

# *Беседы с Батюшкой*

Ящер с планеты Цугундер

27 января 2023 г.

# Гомеоморфизм

Пусть  $M, N \subset \mathbb{R}^n$ .  $f : M \longrightarrow N$  – отображение<sup>1</sup>.

Отображение  $f$  **непрерывно в точке**  $a$ , тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Непрерывность по Коши:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : (\forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

или в многомерном случае

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : (\forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(a) \Rightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon),^2$$

**По Гейне:**

$$\forall x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$$

**Определение:** отображение  $f : M \rightarrow N$  называется гомеоморфизмом, если

- $f$  – биекция,
- $f$  – непрерывна,
- $f^{-1}$  – непрерывна

Говорят, что  $M$  гомеоморфно  $N$  и обозначается

$$M \cong N$$

**Упражнение 1:** доказать или опровергнуть, что любая непрерывная биекция является гомеоморфизмом.

**Упражнение 2:** доказать, что

$$(0, 1) \cong \mathbb{R}$$

**Упражнение 2:** доказать, что

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$
$$D \cong \mathbb{R}^2$$

---

<sup>1</sup>Отображение  $f : M \rightarrow N$  – закон, который каждому элементу  $x \in M$  ставит в соответствие единственный элемент  $y \in N$ .

<sup>2</sup>Здесь  $B_{\delta_\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R}^n | \rho(y, a) < \delta_\varepsilon\}$ , а  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

# Многообразие

Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  такое, что  $\exists k \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$ :

$$\text{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k$$

$$\text{либо } U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}_+^k$$

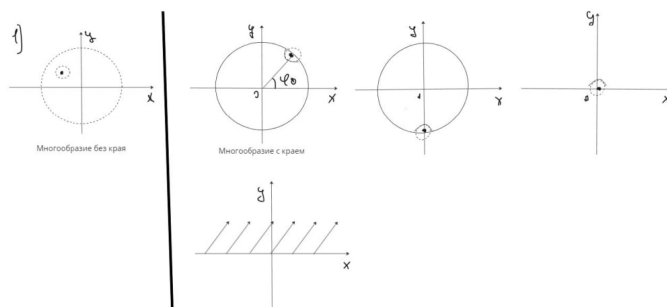
где  $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) | x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}, x_k \geq 0\}$

в этом случае  $M$  является **многообразием** размерности  $k$ .

Если  $\nexists$  окрестности  $U_\varepsilon(x) : U_\varepsilon(x) \cap M \cong \mathbb{R}^k$ , то  $x$  - **граничная точка**,  
иначе - **внутренняя точка**.

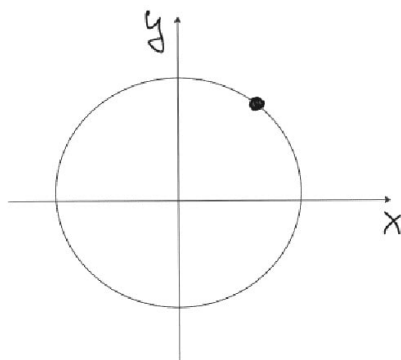
Если множество граничных точек пустое ( $\emptyset$ ), то  $M$ - многообразие **без края**, в противном случае **с краем**.

**Примеры:**



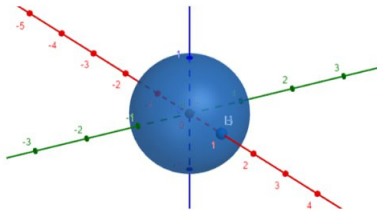
2. Окружность:  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

Окружность- одномерное многообразие без края



3. Сфера:  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

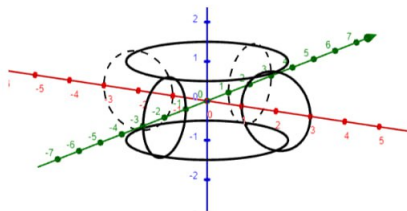
2-мерное многообразие без края



4. Тор. Рассматриваем как поворот единичной окружности вокруг оси Oz.  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$

$$\begin{cases} (y - 2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

2-мерное многообразие без края

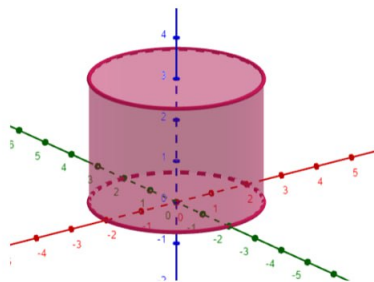


5. Цилиндр.

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

2-мерное многообразие с краем



## Динамическая система

**Определение:** Пусть  $M$  – многообразие. **Динамической системой** (ДС) на многообразии  $M$  называется непрерывное отображение  $f : M \times X \rightarrow M$  ( $X = \mathbb{R}$  или  $X = \mathbb{Z}$ ) со следующими свойствами:

1.  $f(x, 0) = x, \quad \forall x \in M$
2.  $f(f(x, t), s) = f(x, t + s), \quad \forall x \in M \forall t, s \in X$

Если  $X = \mathbb{R}$ , то ДС называется **поток**ом (непрерывная ДС). Если  $X = \mathbb{Z}$ , то ДС называется **каскадом** (дискретная ДС).

Динамическая система  $f : M \times X \rightarrow M$  определяет семейство гомеоморфизмов  $\{f^t \mid t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})\}$  на  $M$ , где  $f^t(x) \equiv f(x, t)$ .

Если  $t \in \mathbb{Z}$ , то

- при  $t > 0$   $f^t = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_t$ ;
- при  $t < 0$   $f^t = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_t$ ;
- $f^0 = Id : M \rightarrow M, \quad Id(x) = x$

**Определение:** **Траекторией** точки  $x_0 \in M$  называется множество  $O_{x_0} = \{f^t(x_0) \mid t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})\}$ . Если  $t \in \mathbb{Z}$ , то траекторию называют **орбитой**.

второй - кривая в трехмере, область определения - окружность единичного радиуса  $S$ . Строим гомеоморфизм  $h: \tilde{I} \rightarrow S$ , где  $\tilde{I}$  - отрезок  $I$  с отождествленными концами, который равномерно отображает отрезок в окружность и тогда  $z(w) = f(h^{-1}(w)), w \in S$ .

$$x_t = v_0 \cdot t + x_0, \\ t \in \mathbb{R};$$

$$f^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$f^t(x_0) = v \cdot t.$$