Bachelorarbeit

Titel der Bachelorarbeit

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hier steht eine Einführung

Definition 1.1 (Polnischer Raum)**.** *Ein polnischer Raum ist ein separabler topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$, dessen Topologie von einer Metrik, bezüglich der X vollständig ist, erzeugt wird.*

Definition 1.2 (Borelsche σ-Algebra)**.** *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann definieren wir die Borelsche σ-Algebra*

$$\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$$

über X. Ferner sei

$$\mathcal{M}_{+,1}(X) := \{\, \mu \colon \mathcal{B} \to [0,1] \mid \mu \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \,\}\,.$$

Definition 1.3 (Schwache Regularität von Maßen)**.** *In der Situation von Definition 1.3, wobei zusätzlich μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}$ sei, nennen wir $A \in \mathcal{B}$ schwach von innen bzw. von außen regulär, falls*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{C \subseteq A \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(A) = \inf_{\substack{U \supseteq A \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

Sind alle $A \in \mathcal{B}$ schwach von innen und von außen regulär, so nennen wir μ ein schwach reguläres Maß.

Satz 1.4. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1.5. *In der Situation von Definition 1.3 ist*

$$\mathcal{S} := \{\, A \in \mathcal{B} \mid A \text{ von innen und von außen regulär bzgl. } \mu \,\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. **Klar.** □

Hilfssatz 1.6. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$A_n := \left\{ y \in X \mid d(y, C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x, C)\}\,,$$

wobei wir $d(y, C) := \inf_{x \in C} d(y, x)$ setzen. Dann gilt:

(a) A_n *ist offen für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(b) $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *insbesondere ist* C *also eine* G_δ*-Menge.*
(c) Für alle n *ist* $f_n|_{A_n^\mathsf{c}} = 0$ *und* f_n *ist gleichmäßig stetig.*
(d) $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$.

Beweis. zu (a): Wir wählen $y \in A_n$, also $y \in X,\ d(y,C) < \frac{1}{n}$. Mit $r_n := \frac{1}{n} - d(y,C) > 0$ gilt dann für alle $x \in X,\ d(x,y) < r_n$:

$$d(x,C) \leq d(x,y) + d(y,C) < \frac{1}{n},$$

und damit gilt $B_{r_n}(y) \subseteq A_n$ und A_n ist offen.

zu (b): Sicherlich ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt ist für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$d(y,C) = \inf_{x\in C} d(y,x) = 0,$$

was impliziert, dass es eine Folge $(x_n)_n \in C^\mathbb{N}$ gibt mit $x_n \to y$, und wegen der Abgeschlossenheit von C ist damit $y \in C$, also auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq C$.

zu (c): Für $x \in A_n^\mathsf{c}$ ist $d(x,C) \geq \frac{1}{n}$ und damit $1-nd(x,C) \leq 0$, also $f_n|_{A_n^\mathsf{c}} = 0$. Außerdem gilt für beliebige $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &= |\max\{0, 1-nd(x,C)\} - \max\{0, 1-nd(y,C)\}| \\
&= \begin{cases} n|d(y,C) - d(x,C)| & d(x,C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y,C) < \frac{1}{n} \\ 1 - nd(x,C) & d(x,C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y,C) \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nd(y,C) & d(x,C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y,C) < \frac{1}{n} \\ 0 & d(x,C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y,C) \geq \frac{1}{n} \end{cases} \\
&\leq n|d(y,C) - d(x,C)| \leq nd(x,y)
\end{aligned}$$

und damit ist f_n lipschitzstetig, also auch gleichmäßig stetig.

zu (d): Offensichtlich ist $(f_n)_n$ fallend. Für $x \in C^\mathsf{c}$ ist $d(x,C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1-nd(x,C)\} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

für $x \in C$ ist dagegen $f_n(x) = 1$ konstant, womit die Behauptung folgt.

□

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum