Bachelorarbeit

Maße auf polnischen Räumen und die Wassersteinmetrik

Daniel Herbst

Datum der Abgabe

Betreuung: Prof. Dr. Roland Schnaubelt

Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Abschnitt Grundlagen folgt im Wesentlichen [Sim15, Kapitel 4.14].

Einleitung, Zielsetzung

2 Polnische Räume

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit den grundlegenden Eigenschaften von polnischen Räumen. An erster Stelle möchten wir daher eine Definition dieser Klasse von topologischen Räumen liefern.

Definition 2.1 (Polnischer Raum)**.** *Ein* polnischer Raum *ist ein separabler und vollständig metrisierbarer topologischer Raum.*

Es sei hier anzumerken, dass wir für einen polnischen Raum X nur die Existenz einer Metrik fordern, die die Topologie von X erzeugt und bezüglich der X vollständig ist, uns aber die Flexibilität bewahren, diese Metrik nicht zu fixieren und bei Bedarf zwischen verschiedenen solchen Metriken zu wechseln. Außerdem kann es durchaus Metriken geben, die X zwar metrisieren, jedoch nicht vollständig. Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Standardtopologie offensichtlich ein polnischer Raum, denn $\mathbb{R}$ ist separabel und die euklidische Metrik metrisiert $\mathbb{R}$ vollständig. Allerdings ist $(0,1)$ als Teilraum von $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik zwar separabel, aber nicht vollständig. Da $(0,1)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, ist $(0,1)$ aber dennoch ein polnischer Raum.

Der folgende Hilfssatz 2.2 behandelt die recht elementare Tatsache, dass sich in metrischen Räumen abgeschlossene Mengen von außen beliebig gut durch offene Mengen approximieren lassen. Diese Erkenntnis werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch häufiger benötigen.

Hilfssatz 2.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $C \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Ferner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$*

$$A_n := \left\{ y \in X \,\middle|\, d(y,C) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{und} \quad f_n \colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\left\{0, 1 - nd(x,C)\right\},$$

wobei wir $d(y,C) := \inf_{x \in C} d(y,x)$ setzen. Dann gilt:

(a) A_n ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, insbesondere ist C also eine G_δ-Menge.
(c) Für alle n ist $f_n|_{A_n^\complement} = 0$ und f_n ist lipschitzstetig.
(d) $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$.

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y,C)$.

Weiter ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von C liegt y damit in C, sodass (b) gezeigt ist.

Aussage (c) ist klar (f_n ist als Komposition lipschitzstetiger Funktionen selbst lipschitzstetig).

Schließlich fällt f_n und für $x \in C$ gilt $f_n(x) = 1$. Für $x \in C^\mathsf{c}$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

womit die Behauptung folgt. □

Mit dem *Hilbertwürfel* möchten wir uns zunächst einen speziellen polnischen Raum ansehen, der sich später in gewisser Weise als universell für alle polnischen Räume entpuppen wird.

Definition 2.3 (Hilbertwürfel). *Der* Hilbertwürfel *ist der topologische Raum $H = [0,1]^\mathbb{N}$ ausgestattet mit der Produkttopologie, also der kleinsten Topologie, bezüglich der alle Projektionen $\pi_n \colon H \to [0,1],\ x \mapsto x_n$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.*

Hilfssatz 2.4. *Für den Hilbertwürfel H gelten folgende Aussagen:*

(a) Eine Folge $(x^{(k)})_k \in H^\mathbb{N}$ konvergiert genau dann gegen ein $x \in H$, wenn alle Komponenten konvergieren, also, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Setzen wir für $x, y \in H$

$$\rho(x, y) := \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

so definiert ρ eine Metrik, die H metrisiert.

Beweis. Die Hinrichtung von (a) folgt aus der Stetigkeit der Projektionen $\pi_n,\ n \in \mathbb{N}$. Für die Rückrichtung bemerke man zunächst, dass Mengen der Form

$$U = \prod_{n=1}^\infty U_n, \quad U_n \subseteq [0,1] \text{ offen}, \quad U_n = [0,1] \text{ für fast alle } n \tag{2.5}$$

eine Basis der Topologie von H bilden. Konvergiert nun also $(x^{(k)})_k \in H^\mathbb{N}$ komponentenweise gegen $x \in H$, so enthält jede offene Umgebung von x von der Form (2.5) auch fast alle Folgenglieder $x^{(k)},\ k \in \mathbb{N}$ und damit konvergiert auch $(x^{(k)})_k$ gegen x.

Offenbar wird durch ρ aus (b) eine Metrik auf H definiert. Es genügt also zu zeigen, dass ρ die Topologie von H induziert. Für $x \in H$ und $r > 0$ ist $B_r(x) = \prod_{n=1}^\infty B_{2^n r}(x_n) \subseteq H$ offen. Ist nun $U = \prod_{n=1}^\infty U_n$ wie in (2.5), so lässt sich leicht einsehen, dass es für jedes $x \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \subseteq U$, also ist U offen bezüglich der von ρ erzeugten Topologie und insgesamt wird H von ρ metrisiert. □

Der aus der Topologie bekannte *Satz von Tychonoff* liefert unmittelbar, dass H als Produkt kompakter topologischer Räume ebenfalls kompakt ist. Außerdem lässt sich unter Ausnutzung von Aussage (a) aus Hilfssatz 2.4 leicht zeigen, dass (H, ρ) vollständig ist. Weil Mengen der Form (2.5), bei denen U_n ausschließlich rationale Intervalle sind, eine abzählbare Basis der Topologie von H bilden, ist H sogar separabel und damit insgesamt ein kompakter polnischer Raum.

H erfüllt nun die folgende Universalitätseigenschaft.

Satz 2.5 (Charakterisierung polnischer Räume)**.** *Ein topologischer Raum X ist genau dann polnisch, wenn es eine G_δ-Teilmenge $Y \subseteq H$ gibt, sodass X zu Y homöomorph ist.*

Hilfssatz 2.6. *Sei (X, d) ein separabler metrischer Raum und sei $D := \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Außerdem setzen wir*

$$\varphi\colon X \to H,\ x \mapsto \left(\min\left(1, d(x, x_n)\right)\right)_n . \tag{2.6}$$

Dann gilt das Folgende:

(a) φ ein Homöomorphismus zwischen X und $\varphi(X)$.
(b) Ist (X, d) vollständig, so ist $\varphi(X) \subseteq H$ eine G_δ-Teilmenge.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass φ injektiv ist. Dazu seien $y, z \in H$ mit $\varphi(y) = \varphi(z)$, also gilt

$$\min(1, d(y, x_n)) = \min(1, d(z, x_n)) \tag{2.7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil es eine Folge $(y_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ mit $y_n \to y$ gibt und diese wegen (2.7) auch gegen z konvergiert, folgt die Gleichheit von y und z.

Die Stetigkeit von φ folgt direkt, weil die Komponentenfunktionen $x \mapsto \min(1, d(x, x_n))$ jeweils stetig sind. Seien nun $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ und $y \in X$ mit $\varphi(y_k) \to \varphi(y)$, also

$$\min(1, d(y_k, x_n)) \ \to \ \min(1, d(y, x_n)), \quad k \to \infty \tag{2.8}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man nun $\varepsilon < 1$ beliebig, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(y, x_n) \leq \varepsilon$. Wegen (2.8) ist dann auch $d(y_k, x_n) \to d(y, x_k),\ k \to \infty$. Es gilt also die Ungleichung

$$\limsup_{k\to\infty} d(y_k, y) \ \leq \ \limsup_{k\to\infty} d(y_k, x_n) + d(y, x_n) \ \leq \ 2\varepsilon$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Stetigkeit von φ^{-1}, womit Aussage (a) gezeigt ist.

Nun beweisen wir noch Aussage (b). Da φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, ist $\varphi(B_{1/k}(x_m)) \subseteq \varphi(X)$ für alle $k, m \in \mathbb{N}$ relativ offen, also gibt es jeweils offene Mengen $V_{k,m} \subseteq H$ mit

$$\varphi(B_{1/k}(x_m)) \ = \ V_{k,m} \cap \varphi(X). \tag{2.9}$$

Wir möchten jetzt zeigen, dass

$$\varphi(X) \ = \ \overline{\varphi(X)} \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m} \right) \tag{2.10}$$

gilt. Weil $\overline{\varphi(X)}$ nach Hilfssatz 2.2 als abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge ist, folgt aus (2.10) direkt die Aussage (b).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist sicherlich $\varphi(X) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_{k,m}$, weshalb „$\subseteq$“ in (2.10) unmittelbar folgt. Wir nehmen nun an, dass z in der rechten Seite von (2.10) liegt. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $m_k \in \mathbb{N}$ mit $z \in V_{k,m_k}$. Ferner existiert wegen $z \in \overline{\varphi(X)}$ eine Folge $(y_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ mit $\varphi(y_k) \to z$, wobei wir zusätzlich $\varphi(y_k) \in \bigcap_{j=1}^k V_{j,m_j}$ fordern. Weil damit nach (2.9) auch für alle $k \in \mathbb{N}$

$$y_k \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{1/k}(x_m)$$

gilt, ist $(y_k)_k$ eine Cauchyfolge. Aufgrund der Vollständigkeit von (X,d) gibt es also ein $y \in X$ mit $y_k \to y$, was $z = \varphi(y) \in \varphi(X)$ und damit „$\supseteq$" in (2.10) impliziert.

$\square$

Hilfssatz 2.7. *Sei X ein polnischer Raum. Dann ist jede G_δ-Teilmenge von X (ausgestattet mit der Teilraumtopologie) ebenfalls polnisch.*

Beweis. Sei $P \subseteq X$ eine G_δ-Teilmenge und $U_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ offene Mengen mit $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, wobei wir außerdem $C_n := U_n^{\mathsf{c}}$ schreiben. Ferner sei d eine Metrik, die X vollständig metrisiert. Da P als Teilmenge eines separablen metrischen Raumes selbst separabel ist, genügt es, die vollständige Metrisierbarkeit von P zu beweisen.

Für $x, y \in P$ definieren wir

$$d^*(x,y) \;:=\; d(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x,C_n)} - \frac{1}{d(y,C_n)}\right|\right).$$

Offensichtlich ist d^* eine Metrik auf P, die dieselbe Topologie wie d erzeugt.

Wir möchten nun zeigen, dass (P, d^*) vollständig ist. Sei dazu $(x_k)_k \in P^{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wegen $d \le d^*$ ist $(x_k)_k$ dann auch bezüglich d eine Cauchyfolge und die Vollständigkeit von (X,d) liefert die Existenz eines Grenzwertes $x \in X$. Angenommen $x \notin P$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in C_m$. Damit ist aber für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{l\ge k} d^*(x_k, x_l) \;\ge\; \sup_{l \ge k} \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^n}, \left|\frac{1}{d(x_k,C_n)} - \frac{1}{d(x_l,C_n)}\right|\right) \;\ge\; \frac{1}{2^m} \;>\; 0,$$

was der Tatsache widerspricht, dass $(x_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich d^* ist. Also muss $x \in P$ gelten. Aus der Stetigkeit von $x \mapsto d(x, C_n)$ folgt mit dem Satz von Lebesgue unmittelbar die Konvergenz $d^*(x_k, x) \to 0$ für $k \to \infty$. $\square$

Da wir in Hilfssatz 2.6 bereits gesehen haben, dass jeder polnische Raum homöomporph zu einer G_δ-Teilmenge vom Hilbertwürfel H ist und wir durch Lemma 2.7 nun auch wissen, dass jede G_δ-Teilmenge von H tatsächlich polnisch ist, haben wir also insgesamt den folgenden Satz bewiesen:

Bemerkung. *Eine Teilmenge von H ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen (und damit nach Hilfssatz 2.2 eine G_δ-Teilmenge) ist. Deshalb entsprechen die kompakten polnischen Räume gerade den abgeschlossenen Teilmengen von H.*

Hilfssatz 2.8. *$(C(H), \|\cdot\|_\infty)$ ist separabel.*

Beweis. Wir definieren zunächst

$$\mathcal{D} \;:=\; \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ f\colon H \to \mathbb{R},\; x \mapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\; f_1, \dots, f_n \in C([0,1]) \right\}.$$

Weil $\mathcal{D}$ eine punktetrennende reelle Unteralgebra von $C(H)$ ist, für die keine Auswertungsfunktion $\mathcal{D} \ni f \mapsto f(x)$, $x \in H$ konstant 0 ist, lässt sich mit dem Satz von Stone-Weierstraß folgern, dass $\mathcal{D} \subseteq C(H)$ dicht bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist. Außerdem ist $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel, also gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq C([0,1])$. Schließlich setzen wir

$$\mathcal{D}^* \;:=\; \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ f\colon H \to \mathbb{R},\ x \mapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ f_1, \dots, f_n \in \mathcal{P} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}^*$ abzählbar und wegen $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathcal{D}^*} \subseteq C(H)$ gilt die Gleichheit $\overline{\mathcal{D}^*} = C(H)$. Demnach ist $(C(H), \|\cdot\|_\infty)$ also separabel. $\square$

Bemerkung. *Analog kann man den obigen Beweis allgemeiner für stetige Funktionen auf einem abzählbaren Produkt kompakter Hausdorffräume, deren stetige Funktionen jeweils separabel bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ sind, führen. Das Vorgehen wird in [Sim15, Lemma 4.12.1 und Proposition 4.12.2] skizziert.*

3 Grundlagen

In diesem Abschnitt möchten wir zunächst einige maßtheoretische Grundlagen vorstellen, die wir später benötigen werden.

Definition 3.1 (Borelsche σ-Algebra)**.** *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann definieren wir die* Borelsche σ-Algebra

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$$

über X.

Ferner sei

$$\mathcal{M}_{+,1}(X) := \{\, \mu\colon \mathcal{B} \to [0,1] \mid \mu \textbf{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß} \,\}\,.$$

Definition 3.2 (Schwache Regularität von Maßen)**.** *In der Situation von Definition 3.1, wobei zusätzlich μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}$ sei, nennen wir $B \in \mathcal{B}$* schwach von innen bzw. von außen regulär*, falls*

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^c \in \mathcal{O}}} \mu(C) \quad \textit{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

gelten. Wir nennen $B \in \mathcal{B}$ schwach regulär*, wenn B schwach von innen und von außen regulär ist. Sind alle $B \in \mathcal{B}$ schwach regulär, so nennen wir μ ein* schwach reguläres Maß.

Bemerkung. *Ersetzen wir in der obigen Definition „abgeschlossen“ durch „kompakt“, so erhalten wir analog den Begriff der* Regularität*. (Schwache) Regularität ist eine Approximationseigenschaft von Maßen, die es uns etwa erlaubt, gewisse Aussagen zunächst für abgeschlossene bzw. kompakte und für offene Mengen zu zeigen, um diese anschließend auf ganz $\mathcal{B}$ auszuweiten.*

Offenbar ist eine abgeschlossene (bzw. offene) Menge schwach regulär von innen (bzw. außen).

Im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf metrischen Räumen kann schwache Regularität recht einfach gezeigt werden, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 3.3. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ schwach regulär.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir noch zwei Hilfssätze. Hilfssatz 3.4 wird uns zunächst ermöglichen, die schwache Regularität nur auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}$ zu zeigen (für den wir dann die abgeschlossenen Mengen wählen).

Hilfssatz 3.4. *In der Situation von Definition 3.2 ist*

$$\mathcal{S} := \{ B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Offensichtlich liegen $\emptyset$ und X in $\mathcal{S}$. Sei $B \in \mathcal{S}$ und damit schwach regulär von innen und von außen. Wegen $\mu(X) < \infty$ gilt dann

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(C) = \inf_{\substack{C \subseteq B \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(C)) = \inf_{\substack{U \supseteq B^{\mathsf{c}} \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(U)$$

sowie analog

$$\mu(B^{\mathsf{c}}) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} \mu(C) = \sup_{\substack{U \supseteq B \\ U \in \mathcal{O}}} (\mu(X) - \mu(U)) = \sup_{\substack{C \subseteq B^{\mathsf{c}} \\ C^{\mathsf{c}} \in \mathcal{O}}} \mu(U).$$

Also ist auch B^{c} schwach regulär.

Es bleibt nun zu zeigen, dass für $(B_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ auch $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ schwach regulär ist. Hierfür beweisen wir zunächst die schwache Regularität von innen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es jeweils abgeschlossene Mengen $C_n \subseteq B_n$ mit $\mu(B_n) - \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{3^n}$. Wir wählen nun N so groß, dass $\mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist (was wegen $\mu(B) < \infty$ immer geht). Für die abgeschlossene Menge $C := \bigcup_{n=1}^N C_k$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(C) = \mu(B \setminus C) &= \mu\left(\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N B_n \setminus C\right)\right) \\ &\leq \mu\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^N B_n\right) + \sum_{n=1}^N \mu(B_n \setminus C_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{3^n} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist B schwach regulär von innen.

Ferner existieren für alle n offene Mengen $U_n \supseteq B_n$ mit $\mu(U_n) - \mu(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wir setzen $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ und berechnen

$$\mu(U) - \mu(B) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(U_n \setminus B_n) < \varepsilon.$$

Weil U offen ist, folgt insgesamt die schwache Regularität von μ. $\square$

Bemerkung. *Sofern X kompakt ist, bleibt der obige Hilfssatz 3.4 gültig, wenn man „schwach regulär“ durch „regulär“ ersetzt. Der hier vorgestellte Beweis ist eine Anpassung von [Sim15, Lemma 4.5.5], wo die Aussage für kompakte X bewiesen wird.*

Beweis. Aussage (a) folgt aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y, C)$.

Weiter ist $C \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine Folge $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \to y$. Wegen der Abgeschlossenheit von C liegt y damit in C, sodass (b) gezeigt ist.

Aussage (c) ist klar (f_n ist als Komposition lipschitzstetiger Funktionen selbst lipschitzstetig).

Schließlich fällt f_n und für $x \in C$ gilt $f_n(x) = 1$. Für $x \in C^{\mathsf{c}}$ ist $d(x, C) > 0$ und damit

$$f_n(x) = \max\{0, 1 - nd(x, C)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

womit die Behauptung folgt. $\square$

Ausgestattet mit den Hilfssätzen 3.4 und 2.2 kann nun, wie oben bereits angedeutet wurde, Satz 3.3 bewiesen werden.

Beweis von Satz 3.3. Es ist nun zu zeigen, dass für jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ die Menge

$$\mathcal{S} := \{\, B \in \mathcal{B} \mid B \text{ schwach regulär bzgl. } \mu \,\}$$

bereits ganz $\mathcal{B}$ ist. Da $\mathcal{S}$ nach Hilfssatz 3.4 eine σ-Algebra ist und $\mathcal{B}$ von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese in $\mathcal{S}$ enthalten sind.

Sei $C \in \mathcal{B}$. Dann ist C sicherlich schwach regulär von innen. Nun verwenden wir die offenen Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.2. Wegen $A_n \downarrow C$ und $\mu(X) < \infty$ folgt mit der Maßstetigkeit von oben die Konvergenz $\mu(A_n) \downarrow \mu(C)$, sodass C auch schwach regulär von außen ist. $\square$

Satz 3.5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu = \nu$.

(ii) Für alle gleichmäßig stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist $\int f\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\nu$.

(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \in \mathcal{B}$ ist $\mu(C) = \nu(C)$.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar und (iii) $\Rightarrow$ (i) folgt aus Satz 3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Gelte (ii) und sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt für die gleichmäßig stetigen Funktionen f_n aus Hilfssatz 2.2

$$\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int f_n\,\mathrm{d}\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|f_n| \leq 1$ und $f_n \downarrow \mathbb{1}_C$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int f_n\,\mathrm{d}\mu \;\to\; \mu(C) \quad \text{und} \quad \int f_n\,\mathrm{d}\nu \;\to\; \nu(C)$$

und damit gilt (iii). $\square$

$C_b(X)$ bezeichne im Folgenden die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.

Definition 3.6 (Schwache Konvergenz von Maßen)**.** *Sei* $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ *eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann sagen wir, dass* $(\mu_n)_n$ schwach *gegen* $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ konvergiert, *falls für alle* $f \in C_b(X)$

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int f \, \mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu.$$

Eine Charakterisierung der schwachen Konvergenz von Maßen liefert der folgende Satz:

Satz 3.7 (Portmanteau)**.** *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum,* $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

(ii) Für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq X$ *gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le \ \mu(C).$$

(iii) Für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ *gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \ \ge \ \mu(U).$$

(iv) Für alle $B \in \mathcal{B}$ *mit* $\mu(\partial B) = 0$ *ist*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \ = \ \mu(A).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und seien f_m, $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen aus Hilfssatz 2.2. Diese sind stetig und beschränkt. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_n(C) \ = \ \int \mathbb{1}_C \, \mathrm{d}\mu_n \ \le \ \int f_m \, \mathrm{d}\mu_n \ \to \ \int f_m \, \mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty,$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le \ \int f_m \, \mathrm{d}\mu.$$

Wegen $f_m \downarrow \mathbb{1}_C$ und $|f_m| \le 1$ liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$\int f_m \, \mathrm{d}\mu \ \to \ \int \mathbb{1}_C \, \mathrm{d}\mu \ = \ \mu(C), \quad m \to \infty,$$

woraus

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le \ \mu(C)$$

folgt.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Es gelte (ii). Sei U offen, also $C := U^{\mathsf{c}}$ abgeschlossen. Dann erhalten wir

$$\mu(X) - \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \ = \ \limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \ \le \ \mu(C) \ = \ \mu(X) - \mu(U)$$

und damit (iii). Die andere Richtung zeigt man analog.

(ii), (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(\partial A) = 0$. Wegen $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ und $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ gilt $\mu(A^\circ) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Ferner liefern die Annahmen

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \;\le\; \mu(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \;\ge\; \mu(A^\circ).$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \;\le\; \mu(A) \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A),$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \;=\; \mu(A).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $f \in C_b(X)$ und $a < b \in \mathbb{R}$ mit $a < f < b$. Die Menge

$$S := \{\, c \in (a,b) \mid \mu(\{f = c\}) > 0 \,\},$$

ist abzählbar, da $S_n := \left\{ c \in (a,b) \;\middle|\; \mu(\{f=c\}) > \frac{1}{n} \right\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich ist und $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ gilt. Damit können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $c_j^{(m)} \notin S$ mit

$$a = c_0^{(m)} < \cdots < c_{2m}^{(m)} = b, \qquad c_{j+1}^{(m)} - c_j^{(m)} \le \frac{b-a}{m} \tag{2.1}$$

finden. Wir setzen

$$A_j^{(m)} := \left\{ c_j^{(m)} < f \le c_{j+1}^{(m)} \right\}, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}\,.$$

Die Stetigkeit von f impliziert $\partial A_j^{(m)} \subseteq \left\{ f = c_j^{(m)} \right\} \cup \left\{ f = c_{j+1}^{(m)} \right\}$, woraus sich

$$\mu(\partial A_j^{(m)}) = 0, \qquad j \in \{0, \ldots, 2m-1\}$$

ergibt. Für $m \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$u_m := \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mathbb{1}_{A_j^{(m)}}$$

und Aussage (iv) führt dann auf

$$\int u_m \,\mathrm{d}\mu_n \;=\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu_n(A_j^{(m)}) \;\to\; \sum_{j=0}^{2m-1} c_j^{(m)} \mu(A_j^{(m)}) \;=\; \int u_m \,\mathrm{d}\mu, \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Außerdem folgen aus (2.1) die Ungleichungen

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\mu_n - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n \right| \;\le\; \frac{b-a}{m}, \qquad \left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu \right| \;\le\; \frac{b-a}{m} \tag{2.3}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Mit (2.3) gilt nun für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu_n \right| \;&\le\; \left| \int f \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu \right| + \left| \int u_m \,\mathrm{d}\mu - \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n \right| + \left| \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n - \int f \,\mathrm{d}\mu_n \right| \\ &\le\; 2 \cdot \frac{b-a}{m} + \left| \int u_m \,\mathrm{d}\mu_n - \int f \,\mathrm{d}\mu_n \right|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.2) und (2.4) liefern also letztendlich für alle m

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left|\int f\,\mathrm{d}\mu - \int f\,\mathrm{d}\mu_n\right| &\leq 2\cdot\frac{b-a}{m} + \limsup_{n\to\infty}\left|\int u_m\,\mathrm{d}\mu_n - \int f\,\mathrm{d}\mu_n\right| \\ &= 2\cdot\frac{b-a}{m} \to 0, \quad m\to\infty,\end{aligned}$$

was (i) impliziert. □

Satz 3.8. *Sei X ein polnischer Raum. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\mathcal{D}\subseteq C_b(X)$, die dicht liegt in jedem $L^p(X,\mu)$ mit $p\in[1,\infty)$, $\mu\in\mathcal{M}_{+,1}(X)$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass $C(H) = C_b(H) \subseteq L^p(H,\mu)$ für beliebiges $p\in[1,\infty)$, $\mu\in\mathcal{M}_{+,1}(H)$ dicht liegt.

Sei dazu $A\in\mathcal{B}$ eine Borel-messbare Teilmenge von H. Aufgrund der schwachen Regularität von μ (vgl. Satz 3.3) gibt es für $n\in\mathbb{N}$ abgeschlossene Mengen C_n und offene Mengen U_n mit $C_n\subseteq A\subseteq U_n$ und $\mu(U_n\setminus C_n) < \frac{1}{n}$. Setzen wir nun für alle n

$$f_n\colon H\to[0,1],\ x\mapsto \frac{\rho(x,C_n)}{\rho(x,C_n)+\rho(x,U_n^\complement)}, \quad f_n\in C_b(H),$$

so ist

$$\|f_n - \mathbb{1}_A\|^p_{L^p(H,\mu)} = \int |f_n-\mathbb{1}_A|^p\,\mathrm{d}\mu \leq \mu(U_n\setminus C_n) < \frac{1}{n}\to 0, \quad n\to\infty.$$

Insobesondere folgt direkt, dass sich auch jede einfache Funktion beliebig gut bezüglich $\|\cdot\|_{L^p(H,\mu)}$ durch Funktionen aus $C_b(H)$ approximieren lassen kann. Weil die einfachen Funktionen aber dicht in $L^p(H,\mu)$ liegen, muss auch $C_b(H)\subseteq L^p(H,\mu)$ eine dichte Teilmenge sein.

Aus Hilfssatz 2.8 wissen wir bereits, dass es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{D}\subseteq C_b(H)$ gibt, die $\|\cdot\|_\infty$-dicht in $C_b(H)$ liegt. Zudem gilt $\|f\|_{L^p(H,\mu)} \leq \|f\|_\infty$ für $f\in C_b(H)$, also impliziert $\|\cdot\|_\infty$-Konvergenz in $C_b(H)$ auch $\|\cdot\|_{L^p(H,\mu)}$-Konvergenz. Somit folgt insgesamt, dass auch $\mathcal{D}\subseteq L^p(H,\mu)$ dicht ist.

Nun möchten wir die Aussage auf einen beliebigen polnischen Raum X ausweiten, wofür wir $\varphi\colon X\to H$ aus (2.6) nutzen. Wir definieren hierzu das Bildmaß $\nu := \mu^\varphi \in \mathcal{M}_{+,1}(H)$ auf der Borelschen σ-Algebra von H und setzen

$$\Phi\colon L^p(H,\nu)\to L^p(X,\mu),\ f\mapsto f\circ\varphi.$$

Für $f\in L^p(H,\nu)$ gilt dann

$$\|f\circ\varphi\|_{L^p(X,\mu)} = \int |f\circ\varphi|^p\,\mathrm{d}\mu = \int |f|^p\,\mathrm{d}\mu^\varphi = \int |f|^p\,\mathrm{d}\nu = \|f\|_{L^p(H,\nu)}.$$

Wegen $\nu(\varphi(X)) = 1$ ist Φ bijektiv und damit insgesamt eine Isometrie zwischen $L^p(H,\nu)$ und $L^p(X,\mu)$. Insbesondere ist also auch

$$\Phi(\mathcal{D}) = \{\, f\circ\varphi \mid f\in\mathcal{D}\,\} \subseteq C_b(X)$$

unabhängig von p und μ eine abzählbare dichte Teilmenge von $L^p(X,\mu)$. □

Satz 3.9. *Sei X ein polnischer Raum. Dann gibt es eine Metrik D auf $\mathcal{M}_{+,1}(X)$, sodass Konvergenz bezüglich D gleichbedeutend mit schwacher Konvergenz (vgl. Definition 3.6) ist.*

Beweis. Wir möchten direkt unsere Erkenntnisse aus dem Beweis des vorigen Satzes 3.8 anwenden. Mit der Notation von dort sei zunächst

$$\{ h_m \mid m \in \mathbb{N} \} := \Phi(\mathcal{D}) \subseteq C_b(X).$$

Wir behaupten, dass

$$D(\mu,\nu) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|\int h_m \,\mathrm{d}\mu - \int h_m \,\mathrm{d}\nu\right|}{2^m \cdot \|h_m\|_\infty}, \qquad \mu,\nu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$$

die schwache Konvergenz metrisiert. Offenbar gilt dann für eine Folge $(\mu_k)_k \in \mathcal{M}_{+,1}(X)^{\mathbb{N}}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ die Äquivalenz

$$D(\mu_k,\mu) \to 0 \quad \iff \quad \forall m \in \mathbb{N} : \int h_m \,\mathrm{d}\mu_k \to \int h_m \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty. \tag{2.11}$$

An (2.11) sehen wir direkt, dass aus der schwachen Konvergenz $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ die Konvergenz bezüglich D folgt. Wir müssen also nur noch beweisen, dass die rechte Seite von (2.11) schwache Konvergenz impliziert. Hierfür werden wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $C \subseteq X$ die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$ aus Hilfssatz 2.2 (wofür wir eine geeignete Metrik auf X wählen) dieselbe Bedingung wie die h_m auf der rechten Seite von (2.11) erfüllen. Genau wie im Beweis der Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) aus dem Beweis des Portmanteau-Satzes (Satz 3.7) lässt sich dann die Bedingung (2) aus dem Portmanteau-Satz folgern und damit schließlich die schwache Konvergenz $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$.

Für den verbleibenden Teil des Beweises definieren wir auf X die Metrik

$$\rho^*(x,y) := \rho(\varphi(x),\varphi(y)),$$

wobei $\varphi\colon X \to H$ wieder die Abbildung aus (2.6) sei. ρ^* induziert die Topologie von X, vollständig ist (X,ρ^*) aber im Allgemeinen natürlich nicht. Nun zeigen wir, dass für

$$f_n\colon X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{0, 1 - n\rho^*(x,C)\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $C \subseteq X$ abgeschlossen (hierbei handelt es sich um die Funktionen aus Hilfssatz 2.2) die Konvergenz

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu_k \to \int f_n \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty \tag{2.12}$$

gilt. Zunächst bemerken wir, dass es Funktionen $g_n \in C_b(H)$ gibt mit $f_n = g_n \circ \varphi$. Mit der Notation aus Hilfssatz 2.8 und Satz 3.8 existiert nun eine Folge $(g_n^{(l)})_l \in \mathcal{D}$ mit $g_n^{(l)} \to g_n$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Setzen wir $f_n^{(l)} := \Phi(g_n^{(l)}) = g_n^{(l)} \circ \varphi \in \Phi(\mathcal{D})$, so gilt ebenfalls

$$\left\| f_n^{(l)} - f_n \right\|_\infty \to 0, \quad l \to \infty. \tag{2.13}$$

Per Annahme ist für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k \;\to\; \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu, \quad k \to \infty. \tag{2.14}$$

Also können wir für alle $k, l \in \mathbb{N}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k\right| \;&\leq\; \left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k\right| \\ &\qquad + \left|\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k\right| \\ &\leq\; 2 \cdot \left\|f_n^{(l)} - f_n\right\|_\infty + \left|\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k\right|.\end{aligned}$$

Dies impliziert aber wegen (2.13) und (2.14)

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f_n \,\mathrm{d}\mu_k\right| \;&\leq\; 2 \cdot \left\|f_n^{(l)} - f_n\right\|_\infty + \limsup_{k\to\infty}\left|\int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu - \int f_n^{(l)} \,\mathrm{d}\mu_k\right| \\ &=\; 2 \cdot \left\|f_n^{(l)} - f_n\right\|_\infty \;\to\; 0, \quad l \to \infty,\end{aligned}$$

und damit auch (2.12), womit wir den Beweis abschließen. □

Definition 3.10. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann nennen wir μ* straff, *falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\varepsilon \subseteq X$ gibt mit*

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Satz 3.11. *Sei X ein polnischer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$. Dann ist μ straff.*

Beweis. Sei d eine Metrik, bezüglich der (X, d) vollständig ist und sei $\mathcal{D} := \{\, x_m \mid m \in \mathbb{N} \,\} \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt also $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_{1/k}(x_m) = X$ und Maßstetigkeit von unten impliziert $\lim_{M\to\infty} \bigcup_{m=1}^{M} B_{1/k}(x_m) = 1$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann finden wir natürliche Zahlen $M_1 \leq M_2 \leq \dots$ mit

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right) \;\geq\; 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$S_\varepsilon \;:=\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right) \quad \text{und} \quad K_\varepsilon := \overline{S_\varepsilon}.$$

Offenbar ist S_ε totalbeschränkt und damit ist $K_\varepsilon = \overline{S_\varepsilon}$ kompakt (dies folgt etwa aus [Sim15, Satz 2.3.8], hier geht die Vollständigkeit von (X, d) ein). Außerdem berechnen wir

$$\mu(K_\varepsilon) \;\geq\; \mu(S_\varepsilon) \;\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \mu\left(\bigcup_{m=1}^{M_k} B_{1/k}(x_m)\right)\right) \;\geq\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \;=\; 1 - \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist μ also straff. □

Ausgestattet mit des Konzepts der Straffheit können wir nun folgenden Satz beweisen:

Korollar 3.12. *Ist X ein polnischer Raum, so ist jedes $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ regulär.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(X)$ und $B \subseteq X$ Borel-messbar. Wegen 3.3 wissen wir bereits, dass

$$\mu(B) = \sup_{\substack{C \subseteq B \\ C \text{ abgeschlossen}}} \mu(C) \quad \text{bzw.} \quad \mu(B) = \inf_{\substack{U \supseteq B \\ U \text{ offen}}} \mu(U)$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $C \subseteq B \subseteq X$ mit $\mu(B \backslash C) < \varepsilon$. Außerdem gibt es nach Satz 3.11 eine kompakte Menge $K^* \subseteq X$ mit $\mu(K^*) \geq 1 - \varepsilon$. Setzen wir nun $K := K^* \cap C$, so ist K ebenfalls kompakt und $K \subseteq B$ mit

$$\mu(B \setminus K) \;=\; \mu((B \setminus C) \cap (B \setminus K^*)) \;\leq\; \mu(B \setminus C) + \mu(K^{*\mathsf{c}}) \;\leq\; 2\varepsilon.$$

Daher folgt

$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \subseteq B \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K)$$

und insgesamt μ ist regulär. $\square$

Hilfssatz 3.13. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist $(\mathcal{M}_{+,1}(X), D)$ mit D aus Satz 3.9 genau dann kompakt, wenn (X,d) kompakt ist.*

Beweis. Sei zunächst (X,d) kompakt. Dann ist $C(X) = C_b(X)$ und $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, dessen Dualraum wir $(C(X)^*, \|\cdot\|_{C(X)^*})$ nennen. Wir setzen nun

$$A := \left\{ l \in C(X)^* \;\middle|\; \|l\|_{C(X)^*} \leq 1,\; l(\mathbb{1}_X) = 1,\; \forall f \in C(X) \text{ mit } f \geq 0 : l(f) \geq 0 \right\} \subseteq C(X)^*$$

und

$$\Phi \colon \mathcal{M}_{+,1}(X) \to A,\; \mu \mapsto \left[l_\mu \colon C(X) \to \mathbb{R},\; f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu \right].$$

Der Rieszsche Darstellungssatz liefert die Bijektivität von Φ. $\square$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \right)$$

Literatur

[Sim15] Barry Simon. *Real Analysis*. Bd. Part 1. A Comprehensive Course in Analysis. Providence, Rhode Island: AMS American Mathematical Society, 2015. ISBN: 978-1-4704-1099-5.

Erklärung

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde, sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Ort, den Datum