Bachelorarbeit

Maße auf polnischen Räumen und die Wassersteinmetrik

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

FEHLT

2 Grundlagen

2.1 Topologische Grundlagen

Netze

Im Allgemeinen beschreiben Folgen und deren Konvergenz die Eigenschaften eines topologischen Raumes nur unzureichend: Beispielsweise ist Folgenstetigkeit nicht notwendigerweise äquivalent zu Stetigkeit und zwei unterschiedliche Topologien auf einer gegebenen Menge können generell dieselben konvergenten Folgen haben. Um solche Probleme im Folgenden zu umgehen, führen wir das Konzept des Netzes aus der mengentheoretischen Topologie ein. Netze verallgemeinern Folgen und können in vielerlei Hinsicht die Eigenschaften eines topologischen Raumes besser erfassen.

Überwiegend orientieren wir uns in diesem Abschnitt an [Sim15, Kapitel 2.6].

Definition 2.1 (Gerichtete Menge)**.** *Sei I eine Menge. Eine Relation $\preceq$ auf I mit*

(a) $\forall \iota \in I: \ \iota \preceq \iota$
(b) $\forall \iota, \kappa, \lambda \in I: \ \iota \preceq \kappa$ *und* $\kappa \preceq \lambda$ *impliziert* $\iota \preceq \lambda$
(c) $\forall \iota, \kappa \in I: \ \exists \lambda \in I: \ \iota \preceq \lambda$ *und* $\kappa \preceq \lambda$

heißt gerichtet*. In diesem Fall nennen wir das Paar* $(I, \preceq)$ *auch eine* gerichtete Menge*.*

Definition 2.2 (Netz)**.** *Sei X eine Menge und $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Ein* Netz *in X ist dann eine Abbildung $x\colon I \to X$. In diesem Fall schreiben wir auch $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$.*

Definition 2.3 (Konvergenz von Netzen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und sei $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in X. Wir sagen, dass x gegen $z \in X$ konvergiert, falls es für jede Umgebung U von z ein derartiges $\iota_0 \in I$ gibt, dass $x_\iota \in U$ für alle $\iota_0 \preceq \iota \in I$ erfüllt ist. In diesem Fall schreiben wir auch $\lim_{\iota \to \infty} x_\iota = z$ oder $x_\iota \to z, \ \iota \to \infty$.*

Bemerkung. *Offenbar sind Folgen einfach Netze, bei denen $(I, \preceq) := (\mathbb{N}, \leq)$ gewählt wird. Der Konvergenzbegriff von Netzen stimmt dann auch mit dem von uns bekannten Konvergenzbegriff in topologischen Räumen überein.*

Wie bereits angekündigt lassen sich topologische Räume im Allgemeinen viel besser über Netze charakterisieren als lediglich über Folgen. Der nächste Satz konkretisiert dies.

Satz 2.4. *Seien X und Y topologische Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Eine Teilmenge $C \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert $z \in X$ eines jeden konvergenten Netzes $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ in X bereits in C liegt.
(b) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jedes konvergente Netz $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ in X

$$\lim_{\iota \to \infty} f(x_\iota) \ = \ f(\lim_{\iota \to \infty} x_\iota)$$

erfüllt ist.
(c) Zwei Topologien auf X sind genau dann identisch, wenn alle Netze in X bezüglich beiden Topologien dasselbe Konvergenzverhalten aufweisen.

Beweis. Siehe [Sim15, Satz 2.6.3]. □

Bemerkung. *Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass im Allgemeinen keine der drei Aussagen gelten, wenn man „Netz“ durch „Folge“ ersetzt (vgl. [Sim15, Beispiel 2.6.1]).*

Für reelle Netze können wir in Analogie zu Folgen auch den Limes Superior bzw. Inferior von Netzen definieren. Hierfür orientieren wir uns an [Meg98, Kapitel 2.1 und Aufgabe 2.55] und [AB06, Kapitel 2.4].

Definition 2.5 (Limes Superior und Inferior von Netzen). *Sei $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ ein Netz in $\mathbb{R}$. Dann definieren wir*

$$\limsup_{\iota\to\infty} x_\iota \;:=\; \inf_{\iota\in I}\sup_{\iota\preceq\kappa} x_\kappa \quad \textit{bzw.} \quad \liminf_{\iota\to\infty} x_\iota \;:=\; \sup_{\iota\in I}\inf_{\iota\preceq\kappa} x_\kappa$$

und nennen diese den Limes Superior *bzw.* Limes Inferior *von x.*

Bemerkung. *Offenbar ist auch diese Definition mit den bekannten Begriffen für reelle Folgen kompatibel. Die meisten grundlegenden Eigenschaften der Konvergenz und des Limes Superior bzw. Inferior von reellen Folgen lassen sich auch auf reelle Netze übertragen, wie etwa die üblichen Rechenregeln für die Grenzwerte von Summen und Produkten reeller Folgen.*

Außerdem gelten etwa für Netze $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ und $y = (y_\iota)_{\iota\in I}$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\limsup_{\iota\to\infty}\,(x_\iota + y_\iota) \;&\leq\; \limsup_{\iota\to\infty} x_\iota + \limsup_{\iota\to\infty} y_\iota \quad \textit{und}\\ \liminf_{\iota\to\infty}\,(x_\iota + y_\iota) \;&\geq\; \liminf_{\iota\to\infty} x_\iota + \liminf_{\iota\to\infty} y_\iota,\end{aligned}$$

sofern die Summen jeweils definiert sind und mit Gleichheit, falls eines der beiden Netze konvergiert (vgl. [Meg98, Aufgabe 2.55 (e)]). Nach [Meg98, Aufgabe 2.55 (i)] ist für ein konvergentes Netz $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ in $\mathbb{R}$ ebenfalls

$$\lim_{\iota\to\infty} x_\iota \;=\; \limsup_{\iota\to\infty} x_\iota \;=\; \liminf_{\iota\to\infty} x_\iota.$$

Initialtopologie

ZITIEREN?

Wir möchten nun noch ein weiteres Konzept aus der Topologie, die sogenannte *Initialtopologie* einführen. Auch wenn es sich hier um einen sehr elementaren Begriff handelt, wird dieser uns an späterer Stelle in Kombination mit Hilfssatz 2.7 häufig ermöglichen, gewisse Topologien und deren Konvergenzverhalten in knapper Form auszudrücken.

Definition 2.6 (Initialtopologie). *Sei X eine Menge, A eine beliebige Indexmenge und für jedes $\alpha \in A$ sei Y_α ein topologischer Raum sowie $f_\alpha \colon X \to Y_i$ eine Abbildung. Die Initialtopologie auf X bezüglich der Abbildungen f_α, $\alpha \in A$ ist dann die kleinste Topologie auf X, bezüglich der alle Abbildungen f_α, $\alpha \in A$ stetig sind.*

Bemerkung (Produkttopologie). *Sei A eine beliebige Indexmenge und sei für jedes $\alpha \in A$ ein topologischer Raum X_α gegeben. Die Produkttopologie der X_α, $\alpha \in A$ auf dem kartesischen Produkt $X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ist dann offensichtlich die Initialtopologie der kanonischen Projektionen $\pi_\beta \colon X \to X_\beta$, $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto x_\beta$, $\beta \in A$.*

Hilfssatz 2.7 (Konvergenz bezüglich der Initialtopologie). *In der Situation von Definition 2.6 konvergiert ein Netz $x = (x_\iota)_{\iota\in I}$ in X genau dann gegen ein $z \in X$, wenn für alle $\alpha \in A$ die Konvergenz $f_\alpha(x_\iota) \to f_\alpha(z)$, $\iota \to \infty$ gilt.*

Beweis. Wegen Satz 2.4 (b) folgt die Hinrichtung direkt aus der Stetigkeit der Abbildungen f_α, $\alpha \in A$.

Für die Rückrichtung möchten wir zeigen, dass für alle Umgebungen V von z ein derartiges $\iota_0 \in I$ existiert, dass $x_\iota \in V$ für $\iota_0 \preceq \iota$ gilt. Man bemerke zunächst, dass die Menge alle Urbilder von offenen Mengen in Y_α unter f_α für alle $\alpha \in A$ eine Subbasis der Topologie von X ist. Daher genügt es, Mengen der Form

$$\tilde{V} \;:=\; \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \;\subseteq\; X$$

zu betrachten, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ sind und U_i offene Umgebungen von $f_{\alpha_i}(z)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei nun ein solches $\tilde{V}$ gegeben. Dann können wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ jeweils ein $\iota_0^{(i)} \in I$ finden, sodass $x_\iota \in f_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ für $\iota_0^{(i)} \preceq \iota$ gilt. Sukzessive Anwendung von Eigenschaft (c) in Definition 2.1 liefert ein $\iota_0 \in I$ mit $x_\iota \in \tilde{V}$ für $\iota_0 \preceq \iota$, was schließlich die Konvergenz $x_\iota \to z$, $\iota \to \infty$ bedeutet. □

2.2 Polnische Räume

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den grundlegenden Eigenschaften von polnischen Räumen, einer Klasse von speziellen topologischen Räumen. Wir orientieren uns hierbei an den relevanten Teilen aus [Sim15, Kapitel 4.14].

An erster Stelle möchten wir die Definition eines polnischen Raumes liefern.

Definition 2.8 (Polnischer Raum)**.** *Ein* polnischer Raum *ist ein separabler und vollständig metrisierbarer topologischer Raum.*

Es sei hier anzumerken, dass dies tatsächlich eine rein topologische Eigenschaft ist: Wir fordern für einen polnischen Raum X nur die Existenz einer Metrik, die die Topologie von X erzeugt und bezüglich der X vollständig ist, möchten uns aber die Flexibilität bewahren, diese Metrik nicht zu fixieren und bei Bedarf zwischen verschiedenen solchen Metriken zu wechseln. Es kann durchaus Metriken geben, die X zwar metrisieren, jedoch nicht vollständig. Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardtopologie offensichtlich ein polnischer Raum, denn $\mathbb{R}$ ist separabel und die euklidische Metrik metrisiert $\mathbb{R}$ vollständig. Allerdings ist $(0, 1)$ als Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik zwar separabel, aber nicht vollständig. Da $(0, 1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, ist $(0, 1)$ aber dennoch ein polnischer Raum.

Der folgende Hilfssatz 2.9 behandelt die recht elementare Tatsache, dass sich in metrischen Räumen abgeschlossene Mengen von außen gewissermaßen „beliebig gut“ durch offene Mengen approximieren lassen. Diese Erkenntnis werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch häufiger benötigen.

Hilfssatz 2.9. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$A_n := \left\{ y \in X \;\middle|\; d(y, C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x, C)\},$$

wobei wir $d(y, C) := \inf_{x \in C} d(y, x)$ setzen. Dann gilt:

(a) A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, insbesondere ist C also eine G_δ-Menge.
(c) Für alle n ist $f_n|_{A_n^c} = 0$ und f_n ist lipschitzstetig.
(d) $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$.

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y, C)$.

Weiter ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von C liegt y damit in C, sodass (b) gezeigt ist.

Aussage (c) ist klar (f_n ist als Komposition lipschitzstetiger Funktionen selbst lipschitzstetig).

Schließlich fällt f_n und für $x \in C$ gilt $f_n(x) = 1$. Für $x \in C^c$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

womit die Behauptung folgt. □

Im Folgenden lernen wir Eigenschaften und Charakterisierungen polnischer Räume kennen.

Der folgende Satz beantwortet uns zunächst, welche Teilmengen eines polnischen Raumes selbst wieder polnisch sind:

Satz 2.10 (Alexandroff)**.** *Sei X ein polnischer Raum. Dann ist $A \subseteq X$ genau dann selbst ein polnischer Raum bezüglich der Teilraumtopologie, wenn $A \subseteq X$ eine G_δ-Teilmenge ist.*

Beweis. Der Beweis der Hinrichtung folgt [Jor14, Satz 7], während der Beweis der Rückrichtung eine Anpassung des Beweises von Satz 4.14.6 aus [Sim15, Kapitel 4.14] ist.

Für die Hinrichtung sei $A \subseteq X$ eine G_δ-Teilmenge und seien $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen mit $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, wobei wir außerdem $C_n := U_n^{\mathsf{c}}$ schreiben. Ferner sei d eine Metrik, die X vollständig metrisiert. Da A als Teilmenge eines separablen metrischen Raumes selbst separabel ist, genügt es, die vollständige Metrisierbarkeit von A zu beweisen.

Für $x, y \in A$ definieren wir

$$\tilde{d}(x,y) \ := \ d(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x,C_n)} - \frac{1}{d(y,C_n)}\right|\right).$$

Offensichtlich ist $\tilde{d}$ eine Metrik auf A, die dieselbe Topologie wie d erzeugt.

Wir möchten nun zeigen, dass $(A, \tilde{d})$ vollständig ist. Sei dazu $(x_k)_k \in A^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wegen $d \leq \tilde{d}$ ist $(x_k)_k$ dann auch bezüglich d eine Cauchyfolge und die Vollständigkeit von (X, d) liefert die Existenz eines Grenzwertes $x \in X$. Angenommen $x \notin A$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in C_m$. Damit ist aber für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{l\geq k} \tilde{d}(x_k, x_l) \ \geq \ \sup_{l\geq k} \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x_k,C_n)} - \frac{1}{d(x_l,C_n)}\right|\right) \ \geq \ \frac{1}{2^m} \ > \ 0,$$

was der Tatsache widerspricht, dass $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich $\tilde{d}$ ist. Also muss $x \in A$ gelten. Aus der Stetigkeit von $x \mapsto d(x, C_n)$ folgt mit dem Satz von Lebesgue unmittelbar die Konvergenz $\tilde{d}(x_k, x) \to 0$ für $k \to \infty$, also ist $(A, \tilde{d})$ vollständig und A damit selbst ein polnischer Raum.

Nun beweisen wir noch die Rückrichtung. Sei dazu $A \subseteq X$ eine derartige Teilmenge, dass A bezüglich der Teilraumtopologie selbst polnisch ist. $\tilde{d}$ metrisiere im Folgenden A vollständig. Sicherlich ist $B_{1/k}(x_m) \subseteq A$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$ relativ offen, also gibt es jeweils offene Mengen $V_{k,m} \subseteq X$ mit

$$B_{1/k}(x_m) \ = \ V_{k,m} \cap A. \tag{2.1}$$

Wir möchten jetzt zeigen, dass

$$A \ = \ \overline{A} \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m}\right) \tag{2.2}$$

gilt. Weil $\overline{A}$ nach Hilfssatz 2.9 als abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge ist, folgt aus (2.2) direkt die Aussage (b).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist sicherlich $A \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m}$, weshalb „$\subseteq$“ in (2.2) unmittelbar folgt. Wir nehmen nun an, dass z in der rechten Seite von (2.2) liegt. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $m_k \in \mathbb{N}$ mit $z \in V_{k,m_k}$. Ferner existiert wegen $z \in \overline{A}$ eine Folge $(y_k)_k \in A^{\mathbb{N}}$ mit $y_k \to z$, wobei wir zusätzlich $y_k \in \bigcap_{j=1}^{k} V_{j,m_j}$ fordern. Weil damit nach (2.1) auch für alle $k \in \mathbb{N}$

$$y_k \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{1/k}(x_m)$$

gilt, ist $(y_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich $\tilde{d}$. Aufgrund der Vollständigkeit von $(A, \tilde{d})$ gibt es also ein $y \in A$ mit $y_k \to y$, was $z = y \in A$ und damit „$\supseteq$“ in (2.2) impliziert. □

Mit dem *Hilbertwürfel* möchten wir uns nun einen speziellen polnischen Raum ansehen, der sich später in gewisser Weise als universell für alle polnischen Räume erweisen wird.

Definition 2.11 (Hilbertwürfel). *Der* Hilbertwürfel *ist der topologische Raum $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ausgestattet mit der Produkttopologie, also der Initialtopologie bezüglich aller Projektionen $\pi_n \colon H \to [0,1],\ x \mapsto x_n,\ n \in \mathbb{N}$.*

Einige grundlegende Eigenschaften des Hilbertwürfels fassen wir im folgenden Hilfssatz zusammen.

Hilfssatz 2.12. *Für den Hilbertwürfel H gelten folgende Aussagen:*

(a) Eine Folge $(x^{(k)})_k \in H^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen ein $x \in H$, wenn alle Komponenten konvergieren, also, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Setzen wir für $x, y \in H$

$$\rho(x,y) := \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

so definiert ρ eine Metrik, die H metrisiert.

(c) H ist kompakt.

Beweis. Aussage (a) folgt direkt aus Hilfssatz 2.7.

Für den Beweis von (b) bemerke man zunächst, dass Mengen der Form

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \subseteq [0,1] \text{ offen}, \quad U_n = [0,1] \text{ für fast alle } n \tag{2.3}$$

eine Basis der Topologie von H bilden.

Offenbar wird durch ρ aus (b) eine Metrik auf H definiert. Es genügt also zu zeigen, dass ρ die Topologie von H induziert. Für $x \in H$ und $r > 0$ ist $B_r(x) = \prod_{n=1}^{\infty} B_{2^n r}(x_n) \subseteq H$ offen. Ist nun $U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$ wie in (2.3), so lässt sich leicht einsehen, dass es für jedes $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subseteq U$, also ist U offen bezüglich der von ρ erzeugten Topologie und insgesamt wird H von ρ metrisiert.

Der aus der Topologie bekannten *Satz von Tychonoff* liefert unmittelbar, dass H als Produkt kompakter topologischer Räume ebenfalls kompakt ist. □

Bemerkung. *Insbesondere handelt es sich bei H um einen polnischen Raum, denn alle kompakten metrisierbaren Räume sind polnisch.*

H erfüllt nun die folgende Universalitätseigenschaft.

Satz 2.13 (Universalitätseigenschaft des Hilbertwürfels). *Ein topologischer Raum X ist genau dann separabel und metrisierbar, wenn X homöomorph zu einer Teilmenge von H ist.*

Ferner ist X genau dann polnisch, wenn X homöomorph zu einer G_δ-Teilmenge von H ist.

Wir werden den Beweis von Satz 2.13 simultan für metrisierbare und separable bzw. für polnische Räume führen, benötigen hierfür aber zunächst noch einen Hilfssatz.

Hilfssatz 2.14. *Sei (X,d) ein separabler metrischer Raum und sei $\mathcal{D} := \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Außerdem setzen wir*

$$\varphi\colon X \to H,\ x \mapsto \left(\min\{1, d(x,x_n)\}\right)_n. \tag{2.4}$$

Dann ist φ ein Homöomorphismus zwischen X und $\varphi(X)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass φ injektiv ist. Dazu seien $y, z \in H$ mit $\varphi(y) = \varphi(z)$, also gilt

$$\min(1, d(y, x_n)) = \min(1, d(z, x_n)) \tag{2.5}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil es eine Folge $(y_n)_n \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \to y$ gibt und diese wegen (2.5) auch gegen z konvergiert, folgt die Gleichheit von y und z.

Die Stetigkeit von φ folgt direkt, weil die Komponentenfunktionen $x \mapsto \min(1, d(x, x_n))$ jeweils stetig sind. Seien nun $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ und $y \in X$ mit $\varphi(y_k) \to \varphi(y)$, also

$$\min(1, d(y_k, x_n)) \ \to\ \min(1, d(y, x_n)), \quad k \to \infty \tag{2.6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man nun $\varepsilon < 1$ beliebig, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(y, x_n) \leq \varepsilon$. Wegen (2.6) ist dann auch $d(y_k, x_n) \to d(y, x_k),\ k \to \infty$. Es gilt also die Ungleichung

$$\limsup_{k\to\infty} d(y_k, y) \ \leq\ \limsup_{k\to\infty} d(y_k, x_n) + d(y, x_n) \ \leq\ 2\varepsilon$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Stetigkeit von φ^{-1}, womit wir nachgewiesen haben, dass φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. □

Beweis von Satz 2.13. Da wir in Hilfssatz 2.14 bereits gesehen haben, dass jeder separable metrisierbare Raum homöomorph zu einer Teilmenge vom Hilbertwürfel H ist und jede Teilmenge von H separabel und metrisierbar ist, folgt direkt die erste Aussage von Satz 2.13.

Sei X nun ein polnischer Raum und fixiere eine Metrik d, die X vollständig metrisiert. Nach Hilfssatz 2.14 ist X nun via $\varphi\colon X \to H$ aus (2.6) homöomorph zu einer Teilmenge von H und da H selbst polnisch ist, muss $\varphi(X) \subseteq H$ nach Satz 2.13 eine G_δ-Teilmenge sein. Ferner folgt aus demselben Satz, dass jede G_δ-Teilmenge von H polnisch ist. □

2.3 Borel-Maße auf topologischen Räumen

Nun wenden wir uns (endlichen) Borel-Maßen auf topologischen bzw. metrischen Räumen zu. Da diese den primären Betrachtungsgegenstand dieser Arbeit darstellen, möchten wir zunächst einige Begriffe definieren, Schreibweisen festlegen, und - zumindest im Falle von metrischen Räumen - eine im Folgenden sehr hilfreiche Eigenschaft dieser Maße, die *(Schwache) Regularität* vorstellen.

Wieder möchten wir uns an den relevanten Teilen von [Sim15, Kapitel 4.14] orientieren.

Definition 2.15 (Borel-σ-Algebra)**.** *Sei X ein topologischer Raum mit Topologie $\mathcal{O}$. Dann definieren wir die* Borel-σ-Algebra

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O}).$$

Definition 2.16 (Borel-Maße)**.** *In der Situation von Definition 2.15 nennen wir Maße auf* $\mathcal{B}(X)$ Borel-Maße *und wir führen außerdem die Schreibweisen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+(X) \ &:=\ \{\,\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty) \mid \mu \textit{ ist endliches Maß}\} \\ \mathcal{M}_{+,1}(X) \ &:=\ \{\,\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,1] \mid \mu \textit{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß}\} \end{aligned}$$

für die Menge aller endlichen Borel-Maße *beziehungsweise* Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße *auf X ein.*

Definition 2.17 (Stetige beschränkte Funktionen)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann schreiben wir*

$$C_b(X) \ :=\ \{\,f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \textit{ ist stetig und beschränkt}\}$$

für die Menge aller stetigen und beschränkten Funktionen auf X. Ist X ein metrischer Raum, so schreiben wir

$$U_b(X) \;:=\; \{\, f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist gleichmäßig stetig und beschränkt} \}$$

für die Menge aller gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen auf X.

Bemerkung. *Sei X ein metrischer Raum. Offensichtlich ist dann $U_b(X) \subseteq C_b(X)$, allerdings hängt $U_b(X)$ im Gegensatz zu $C_b(X)$ von der Metrik selbst und nicht ausschließlich von der Topologie ab.*

Wie angekündigt werden wir uns im Folgenden mit der (schwachen) Regularität von endlichen Borel-Maßen auseinandersetzen. Hierbei handelt es sich um eine Approximationseigenschaft von Maßen, die es uns etwa erlaubt, gewisse Aussagen zunächst für abgeschlossene bzw. kompakte und für offene Mengen zu zeigen, um diese anschließend auf ganz $\mathcal{B}(X)$ auszuweiten.

Definition 2.18 (Schwache Regularität von Maßen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Dann nennen wir $B \in \mathcal{B}(X)$* schwach von innen bzw. von außen regulär*, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ abgeschlossen}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U)$$

gelten. Wir nennen $B \in \mathcal{B}(X)$ schwach regulär*, wenn B schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle $B \in \mathcal{B}(X)$ schwach regulär, so nennen wir μ ein* schwach reguläres Maß.

Bemerkung. *Ersetzen wir in der obigen Definition „abgeschlossen“ durch „kompakt“, so erhalten wir analog den Begriff der* Regularität.

Offenbar ist eine abgeschlossene (bzw. offene) Menge schwach regulär von innen (bzw. außen).

Im Falle von endlichen Maßen auf metrischen Räumen kann schwache Regularität recht leicht gezeigt werden, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 2.19. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes endliche Borel-Maß μ auf X schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch einen Hilfssatz, welcher uns ermöglichen wird, die schwache Regularität nur auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}(X)$ zu zeigen (für den wir dann die abgeschlossenen Mengen wählen).

Hilfssatz 2.20. *In der Situation von Definition 2.18 ist*

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B}(X) \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Wir stellen eine Anpassung des Beweises von [Sim15, Lemma 4.5.5] vor, wo die entsprehende Aussage mit „regulär“ anstelle „schwach regulär“ für kompakte X bewiesen wird.

Offensichtlich liegen $\emptyset$ und X in $\mathcal{S}$. Sei $B \in \mathcal{S}$ und damit schwach regulär von innen und von außen. Wegen $\mu(X) < \infty$ gilt dann

$$\mu(B^{\mathrm{c}}) \;=\; \mu(X) - \mu(B) \;=\; \mu(X) - \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathrm{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(C) \;=\; \inf_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathrm{c}} \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(C)) \;=\; \inf_{\substack{U \supseteq B^{\mathrm{c}} \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) \;=\; \mu(X)-\mu(B) \;=\; \mu(X)-\inf_{\substack{U\supseteq B\\ U\in\mathcal{O}}}\mu(C) \;=\; \sup_{\substack{U\supseteq B\\ U\in\mathcal{O}}}\left(\mu(X)-\mu(U)\right) \;=\; \sup_{\substack{C\subseteq B^{\mathsf{c}}\\ C^{\mathsf{c}}\in\mathcal{O}}}\mu(U).$$

Also ist auch B^{c} schwach regulär.

Es bleibt nun zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ auch $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür beweisen wir zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wir wählen nun N so groß, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht). Für die abgeschlossene Menge $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mu(B)-\mu(C) = \mu(B\setminus C) \;&=\; \mu\left(\left(B\setminus\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \,\cup\, \left(\bigcup_{n=1}^N B_n\setminus C\right)\right)\\
&\leq\; \mu\left(B\setminus\bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n\setminus C_n)\\
&<\; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{3^n} \;=\; \varepsilon,
\end{aligned}$$

also ist B schwach regulär von innen.

Ferner existieren für alle n offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ mit $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wir setzen $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und berechnen

$$\mu(U)-\mu(B) \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n\setminus B) \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n\setminus B_n) \;<\; \varepsilon.$$

Weil U offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von μ. □

Ausgestattet mit den Hilfssätzen 2.9 und 2.20 kann nun, wie oben bereits angedeutet wurde, Satz 2.19 bewiesen werden.

Beweis von Satz 2.19. Es ist nun zu zeigen, dass für jedes endliche Borel-Maß μ auf X die Menge

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B}(X) \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

bereits ganz $\mathcal{B}$ ist. Da $\mathcal{S}$ nach Hilfssatz 2.20 eine σ-Algebra ist und $\mathcal{B}(X)$ von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Sei $C \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist C sicherlich schwach regulär von innen. Nun verwenden wir die offenen Mengen $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.9. Wegen $A_n \downarrow C$ und $\mu(X) < \infty$ folgt mit der Maßstetigkeit von oben die Konvergenz $\mu(A_n) \downarrow \mu(C)$, sodass C auch schwach regulär von außen ist. □

Bemerkung. *Handelt es sich in der Situation von Satz 2.19 bei X um einen polnischen Raum, so werden wir zu einem späteren Zeitpunkt (in Folgerung 5.3) noch sehen, dass hier tatsächlich sogar Regularität gilt.*

Schließlich möchten wir noch kurz eine direkte Folgerung aus Satz 2.19 vorstellen, die etwas schwächere hinreichende Bedingungen für die Gleichheit zweier endlicher Maße auf metrischen Räumen bereitstellt. Im weiteren Verlauf wird sich dies noch als nützlich erweisen.

Satz 2.21. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu = \nu$.
(ii) Für alle $f \in U_b(X)$ ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\nu$.
(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \in \mathcal{B}$ ist $\mu(C) = \nu(C)$.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar und (iii) $\Rightarrow$ (i) folgt aus Satz 2.19.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Gelte (ii) und sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt für die gleichmäßig stetigen Funktionen $f_n \in C_b(X)$ aus Hilfssatz 2.9

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|f_n| \leq 1$ und $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \;\to\; \mu(C) \quad \text{und} \quad \int f_n \,\mathrm{d}\nu \;\to\; \nu(C)$$

und damit gilt (iii). □

3 Schwache Topologie und schwache Konvergenz

In diesem Kapitel werden wir endliche Borel-Maße auf topologischen Räumen selbst mit einer Topologie bzw. einem Konvergenzbegriff versehen, dem der sogenannten *schwachen Konvergenz*, welche die aus der Stochastik bekannte *Verteilungskonvergenz* auf allgemeinere Räume als $\mathbb{R}$ verallgemeinert. Erst die Einschränkung auf die Klasse der polnischen Räume als Grundraum wird uns einige nichttriviale Erkenntnisse über die Topologie dieses Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße ermöglichen.

Die grundlegenden Definitionen und Bemerkungen in den Abschnitten 3.1 und 3.2 folgen [Vee58, Abschnitte 1-3], während wir uns beim Beweis von Satz 3.5 in Abschnitt 3.3 an [Sim15, Satz 4.14.4] orientieren.

3.1 Definitionen

Definition 3.1 (Schwache Topologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist die* schwache Topologie *auf $\mathcal{M}_+(X)$ definiert als die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen*

$$I_f\colon \mathcal{M}_+(X) \to \mathbb{R},\ \mu \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_b(X).$$

Falls nicht explizit angegeben, sei $\mathcal{M}_+(X)$ im Folgenden immer mit der schwachen Topologie versehen.

Definition 3.2 (Schwache Konvergenz von Maßen)**.** *In der Situation von Definition 3.1 heißt ein Netz $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ von Maßen in $\mathcal{M}_+(X)$ genau dann* schwach konvergent *gegen ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$, wenn $\lim_{\iota\to\infty} \mu_\iota = \mu$ bezüglich der schwachen Topologie gilt. In diesem Fall schreiben wir auch*

$$\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu.$$

Hilfssatz 3.3. *Sei X ein topologischer Raum. Ein Netz $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ in $\mathcal{M}_+(X)$ konvergiert genau dann schwach gegen $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$, wenn*

$$\lim_{\iota\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota = \int f \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in C_b(X)$ gilt.

Beweis. Dies folgt direkt aus Hilfssatz 2.7. □

Bemerkung. *Häufig betrachten wir nur Teilräume von $\mathcal{M}_+(X)$ wie etwa $\mathcal{M}_{+,1}(X)$. Mit der schwachen Topologie auf solchen Teilräumen bezeichnen wir dann einfach die entsprechende Teilraumtopologie. Damit behält Hilfssatz 3.3 offenbar auch seine Gültigkeit, wenn man $\mathcal{M}_+(X)$ durch den jeweiligen Teilraum ersetzt.*

3.2 Beziehung zur Schwach-*-Konvergenz

Angesichts des Namens der *schwachen Konvergenz* stellt sich unmittelbar die Frage, ob diese in irgendeiner Beziehung zur schwachen Konvergenz in Banachräumen aus der Funktionalanalysis steht. Tatsächlich handelt es sich eher um eine Art von Schwach-$*$-Konvergenz, wie wir im Folgenden sehen werden.

Sei dazu zunächst X ein topologischer Raum. Dann ist $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum und wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{M}_+(X) \to C_b(X)^*,\ \mu \mapsto \left[l_\mu \colon C_b(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu \right], \tag{3.1}$$

die wegen $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \mu(X)\,\|f\|_\infty$ und $\mu(X) < \infty$ wohldefiniert ist und einem endlichen Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ ein zugehöriges lineares Funktional aus $C_b(X)^*$ zuordnet. Ist $C_b(X)^*$ mit der Schwach-$*$-Topologie ausgestattet, so entspricht schwache Konvergenz in $\mathcal{M}_+(X)$ trivialerweise der Schwach-$*$-Konvergenz der jeweiligen Bilder unter Φ.

Ist X etwa metrisierbar, so können wir sogar noch eine stärkere Aussage formulieren:

Hilfssatz 3.4. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist die Abbildung Φ aus* (3.1) *ein Homöomorphismus auf sein Bild.*

Beweis. Φ ist injektiv, denn für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ folgt aus $l_\mu = l_\nu$ wegen Satz 2.21 die Gleichheit $\mu = \nu$. Da schwache Konvergenz in $\mathcal{M}_+(X)$ exakt der Schwach-$*$-Konvergenz der jeweiligen Bilder unter Φ entspricht, liefert Satz 2.4 die Behauptung. □

Unter obigen Voraussetzungen lässt sich $\mathcal{M}_+(X)$ also in $C_b(X)^*$ einbetten. Mittels dieser Identifikation können nun Aussagen aus der Funktionalanalysis auch für $\mathcal{M}_+(X)$ fruchtbar gemacht werden, indem von topologischen Eigenschaften von $C_b(X)^*$ mit der Schwach-$*$-Konvergenz auf die entsprechenden Eigenschaften von $\mathcal{M}_+(X)$ geschlossen wird.

Eine konkrete Anwendung hiervon werden wir im nächsten Abschnitts beim Beweis von Satz 4.8 sehen.

3.3 Charakterisierungen schwacher Konvergenz

Im Falle metrisierbarer topologischer Räume liefert der folgende Satz eine umfassende Charakterisierung der schwachen Konvergenz.

Satz 3.5 (Portmanteau)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in $\mathcal{M}_+(X)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu$.

(ii) Für alle $f \in U_b(X)$ gilt $\lim_{\iota\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

(iii) Es ist $\lim_{\iota\to\infty} \mu_\iota(X) = \mu(X)$ *und für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq X$ gilt*

$$\limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(C) \;\le\; \mu(C).$$

(iv) Es ist $\lim_{\iota\to\infty} \mu_\iota(X) = \mu(X)$ *und für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ gilt*

$$\liminf_{\iota\to\infty} \mu_\iota(U) \;\ge\; \mu(U).$$

(v) Für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(\partial B) = 0$ ist

$$\lim_{\iota\to\infty} \mu_\iota(A) \;=\; \mu(A).$$

Beweis. Wir präsentieren hier eine Verallgemeinerung des Beweises von Satz 4.14.4 in [Sim15, Kapitel 4.14] mit endlichen Maßen anstelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Netzen anstelle von Folgen. Die Implikation „(i) ⇒ (ii)“ folgt direkt aus Hilfssatz 3.3.

(ii) ⇒ (iii): Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien $f_m,\ m \in \mathbb{N}$ die Funktionen aus Hilfssatz 2.9. Diese sind gleichmäßig stetig und beschränkt. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_\iota(C) \;=\; \int \mathbb{1}_C \,\mathrm{d}\mu_\iota \;\le\; \int f_m \,\mathrm{d}\mu_\iota \;\to\; \int f_m \,\mathrm{d}\mu, \quad \iota \to \infty,$$

also

$$\limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(C) \;\le\; \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen $f_m \downarrow \mathbb{1}_C$ und $|f_m| \le 1$ liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$\int f_m \, \mathrm{d}\mu \;\to\; \int \mathbb{1}_C \, \mathrm{d}\mu \;=\; \mu(C), \quad m \to \infty,$$

woraus

$$\limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(C) \;\le\; \mu(C)$$

folgt. Außerdem ist

$$\mu_\iota(X) \;=\; \int \mathbb{1}_X \, \mathrm{d}\mu_\iota \;\to\; \int \mathbb{1}_X \, \mathrm{d}\mu \;=\; \mu(X), \quad \iota \to \infty.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Es gelte (iii). Sei U offen, also $C := U^{\mathrm{c}}$ abgeschlossen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\liminf_{\iota\to\infty} \mu_\iota(U) \;&=\; \liminf_{\iota\to\infty} (\mu_\iota(X) - \mu_\iota(C)) \;=\; \mu(X) - \limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(C) \\ &\ge\; \mu(X) - \mu(C) \;=\; \mu(U)\end{aligned}$$

und damit (iv). Die andere Richtung zeigt man analog.

(iii), (iv) $\Rightarrow$ (v): Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(\partial A) = 0$. Wegen $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ und $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ gilt $\mu(A^\circ) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Ferner liefern die Annahmen

$$\limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(\overline{A}) \;\le\; \mu(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \liminf_{\iota\to\infty} \mu_\iota(A^\circ) \;\ge\; \mu(A^\circ).$$

Daraus folgt

$$\limsup_{\iota\to\infty} \mu_\iota(A) \;\le\; \mu(A) \;\le\; \liminf_{\iota\to\infty} \mu_\iota(A),$$

also insgesamt

$$\lim_{\iota\to\infty} \mu_\iota(A) \;=\; \mu(A).$$

(v) $\Rightarrow$ (i): Sei $f \in C_b(X)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ mit $a < f < b$. Die Menge

$$S := \{\, c \in (a,b) \mid \mu(\{f = c\}) > 0 \,\},$$

ist abzählbar, da $S_n := \left\{\, c \in (a,b) \;\middle|\; \mu(\{f = c\}) > \frac{1}{n} \,\right\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ gilt. Damit können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $c_j^{(m)} \notin S$ mit

$$a = c_0^{(m)} < \cdots < c_{2m}^{(m)} = b, \qquad c_{j+1}^{(m)} - c_j^{(m)} \le \frac{b-a}{m} \tag{3.2}$$

finden. Wir setzen

$$A_j^{(m)} := \left\{ c_j^{(m)} < f \le c_{j+1}^{(m)} \right\}, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}.$$

Die Stetigkeit von f impliziert $\partial A_j^{(m)} \subseteq \left\{ f = c_j^{(m)} \right\} \cup \left\{ f = c_{j+1}^{(m)} \right\}$, woraus sich

$$\mu(\partial A_j^{(m)}) = 0, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}$$

ergibt. Für $m \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$u_m := \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}$$

und Aussage (v) führt dann auf

$$\int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota \;=\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu_\iota(A_j^{(m)}) \;\to\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu(A_j^{(m)}) \;=\; \int u_m \,\mathrm{d}\mu, \quad \iota \to \infty. \tag{3.3}$$

Außerdem folgen aus (3.2) die Ungleichungen

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| \;\leq\; \frac{b-a}{m}, \qquad \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right| \;\leq\; \frac{b-a}{m} \tag{3.4}$$

für $\iota \in I$. Mit (3.4) gilt nun für alle $m \in \mathbb{N}$, $\iota \in I$

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| \;&\leq\; \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| \\ &\qquad + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| \\ &\leq\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.3) und (3.5) liefern also letztendlich für alle m

$$\begin{aligned}\limsup_{\iota\to\infty} \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| \;&\leq\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \limsup_{\iota\to\infty} \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &=\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} \;\to\; 0, \quad m \to \infty,\end{aligned}$$

was wegen Hilfssatz 3.3 die schwache Konvergenz $\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu$ impliziert. □

Bemerkung (Verteilungskonvergenz)**.** *Betrachte den Fall $X := \mathbb{R}$. Sei nun $(\mathbb{P}_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{+,1}(\mathbb{R})$ und seien $F_n\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathbb{P}_n((-\infty, x])$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$ die zugehörigen Verteilungsfunktionen. In der Stochastik spricht man davon, dass $(\mathbb{P}_n)_n$ in Verteilung gegen $\mathbb{P}$ konvergiert, falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) \;=\; F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, in denen F stetig ist [Hen16, Definition 6.1].

Tatsächlich ist die Verteilungskonvergenz von $(\mathbb{P}_n)_n$ gegen $\mathbb{P}$ gerade äquivalent zur schwachen Konvergenz $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$. Dies lässt sich analog zur Äquivalenz (i) ⇔ (v) in Satz 3.5 beweisen, wobei für den Beweis der Rückrichtung passende Intervalle als $A_j^{(m)}$ verwendet werden.

4 Eigenschaften der schwachen Topologie

Nachdem wir im vorigen Abschnitt die schwache Topologie definiert haben, möchten wir uns nun einige Eigenschaften dieser ansehen, wenn man weitere Bedingungen an den Grundraum X stellt. Als Grundbedingung möchten wir in diesem Kapitel die Metrisierbarkeit von X fordern. Unter dieser Voraussetzung werden die folgenden Aussagen unsere zentralen Erkenntnisse sein:

- $\mathcal{M}_+(X)$ ist genau dann metrisierbar und separabel, wenn X separabel ist.
- $\mathcal{M}_+(X)$ ist genau dann polnisch, wenn X polnisch ist.
- $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ ist genau dann metrisierbar und kompakt, wenn X kompakt ist.

Abgesehen von Satz 4.8 orientieren wir uns in diesem Abschnitt an [Vee58].

Satz 4.1. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Für $x \in X$ schreiben wir $\delta_x \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ für das Dirac-Maß im Punkt x und definieren*

$$\delta\colon X \to \mathcal{M}_+(X),\ x \mapsto \delta_x.$$

Außerdem setzen wir $\Delta := \delta(X) = \{\, \delta_x \mid x \in X \,\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) δ ist ein Homöomorphismus zwischen X und Δ.
(b) $\Delta \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ ist sequentiell abgeschlossen.

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage (a). Weil X metrisierbar ist und die einelementigen Mengen $\{x\}\,,\ x \in X$ daher in $\mathcal{B}(X)$ enthalten sind, ist δ sicherlich injektiv. Wegen Satz 2.4 (b)) genügt es nachzuweisen, dass für jedes Netz $(x_\iota)_\iota$ in X sowie $z \in X$ die Äquivalenz

$$x_\iota \to z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta_{x_\iota} \xrightarrow{w} \delta_z, \quad \iota \to \infty$$

gilt.

Gelte für ein Netz $(x_\iota)_\iota$ in X und $z \in X$ die Konvergenz $x_\iota \to z$ und sei $f \in C_b(X)$. Dann ist

$$\int f \,\mathrm{d}\delta_{x_\iota} \;=\; f(x_\iota) \;\to\; f(z) = \int f \,\mathrm{d}\delta_z, \quad \iota \to \infty,$$

also konvergiert δ_{x_ι} schwach gegen δ_z. Gelte umgekehrt $\delta_{x_\iota} \xrightarrow{w} \delta_z$. Wähle eine Metrik d, die X metrisiert und setze $f := \min\{1, d(\cdot, z)\} \in C_b(X)$. Dann ist

$$\min\{1, d(x_\iota, z)\} \;=\; \int f \,\mathrm{d}\delta_{x_\iota} \;\to\; \int f \,\mathrm{d}\delta_z = 0,$$

was $x_\iota \to z$ nach sich zieht.

Nun möchten wir Aussage (b) zeigen. Sei $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \mu$, $n \to \infty$. Zunächst gilt sicherlich $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Wir zeigen, dass $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge besitzen muss. Ansonsten ist nämlich $D := \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq X$ eine unendliche und abgeschlossene Teilmenge. Das Portmanteau-Theorem (Satz 3.5) liefert also für jede unendliche Teilmenge $\tilde{D} \subseteq D$ die Abschätzung

$$1 \;=\; \limsup_{n\to\infty} \delta_{x_n}(\tilde{D}) \;\leq\; \mu(\tilde{D}) \;\leq\; 1,$$

die einen Widerspruch darstellt. Also existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ und $x \in X$ mit $x_{n_k} \to x,\ x \to \infty$. Damit ist aber auch $\delta_{x_n} \xrightarrow{w} \delta_x$, weshalb nach Satz 2.21 die Gleichheit $\mu = \delta_x \in \Delta$ folgt. □

Satz 4.2. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{M}_+(X)$ ist genau dann metrisierbar und separabel, wenn X separabel ist.*

Für den Beweis benötigen wir zunächst noch einige wenige Hilfssätze, die wir im Folgenden vorstellen möchten.

Hilfssatz 4.3. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Ist X kompakt, so ist $C_b(X)$ separabel.*

Beweis. **Ohne Beweis.** □

Hilfssatz 4.4. *Sei (X, d) ein totalbeschränkter metrischer Raum. Dann ist $U_b(X)$ ein separabler Banachraum.*

Beweis. Zunächst ist $U_b(X)$ offensichtlich ein Banachraum. Sei nun $\tilde{X}$ die Vervollständigung von X. Diese ist kompakt und damit ist $C_b(\tilde{X})$ nach Hilfssatz 4.3 ein separabler Banachraum. Jedes $f \in U_b(X)$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{f} \in C_b(\tilde{X})$ mit $\|f\|_\infty = \|\tilde{f}\|_\infty$. Damit wird über die Zuordnung $f \mapsto \tilde{f}$ eine isometrische Einbettung von $U_b(X)$ nach $C_b(\tilde{X})$ definiert, was die Separabilität von $U_b(X)$ impliziert. □

Hilfssatz 4.5. *Sei $R := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ausgestattet mit der Produkttopologie von $\mathbb{R}$, also mit der Initialtopologie der Projektionen $\pi_k \colon R \to \mathbb{R},\ x = (x_n)_n \mapsto x_k,\ k \in \mathbb{N}$. Dann ist R separabel und metrisierbar.*

Beweis. $R \cong (0,1)^{\mathbb{N}}$ ist homöomorph zu einer Teilmenge des Hilbertwürfels H, worauf mit Satz 2.13 unmittelbar die Behauptung folgt. □

Ausgestattet mit den obigen Hilfssätzen können wir nun zum Beweis von Satz 4.2 übergehen. Im Wesentlichen werden wir eine Einbettung von $\mathcal{M}_+(X)$ nach R konstruieren, die uns unmittelbar die Behauptung liefert.

Beweis von Satz 4.2. Für die Hinrichtung fixieren wir auf X eine Metrik d, die X metrisiert. Nach Hilfsssatz 2.14 existiert dann ein Homöomorphismus $\varphi \colon X \to H$ von X auf eine Teilmenge $\varphi(X)$ des Hilbertwürfels H. Wir wählen nun die Metrik ρ aus Hilfssatz 2.12 auf H. Aufgrund der Kompaktheit von H ist (H, ρ) totalbeschränkt und damit auch jede Teilmenge von H. Also können wir über ρ eine Metrik $\tilde{d}$ auf X einführen, sodass X von $\tilde{d}$ metrisiert wird und $(X, \tilde{d})$ totalbeschränkt ist. Im Folgenden sei auf X diese Metrik fixiert. Hilfssatz 4.4 liefert uns nun, dass $(U_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein separabler Banachraum ist. Sei nun $\mathcal{D} := \{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq U_b(X)$ eine abzählbare dichte Teilmenge, die wir so wählen, dass $f_1 = \mathbb{1}_X$ ist.

Wir setzen nun

$$T \colon \mathcal{M}_+(X) \to R,\ \mu \mapsto \left(\int f_n \,\mathrm{d}\mu \right)_n \tag{4.1}$$

und möchten nachweisen, dass T ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Da R nach Hilfssatz 4.5 separabel und metrisierbar ist, übertragen sich diese Eigenschaften dann auch auf $\mathcal{M}_+(X)$.

Wir zeigen zunächst die Injektivität. Seien dazu also $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ mit $T(\mu) = T(\nu)$. Sei außerdem $g \in U_b(X)$. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_n \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $\|g - g_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty$, was auch

$$\int g_n \,\mathrm{d}\mu \to \int g \,\mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int g_n \,\mathrm{d}\nu \to \int g \,\mathrm{d}\nu, \quad n \to \infty$$

impliziert. Da aber $\int g_n \,\mathrm{d}\mu = \int g_n \,\mathrm{d}\nu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\nu$. Satz 2.21 liefert nun die Gleichheit $\mu = \nu$.

Um nun den Beweis abzuschließen, genügt es wegen Satz 2.4 zu beweisen, dass für jedes Netz $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ in $\mathcal{M}_+(X)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ die Äquivalenz

$$\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu \quad \Longleftrightarrow \quad T(\mu_\iota) \to T(\mu), \quad \iota \to \infty$$

gilt.

Gelte $\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu$, was nach Satz 3.5 äquivalent dazu ist, dass $\lim_{\iota\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota = \int f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in U_b(X)$ ist. Offenbar impliziert dies die Konvergenz $T(\mu_\iota) \to T(\mu),\ \iota \to \infty$.

Sei nun umgekehrt $T(\mu_\iota) \to T(\mu),\ \iota \to \infty$, was gleichbedeutend damit ist, dass

$$\lim_{\iota\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota = \int f_n \,\mathrm{d}\mu \tag{4.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $f_1 = \mathbb{1}_X$ gilt auch

$$\mu_\iota(X) \;=\; \int \mathbb{1}_X \,\mathrm{d}\mu_\iota \;\to\; \int \mathbb{1}_X \,\mathrm{d}\mu \;=\; \mu(X), \quad \iota \to \infty$$

und damit können wir eine Konstante $C < \infty$ und ein $\iota_0 \in I$ finden, sodass $\mu_\iota(X) \leq C$ für alle $\iota_0 \preceq \iota$ ist. Sei $g \in U_b(X)$ fest aber beliebig. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_n \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ mit $\|g - g_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\iota_0 \preceq \iota$ folgt

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f \,\mathrm{d}\mu\right| \;&\leq\; \left|\int f \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota\right| + \left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f_n \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\quad + \left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq\; 2C \,\|f - f_n\|_\infty + \left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f_n \,\mathrm{d}\mu\right|,\end{aligned}$$

woraus schließlich mit (4.2)

$$\limsup_{\iota\to\infty} \left|\int f \,\mathrm{d}\mu_\iota - \int f \,\mathrm{d}\mu\right| \;\leq\; 2C \,\|f - f_n\|_\infty \;\to\; 0, \quad n \to \infty$$

folgt. Damit gilt

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_\iota \;\to\; \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad \iota \to \infty$$

für alle $f \in U_b(X)$, was nach Satz 3.5 die schwache Konvergenz $\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu,\ \iota \to \infty$ impliziert.

Die Rückrichtung folgt direkt aus Satz 4.1, da die Separabilität von $\mathcal{M}_+(X)$ direkt auch die Separabilität von $X \cong \Delta \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ nach sich zieht. $\square$

Wir werden uns nun der zweiten Aussage vom Beginn dieses Abschnittes widmen.

Satz 4.6. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{M}_+(X)$ genau dann polnisch, wenn X polnisch ist.*

Für die Hinrichtung zeigen wir in einem Hilfssatz zunächst den wichtigen Spezialfall, dass der Grundraum X kompakt ist und weiten dies anschließend auf die Klasse aller polnischen Räume aus.

Hilfssatz 4.7. *Sei X ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{M}_+(X)$ polnisch.*

Beweis. Wir wählen zunächst eine Metrik d, die X vollständig metrisiert. Da X insbesondere separabel ist, können wir zunächst genau wie im Beweis von Satz 4.2 verfahren (abgesehen davon, dass wir anstelle von $\tilde{d}$ direkt mit d arbeiten). Für eine abzählbare dichte Teilmenge $\mathcal{D} := \{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq U_b(X)$ mit $f_1 = \mathbb{1}_X$ erhalten wir also wieder die Abbildung

$$T\colon \mathcal{M}_+(X) \to R,\ \mu \mapsto \left(\int f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_n,$$

die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Nun möchten wir nachweisen, dass $T(\mathcal{M}_+(X)) \subseteq R$ abgeschlossen ist. Hierfür verwenden wir die Charakterisierung von Abgeschlossenheit durch Netze aus aus Satz 2.4 (a). Ist $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ ein Netz in $\mathcal{M}_+(X)$ mit $T(\mu_\iota) \to r,\ \iota \to \infty$ für ein $r = (r_n)_n \in R$, so müssen wir zeigen, dass r in $T(\mathcal{M}_+(X))$ enthalten ist. Sicherlich gilt $r_n = \lim_{\iota\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und analog zum Beweis von Satz 4.2 können wir wieder eine Konstante $C < \infty$ und ein $\iota_0 \in I$ finden, sodass $\mu_\iota(X) \leq C$ für alle $\iota_0 \preceq \iota$ ist.

Wir setzen nun $A := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \mathcal{D}$, was ein dichter Untervektorraum von $U_b(X)$ ist. Auf A definieren wir nun

$$l\colon A \to \mathbb{R},\ f \mapsto \lim_{\iota\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu_\iota.$$

Offenbar ist l wohndefiniert und linear. Da $l(f) \leq C \|f\|_\infty$ für alle $f \in U_b(X)$ gilt, folgt $l \in A^*$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert nun eine (eindeutige) Fortsetzung von l auf ganz $U_b(X)$, die wir ab jetzt l nennen. Es ist $l \in U_b(X)^*$ mit $\|l\|_{U_b(X)^*} = \|l\|_{A^*}$. Offenbar gilt $l(f) \geq 0$ für alle $f \in C_b(X)$ mit $f \geq 0$ und damit gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz-Markov ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ mit

$$l(f) \;=\; \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in U_b(X).$$

Also folgt

$$\lim_{\iota\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu_\iota \;=\; r_n \;=\; l(f_n) \;=\; \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In völliger Analogie zum Beweis von Satz 4.2 folgt nun die schwache Konvergenz $\mu_\iota \xrightarrow{w} \mu,\ \iota \to \infty$, die wiederum $T(\mu_\iota) \to T(\mu)$ impliziert. Demnach ist $r = T(\mu) \in T(\mathcal{M}_+(X))$ und insgesamt haben wir gezeigt, dass $T(\mathcal{M}_+(X)) \subseteq R$ abgeschlossen ist. □

Beweis von Satz 4.6. Wir widmen uns zunächst der Hinrichtung des Beweises. Analog zum Beweis von Satz 4.2 fixieren wir auf X eine Metrik $\tilde{d}$, bezüglich der X totalbeschränkt ist und bezeichnen die Vervollständigung von X bezüglich dieser Metrik mit $\tilde{d}$. $\tilde{X}$ ist als kompakter metrischer Raum polnisch, weshalb $X \subseteq \tilde{X}$ nach Satz 2.10 eine G_δ-Teilmenge ist. Indem wir ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ mittels $\mu(B) := \mu(B \cap X),\ B \in \mathcal{B}(\tilde{X})$ auf $\tilde{X}$ fortsetzen, können wir $\mathcal{M}_+(X)$ als Teilmenge von $\mathcal{M}_+(\tilde{X})$ auffassen. Da $\mathcal{M}_+(\tilde{X})$ nach Hilfssatz 4.7 polnisch ist, genügt es also nach Satz 2.10 zu zeigen, dass $\mathcal{M}_+(X) \subseteq \mathcal{M}_+(\tilde{X})$ eine G_δ-Teilmenge ist.

Da $X \subseteq \tilde{X}$ eine G_δ-Teilmenge ist, existieren offene Mengen $U_k \subseteq \tilde{X},\ k \in \mathbb{N}$ so, dass $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ gilt. Insbesondere gilt damit auch $\mathcal{M}_+(X) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_+(U_k)$. Für $k, r \in \mathbb{N}$ setzen wir nun

$$V_{k,r} \;:=\; \left\{ \mu \in \mathcal{M}_+(\tilde{X}) \;\middle|\; \mu(U_k^{\mathsf{c}}) < \frac{1}{r} \right\}.$$

Mit diesen Mengen folgt dann $\mathcal{M}_+(U_k) = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} V_{k,r}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und insbesondere auch

$$\mathcal{M}_+(X) \;=\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{r\in\mathbb{N}} V_{k,r}.$$

Es genügt also, zu beweisen, dass $V_{k,r}$ für alle $k, r \in \mathbb{N}$ offen ist, was äquivalent zur Abgeschlossenheit von

$$C_{k,r} \;:=\; V_{k,r}^{\mathsf{c}} \;=\; \left\{ \mu \in \mathcal{M}_+(\tilde{X}) \;\middle|\; \mu(U_k^{\mathsf{c}}) \geq \frac{1}{r} \right\}$$

für alle $k, r \in \mathbb{N}$ ist. Wir verwenden hierfür die Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Netze aus Satz 2.4 (a). Fixiere $k, r \in \mathbb{N}$. Sei nun $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in $C_{k,r}$, das schwach gegen ein $\mu \in \mathcal{M}_+(\tilde{X})$ konvergiert. Dann ist $\mu_\iota(U_k^\mathsf{c}) \geq \frac{1}{r}$ für alle $\iota \in I$ und damit nach dem Portmanteau-Theorem (Satz 3.5 (iii))

$$\mu(U_k^\mathsf{c}) \;\geq\; \limsup_{\iota \to \infty} \mu_\iota(U_k^\mathsf{c}) \;\geq\; \frac{1}{r},$$

was $\mu \in C_{k,r}$ impliziert. Daher ist $C_{k,r}$ für alle $k, r \in \mathbb{N}$ abgeschlossen und der Beweis vollständig.

Die Rückrichtung folgt wieder unmittelbar aus Satz 4.1: Ist $\mathcal{M}_+(X)$ polnisch, so ist betrachten wir $X \cong \Delta \subseteq \mathcal{M}_+(X)$. Weil Δ wegen der Metrisierbarkeit von $\mathcal{M}_+(X)$ nun auch abgeschlossen und damit nach Satz 2.9 eine G_δ-Teilmenge von $\mathcal{M}_+(X)$ ist, liefert Satz 2.10 die Behauptung. □

Bemerkung. *Satz 4.2 und Satz 4.6 gelten auch, wenn man $\mathcal{M}_+(X)$ durch $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ ersetzt (für Satz 4.6 folgt dies aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}_{+,1}(X) \subseteq \mathcal{M}_+(X)$ und Hilfssatz 2.9).*

Satz 4.8. *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ genau dann metrisierbar und kompakt, wenn X kompakt ist.*

Beweis. Im Wesentlichen stellen wir den Beweis von Proposition 5.3 in [van03] vor.

Für die Hinrichtung sei X zunächst kompakt. Dann ist X insbesondere separabel und damit ist $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ nach Satz 4.2 metrisierbar. Außerdem setzen wir

$$A \;:=\; \left\{ l \in C_b(X)^* \;\middle|\; \|l\|_{C_b(X)^*} \leq 1,\ l(\mathbb{1}_X) = 1,\ \forall f \in C_b(X) \text{ mit } f \geq 0 : l(f) \geq 0 \right\}$$

und analog zu (5.1)

$$\Phi \colon \mathcal{M}_{+,1}(X) \to A,\ \mu \mapsto \left[l_\mu \colon C_b(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu \right].$$

Der Darstellungssatz von Riesz-Markov liefert die Bijektivität von Φ, also ist Φ ein Homöomorphismus zwischen $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ und $A \subseteq C_b(X)^*$ mit der Schwach-$*$-Topologie. Mit dem Satz von Banach-Alaoglu folgt nun, dass A als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\left\{ l \in C_b(X)^* \;\middle|\; \|l\|_{C_b(X)^*} \leq 1 \right\}$ selbst kompakt bezüglich der Schwach-$*$-Topologie ist, was schließlich die Kompaktheit von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ nach sich zieht.

Die Rückrichtung ist wieder eine direkte Konsequenz aus Satz 4.1: Ist $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ metrisierbar und kompakt, so ist $X \cong \Delta$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ kompakt. □

5 Straffheit und der Satz von Prokhorov

Das zentrale Resultat dieses Abschnitts stellt der *Satz von Prokhorov* (Satz 5.4) dar, der für einen polnischen Raum X eine einfache Charakterisierung der Kompaktheit von Teilmengen von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ bereitstellt. Hierfür werden wir zunächst das Konzept der *Straffheit* einführen.

Definition 5.1. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}_+(X)$* straff*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\varepsilon \subseteq X$ gibt mit*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq \mu(X) - \varepsilon$$

für alle $\mu \in A$.

Ferner heißt ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ straff*, falls $\{\mu\}$ straff ist.*

Im folgenden Satz werden wir sehen, dass wir es tatsächlich sehr häufig mit straffen Maßen zu tun haben.

Satz 5.2. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann ist μ straff.*

Beweis. Sei d eine Metrik, bezüglich der (X, d) vollständig ist und sei $\mathcal{D} := \{ x_m \mid m \in \mathbb{N} \}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt also $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{1/k}(x_m) = X$ und Maßstetigkeit von unten impliziert $\lim_{M \to \infty} \bigcup_{m=1}^{M} B_{1/k}(x_m) = \mu(X)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann finden wir natürliche Zahlen $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ mit

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right) \;\geq\; \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$S_\varepsilon \;:=\; \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right) \qquad \text{und} \qquad K_\varepsilon := \overline{S_\varepsilon}.$$

Offenbar ist S_ε totalbeschränkt und damit ist $K_\varepsilon = \overline{S_\varepsilon}$ kompakt (dies wird etwa in [Sim15, Satz 2.3.8] bewiesen, hier geht die Vollständigkeit von (X, d) ein). Außerdem berechnen wir

$$\begin{aligned} \mu(K_\varepsilon) \;\geq\; \mu(S_\varepsilon) \;\geq\; \mu(X) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu(X) - \mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right)\right) \\ \geq\; \mu(X) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \;=\; \mu(X) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist μ also straff. □

Ohne große Mühe liefert uns der vorige Satz die Aussage, dass endliche Borel-Maße auf polnischen Räumen regulär sind:

Folgerung 5.3. *Ist X ein polnischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ regulär.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ und $B \in \mathcal{B}(X)$. Wegen 2.19 wissen wir bereits, dass

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ abgeschlossen}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U)$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq B \subseteq X$ mit $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$. Außerdem gibt es nach Satz 5.2 eine kompakte Menge $\tilde{K} \subseteq X$ mit $\mu(\tilde{K}) \geq 1 - \varepsilon$. Setzen wir nun $K := \tilde{K} \cap C$, so ist K ebenfalls kompakt und $K \subseteq B$ mit

$$\mu(B \setminus K) \;=\; \mu((B \setminus C) \cap (B \setminus \tilde{K})) \;\leq\; \mu(B \setminus C) + \mu(K^{*\mathsf{c}}) \;\leq\; 2\varepsilon.$$

Daher folgt

$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K)$$

und insgesamt μ ist regulär. □

Wir möchten nun zum zentralen Satz dieses Abschnitts gehen, der uns eine interessante Charakterisierung der Kompaktheit von Teilmengen von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ liefert, sofern wir X als polnisch voraussetzen.

Satz 5.4 (Prokhorov). *Sei X ein polnischer Raum und $A \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$, wobei $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz versehen sei. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist straff.
(ii) $\overline{A} \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$ ist kompakt.

Bemerkung. *Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Aussage des Satzes von Prokhorov die von Satz 4.8 beinhaltet. Denn ist X kompakt und metrisierbar (und damit insbesondere polnisch), so ist $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ trivialerweise straff und damit nach dem Satz von Prokhorov auch kompakt.*

Beweis. Sei zunächst $A \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$ straff. Wir möchten nun beweisen, dass $\overline{A}$ kompakt ist, was wegen der Metrisierbarkeit von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ äquivalent dazu ist, dass jede Folge $(\mu_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgrund der Straffheit von A gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Kompaktum $K^{(m)} \subseteq X$, das für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(K^{(m)}) \geq 1 - \frac{1}{m+1} \tag{5.1}$$

erfüllt. Ohne Einschränkung dürfen wir außerdem annehmen, dass

$$K^{(m)} \subseteq K^{(m+1)} \tag{5.2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei nun also $(\mu_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$. In Analogie zu Satz 4.8 lässt sich nun auch einsehen, dass

$$\mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)}) \;:=\; \left\{ \mu \colon \mathcal{B}(K^{(m)}) \to [0,1] \;\middle|\; \mu \text{ ist endliches Maß und } \mu(K^{(m)}) \leq 1 \right\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ kompakt bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz ist. Damit existiert ein Maß $\nu^{(1)} \in \mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(1)})$ und eine Teilfolge $(\mu^{(1)}_{n_j})_k$ von $(\mu_n)_n$ mit

$$\mu^{(1)}_{n_j}\Big|_{K^{(1)}} \xrightarrow{w} \nu^{(1)}.$$

Auf dieselbe Art und Weise findet man nun für alle $m \geq 2$ sukzessive Maße $\nu^{(m)} \in \mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)})$ und Teilfolgen $(\mu^{(m)}_{n_j})_j$ von $(\mu^{(m-1)}_{n_j})_j$ mit

$$\mu^{(m)}_{n_j}\Big|_{K^{(m)}} \xrightarrow{w} \nu^{(m)}, \quad j \to \infty.$$

Nun diagonalisieren wir und erhalten mit $\mu_{n_j} := \mu_{n_j}^{(j)}$ eine Teilfolge $(\mu_{n_j})_j$ von $(\mu_n)_n$, die

$$\mu_{n_j}\big|_{K^{(m)}} \xrightarrow{w} \nu^{(m)}, \quad j \to \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Außerdem können Maße $\nu^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$ via $\nu^{(m)}(B) := \nu^{(m)}(B \cap K^{(m)}),\ B \in \mathcal{B}(X)$ einfach auf X fortgesetzt werden. Mit dieser Konvention können wir nun beweisen, dass die Maße $\nu^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$ in dem Sinne monoton wachsen, dass

$$\nu^{(m)}(B) \leq \nu^{(m+1)}(B) \tag{5.3}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

Wegen schwacher Regularität (vgl. Satz 2.19) genügt es, die Ungleichung (5.3) für abgeschlossene Mengen zu zeigen. Sei also $m \in \mathbb{N}$ fixiert, $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien $f_k \colon X \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ die gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen aus Hilfssatz 2.9. Unter Ausnutzung von (5.2) folgt nun

$$\int_{K^{(m)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \ \leq \ \int_{K^{(m+1)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j}$$

für alle $k, j \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\int_{K^{(m)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \to \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m)} \quad \text{und} \quad \int_{K^{(m+1)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \to \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m+1)}, \quad j \to \infty$$

ist damit auch

$$\int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m)} \ \leq \ \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m+1)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, was wiederum aufgrund der Konvergenz $f_k \downarrow \mathbb{1}_C$ und dem Satz von Lebesgue Ungleichung (5.3) impliziert.

Schlussendlich möchten wir nun nachweisen, dass durch

$$\nu \colon \mathcal{B}(X) \to [0,1],\ B \mapsto \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}(B)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X definiert wird, gegen das $(\mu_{n_j})_j$ schwach konvergiert.

Zunächst verifizieren wir, dass ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. $\nu(\emptyset) = 0$ ist klar. Weil $\nu^{(m)}$ in $\mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)})$ liegt und wir (5.1) angenommen haben, gilt

$$\nu^{(m)}(X) = \nu^{(m)}(K^{(m)}) \in [1 - \frac{1}{m+1}, 1]$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $\nu(X) = 1$. Für die σ-Additivität seien $B_k \in \mathcal{B}(X),\ k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nu\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) \ &= \ \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) \ = \ \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(m)}(B_k) \\
&\overset{(5.3)}{=} \ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}(B_k) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Gleichung der Satz von Beppo Levi verwendet wurde. Insgesamt haben wir also $\nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ nachgewiesen.

Jetzt bleibt lediglich zu zeigen dass $(\mu_{n_j})_j$ tatsächlich schwach gegen ν konvergiert. Hierfür möchten wir die Charakterisierung (iii) des Portmanteau-Theorems (Satz 3.5) verwenden. Sei dazu $C \subseteq X$ abgeschlossen. Zunächst liefert ebendieser Satz für alle

$m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\limsup_{j\to\infty} \mu_{n_j}(C \cap K^{(m)}) \leq \nu^{(m)}(C)$ und wegen (5.1) ist zudem $\mu_{n_j}(C \cap K^{(m)\mathsf{c}}) \leq \frac{1}{m+1}$ für alle $j, m \in \mathbb{N}$. Insgesamt folgt daraus

$$\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} \mu_{n_j}(C) &= \lim_{m\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \Big(\mu_{n_j}(C \cap K^{(m)}) + \mu_{n_j}(C \cap K^{(m)\mathsf{c}}) \Big) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \left(\nu^{(m)}(C) + \frac{1}{m+1} \right) = \nu(C), \end{aligned}$$

was den Beweis der Hinrichtung von Satz 5.4 abschließt.

Für die Rückrichtung sei nun $\overline{A}$ kompakt. Außerdem sei d eine Metrik, die X vollständig metrisiert und $\mathcal{D} := \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge.

Nun behaupten wir, dass für alle $\delta > 0$ ein solches $M_\delta \in \mathbb{N}$ existiert, dass

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{M_\delta} B_\delta(x_m)\Big) > 1 - \delta \tag{5.4}$$

für alle $\mu \in A$ gilt. Denn falls es kein derartiges M_δ gibt, so lässt sich ein $\delta > 0$ finden, für das für alle $M \in \mathbb{N}$ ein $\mu_M \in A$ existiert mit

$$\mu_M\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta.$$

Insbesondere bedeutet das natürlich auch, dass wir für alle $M \in \mathbb{N}$ und $N \geq M$

$$\mu_N\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta$$

abschätzen dürfen. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{A}$ gibt es eine Teilfolge $(\mu_{N_j})_j$ von $(\mu_N)_N$, die einen schwachen Grenzwert $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ besitzt. Fixiere nun ein $M \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)$ offen und daher liefert das Portmanteau-Theorem (Satz 3.5 (iv))

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_{N_j}\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta. \tag{5.5}$$

Wegen $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_\delta(x_m) = X$ und Maßstetigkeit von unten liefert uns (5.5) unmittelbar

$$\mu(X) \leq 1 - \delta < 1,$$

was einen Widerspruch dazu darstellt, dass es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X handelt. Also muss unsere Behauptung in (5.4) tatsächlich gelten.

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen

$$S_\varepsilon := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^{M_{\varepsilon/2^k}} B_{\varepsilon/2^k}(x_m)$$

und verfahren nun ähnlich wie im Beweis von Satz 5.2: Offensichtlich ist S_ε total beschränkt und damit auch $K_\varepsilon := \overline{S_\varepsilon}$ kompakt (vgl. [Sim15, Satz 2.3.8]). Außerdem gilt für alle $\mu \in A$

$$\mu(K_\varepsilon) \geq \mu(S_\varepsilon) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^{M_{\varepsilon/2^k}} B_{\varepsilon/2^k}(x_m) \right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 1 - \varepsilon$$

und damit ist A straff. $\square$

Literatur

[AB06] Charalambos D. Aliprantis und Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Third Edition. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-29587-7.

[Hen16] Norbert Henze. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 2016. URL: `https://www.math.kit.edu/stoch/~henze/media/wt-ss2016-handout-final.pdf`.

[Jor14] Jordan Bell. *Polish spaces and Baire spaces*. 2014. URL: `http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/polish.pdf`.

[Meg98] Robert E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Bd. 183. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1998. ISBN: 0-387-98431-3.

[Sim15] Barry Simon. *Real Analysis*. Bd. Part 1. A Comprehensive Course in Analysis. Providence, Rhode Island: AMS American Mathematical Society, 2015. ISBN: 978-1-4704-1099-5.

[van03] Onno van Gaans. *Probability measures on metric spaces*. 2002/03. URL: `https://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/jancol1.pdf`.

[Vee58] Veeravalli S. Varadarajan. „Weak Convergence of Measures on Separable Metric Spaces“. In: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* Vol. 19, No. 1/2 (1958), S. 15–22. URL: `https://www.jstor.org/stable/25048364`.

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum