Беседы с *Батюшкой*

Коллективный разум

3 февраля 2023 г.

Гомеоморфизм

Пусть $M, N \subset \mathbb{R}^n$. $f : M \longrightarrow N$ – отображение[1].

Отображение f *непрерывно в точке* a, тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Непрерывность по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \ (\forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

или в многомерном случае

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : (\forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(a) \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon),^2$$

По Гейне:

$$\forall x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

Определение: отображение $f : M \to N$ называется *гомеоморфизмом*, если

- f – биекция,
- f – непрерывна,
- f^{-1} – непрерывна

Говорят, что M гомеоморфно N и обозначается

$$M \cong N$$

Упражнение 1: доказать или опровергнуть, что ллюбая нерпрерывная биекция является гомеоморфизмом.
Упражнение 2: доказать, что $(0, 1) \cong \mathbb{R}$
Упражнение 3: доказать, что $D \cong \mathbb{R}^2$,

$$\textit{где } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

[1] Отображение $f : M \to N$ – закон, который каждому элементу $x \in M$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in N$.

[2] Здесь $B_{\delta_\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \rho(y, a) < \delta_\varepsilon\}$, а $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

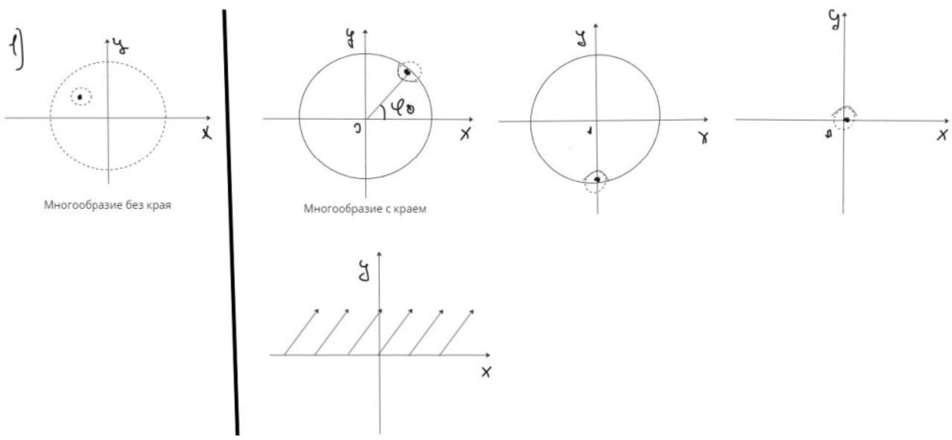
Многообразие

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\exists k \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$:

$$\textit{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k,$$

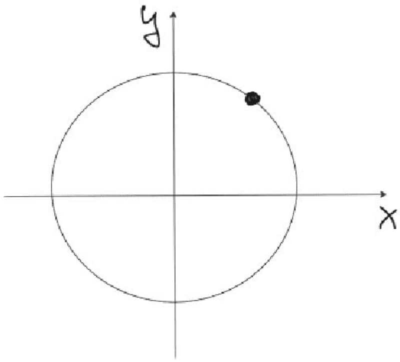
$$\textit{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k_+,$$

где $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_k)|\ x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}, x_k \geq 0\}$
в этом случае M является **многообразием** размерности k.
Если $\nexists$ окрестности $U_\varepsilon(x) : U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k$, то x - **граничная точка**, иначе - **внутренняя точка**.
Если множество граничных точек пустое ($\emptyset$), то M- многообразие **без края**, в противном случае **с краем**.
Примеры:
1. Диск: $D^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ x^2 + y^2 < 1\}$



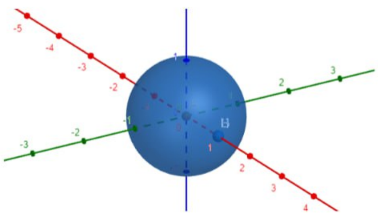
2. Окружность: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}$

Окружность- одномерное многообразие без края



3. Сфера: $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

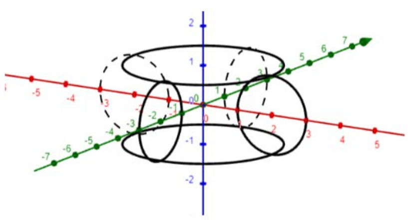
2-мерное многообразие без края



4. Тор. Рассматриваем как поворот единичной окружности вокруг оси Oz. $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |$

$$\begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

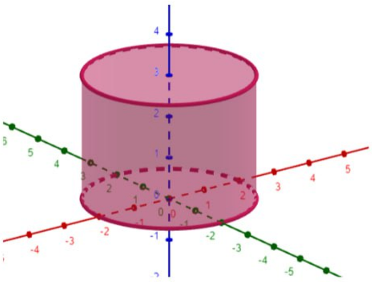
2-мерное многообразие без края



5. Цилиндр $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

2-мерное многообразие с краем



Динамическая система

Определение: Пусть M – многообразие. **Динамической системой(ДС)** на многообразии M называется непрерывное отображение $f : M \times X \to M \quad (X = \mathbb{R} \text{ } \textit{или} \text{ } X = \mathbb{Z})$ со следующими свойствами:

1. $f(x, 0) = x, \qquad \forall x \in M$
2. $f(f(x,t), s) = f(x, t+s), \qquad \forall x \in M \forall t, s \in X$

Если $X = \mathbb{R}$, то ДС называется **потоком** (непрерывная ДС). Если $X = \mathbb{Z}$, то ДС называется **каскадом** (дискретная ДС).

Динамическая система $f : M \times X \to M$ определяет семейство гомеоморфизмов $\{f^t \mid t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})\}$ на M, где $f^t(x) \equiv f(x,t)$.

Если $t \in \mathbb{Z}$, то

- при $t > 0 \qquad f^t = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{t};$
- при $t < 0 \qquad f^t = \underbrace{f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{t};$
- $f^0 = Id : M \to M, \ Id(x) = x$

Определение: **Траекторией** точки $x_0 \in M$ называется множество $O_{x_0} = \{f^t(x_0) \mid t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}\}$. Если $t \in \mathbb{Z}$, то траекторию называют **орбитой**.

Пример 1. $x_t = v_0 \cdot t + x_0$,
$t \in \mathbb{R}$;

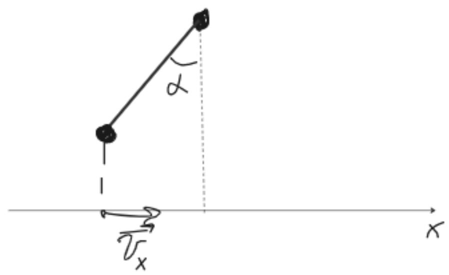
$f^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

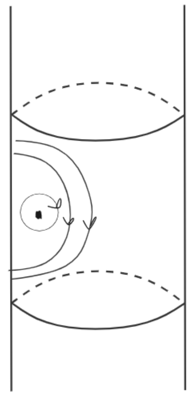
$f^t(x_0) = v \cdot t$.

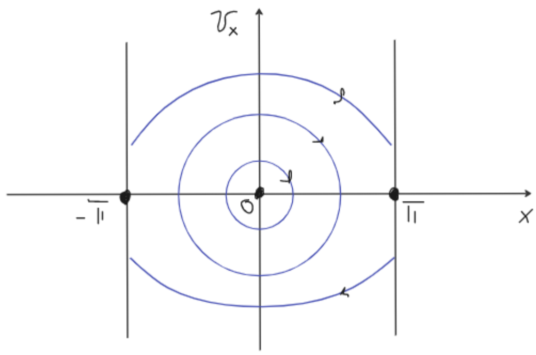
Пример 2. Математический маятник без трения (α, V_x)

$\alpha \in [-\pi, \pi]$

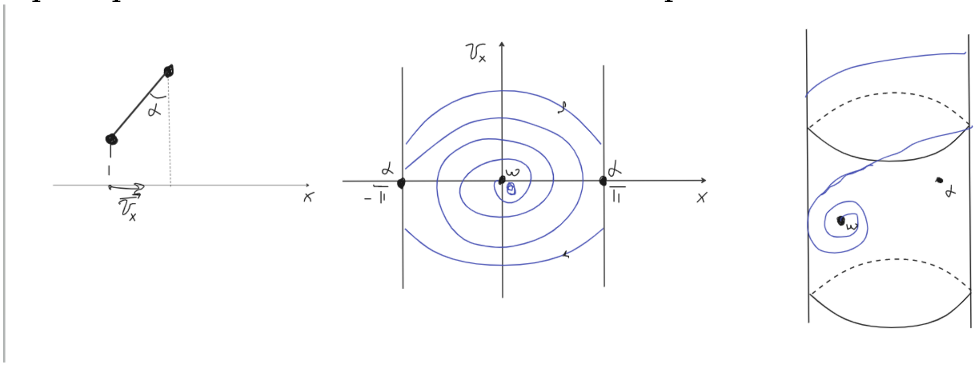
$0 \sim 2\pi \ V_x \in \mathbb{R}$







Пример 3. Математический маятник с трением.



Определение: Точка $x \in M$ называется блуждающей, если $\exists U(x)$ и $\exists T : \forall t > T \to f^t(U(x)) \cap U(x) = \varnothing$

В противном случае, точка называется неблуждащей.

Определение: Объединение неблуждающих точек - неблуждающее множество.

Определение: Неподвижная точка - точка,траектория которой совпадает с ней ($O_x = \{x\}$).

Обозначения: ω - сток (притягивающая неподвижная точка)

α - источник (отталкивающая неподвижная точка)

Определение: $x \in M$ -периодическая для потока f^t (каскад f), если $\exists T > 0 : f^T(x) = x\forall$

$1 < t_1 < T$

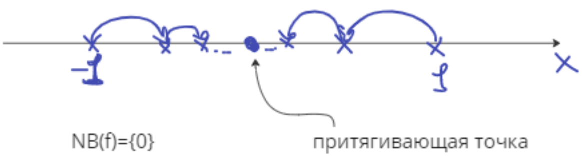
$f^{t_1}(x) \neq x$

Примеры: Каскады

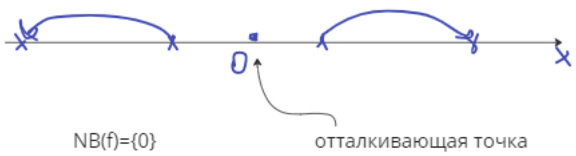
Обозначение: $NB(f) = \{...\}$- множество неблуждающих точек.

1. $f(x) = \bar{x} = 0,5x$

$t \in \mathbb{Z}, f^t = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{t}$



2. $f(x) = 2x$



3. $f(x) = x + \alpha$
$\alpha \in \mathbb{R}$