Bachelorarbeit

# Titel der Bachelorarbeit

Daniel Herbst

**Datum der Abgabe**

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

**Hier steht eine Einführung**

**Definition 1.1** (Polnischer Raum)**.** *Ein polnischer Raum ist ein separabler topologischer Raum* $(X, \mathcal{O})$*, dessen Topologie von einer Metrik, bezüglich der* $X$ *vollständig ist, erzeugt wird.*

**Definition 1.2** (Borelsche $\sigma$-Algebra)**.** *Sei* $(X, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum. Dann definieren wir die Borelsche* $\sigma$*-Algebra*

$$\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$$

*über* $X$*. Ferner sei*

$$\mathcal{M}_{+,1}(X) := \{\, \mu \colon \mathcal{B} \to [0,1] \mid \mu \textit{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \,\}\,.$$

**Definition 1.3** (Schwache Regularität von Maßen)**.** *In der Situation von Definition 1.3, wobei zusätzlich* $\mu$ *ein endliches Maß auf* $\mathcal{B}$ *sei, nennen wir* $B \in \mathcal{B}$ *schwach von innen bzw. von außen regulär, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) \quad \textit{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

*Wir nennen* $B \in \mathcal{B}$ *schwach regulär, wenn* $B$ *schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle* $B \in \mathcal{B}$ *schwach regulär, so nennen wir* $\mu$ *ein schwach reguläres Maß.*

**Satz 1.4.** *Ist* $(X, d)$ *ein metrischer Raum, so ist jedes* $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ *schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze.

**Hilfssatz 1.5.** *Sei* $(X, d)$ *ein metrischer Raum und* $C \subseteq X$ *eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für* $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \left\{ y \in X \mid d(y, C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \textit{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - nd(x, C)\}\,,$$

*wobei wir* $d(y, C) := \inf_{x \in C} d(y, x)$ *setzen. Dann gilt:*

*(a)* $A_n$ *ist offen für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*
*(b)* $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$*, insbesondere ist* $C$ *also eine* $G_\delta$*-Menge.*
*(c) Für alle* $n$ *ist* $f_n|_{A_n^c} = 0$ *und* $f_n$ *ist gleichmäßig stetig.*
*(d)* $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$*.*

*Beweis.* zu (a): Wir wählen $y \in A_n$, also $y \in X,\ d(y, C) < \frac{1}{n}$. Mit $r_n := \frac{1}{n} - d(y, C) > 0$ gilt dann für alle $x \in X,\ d(x, y) < r_n$:

$$d(x, C) \le d(x, y) + d(y, C) < \frac{1}{n},$$

und damit gilt $B_{r_n}(y) \subseteq A_n$ und $A_n$ ist offen.

zu (b): Sicherlich ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt ist für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$d(y, C) = \inf_{x\in C} d(y, x) = 0,$$

was impliziert, dass es eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ gibt mit $x_n \to y$, und wegen der Abgeschlossenheit von $C$ ist damit $y \in C$, also auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq C$.

zu (c): Für $x \in A_n^{\mathsf{c}}$ ist $d(x, C) \geq \frac{1}{n}$ und damit $1-nd(x, C) \leq 0$, also $f_n|_{A_n^{\mathsf{c}}} = 0$. Außerdem gilt für beliebige $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| \;&=\; |\max\{0, 1 - nd(x, C)\} - \max\{0, 1 - nd(y, C)\}| \\
&= \begin{cases} n|d(y, C) - d(x, C)| & d(x, C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) < \frac{1}{n} \\ 1 - nd(x, C) & d(x, C) < \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nd(y, C) & d(x, C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) < \frac{1}{n} \\ 0 & d(x, C) \geq \frac{1}{n} \text{ und } d(y, C) \geq \frac{1}{n} \end{cases} \\
&\leq\; n|d(y, C) - d(x, C)| \;\leq\; nd(x, y)
\end{aligned}$$

und damit ist $f_n$ lipschitzstetig, also auch gleichmäßig stetig.

zu (d): Offensichtlich ist $(f_n)_n$ fallend. Für $x \in C^{\mathsf{c}}$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

für $x \in C$ ist dagegen $f_n(x) = 1$ konstant, womit die Behauptung folgt.

$\square$

**Hilfssatz 1.6.** *In der Situation von Definition 1.3 ist*

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \textit{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

*eine $\sigma$-Algebra.*

*Beweis.* $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ ist offensichtlich. Jedes $B \in \mathcal{S}$ ist schwach regulär von innen und von außen und daher gilt wegen $\mu(X) < \infty$

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) \;=\; \mu(X) - \mu(B) \;=\; \mu(X) - \sup_{\substack{C\subseteq B\\ C^{\mathsf{c}}\in\mathcal{O}}} \mu(C) \;=\; \inf_{\substack{U\supseteq B^{\mathsf{c}}\\ U\in\mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) \;=\; \mu(X) - \mu(B) \;=\; \mu(X) - \inf_{\substack{U\supseteq B\\ U\in\mathcal{O}}} \mu(C) \;=\; \sup_{\substack{C\subseteq B^{\mathsf{c}}\\ C^{\mathsf{c}}\in\mathcal{O}}} \mu(U),$$

womit die schwache Regularität von $B^{\mathsf{c}}$ folgt.

Es bleibt also zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ auch $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür zeigen zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und wähle für

$n \in \mathbb{N}$ jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wenn wir nun $N$ so groß wählen, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht), so gilt mit $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$, dass

$$\begin{aligned}\mu(B) - \mu(C) = \mu(B \setminus C) \;&=\; \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus C\right)\right)\\ &\leq\; \mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n \setminus C_n)\\ &<\; \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{3^n} \;=\; \varepsilon\end{aligned}$$

und weil $C$ abgeschlossen ist, folgt, dass $B$ schwach regulär von innen ist.

Wählen wir nun für alle $n$ offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ so, dass $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, und setzen $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, so gilt

$$\mu(U) - \mu(B) \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B) \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B_n) \;<\; \varepsilon$$

und weil $U$ offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von $\mu$. $\square$

## Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

**Ort, den Datum**