Беседы с *Батюшкой*

Ящер с планеты Цугундер

21 января 2023 г.

Гомеоморфизм

Пусть $M, N \subset \mathbb{R}^n$. $f : M \longrightarrow N$ – отображение[1].

Отображение f **непрерывно в точке** a, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Непрерывность по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \ (\forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

или в многомерном случае

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : (\forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(a) \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon),^2$$

По Гейне:

$$\forall x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

Определение: отображение $f : M \to N$ называется **гомеоморфизмом**, если

- f – биекция,
- f – непрерывна,
- f^{-1} – непрерывна

Говорят, что M гомеоморфно N и обозначается

$$M \cong N$$

Упражнение 1: доказать или опровергнуть, что ллюбая нерпрерывная биекция является гомеоморфизмом.

Упражнение 2: доказать, что

$$(0, 1) \cong \mathbb{R}$$

Упражнение 2: доказать, что

$$\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$
$$D \cong \mathbb{R}^2$$

[1] Отображение $f : M \to N$ – закон, который каждому элементу $x \in M$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in N$.

[2] Здесь $B_{\delta_\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \rho(y, a) < \delta_\varepsilon\}$, а $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

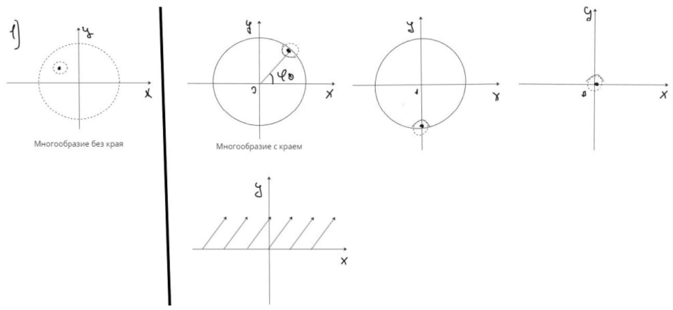
Многообразие

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\text{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k$$

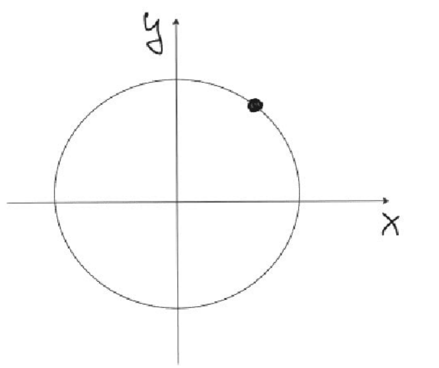
$$\text{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k_+$$

где $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_k) | x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}, x_k \geq 0\}$
в этом случае M является **многообразием** размерности k.
Если $\nexists$ окрестности $U_\varepsilon(x) : U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k$, то x - **граничная точка**, иначе - **внутренняя точка**.
Если множество граничных точек пустое ($\emptyset$), то M- многообразие **без края**, в противном случае **с краем**.
Примеры:



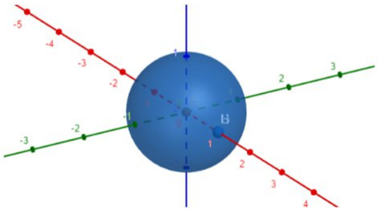
2. Окружность: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

Окружность- одномерное многообразие без края



3. Сфера: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

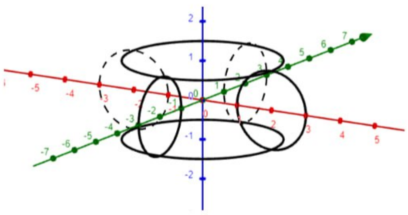
2-мерное многообразие без края



4. Тор. Рассматриваем как поворот единичной окружности вокруг оси Oz. $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$

$$\begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

2-мерное многообразие без края



5. Цилиндр.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

2-мерное многообразие с краем