Wassersteinmetriken und Optimaler Transport
Einer unserer zentralen vorigen Erkenntnisse war, dass für einen polnischen Raum auch bzw. polnisch ist (siehe S

für einen Homöomorphismus $h(0,1)$ und eine dichte Teilmenge $f_n n \in \subseteq$, die enthält. Dabei muss eine Metrik d auf ge
In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich Wahrscheinlichkeitsmaße und werden uns von rein topologischen
Zunächst werden wir in Teilabschnitt und einige grundlegende Denkweisen, Begriffe und Ergebnisse aus der Theor
Kopplungen
Im optimalen Transport werden Wahrscheinlichkeitsmaße
figures/figures3.tex
[Kopplung] Seien , topologische Räume und $A \subseteq$, $B \subseteq$. Wir definieren dann

Für $\mu \in$ und $\nu \in$ definieren wir außerdem $\Pi(\mu, \nu)$ $\Pi(\mu, \nu)$ und nennen die Elemente von $\Pi(\mu, \nu)$ *Kopplungen* von μ un
Seien , polnische Räume und $A \subseteq$ sowie $B \subseteq$. Dann gelten die folgenden Implikationen:
Sind A und B straff, so ist auch $\Pi(A, B) \subseteq \times$ straff.
Sind A und B abgeschlossen, so ist auch $\Pi(A, B) \subseteq \times$ abgeschlossen.
Sind A und B kompakt, so ist auch $\Pi(A, B) \subseteq \times$ kompakt.
Zunächst möchten wir Aussage (a) zeigen. Fixiere dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und wähle kompakte Teilmengen $K_{\varepsilon/2}$
$\geq\ 1 - \mu(K^{\mathsf{c}}_{\varepsilon/2}) - \nu(L^{\mathsf{c}}_{\varepsilon/2})\ \geq\ 1 - \varepsilon$, also ist auch $\Pi(A, B) \subseteq \times$ straff.
Da mit und auch $\times$ polnisch ist (siehe Folgerung **??**), können wir für Aussage (b) mit der Charakterisierung von

Damit konvergiert $(\pi_k(\cdot \times))_k \in A$ wiederum nach dem Portmanteau-Theorem schwach gegen $\pi(\cdot \times)$ und die Abgeschlosse
Durch eine Anwendung des Satzes von Prokhorov (Satz **??**) können wir aus (a) und (b) unmittelbar auch Aussage
Seien , metrisierbare topologische Räume und seien $(\mu_k)_k \in$, $\mu \in$, $(\nu_k)_k \in$ und $\nu \in$ mit

Sei außerdem $\pi_k \in \Pi(\mu_k, \nu_k)$ für alle $k \in$ und $\pi \in \times$ so, dass

Dann ist $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.
Wie im Beweis von Hilfssatz gilt hier auch

Wegen $\pi_k(\cdot \times) = \mu_k$ und $\pi_k(\times \cdot) = \nu_k$ für alle $k \in$ folgt damit aber insbesondere auch $\pi(\cdot \times) = \mu$ und $\pi(\times \cdot) = \nu$, also ist
Optimaler Transport
[Kosten eines Transportplans] Seien , topologische Räume, $\mu \in$, $\nu \in$ und $c \times [0, \infty]$ eine $\mathcal{B}(\times)$-messbare Kostenfunk

bezeichnen.
[Existenz eines optimalen Transportplans] Seien , polnische Räume, $\mu \in$, $\nu \in$ und $c \times [0, \infty]$ eine stetige Kostenfun

erfüllt. Wir nennen $\hat{\pi}$ eine *optimale Kopplung* von μ und ν oder auch einen *optimalen Transportplan* zwischen μ und ν.
In der Situation von Satz gilt für jede schwach konvergente Folge $(\pi_k)_k \in \times$ mit Grenzwert $\pi \in \times$ die Ungleichung

Setzen wir $c_l \min(c, l) \in$ für alle $l \in$, so gilt $c_l \uparrow c$ punktweise. Sei nun $(\pi_k)_k \in \times$ mit $\pi_k w \pi \in \times$ eine schwach konve

für alle $l \in$. Der Satz von Beppo Levi liefert also

und es folgt die Behauptung.
[Beweis von Satz] Zunächst sind $\mu \subseteq$ und $\nu \subseteq$ kompakt, also ist $\Pi(\mu, \nu) \subseteq \times$ wegen Hilfssatz (c) ebenfalls kompa

Dann gibt es eine Teilfolge $(\pi_{k_l})_l$ und ein $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ mit $\pi_{k_l} w \hat{\pi}$. Nach Hilfssatz gilt

was bedeutet, dass $\hat{\pi}$ ein optimaler Transportplan zwischen μ und ν ist.
Seien , polnische Räume, sei $c \times [0, \infty)$ eine stetige Kostenfunktion und seien $A \subseteq$ und $B \subseteq$ kompakte Teilmengen.

kompakt.
Siehe [**?**, Folgerung 5.21].
Wassersteinmetriken
Sei $(, d)$ ein polnischer metrischer Raum, sei $p \in [1, \infty)$ und seien $\mu, \nu \in$. Dann nennen wir

die *p-te Wassersteindistanz* zwischen μ und ν.
In der Situation von Definition erfüllt W_p die Eigenschaften einer Metrik, abgesehen davon, dass $W_p(\mu, \nu) = \infty$ mö