + \left| \int u_m \, \mathrm{d}\mu_n - \int f \, \mathrm{d}\mu_n \right| \\ &<\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \left| \int u_m \, \mathrm{d}\mu_n - \int f \, \mathrm{d}\mu_n \right|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.2) und (2.4) liefern also für alle m die Ungleichung

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left| \int f \, \mathrm{d}\mu - \int f \, \mathrm{d}\mu_n \right| \;&\leq\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \limsup_{n\to\infty} \left| \int u_m \, \mathrm{d}\mu_n - \int f \, \mathrm{d}\mu_n \right| \\ &=\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} \;\to\; 0, \quad m \to \infty, \end{aligned}$$

was (i) impliziert. $\square$

Literatur

[Sim15] Barry Simon. *Real Analysis*. Bd. Part 1. A Comprehensive Course in Analysis. Providence, Rhode Island: AMS American Mathematical Society, 2015. ISBN: 978-1-4704-1099-5.

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum