Karlsruher Institut für Technologie

Bachelorarbeit

Maße auf polnischen Räumen und die Wassersteinmetrik

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Abschnitt **??** folgt im Wesentlichen [Sim15, Kapitel 4.14].

Einleitung, Zielsetzung

2 Polnische Räume

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit den grundlegenden Eigenschaften von polnischen Räumen. An erster Stelle möchten wir daher eine Definition dieser Klasse von topologischen Räumen liefern.

Definition 2.1 (Polnischer Raum)**.** *Ein* polnischer Raum *ist ein separabler und vollständig metrisierbarer topologischer Raum.*

Es sei hier anzumerken, dass dies tatsächlich eine rein topologische Eigenschaft ist: Wir fordern für einen polnischen Raum X nur die Existenz einer Metrik, die die Topologie von X erzeugt und bezüglich der X vollständig ist, möchten uns aber die Flexibilität bewahren, diese Metrik nicht zu fixieren und bei Bedarf zwischen verschiedenen solchen Metriken zu wechseln. Es kann durchaus Metriken geben, die X zwar metrisieren, jedoch nicht vollständig. Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardtopologie offensichtlich ein polnischer Raum, denn $\mathbb{R}$ ist separabel und die euklidische Metrik metrisiert $\mathbb{R}$ vollständig. Allerdings ist $(0,1)$ als Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik zwar separabel, aber nicht vollständig. Da $(0,1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, ist $(0,1)$ aber dennoch ein polnischer Raum.

Der folgende Hilfssatz 2.2 behandelt die recht elementare Tatsache, dass sich in metrischen Räumen abgeschlossene Mengen von außen „beliebig gut" durch offene Mengen approximieren lassen. Diese Erkenntnis werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch häufiger benötigen.

Hilfssatz 2.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$A_n := \left\{ y \in X \;\middle|\; d(y,C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \textit{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x,C)\},$$

wobei wir $d(y,C) := \inf_{x \in C} d(y,x)$ setzen. Dann gilt:

(a) A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, insbesondere ist C also eine G_δ-Menge.
(c) Für alle n ist $f_n|_{A_n^c} = 0$ und f_n ist lipschitzstetig.
(d) $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$.

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y,C)$.

Weiter ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von C liegt y damit in C, sodass (b) gezeigt ist.

Aussage (c) ist klar (f_n ist als Komposition lipschitzstetiger Funktionen selbst lipschitzstetig).

Schließlich fällt f_n und für $x \in C$ gilt $f_n(x) = 1$. Für $x \in C^{\mathsf{c}}$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

womit die Behauptung folgt. □

Mit dem *Hilbertwürfel* möchten wir uns zunächst einen speziellen polnischen Raum ansehen, der sich später in gewisser Weise als universell für alle polnischen Räume erweisen wird.

Definition 2.3 (Hilbertwürfel). *Der* Hilbertwürfel *ist der topologische Raum* $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ *ausgestattet mit der Produkttopologie, also der kleinsten Topologie, bezüglich der alle Projektionen* $\pi_n \colon H \to [0,1],\ x \mapsto x_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *stetig sind.*

Hilfssatz 2.4. *Für den Hilbertwürfel* H *gelten folgende Aussagen:*

(a) Eine Folge $(x^{(k)})_k \in H^{\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann gegen ein* $x \in H$, *wenn alle Komponenten konvergieren, also, wenn* $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

(b) Setzen wir für $x, y \in H$

$$\rho(x, y) := \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

so definiert ρ *eine Metrik, die* H *metrisiert.*

Beweis. Die Hinrichtung von (a) folgt aus der Stetigkeit der Projektionen $\pi_n,\ n \in \mathbb{N}$. Für die Rückrichtung bemerke man zunächst, dass Mengen der Form

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \subseteq [0,1] \text{ offen}, \quad U_n = [0,1] \text{ für fast alle } n \tag{2.1}$$

eine Basis der Topologie von H bilden. Konvergiert nun also $(x^{(k)})_k \in H^{\mathbb{N}}$ komponentenweise gegen $x \in H$, so enthält jede offene Umgebung von x von der Form (2.1) auch fast alle Folgenglieder $x^{(k)},\ k \in \mathbb{N}$ und damit konvergiert auch $(x^{(k)})_k$ gegen x.

Offenbar wird durch ρ aus (b) eine Metrik auf H definiert. Es genügt also zu zeigen, dass ρ die Topologie von H induziert. Für $x \in H$ und $r > 0$ ist $B_r(x) = \prod_{n=1}^{\infty} B_{2^n r}(x_n) \subseteq H$ offen. Ist nun $U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$ wie in (2.1), so lässt sich leicht einsehen, dass es für jedes $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subseteq U$, also ist U offen bezüglich der von ρ erzeugten Topologie und insgesamt wird H von ρ metrisiert. □

Der aus der Topologie bekannte *Satz von Tychonoff* liefert unmittelbar, dass H als Produkt kompakter topologischer Räume ebenfalls kompakt ist. Außerdem lässt sich unter Ausnutzung von Aussage (a) aus Hilfssatz 2.4 leicht zeigen, dass (H, ρ) vollständig ist. Weil Mengen der Form (2.1), bei denen U_n ausschließlich rationale Intervalle sind, eine abzählbare Basis der Topologie von H bilden, ist H sogar separabel und damit insgesamt ein kompakter polnischer Raum.

H erfüllt nun die folgende Universalitätseigenschaft.

Satz 2.5 (Charakterisierung polnischer Räume)**.** *Ein topologischer Raum X ist genau dann polnisch, wenn es eine G_δ-Teilmenge $Y \subseteq H$ gibt, sodass X zu Y homöomorph ist.*

Wir werden den Beweis von Satz 2.5 in seine beiden Teilrichtungen aufspalten und jeweils in Hilfssätze auslagern, beginnend mit der Hinrichtung.

Hilfssatz 2.6. *Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum und sei $D := \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Außerdem setzen wir*

$$\varphi\colon X \to H,\ x \mapsto (\min(1, d(x, x_n)))_n\,. \tag{2.2}$$

Dann gilt das Folgende:

(a) φ ein Homöomorphismus zwischen X und $\varphi(X)$.
(b) Ist (X, d) vollständig, so ist $\varphi(X) \subseteq H$ eine G_δ-Teilmenge.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass φ injektiv ist. Dazu seien $y, z \in H$ mit $\varphi(y) = \varphi(z)$, also gilt

$$\min(1, d(y, x_n)) = \min(1, d(z, x_n)) \tag{2.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil es eine Folge $(y_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \to y$ gibt und diese wegen (2.3) auch gegen z konvergiert, folgt die Gleichheit von y und z.

Die Stetigkeit von φ folgt direkt, weil die Komponentenfunktionen $x \mapsto \min(1, d(x, x_n))$ jeweils stetig sind. Seien nun $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ und $y \in X$ mit $\varphi(y_k) \to \varphi(y)$, also

$$\min(1, d(y_k, x_n)) \ \to\ \min(1, d(y, x_n)), \quad k \to \infty \tag{2.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man nun $\varepsilon < 1$ beliebig, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(y, x_n) \le \varepsilon$. Wegen (2.4) ist dann auch $d(y_k, x_n) \to d(y, x_k),\ k \to \infty$. Es gilt also die Ungleichung

$$\limsup_{k\to\infty} d(y_k, y) \ \le\ \limsup_{k\to\infty} d(y_k, x_n) + d(y, x_n) \ \le\ 2\varepsilon$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Stetigkeit von φ^{-1}, womit Aussage (a) gezeigt ist.

Nun beweisen wir noch Aussage (b). Da φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, ist $\varphi(B_{1/k}(x_m)) \subseteq \varphi(X)$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$ relativ offen, also gibt es jeweils offene Mengen $V_{k,m} \subseteq H$ mit

$$\varphi(B_{1/k}(x_m)) \ =\ V_{k,m} \cap \varphi(X). \tag{2.5}$$

Wir möchten jetzt zeigen, dass

$$\varphi(X) \ =\ \overline{\varphi(X)} \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m} \right) \tag{2.6}$$

gilt. Weil $\overline{\varphi(X)}$ nach Hilfssatz 2.2 als abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge ist, folgt aus (2.6) direkt die Aussage (b).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist sicherlich $\varphi(X) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m}$, weshalb „$\subseteq$“ in (2.6) unmittelbar folgt. Wir nehmen nun an, dass z in der rechten Seite von (2.6) liegt. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $m_k \in \mathbb{N}$ mit $z \in V_{k,m_k}$. Ferner existiert wegen $z \in \overline{\varphi(X)}$ eine Folge $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$

mit $\varphi(y_k) \to z$, wobei wir zusätzlich $\varphi(y_k) \in \bigcap_{j=1}^k V_{j,m_j}$ fordern. Weil damit nach (2.5) auch für alle $k \in \mathbb{N}$

$$y_k \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{1/k}(x_m)$$

gilt, ist $(y_k)_k$ eine Cauchyfolge. Aufgrund der Vollständigkeit von (X, d) gibt es also ein $y \in X$ mit $y_k \to y$, was $z = \varphi(y) \in \varphi(X)$ und damit „$\supseteq$" in (2.6) impliziert. $\square$

Für die Rückrichtung zeigen wir die (nur vermeintlich allgemeinere) Aussage, dass G_δ-Teilmengen polnischer Räume wieder polnisch sind.

Hilfssatz 2.7. *Sei X ein polnischer Raum. Dann ist jede G_δ-Teilmenge von X (ausgestattet mit der Teilraumtopologie) ebenfalls polnisch.*

Beweis. Sei $P \subseteq X$ eine G_δ-Teilmenge und $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen mit $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, wobei wir außerdem $C_n := U_n^{\mathsf{c}}$ schreiben. Ferner sei d eine Metrik, die X vollständig metrisiert. Da P als Teilmenge eines separablen metrischen Raumes selbst separabel ist, genügt es, die vollständige Metrisierbarkeit von P zu beweisen.

Für $x, y \in P$ definieren wir

$$d^*(x, y) \;:=\; d(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x, C_n)} - \frac{1}{d(y, C_n)}\right|\right).$$

Offensichtlich ist d^* eine Metrik auf P, die dieselbe Topologie wie d erzeugt.

Wir möchten nun zeigen, dass (P, d^*) vollständig ist. Sei dazu $(x_k)_k \in P^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wegen $d \leq d^*$ ist $(x_k)_k$ dann auch bezüglich d eine Cauchyfolge und die Vollständigkeit von (X, d) liefert die Existenz eines Grenzwertes $x \in X$. Angenommen $x \notin P$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in C_m$. Damit ist aber für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{l \geq k} d^*(x_k, x_l) \;\geq\; \sup_{l\geq k} \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x_k, C_n)} - \frac{1}{d(x_l, C_n)}\right|\right) \;\geq\; \frac{1}{2^m} \;>\; 0,$$

was der Tatsache widerspricht, dass $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich d^* ist. Also muss $x \in P$ gelten. Aus der Stetigkeit von $x \mapsto d(x, C_n)$ folgt mit dem Satz von Lebesgue unmittelbar die Konvergenz $d^*(x_k, x) \to 0$ für $k \to \infty$. $\square$

Da wir in Hilfssatz 2.6 bereits gesehen haben, dass jeder polnische Raum homöomporph zu einer G_δ-Teilmenge vom Hilbertwürfel H ist und wir durch Lemma 2.7 nun auch wissen, dass jede G_δ-Teilmenge von H tatsächlich polnisch ist, haben wir nun also insgesamt Satz 2.5 bewiesen.

TODO: Überlegen, ob man das beweisen oder nur zitieren soll und ggf. anpassen.

Hilfssatz 2.8. $(C(H), \|\cdot\|_\infty)$ *ist separabel.*

Beweis. Wir definieren zunächst

$$\mathcal{D} \;:=\; \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ f\colon H \to \mathbb{R},\; x \mapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\; f_1, \ldots, f_n \in C([0,1]) \right\}.$$

Weil $\mathcal{D}$ eine punktetrennende reelle Unteralgebra von $C(H)$ ist, für die keine Auswertungsfunktion $\mathcal{D} \ni f \mapsto f(x),\ x \in H$ konstant 0 ist, lässt sich mit dem Satz von Stone-Weierstraß folgern, dass $\mathcal{D} \subseteq C(H)$ dicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Außerdem ist $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel, also gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq C([0,1])$. Schließlich setzen wir

$$\mathcal{D}^* \ := \ \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ f\colon H \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \ \middle|\ n \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{P} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}^*$ abzählbar und wegen $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathcal{D}^*} \subseteq C(H)$ gilt die Gleichheit $\overline{\mathcal{D}^*} = C(H)$. Demnach ist $(C(H), \|\cdot\|_\infty)$ also separabel. □

Bemerkung. *Analog kann man den obigen Beweis allgemeiner für stetige Funktionen auf einem abzählbaren Produkt kompakter Hausdorffräume, deren stetige Funktionen jeweils separabel bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ sind, führen. Das Vorgehen wird in [Sim15, Lemma 4.12.1 und Proposition 4.12.2] skizziert.*

3 Maße auf metrischen Räumen

Im folgenden Kapitel möchten wir einige Eigenschaften von endlichen Maßen auf topologischen bzw. metrischen Räumen festhalten und diese selbst mit einem Konvergenzbegriff sowie einer zugehörigen Topologie versehen.

Hierzu müssen wir zunächst noch ein paar wenige Begriffe definieren. Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{O}$. Dann definieren wir die *Borel-σ-Algebra*

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O}).$$

Maße auf $\mathcal{B}(X)$ nennen wir *Borel-Maße* und wir führen außerdem die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+(X) \ &:= \ \{\, \mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty) \mid \mu \text{ ist endliches Maß} \,\} \\ \mathcal{M}_{+,1}(X) \ &:= \ \{\, \mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,1] \mid \mu \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \,\} \end{aligned}$$

für die Menge aller *endlichen Borel-Maße* beziehungsweise *Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße* auf X ein.

3.1 (Schwache) Regularität

(Schwache) Regularität ist eine Approximationseigenschaft von Maßen, die es uns etwa erlaubt, gewisse Aussagen zunächst für abgeschlossene bzw. kompakte und für offene Mengen zu zeigen, um diese anschließend auf ganz $\mathcal{B}(X)$ auszuweiten.

Definition 3.1 (Schwache Regularität von Maßen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Dann nennen wir $B \in \mathcal{B}(X)$* schwach von innen bzw. von außen regulär*, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ abgeschlossen}}} \mu(C) \quad \textit{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U)$$

gelten. Wir nennen $B \in \mathcal{B}(X)$ schwach regulär*, wenn B schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle $B \in \mathcal{B}(X)$ schwach regulär, so nennen wir μ ein* schwach reguläres Maß.

Bemerkung. *Ersetzen wir in der obigen Definition „abgeschlossen“ durch „kompakt“, so erhalten wir analog den Begriff der* Regularität.

Offenbar ist eine abgeschlossene (bzw. offene) Menge schwach regulär von innen (bzw. außen).

Im Falle von endlichen Maßen auf metrischen Räumen kann schwache Regularität recht leicht gezeigt werden, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 3.2. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes endliche Borel-Maß μ auf X schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch einen Hilfssatz, welcher uns ermöglichen wird, die schwache Regularität nur auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}(X)$ zu zeigen (für den wir dann die abgeschlossenen Mengen wählen).

Hilfssatz 3.3. *In der Situation von Definition 3.1 ist*

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B}(X) \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Offensichtlich liegen $\emptyset$ und X in $\mathcal{S}$. Sei $B \in \mathcal{S}$ und damit schwach regulär von innen und von außen. Wegen $\mu(X) < \infty$ gilt dann

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) \;=\; \mu(X) - \mu(B) \;=\; \mu(X) - \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(C) \;=\; \inf_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(C)) \;=\; \inf_{\substack{U \supseteq B^{\mathsf{c}} \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) \;=\; \mu(X) - \mu(B) \;=\; \mu(X) - \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(C) \;=\; \sup_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(U)) \;=\; \sup_{\substack{C \subseteq B^{\mathsf{c}} \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

Also ist auch B^{c} schwach regulär.

Es bleibt nun zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ auch $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür beweisen wir zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wir wählen nun N so groß, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht). Für die abgeschlossene Menge $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mu(B) - \mu(C) = \mu(B \setminus C) \;&=\; \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus C\right)\right) \\
&\leq\; \mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n \setminus C_n) \\
&<\; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{3^n} \;=\; \varepsilon,
\end{aligned}$$

also ist B schwach regulär von innen.

Ferner existieren für alle n offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ mit $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wir setzen $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ und berechnen

$$\mu(U) - \mu(B) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus B) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus B_n) \;<\; \varepsilon.$$

Weil U offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von μ. □

Bemerkung. *Sofern X kompakt ist, bleibt der obige Hilfssatz 3.3 gültig, wenn man „schwach regulär“ durch „regulär“ ersetzt. Der hier vorgestellte Beweis ist eine Anpassung von [Sim15, Lemma 4.5.5], wo die Aussage für kompakte X bewiesen wird.*

Ausgestattet mit den Hilfssätzen 2.2 und 3.3 kann nun, wie oben bereits angedeutet wurde, Satz 3.2 bewiesen werden.

Beweis von Satz 3.2. Es ist nun zu zeigen, dass für jedes endliche Borel-Maß μ auf X die Menge

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B}(X) \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

bereits ganz $\mathcal{B}$ ist. Da $\mathcal{S}$ nach Hilfssatz 3.3 eine σ-Algebra ist und $\mathcal{B}(X)$ von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Sei $C \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist C sicherlich schwach regulär von innen. Nun verwenden wir die offenen Mengen $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.2. Wegen $A_n \downarrow C$ und $\mu(X) < \infty$ folgt mit der Maßstetigkeit von oben die Konvergenz $\mu(A_n) \downarrow \mu(C)$, sodass C auch schwach regulär von außen ist. □

3.2 Schwache Konvergenz

Wie zuvor angekündigt werden wir nun endliche Borel-Maße auf topologischen Räumen selbst mit einer Topologie bzw. einem Konvergenzbegriff versehen, dem der sogenannten *schwachen Konvergenz*, welche die aus der Stochastik bekannte *Verteilungskonvergenz* auf andere Räume als $\mathbb{R}$ verallgemeinert. Erst die Einschränkung auf die Klasse der polnischen Räume als Grundraum wird uns einige nichttriviale Erkenntnisse über die Topologie dieses Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße ermöglichen.

$C_b(X)$ bezeichne im Folgenden die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.

Definition 3.4 (Schwache Konvergenz von Maßen)**.** *Sei $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_+(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann sagen wir, dass $(\mu_n)_n$* schwach *gegen $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$* konvergiert*, falls für alle $f \in C_b(X)$*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int f \,\mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu.$$

Definition 3.5 (Topologie der schwachen Konvergenz)**.** *Für $f \in C_b(X)$ sei*

$$I_f : \mathcal{M}_+(X) \to \mathbb{R},\ \mu \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Bezeichnen wir nun mit $\mathcal{O}_w$ die kleinste Topologie auf $\mathcal{M}_+(X)$, bezüglich der alle I_f für $f \in C_b(X)$ stetig sind, so entspricht Konvergenz bezüglich dieser Topologie exakt der schwachen Konvergenz.

Bemerkung. *Möchte man ausschließlich Wahrscheinlichkeitsmaße betrachten, so definiert man die Topologie der schwachen Konvergenz auf $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ völlig analog. Offenbar entspricht diese dann gerade der Teilraumtopologie von $\mathcal{M}_{+,1}(X) \subseteq (\mathcal{M}_+(X), \mathcal{O}_w)$.*

Im Falle metrischer Räume liefert der folgende Satz eine umfangreiche Charakterisierung der schwachen Konvergenz.

Satz 3.6 (Portmanteau)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_+(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

(ii) Es ist $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ *und für alle abgeschlossenen Mengen* $C \subseteq X$ *gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le\ \mu(C).$$

(iii) Es ist $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ *und für alle offenen Mengen* $U \subseteq X$ *gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \ \ge\ \mu(U).$$

(iv) Für alle $B \in \mathcal{B}$ *mit* $\mu(\partial B) = 0$ *ist*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \ =\ \mu(A).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien f_m, $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen aus Hilfssatz 2.2. Diese sind stetig und beschränkt. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(C) \ =\ \int \mathbb{1}_C \, \mathrm{d}\mu_n \ \le\ \int f_m \, \mathrm{d}\mu_n \ \to\ \int f_m \, \mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty,$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le\ \int f_m \, \mathrm{d}\mu.$$

Wegen $f_m \downarrow \mathbb{1}_C$ und $|f_m| \le 1$ liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$\int f_m \, \mathrm{d}\mu \ \to\ \int \mathbb{1}_C \, \mathrm{d}\mu \ =\ \mu(C), \quad m \to \infty,$$

woraus

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le\ \mu(C)$$

folgt. Außerdem ist

$$\mu_n(X) \; = \; \int \mathbb{1}_X \,\mathrm{d}\mu_n \; \to \; \int \mathbb{1}_X \,\mathrm{d}\mu \; = \; \mu(X), \quad n \to \infty.$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es gelte (ii). Sei U offen, also $C := U^{\mathsf{c}}$ abgeschlossen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \; &= \; \liminf_{n\to\infty} (\mu_n(X) - \mu_n(C)) \; = \; \mu(X) - \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \\ &\geq \; \mu(X) - \mu(C) \; = \; \mu(U) \end{aligned}$$

und damit (iii). Die andere Richtung zeigt man analog.

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial A) = 0$. Wegen $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ und $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ gilt $\mu(A^\circ) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Ferner liefern die Annahmen

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \; \leq \; \mu(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \; \geq \; \mu(A^\circ).$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \; \leq \; \mu(A) \; \leq \; \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A),$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \; = \; \mu(A).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $f \in C_b(X)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ mit $a < f < b$. Die Menge

$$S := \{\, c \in (a,b) \mid \mu(\{f = c\}) > 0 \,\},$$

ist abzählbar, da $S_n := \left\{ c \in (a,b) \;\middle|\; \mu(\{f = c\}) > \frac{1}{n} \right\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ gilt. Damit können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $c_j^{(m)} \notin S$ mit

$$a = c_0^{(m)} < \cdots < c_{2m}^{(m)} = b, \qquad c_{j+1}^{(m)} - c_j^{(m)} \leq \frac{b-a}{m} \tag{3.1}$$

finden. Wir setzen

$$A_j^{(m)} := \left\{ c_j^{(m)} < f \leq c_{j+1}^{(m)} \right\}, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}\,.$$

Die Stetigkeit von f impliziert $\partial A_j^{(m)} \subseteq \left\{ f = c_j^{(m)} \right\} \cup \left\{ f = c_{j+1}^{(m)} \right\}$, woraus sich

$$\mu(\partial A_j^{(m)}) = 0, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}$$

ergibt. Für $m \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$u_m := \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}$$

und Aussage (iv) führt dann auf

$$\int u_m \,\mathrm{d}\mu_n \; = \; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu_n(A_j^{(m)}) \; \to \; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu(A_j^{(m)}) \; = \; \int u_m \,\mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Außerdem folgen aus (3.1) die Ungleichungen

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu_n - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n\right| \le \frac{b-a}{m}, \qquad \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right| \le \frac{b-a}{m} \tag{3.3}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Mit (3.3) gilt nun für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu_n\right| &\le \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n\right| + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_n - \int f \,\mathrm{d}\mu_n\right| \\ &\le 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_n - \int f \,\mathrm{d}\mu_n\right|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

(3.2) und (3.4) liefern also letztendlich für alle m

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \left|\int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu_n\right| &\le 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \limsup_{n\to\infty} \left|\int u_m \,\mathrm{d}\mu_n - \int f \,\mathrm{d}\mu_n\right| \\ &= 2 \cdot \frac{b-a}{m} \to 0, \quad m \to \infty, \end{aligned}$$

was (i) impliziert. □

In erster Linie stellt der nächste Satz etwas schwächere hinreichende Bedingungen für die Gleichheit zweier endlicher Maße auf metrischen Räumen bereit, was sich im weiteren Verlauf noch als nützlich erweisen wird.

Satz 3.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu = \nu$.
(ii) Für alle lipschitzstetigen Funktionen $f \in C_b(X)$ ist $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\nu$.
(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \in \mathcal{B}$ ist $\mu(C) = \nu(C)$.

Beweis. Die Implikation (i) ⇒ (ii) ist klar und (iii) ⇒ (i) folgt aus Satz 3.2.

(ii) ⇒ (iii): Gelte (ii) und sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt für die lipschitzstetigen Funktionen $f_n \in C_b(X)$ aus Hilfssatz 2.2

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f_n \,\mathrm{d}\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|f_n| \le 1$ und $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \mu(C) \quad \text{und} \quad \int f_n \,\mathrm{d}\nu \to \nu(C)$$

und damit gilt (iii). □

Bemerkung. *Insbesondere folgt aus Satz 3.7 unmittelbar, dass für einen metrischen Raum (X, d) der Raum aller endlichen Maße $\mathcal{M}_+(X)$, ausgestattet mit der Topologie der schwachen Konvergenz, Hausdorffsch ist. Denn für $\mu \ne \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ gibt es nach Satz 3.7 (ii) ein $f \in C_b(X)$ mit $\int f \,\mathrm{d}\mu \ne \int f \,\mathrm{d}\nu$. Nun lassen sich disjunkte Umgebungen von $\int f \,\mathrm{d}\mu$ und $\int f \,\mathrm{d}\nu \in \mathbb{R}$ finden, deren Urbilder bezüglich I_f disjunkte Umgebungen von μ und ν in $\mathcal{M}_+(X)$ sind.*

Bemerkung (Schwach-$*$-Konvergenz)**.** *Ist X ein topologischer Raum, so ist $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Wir betrachten nun die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathcal{M}_+(X) \to C_b(X)^*,\ \mu \mapsto \left[l_\mu\colon C_b(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu \right], \tag{3.5}$$

die wegen $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \mu(X)\,\|f\|_\infty$ und $\mu(X) < \infty$ wohldefiniert ist und einem endlichen Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ ein zugehöriges lineares Funktional aus $C_b(X)^*$ zuordnet. Sind $\mathcal{M}_+(X)$ bzw. $C_b(X)^*$ nun mit der Topologie der schwachen Konvergenz bzw. mit der Schwach-$*$-Topologie ausgestattet, so ist schwache Konvergenz in $\mathcal{M}_+(X)$ äquivalent zur Schwach-$*$-Konvergenz der Bilder unter Φ.

Handelt es sich bei X nun um einen metrischen Raum, so ist Φ sogar injektiv und damit ein Folgen-Homöomorphismus auf sein Bild: Satz 3.7 (ii) ermöglicht es uns, für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ aus $l_\mu = l_\nu$ die Gleichheit $\mu = \nu$ zu schließen.

Unter etwas spezielleren Voraussetzungen können nun mittels dieser Identifikation Aussagen aus der Funktionalanalysis auch für $\mathcal{M}_+(X)$ fruchtbar gemacht werden, indem von topologischen Eigenschaften von $C_b(X)^*$ mit der Schwach-$*$-Konvergenz auf die entsprechenden Eigenschaften von $\mathcal{M}_+(X)$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz geschlossen wird. Ein konkretes Beispiel hierfür werden wir noch im Beweis von Satz 4.3 sehen.

4 Eigenschaften von Maßen auf polnischen Räumen

4.1 Metrisierbarkeit der schwachen Konvergenz

Satz 4.1. *Sei X ein polnischer Raum. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\mathcal{D} \subseteq C_b(X)$, die dicht liegt in jedem $L^p(X, \mu)$ mit $p \in [1, \infty)$, $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass $C(H) = C_b(H) \subseteq L^p(H, \mu)$ für beliebiges $p \in [1, \infty)$, $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(H)$ dicht liegt.

Sei dazu $A \in \mathcal{B}$ eine Borel-messbare Teilmenge von H. Aufgrund der schwachen Regularität von μ (vgl. Satz 3.2) gibt es für $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Mengen C_n und offene Mengen U_n mit $C_n \subseteq A \subseteq U_n$ und $\mu(U_n \setminus C_n) < \frac{1}{n}$. Setzen wir nun für alle n

$$f_n\colon H \to [0, 1],\ x \mapsto \frac{\rho(x, C_n)}{\rho(x, C_n) + \rho(x, U_n^\mathrm{c})}, \quad f_n \in C_b(H),$$

so ist

$$\|f_n - \mathbb{1}_A\|_{L^p(H,\mu)}^p \ = \ \int |f_n - \mathbb{1}_A|^p \,\mathrm{d}\mu \ \leq \ \mu(U_n \setminus C_n) \ < \ \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Insobesondere folgt direkt, dass sich auch jede einfache Funktion beliebig gut bezüglich $\|\cdot\|_{L^p(H,\mu)}$ durch Funktionen aus $C_b(H)$ approximieren lassen kann. Weil die einfachen Funktionen aber dicht in $L^p(H, \mu)$ liegen, muss auch $C_b(H) \subseteq L^p(H, \mu)$ eine dichte Teilmenge sein.

Aus Hilfssatz 2.8 wissen wir bereits, dass es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq C_b(H)$ gibt, die $\|\cdot\|_\infty$-dicht in $C_b(H)$ liegt. Zudem gilt $\|f\|_{L^p(H,\mu)} \leq \|f\|_\infty$ für $f \in C_b(H)$, also impliziert $\|\cdot\|_\infty$-Konvergenz in $C_b(H)$ auch $\|\cdot\|_{L^p(H,\mu)}$-Konvergenz. Somit folgt insgesamt, dass auch $\mathcal{D} \subseteq L^p(H, \mu)$ dicht ist.

Nun möchten wir die Aussage auf einen beliebigen polnischen Raum X ausweiten, wofür wir $\varphi\colon X \to H$ aus (2.6) nutzen. Wir definieren hierzu das Bildmaß $\nu := \mu^\varphi \in \mathcal{M}_{+,1}(H)$ auf der Borelschen σ-Algebra von H und setzen

$$\Phi\colon L^p(H,\nu) \to L^p(X,\mu),\ f \mapsto f \circ \varphi.$$

Für $f \in L^p(H,\nu)$ gilt dann

$$\|f \circ \varphi\|_{L^p(X,\mu)} \;=\; \int |f \circ \varphi|^p \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu^\varphi \;=\; \int |f|^p \,\mathrm{d}\nu \;=\; \|f\|_{L^p(H,\nu)}\,.$$

Wegen $\nu(\varphi(X)) = 1$ ist Φ bijektiv und damit insgesamt eine Isometrie zwischen $L^p(H,\nu)$ und $L^p(X,\mu)$. Insbesondere ist also auch

$$\Phi(\mathcal{D}) = \{\, f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{D} \,\} \subseteq C_b(X)$$

unabhängig von p und μ eine abzählbare dichte Teilmenge von $L^p(X,\mu)$. □

Satz 4.2. *Sei X ein polnischer Raum. Dann gibt es eine Metrik D auf $\mathcal{M}_{+,1}(X)$, sodass Konvergenz bezüglich D gleichbedeutend mit schwacher Konvergenz (vgl. Definition 3.4) ist.*

Beweis. Wir möchten direkt unsere Erkenntnisse aus dem Beweis des vorigen Satzes 4.1 anwenden. Mit der Notation von dort sei zunächst

$$\{\, h_m \mid m \in \mathbb{N} \,\} := \Phi(\mathcal{D}) \subseteq C_b(X).$$

Wir behaupten, dass

$$D(\mu,\nu) \;:=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|\int h_m \,\mathrm{d}\mu - \int h_m \,\mathrm{d}\nu\right|}{2^m \cdot \|h_m\|_\infty}, \qquad \mu,\nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$$

die schwache Konvergenz metrisiert. Offenbar gilt dann für eine Folge $(\mu_k)_k \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ die Äquivalenz

$$D(\mu_k,\mu) \to 0 \quad\iff\quad \forall m \in \mathbb{N} : \int h_m \,\mathrm{d}\mu_k \to \int h_m \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty. \tag{4.1}$$

An (4.1) sehen wir direkt, dass aus der schwachen Konvergenz $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ die Konvergenz bezüglich D folgt. Wir müssen also nur noch beweisen, dass die rechte Seite von (4.1) schwache Konvergenz impliziert. Hierfür werden wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $C \subseteq X$ die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.2 (wofür wir eine geeignete Metrik auf X wählen) dieselbe Bedingung wie die h_m auf der rechten Seite von (4.1) erfüllen. Genau wie im Beweis der Implikation (1) ⇒ (2) aus dem Beweis des Portmanteau-Satzes (Satz 3.6) lässt sich dann die Bedingung (2) aus dem Portmanteau-Satz folgern und damit schließlich die schwache Konvergenz $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$.

Für den verbleibenden Teil des Beweises definieren wir auf X die Metrik

$$\rho^*(x,y) := \rho(\varphi(x),\varphi(y)),$$

wobei $\varphi\colon X \to H$ wieder die Abbildung aus (2.6) sei. ρ^* induziert die Topologie von X, vollständig ist (X, ρ^*) aber im Allgemeinen natürlich nicht. Nun zeigen wir, dass für

$$f_n\colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - n\rho^*(x, C)\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $C \subseteq X$ abgeschlossen (hierbei handelt es sich um die Funktionen aus Hilfssatz 2.2) die Konvergenz

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu_k \ \to\ \int f_n \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty \tag{4.2}$$

gilt. Zunächst bemerken wir, dass es Funktionen $g_n \in C_b(H)$ gibt mit $f_n = g_n \circ \varphi$. Mit der Notation aus Hilfssatz 2.8 und Satz 4.1 existiert nun eine Folge $(g_n^{(l)})_l \in \mathcal{D}$ mit $g_n^{(l)} \to g_n$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Setzen wir $f_n^{(l)} := \Phi(g_n^{(l)}) = g_n^{(l)} \circ \varphi \in \Phi(\mathcal{D})$, so gilt ebenfalls

$$\left\| f_n^{(l)} - f_n \right\|_\infty \ \to\ 0, \quad l \to \infty. \tag{4.3}$$

Per Annahme ist für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k \ \to\ \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty. \tag{4.4}$$

Also können wir für alle $k, l \in \mathbb{N}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k \right| \ &\le\ \left| \int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu \right| + \left| \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k \right| \\ &\quad + \left| \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k \right| \\ &\le\ 2 \cdot \left\| f_n^{(l)} - f_n \right\|_\infty + \left| \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k \right|. \end{aligned}$$

Dies impliziert aber wegen (4.3) und (4.4)

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \left| \int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k \right| \ &\le\ 2 \cdot \left\| f_n^{(l)} - f_n \right\|_\infty + \limsup_{k\to\infty} \left| \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k \right| \\ &=\ 2 \cdot \left\| f_n^{(l)} - f_n \right\|_\infty \ \to\ 0, \quad l \to \infty, \end{aligned}$$

und damit auch (4.2), womit wir den Beweis abschließen. □

Satz 4.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist X genau dann kompakt, wenn $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz kompakt ist.*

Beweis. Sei zunächst (X, d) kompakt. Wir möchten nun so ähnlich wie bei (3.5) verfahren. Hierfür setzen wir zunächst

$$A := \left\{ l \in C(X)^* \ \middle|\ \|l\|_{C(X)^*} \le 1,\ l(\mathbb{1}_X) = 1,\ \forall f \in C(X) \text{ mit } f \ge 0 : l(f) \ge 0 \right\} \subseteq C(X)^*$$

und

$$\Phi\colon \mathcal{M}_{+,1}(X) \to A,\ \mu \mapsto \left[l_\mu\colon C(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu \right].$$

Der Darstellungssatz von Riesz-Markov liefert die Bijektivität von Φ, also ist Φ ein Folgen-Homöomorphismus zwischen $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ mit der schwachen Konvergenz und $A \subseteq C_b(X)^*$ mit der Schwach-$*$-Konvergenz. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist A nun als abgeschlossene Teilmenge von $\left\{ l \in C_b(X)^* \;\middle|\; \|l\|_{C_b(X)^*} \leq 1 \right\}$ kompakt bezüglich der Schwach-$*$-Topologie und damit auch folgenkompakt. Also ist auch $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ folgenkompakt. Da X insbesondere vollständig und damit polnisch ist, liefert Satz 4.2 die Metrisierbarkeit von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$, womit letztlich die Kompaktheit von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz folgt. □

TODO: Beweisen bzw. überlegen, ob man das noch machen sollte...

Satz 4.4. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X genau dann polnisch, wenn $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz polnisch ist.*

4.2 Straffheit und der Satz von Prokhorov

Definition 4.5. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann nennen wir μ* straff, *falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\varepsilon \subseteq X$ gibt mit*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Satz 4.6. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann ist μ straff.*

Beweis. Sei d eine Metrik, bezüglich der (X, d) vollständig ist und sei $\mathcal{D} := \{ x_m \mid m \in \mathbb{N} \} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt also $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_{1/k}(x_m) = X$ und Maßstetigkeit von unten impliziert $\lim_{M \to \infty} \bigcup_{m=1}^{M} B_{1/k}(x_m) = 1$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann finden wir natürliche Zahlen $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ mit

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m) \right) \;\geq\; 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$S_\varepsilon \;:=\; \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m) \right) \quad \text{und} \quad K_\varepsilon := \overline{S_\varepsilon}.$$

Offenbar ist S_ε totalbeschränkt und damit ist $K_\varepsilon = \overline{S_\varepsilon}$ kompakt (dies wird etwa in [Sim15, Satz 2.3.8] bewiesen, hier geht die Vollständigkeit von (X, d) ein). Außerdem berechnen wir

$$\mu(K_\varepsilon) \;\geq\; \mu(S_\varepsilon) \;\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m) \right) \right) \;\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \;=\; 1 - \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist μ also straff. □

Ausgestattet mit des Konzepts der Straffheit können wir nun folgenden Satz beweisen:

Korollar 4.7. *Ist X ein polnischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ regulär.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ und $B \in \mathcal{B}(X)$. Wegen 3.2 wissen wir bereits, dass

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ abgeschlossen}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U)$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq B \subseteq X$ mit $\mu(B \backslash C) < \varepsilon$. Außerdem gibt es nach Satz 4.6 eine kompakte Menge $K^* \subseteq X$ mit $\mu(K^*) \geq 1 - \varepsilon$. Setzen wir nun $K := K^* \cap C$, so ist K ebenfalls kompakt und $K \subseteq B$ mit

$$\mu(B \setminus K) \ = \ \mu((B \setminus C) \cap (B \setminus K^*)) \ \leq \ \mu(B \setminus C) + \mu(K^{*\mathsf{c}}) \ \leq \ 2\varepsilon.$$

Daher folgt

$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K)$$

und insgesamt μ ist regulär. $\square$

Satz 4.8 (Prokhorov)**.** *Sei X ein polnischer Raum und $A \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$, wobei $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz versehen sei. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist straff.
(ii) $\overline{A} \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$ ist kompakt.

Beweis. Sei zunächst $A \subseteq \mathcal{M}_{+,1}(X)$ straff. Wir möchten nun beweisen, dass $\overline{A}$ kompakt ist, was wegen der Metrisierbarkeit von $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ äquivalent dazu ist, dass alle Folgen $(\mu_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge besitzen.

Aufgrund der Straffheit von A gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Kompaktum $K^{(m)} \subseteq X$, das für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(K^{(m)}) \geq 1 - \frac{1}{m+1} \tag{4.5}$$

erfüllt. Ohne Einschränkung dürfen wir außerdem annehmen, dass

$$K^{(m)} \subseteq K^{(m+1)} \tag{4.6}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei nun also $(\mu_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$. In Analogie zu Satz 4.3 lässt sich nun auch einsehen, dass

$$\mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)}) \ = \ \left\{ \mu \colon \mathcal{B}(K^{(m)}) \to [0,1] \;\middle|\; \mu \text{ ist endliches Maß und } \mu(K^{(m)}) \leq 1 \right\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ kompakt bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz ist. Damit existiert ein Maß $\nu^{(1)} \in \mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(1)})$ und eine Teilfolge $(\mu^{(1)}_{n_j})_k$ von $(\mu_n)_n$ mit

$$\mu^{(1)}_{n_j}\Big|_{K^{(1)}} \ \xrightarrow{w} \ \nu^{(1)}.$$

Auf dieselbe Art und Weise findet man nun für alle $m \geq 2$ sukzessive Maße $\nu^{(m)} \in \mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)})$ und Teilfolgen $(\mu_{n_j}^{(m)})_j$ von $(\mu_{n_j}^{(m-1)})_j$ mit

$$\mu_{n_j}^{(m)}\Big|_{K^{(m)}} \xrightarrow{w} \nu^{(m)}, \quad j \to \infty.$$

Nun diagonalisieren wir und erhalten mit $\mu_{n_j} := \mu_{n_j}^{(j)}$ eine Teilfolge $(\mu_{n_j})_j$ von $(\mu_n)_n$, die

$$\mu_{n_j}\big|_{K^{(m)}} \xrightarrow{w} \nu^{(m)}, \quad j \to \infty \tag{4.7}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Außerdem können Maße $\nu^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$ via $\nu^{(m)}(B) := \nu^{(m)}(B \cap K^{(m)}),\ B \in \mathcal{B}(X)$ einfach auf X fortsetzen. Mit dieser Konvention können wir nun beweisen, dass die Maße $\nu^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$ in dem Sinne monoton wachsen, dass

$$\nu^{(m)}(B) \leq \nu^{(m+1)}(B) \tag{4.8}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

Wegen schwacher Regularität (vgl. Satz 3.2) genügt es, die Ungleichung (4.8) für abgeschlossene Mengen zu zeigen. Sei also $m \in \mathbb{N}$ fixiert, $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien $f_k\colon X \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ die gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen aus Hilfssatz 2.2. Unter Ausnutzung von (4.6) folgt nun

$$\int_{K^{(m)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \ \leq \ \int_{K^{(m+1)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j}$$

für alle $k, j \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\int_{K^{(m)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \to \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m)} \quad \text{und} \quad \int_{K^{(m+1)}} f_k \,\mathrm{d}\mu_{n_j} \to \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m+1)}$$

ist damit auch

$$\int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m)} \ \leq \ \int f_k \,\mathrm{d}\nu^{(m+1)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, was wiederum aufgrund der Konvergenz $f_k \downarrow \mathbb{1}_C$ Ungleichung (4.8) impliziert.

Schlussendlich möchten wir nun nachweisen, dass durch

$$\nu\colon \mathcal{B}(X) \to [0,1],\ B \mapsto \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}(B)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X definiert wird, gegen das $(\mu_{n_j})_j$ schwach konvergiert.

Zunächst prüfen wir, dass ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. $\nu(\emptyset) = 0$ ist klar. Weil $\nu^{(m)}$ in $\mathcal{M}_{+,\leq 1}(K^{(m)})$ liegt und wir (4.5) angenommen haben, gilt

$$\nu^{(m)}(X) = \nu^{(m)}(K^{(m)}) \in [1 - \frac{1}{m+1}, 1]$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $\nu(X) = 1$. Für die σ-Additivität seien $B_k \in \mathcal{B}(X),\ k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\nu\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) \ &= \ \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) \ = \ \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{(m)}(B_k) \\ &\overset{(4.8)}{=} \ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \nu^{(m)}(B_k) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k),\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Gleichung der Satz von Beppo Levi verwendet wurde. Insgesamt haben wir also $\nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ nachgewiesen.

Jetzt bleibt lediglich zu zeigen dass $(\mu_{n_j})_j$ tatsächlich schwach gegen ν konvergiert. Hierfür möchten wir die Charakterisierung (ii) des Portmanteau-Theorems (Satz 3.6) verwenden. Sei dazu $C \subseteq X$ abgeschlossen. Zunächst liefert ebendieser Satz für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\limsup_{j\to\infty} \mu_{n_j}(C \cap K^{(m)}) \leq \nu^{(m)}(C)$ und wegen (4.5) ist zudem $\mu_{n_j}(C \cap K^{(m)\mathsf{c}}) \leq \frac{1}{m+1}$ für alle $j, m \in \mathbb{N}$. Insgesamt folgt daraus

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty} \mu_{n_j}(C) &= \lim_{m\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \Big(\mu_{n_j}(C \cap K^{(m)}) + \mu_{n_j}(C \cap K^{(m)\mathsf{c}})\Big) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \left(\nu^{(m)}(C) + \frac{1}{m+1}\right) = \nu(C),\end{aligned}$$

was den Beweis der Hinrichtung von Satz 4.8 abschließt.

Für die Rückrichtung sei nun $\overline{A}$ kompakt. Außerdem sei d eine Metrik, die X vollständig metrisiert und $\mathcal{D} := \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge.

Nun behaupten wir, dass für alle $\delta > 0$ ein solches $M_\delta \in \mathbb{N}$ existiert, dass

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{M_\delta} B_\delta(x_m)\Big) > 1 - \delta \tag{4.9}$$

für alle $\mu \in A$ gilt. Denn falls es kein derartiges M_δ gibt, so lässt sich ein $\delta > 0$ finden, für das für alle $M \in \mathbb{N}$ ein $\mu_M \in A$ existiert mit

$$\mu_M\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta.$$

Insbesondere bedeutet das natürlich auch, dass wir für alle $M \in \mathbb{N}$ und $N \geq M$

$$\mu_N\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta$$

abschätzen dürfen. Aufgrund der Kompaktheit von $\overline{A}$ gibt es eine Teilfolge $(\mu_{N_j})_j$ von $(\mu_N)_N$, die einen schwachen Grenzwert $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ besitzt. Fixiere nun ein $M \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)$ offen und daher liefert das Portmanteau-Theorem (Satz 3.6)

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_{N_j}\Big(\bigcup_{m=1}^{M} B_\delta(x_m)\Big) \leq 1 - \delta. \tag{4.10}$$

Wegen $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_\delta(x_m) = X$ und Maßstetigkeit von unten liefert uns (4.10) unmittelbar

$$\mu(X) \leq 1 - \delta < 1,$$

was einen Widerspruch dazu darstellt, dass es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X handelt. Also muss unsere Behauptung in (4.9) tatsächlich gelten.

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann setzen wir

$$S_\varepsilon := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^{M_{\varepsilon/2^k}} B_{\varepsilon/2^k}(x_m).$$

Offensichtlich ist S_ε total beschränkt und damit auch $K_\varepsilon := \overline{S_\varepsilon}$ kompakt (vgl. [Sim15, Satz 2.3.8]). Außerdem gilt für alle $\mu \in A$

$$\begin{aligned}\mu(K_\varepsilon) \;&\geq\; \mu(S_\varepsilon) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=1}^{M_{\varepsilon/2^k}} B_{\varepsilon/2^k}(x_m)\right) \;=\; 1 - \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=1}^{M_{\varepsilon/2^k}} B_{\varepsilon/2^k}(x_m)\right)^{\mathsf{c}}\,\right) \\ &\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \;=\; 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

und damit ist A straff. $\square$

Literatur

[Sim15] Barry Simon. *Real Analysis*. Bd. Part 1. A Comprehensive Course in Analysis. Providence, Rhode Island: AMS American Mathematical Society, 2015. ISBN: 978-1-4704-1099-5.

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum