

Bachelorarbeit

Titel der Bachelorarbeit

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung
---	------------

2

1 Einleitung

Hier steht eine Einführung

Definition 1.1 (Polnischer Raum). *Ein polnischer Raum ist ein separabler topologischer Raum (X, \mathcal{O}) , dessen Topologie von einer Metrik, bezüglich der X vollständig ist, erzeugt wird.*

Definition 1.2 (Borelsche σ -Algebra). *Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann definieren wir die Borelsche σ -Algebra*

$$\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$$

über X . Ferner sei

$$\mathcal{M}_{+,1}(X) := \{ \mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1] \mid \mu \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \}.$$

Definition 1.3 (Schwache Regularität von Maßen). *In der Situation von Definition 1.3, wobei zusätzlich μ ein endliches Maß auf \mathcal{B} sei, nennen wir $B \in \mathcal{B}$ schwach von innen bzw. von außen regulär, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

Wir nennen $B \in \mathcal{B}$ schwach regulär, wenn B schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle $B \in \mathcal{B}$ schwach regulär, so nennen wir μ ein schwach reguläres Maß.

Satz 1.4. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1.5. *In der Situation von Definition 1.3 ist*

$$\mathcal{S} := \{ B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \}$$

eine σ -Algebra.

Beweis. $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ ist offensichtlich. Jedes $B \in \mathcal{S}$ ist schwach regulär von innen und von außen und daher gilt wegen $\mu(X) < \infty$

$$\mu(B^c) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) = \inf_{\substack{U \supseteq B^c \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^c) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U) = \sup_{\substack{C \subseteq B^c \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C),$$

womit die schwache Regularität von B^c folgt.

Es bleibt also zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^\mathbb{N}$ auch $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür zeigen zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und wähle für $n \in \mathbb{N}$ jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wenn wir nun N so groß wählen, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht), so gilt mit $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$, dass

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(C) &= \mu(B \setminus C) = \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus C\right)\right) \\ &\leq \mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n \setminus C_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} = \varepsilon \end{aligned}$$

und weil C abgeschlossen ist, folgt, dass B schwach regulär von innen ist.

Wählen wir nun für alle n offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ so, dass $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, und setzen $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, so gilt

$$\mu(U) - \mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus B_n) < \varepsilon$$

und weil U offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von μ . \square

Hilfssatz 1.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{ y \in X \mid d(y, C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{und} \quad f_n: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x, C)\},$$

wobei wir $d(y, C) := \inf_{x \in C} d(y, x)$ setzen. Dann gilt:

- (a) A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, insbesondere ist C also eine G_δ -Menge.
- (c) Für alle n ist $f_n|_{A_n^c} = 0$ und f_n ist gleichmäßig stetig.
- (d) $f_n \downarrow \mathbf{1}_C$.

Beweis. zu (a): Wir wählen $y \in A_n$, also $y \in X$, $d(y, C) < \frac{1}{n}$. Mit $r_n := \frac{1}{n} - d(y, C) > 0$ gilt dann für alle $x \in X$, $d(x, y) < r_n$:

$$d(x, C) \leq d(x, y) + d(y, C) < \frac{1}{n},$$

und damit gilt $B_{r_n}(y) \subseteq A_n$ und A_n ist offen.

zu (b): Sicherlich ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt ist für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$d(y, C) = \inf_{x \in C} d(y, x) = 0,$$

was impliziert, dass es eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ gibt mit $x_n \rightarrow y$, und wegen der Abgeschlossenheit von C ist damit $y \in C$, also auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq C$.

zu (c): Für $x \in A_n^c$ ist $d(x, C) \geq \frac{1}{n}$ und damit $1 - nd(x, C) \leq 0$, also $f_n|_{A_n^c} = 0$. Außerdem gilt für beliebige $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= |\max\{0, 1 - nd(x, C)\} - \max\{0, 1 - nd(y, C)\}| \\ &= \begin{cases} n|d(y, C) - d(x, C)| & d(x, C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) < \frac{1}{n} \\ 1 - nd(x, C) & d(x, C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nd(y, C) & d(x, C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) < \frac{1}{n} \\ 0 & d(x, C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) \geq \frac{1}{n} \end{cases} \\ &\leq n|d(y, C) - d(x, C)| \leq nd(x, y) \end{aligned}$$

und damit ist f_n lipschitzstetig, also auch gleichmäßig stetig.

zu (d): Offensichtlich ist $(f_n)_n$ fallend. Für $x \in C^c$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

für $x \in C$ ist dagegen $f_n(x) = 1$ konstant, womit die Behauptung folgt. \square

Beweis von Satz 1.4. Es ist nun zu zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ die Menge

$$\mathcal{S} := \{B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu\}$$

bereits ganz \mathcal{B} ist. Da nach Hilfssatz 1.5 \mathcal{S} eine σ -Algebra ist und \mathcal{B} von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in \mathcal{S} enthalten sind.

Jedes abgeschlossene $C \in \mathcal{B}$ ist sicherlich schwach regulär von innen. Nun wählen wir A_n , $n \in \mathbb{N}$ wie in Hilfssatz 1.6. Wegen $A_n \downarrow C$ und $\mu(X) < \infty$ folgt mit der Maßstetigkeit von oben, dass

$$\mu(A_n) \downarrow \mu(C)$$

und da alle A_n offen sind, ist C auch schwach regulär von außen.

Insgesamt folgt also $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ und damit die Behauptung. \square

Satz 1.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $\mu = \nu$
- (ii) Für alle gleichmäßig stetigen Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\int f d\mu = \int f d\nu$
- (iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \in \mathcal{B}$ ist $\mu(C) = \nu(C)$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) ist klar.

(ii) \Rightarrow (iii): Gelte (ii) und sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt für die gleichmäßig stetigen Funktionen f_n aus Hilfssatz 1.6

$$\int f_n \, d\mu = \int f_n \, d\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|f_n| \leq 1$ und $f_n \downarrow \mathbf{1}_C$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int f_n \, d\mu \rightarrow \mu(C) \quad \text{und} \quad \int f_n \, d\nu \rightarrow \nu(C)$$

und damit gilt (iii).

(iii) \Rightarrow (i): Da μ und ν nach Satz 1.4 schwach regulär sind, folgt die Behauptung ebenfalls direkt. \square

Definition 1.8 (Schwache Konvergenz von Maßen). *Ist $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ eine Folge, so sagen wir, dass $(\mu_n)_n$ schwach gegen $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ konvergiert, falls für alle $f \in C(X)$, den stetigen beschränkten Funktionen, gilt, dass*

$$\int f \, d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu.$$

Satz 1.9 (Portmanteau). *Sei (X, d) ein metrischer Raum, so sind für $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ äquivalent:*

- (i) $(\mu_n)_n$ konvergiert schwach gegen μ
- (ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq X$ gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$$

- (iii) Für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$$

- (iv) Für alle $B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial B) = 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und definiere die zugehörigen f_m , $m \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 1.6, welche sowohl stetig als auch beschränkt sind. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(C) = \int \mathbf{1}_C \, d\mu_n \leq \int f_m \, d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f_m \, d\mu,$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \int f_m \, d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und mit $f_m \downarrow \mathbb{1}_C$ sowie $|f_m| \leq 1$ liefert der Satz von Lebesgue, dass

$$\int f_m d\mu \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_C d\mu = \mu(C),$$

woraus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \mu(C)$$

folgt.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Sei U offen, also $C := U^c$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\mu(X) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) \leq \mu(C) = \mu(X) - \mu(U)$$

und damit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U).$$

Die andere Richtung geht vollständig analog.

(ii), (iii) \Rightarrow (iv): Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial A) = 0$. Dann gilt zunächst

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}, \quad \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \quad \text{und damit} \quad \mu(A^\circ) = \mu(A) = \mu(\overline{A}),$$

und wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ)$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

(iv) \Rightarrow (i): Sei $f \in C(X)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ mit $a < f < b$. Setzen wir

$$S := \{c \in (a, b) \mid \mu(\{f = c\}) > 0\},$$

so ist S abzählbar (denn für $n \in \mathbb{N}$ ist $S_n := \{c \in (a, b) \mid \mu(\{f = c\}) > \frac{1}{n}\}$ endlich und $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$). Damit können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$a = \underbrace{c_0^{(m)} < \dots < c_{2m}^{(m)}}_{\notin S} = b, \quad c_{j+1}^{(m)} - c_j^{(m)} \leq \frac{b-a}{m} \quad (1.9.1)$$

finden, wobei wir

$$A_j^{(m)} := \{c_j^{(m)} < f \leq c_{j+1}^{(m)}\}, \quad j = 0, \dots, 2m-1$$

setzen. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann $\partial A_j^{(m)} \subseteq \{f = c_j^{(m)}\} \cup \{f = c_{j+1}^{(m)}\}$, also

$$\mu(A_j^{(m)}) = 0, \quad j = 0, \dots, 2m-1.$$

Setzen wir nun

$$u_m := \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

so ist nach (iv)

$$\int u_m \, d\mu_n = \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu_n(A_j^{(m)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu(A_j^{(m)}) = \int u_m \, d\mu \quad (1.9.2)$$

und wegen (1.9.1) gilt

$$\left| \int f \, d\mu_n - \int u_m \, d\mu_n \right| \leq \frac{b-a}{m} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int f \, d\mu - \int u_m \, d\mu \right| \leq \frac{b-a}{m}. \quad (1.9.3)$$

Damit gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int f \, d\mu - \int f \, d\mu_n \right| \leq \left| \int f \, d\mu - \int u_m \, d\mu \right| + \left| \int u_m \, d\mu - \int u_m \, d\mu_n \right| + \left| \int u_m \, d\mu_n - \int f \, d\mu_n \right|,$$

also wegen (1.9.2) und (1.9.3) für alle m

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f \, d\mu - \int f \, d\mu_n \right| \leq 2 \cdot \frac{b-a}{m} \quad \left(\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \right),$$

was die Behauptung impliziert. □

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum