Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет»
«Высшая школа экономики»
Нижегородский кампус

Факультет математики, информатики и компьютерных наук
Кафедра фундаментальной математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНОГО КАСКАДА НА СФЕРЕ ПО ЕЁ ТРЁХЦВЕТНОМУ ГРАФУ

Выполнил:
Студент 2 курса группы 22 ФМ
Турсунов Данил Вячеславович

Научный руководитель:
Баринова Марина Константиновна

Нижний Новгород
Май 2024 г.

Содержание

1 Вступление

1.1 Цели и задачи работы

Основной целью работы является создание приложения на языках C++ и Python с применением библиотеки Manim. Суть приложения заключается в генерации 3D-изображений градиентно-подобных каскадов, заданных на сфере, из соответствующих им трёхцветных графов, заранее проверенных программой на корректность. Алгоритмическая часть приложения написана на C++, так как этот язык в разы быстрее чем язык Python, а на языке Python написана визуальная составляющая программы, так как язык содержит множество удобных для этого библиотек.

Помимо этого поставлены следующие подзадачи:

1) Разобраться в связи градиентно-подобных каскадов и трёхцветных графов;

2) Научиться писать Unit-тесты на языке C++, необходимые для стабильной работы программы при её изменении в дальнейшем;

3) Придумать алгоритм генерации трёхцветных графов с заданными параметрами: число Эйлера и число сёдел динамической системы.

1.2 Актуальность работы

Программа, написанная в результате работы, будет полезна начинающим научным сотрудникам или обычным студентам, желающим разобраться в градиентно-подобных каскадах на сфере, так как она поможет им быстрее визуализировать эти динамические системы. Помимо этого, отдельные функции из алгоритмический части могут быть полезны другим исследователям трёхцветных графов в написании программ в дальнейшем.

2 Теоретическая часть

2.1 Описание

В этой главе будут представлены: введение в теорию графов, алгоритм построения трёхцветного графа по градиентно-подобному каскаду на поверхности, свойства и определение трёхцветного графа, сформулированные в теоремах и определениях.

2.2 Введение в теорию графов и построение трёхцветного графа по каскаду

Начнём введение в теоретическую часть с определения диффеоморфизма Морса-Смейа и алгоритма построения трёхцветного графа, заданного на поверхности и, в частности, на сфере.

Определение 1. *(Диффеоморфизм Морса-Смейла)*
Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом n-многообразии, называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:

1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (т.е. состоит из конечного чила периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);

2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, тогда периодические точки называются источниками, если неустойчивое многообразие W_q^u имеет размерность n, стоками, если размерность равна 0, и сёдлами при остальных значениях размерности.

Далее скажем, что для любой периодической точки p диффеоморфизма f компоненты связности $W_p^s(p)$ и $(W_p^u(p))$ называются её устойчивыми или неустойчивыми сепаратрисами соответственно.

Введём более узкое определение: рассмотрим класс диффеоморфизмов на поверхности M^2, тогда диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, если $W_p^s \cap W_p^u = \emptyset$ для любых различных седловых точек p, q.

В дальнейшем в работе будут рассматриваться исключительно граентно-подобные диффеоморфизмы, заданные на поверхности M^2. Класс градиетно-подобных диффеоморфизмов, заданных на поверхности M^2, обозначим G.

Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек f и получим множество M'. M' является объединением ячеек, гомеоморфных открытому двумерному диску, граница которых имеет один из 3-х видов, показанных на рис. 1.

Пусть A - ячейка из M', α и ω - источник и сток, входящие в её границу. Кривую $\tau \in A$, началом и концом которой являеются α и ω, будем называть $t-$кривой. Через T обозначим множество $t-$кривых, взятых по одной из каждой ячейки.

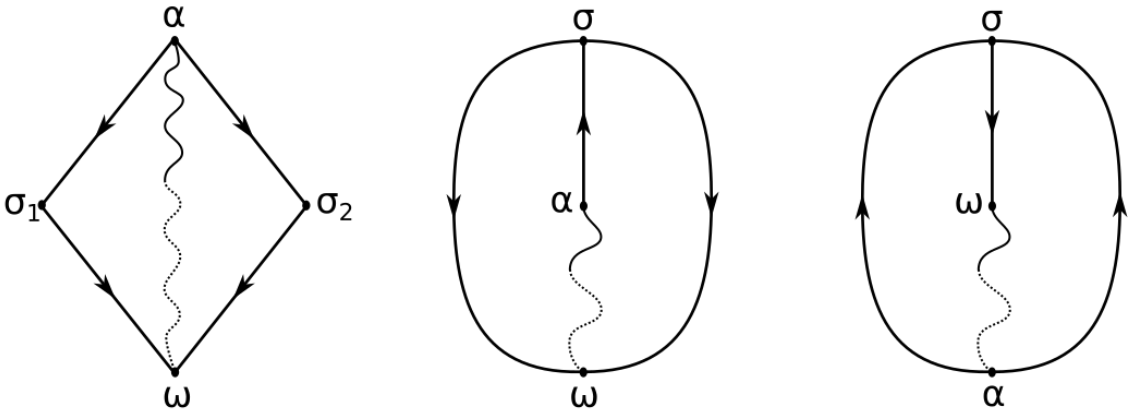

Рис. 1: Возможные ячейки множества M'.

Разобьём каждую ячейку этой кривой на 2 области, компоненты связности $M_\Delta = M' \backslash T$ назовём треугольными областями. В границу каждой треугольной области входят 3 периодические точки: источник, сток и седло, а также устойчивая сепаратриса, неусточивая сепаратриса и кривая τ. В дальнейшем будем называть их $s-$кривой, $u-$кривой и $t-$кривой соответственно. Замыкание каждой из этих кривых будем называть стороной треугольной области. Скажем, что сторона является общей стороной для двух треугольных областей, если она принадлежит замыканиям этих треугольных областей.

Для дальнейшего введения в теорию трёхцветных графов потребуется ввести некоторые определения из теории графов.

Определение 2. *(Конечный граф)*
Конечным графом называется упорядоченная пара (B,E), для которой выполнены следующие условия:

1) B - непустое конечное множество вершин;

2) E - множество пар вершин, называемых рёбрами.

Определение 3. *(Инцидентность)*
Если граф содержит ребро e = (a,b), то каждую из вершин a, b называют инцидентной ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e.

Определение 4. *(Путь в графе)*
Путём в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида: $b_0, (b_0, b_1), b_1, \ldots, b_{i-1},$
1. *Число k называется длиной пути, оно совпадает с числом входящих в него рёбер.*

Определение 5. *(Цикл в графе)*
Циклом длины $k \in \mathbb{N}$ *в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида* $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \ldots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \ldots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$. *Простым циклом называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.*

Определение 6. *(Связность графа)*
Граф называют связным, если любые две его вершины можно соединить путём.

С учётом имеющихся у нас вводных, введём определение трёхцветного графа, а также сформулируем некоторые теоремы.

Определение 7. *(Трёхцветный граф)*
Граф T называется трёхцветным графом, если:

1) множество рёбер графа T является объединением трёх подмножеств, каждое из которых состоит из трёх рёбер одного и того же определенного цвета (цвета рёбер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s, t, u, а рёбра для краткости будем называть s-, t-, u-рёбрами);

2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трём рёбрам различных цветов;

3) граф не содержит циклов длины 1.

Определение 8. *(Двухцветный цикл)*
Простой цикл трёхцветного графа T назовём двухцветным su-, tu- или st-циклом, если он содержит рёбра в точности двух цветов s и u, t и u, s и t соответственно.

Непосредственно из определения трёхцветного графа следует, что длина любого двухцветного цикла является чётным числом (так как цвета рёбер строго чередуются), а отношение на множестве вершин, состоящее в принадлежности двухцветному циклу определённого типа, является отношением эквивалентности, то есть каждая отдельно взятая вершина лежит в точности в одном $su-$, одном $tu-$ и одном $st-$цикле.

Определение 9. *(Построение трёхцветного графа по диффеоморфизму)*
Построим трёхцветный граф T_f, соответствующий диффеоморфизму $f \in G$, следующим образом:

1) вершины графа T_f взаимно однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u, если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s-, t- или u-кривую .

Отметим, что построенный граф T_f полностью удовлетворяет определению трёхцветного графа.

Определение 10. *(Допустимость трёхцветного графа)*
Трёхцветный граф (T,P) назовём допустимым, если он обладает следующими свойствами:

1) граф T связен;

2) длина любого su-цикла графа T равна 4;

3) автоморфизм P является периодическим.

Отметим, что трёхцветный граф, построенный по градиентно-подобному каскаду на поверхности, является допустимым. Следующие теоремы сформулированы для трёхцветных графов, оснащённых автоморфизмом, однако, во избежание излишей громоздкости теоретической части, данная часть повествования была опущена в курсовой работе.

Теорема 1. *(Топологическая сопряжённость диффеоморфизмов)*
Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы их графы (T_f, P_f) *и* $(T_{f'}, P_{f'})$ *были изоморфны.*

Теорема 2. *(Свойства допустимого трёхцветного графа)*
Пусть (T,P) - допустимый трёхцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ *из класса G, граф* (T_f, P_f) *которого изоморфен графу (T,P). При этом:*

1) эйлерова характеристика поверхности M^2 *вычисляется по формуле* $X(M^2) = v_0 - v_1 + v_2$, *где* v_0, v_1, v_2 *- число всех tu-, su-, st-циклов графа T соответственно;*

2) поверхность M^2 *ориентируема тогда и только тогда, когда все циклы графа T имеют чётную длину.*

3 Алгоритмическая часть

3.1 Структура программы

Программа состоит из 2 частей: алгоритмической и графической, каждая из частей запускается отдельно и независимо друг от друга. Изначально запускается алгоритмическая часть на языке C++, туда вводится корректный трёхцветный граф, программа его обрабатывает и выдаёт в отдельном файле координаты сепаратрис. Далее запускается графическая часть программы, написанная на языке Python. Она считывает координаты из файла и генерирует по заданным координатам конца и начала сепаратрис 3D-изображение, а затем, после рендеринга в библиотеке Manim, показывает её пользователю.

3.2 Проверка введённого трёхцветного графа на корректность

Проверяет граф на корректность функция $is\_acceptable$, которая принимает на вход заданный граф и возвращает булевое значение: True, если граф является корректным (допустимым) трёхцветным графом, и False, если граф таковым не является.

Согласно определению 10 граф называется корректым трёхцветным графом, если:

1) граф является трёхцветным, то есть попадает под определение трёхцветности;

2) граф является связным;

3) все SU-циклы в графе имеют длину равную четырём.

Функция для проверки пункта 1 вызывает функцию $is\_3\_colored\_and\_non\_oriented$, которая действует следующим образом: функция циклом проходит по вершинам графа, для каждой вершины проверяет, действительно ли из неё выходит только 3 ребра, причем эти рёбра должны быть разных цветов: u, s и t. Параллельно с этим в этом же цикле проверяется то, что граф является неориентируемым, а также то, что граф не содержит петель, то есть циклов длины 1. Если хотя бы одно из условий не выполняется, функция возвращает False, в противном случае она возращает True.

Для проверки пункта 2 функция вызывает функцию $is\_connected$, которая считает расстояния от вершины с порядковым номером 0 до остальных вершин при помощи функции bfs. Здесь под расстоянием имеется в виду длина кратчайшего пути между 2 вершинами. Если не существует пути, соединяющего 2 вершины, расстояние считается равным inf. Если хотя бы одно расстояние окажется равным inf, то граф не связен и функция вернёт значение False, а в противном случае граф является связным и функция возвращает значение True.

Функция bfs принимает на вход начальную вершину (в данном случае это вершина с номером 0) и сам граф и работает по алгоритму $breadth - first\ search$, что можно перевести как «поиск в ширину». Алгоритм работает с применением структуры данных «очередь». Принцип работы этой структуры данных объясняется фразой: «Первый зашёл - последний вышел.». Алгоритм работает следующим образом: создаётся вектор, стуктура данных для хранения данных в C++, содержащий известные расстояния от начальной вершины до остальных, изначально заполнен inf, кроме начальной, так как расстояние от начальной до начальной вершины равно

0, и очередь, состоящая только из начальной вершины, далее запускается цикл, он работает до тех пор, пока очередь не опустеет. В каждой итерации цикл делает первую вершину из очереди текущей и проходит по всем соседним вершинам текущей (то есть тем, кто соединён с ней ребром), и, если известное расстояние до соседа больше суммы расстояния до текущей и единицы (она появляется за счёт ребра, которое их соединяет), то минимальное известное расстояние обновляется, а вершина-сосед кладётся в очередь. Функция возвращает вектор расстояний до каждой из вершин.

Для проверки пункта 3 функция вызывает функцию $find\_cycles$ с переданными в неё графом, литералами «s» и «u», которые отвечают за то, какого цвета циклы надо найти. Функция $find\_cycles$ возвращает вектор, состоящий из циклов, каждый цикл представляет собой последовательность номеров вершин цикла, так же последовательно соединённых между собой в самом цикле. Эта функция в процессе своего исполнения использует факт, который вытекает из определений 7 и 8 про то, что каждая отдельно взятая вершина лежит только в одном $su-$, одном $tu-$ и одном $st-$цикле, поэтому каждый цикл по отдельности ищется функцией $find\_cycle$ достаточно тривиальным алгоритмом, который просто идёт по циклу из начальной вершины, пока снова не встретит начальную вершину. Далее функция $is\_acceptable$ проверяет, имеют ли все SU-циклы в графе длину 4.

Если все условия выполнены, функция $is\_acceptable$ возвращает True, в противном случае возвращает False.

3.3 Проверка поверхности на ориентируемость

Для построения алгоритма, проверяющего поверхность, на которой задан градиентно-подобный каскад, по трёхцветному графу, потребуется пункт 2 теоремы 2, который гласит о том, что поверхности ориентируема тогда и только тогда, когда все циклы графа имеют чётную длину.

Сделать вывод о четной длине всех циклов графа можно найдя хотя бы один цикл нечётной длины. Для нахождения такого цикла потребуется небольшой экскурс в теорию, связанную с базой циклов и алгоритмом её нахождения.

Базой циклов неориентированного графа является такой набор циклов, путём соединения или вычитания которых могут получиться все остальные циклы. Для нахождения базы циклов необходимо построить из графа так называемое «переплетающееся дерево» (spanning tree), то есть просто выбрать какую-нибудь вершину за корень дерева, а потом идти по нему уже упомянутым выше алгоритмом поиска в ширину из корневой вершины, при этом вместо поиска расстояний отмечать посещённые вершины, если вершина-сосед не посещена, то ребро, связывающее текущую вершину с ней, добавлять в «переплетающееся дерево», а далее, путём добавления по одному в дерево рёбер изначального графа, которые в дерево не попали, по одному найти все циклы. Эти циклы и будут составлять базу циклов в графе. Очевидно, что при вычитании или сложении циклов четной длины получится цикл чётной длины, то есть на чётность достаточно проверить всего лишь циклы из базы циклов.

Алгоритм, находящий «переплетающееся дерево» и сразу проверяющий циклы базы циклов на чётную длину, реализован в функции $is\_oriented\_surface$, которая возвращает True, если

поверхность ориентируема, и False, если поверхность неориентируема.

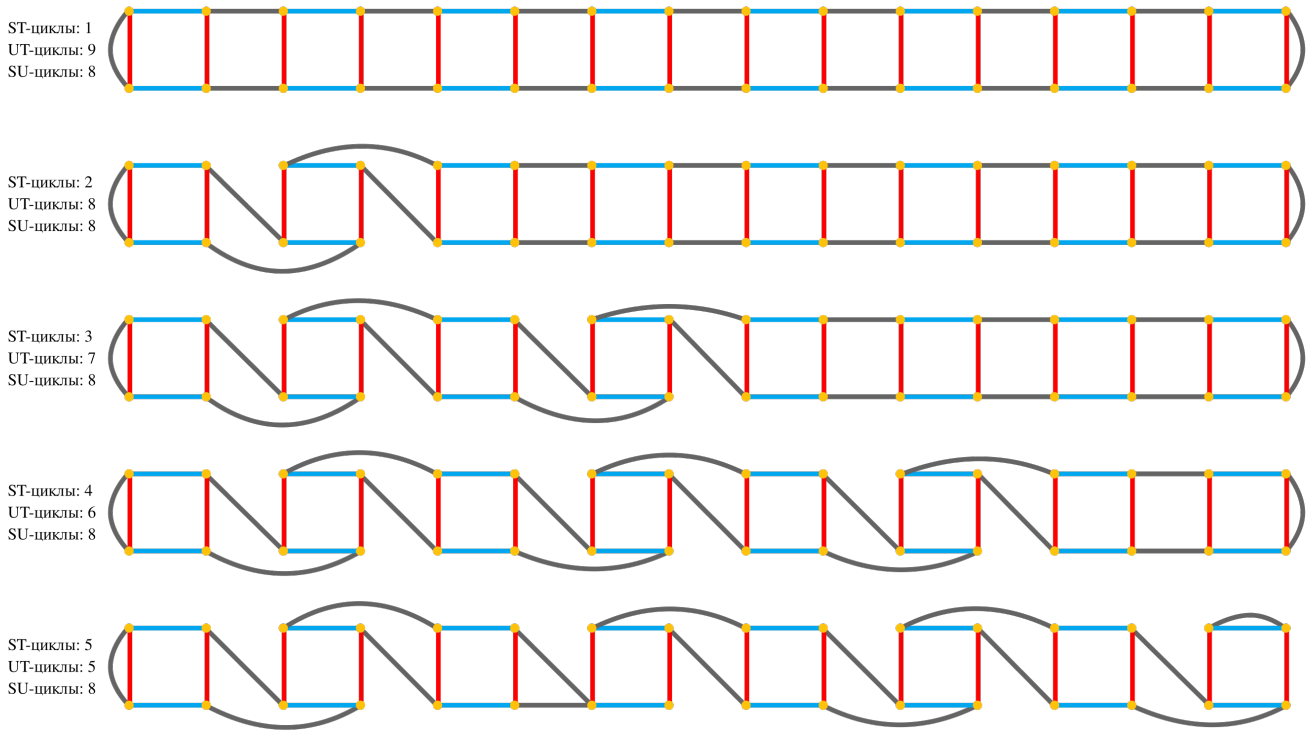

Рис. 2: Генератор графов для $e = 2$ и $\sigma = 8$

3.4 Генератор графов по заданной характеристике Эйлера и числу сёдел

Для дальнейшей проверки алгоритма на корректность потребуется генерировать корректные трёхцветные графы со всевозможным количеством стоков и источников, такие, что соответствующие им градиентно-подобные каскады расположены на сфере, по заданному числу сёдел σ. Изложенную ниже генерацию можно обобщить для генерации трёхцветных графов, такие, что соответствующие им градиентно-подобные каскады расположены на ориентируемой поверхности, определяемой характеристикой Эйлера e.

Из определения 10 известно, что длина SU-циклов корректного трёхцветного графа равна 4, причём количество SU-циклов равно числу сёдел σ. Тогда расположим «квадраты» SU-циклов, верхнее и нижнее ребро которых имеют одинаковый цвет для всех «квадратов» (будем считать, что верхние и нижние ребра - s-рёбра), в ряд и будем проводить из каждой вершины рёбра цвета t. Далее будем соединять t-ребром с ближайшей вершиной ближайшего соседнего «квадрата» SU-цикла, кроме первых 2 и последних 2 вершин, которые соединяются между собой соответственно. Получили тривиальный пример графа с числом SU-циклов, равному σ, числом ST-циклов, равному 1, и числом UT-циклов, равному $\sigma + 1$.

Увеличим количество ST-циклов на 1 и уменьшим количество UT-циклов на 1. Это можно сделать из построенного выше тривиального графа при помощи переподвязок t-циклов. Переподвязывать t-циклы будем следующим способом: возьмём чётный по счёту «квадрат» и

перекрасим s-рёбра в u-рёбра и наоборот. Одна такая переподвязка увеличивает количество ST-циклов на 1 и уменьшает количество UT-циклов на 1.

Проводя такие переподвязки на чётных «квадратах» по одной поверх друг друга, сгенерируем циклы, для которых количество ST-циклов принимает значения (с учётом тривиального графа) $\{1, \ \dots, [\sigma/2]\}$, а количество UT-циклов $\{[(\sigma+1)/2], \ \dots, \sigma+1\}$.

Ниже приведены примеры построения трёхцветных графов при $\sigma = 8$ и $e = 0$ и $e = -2$ для рис. 3 и для рис. 4 соответственно.

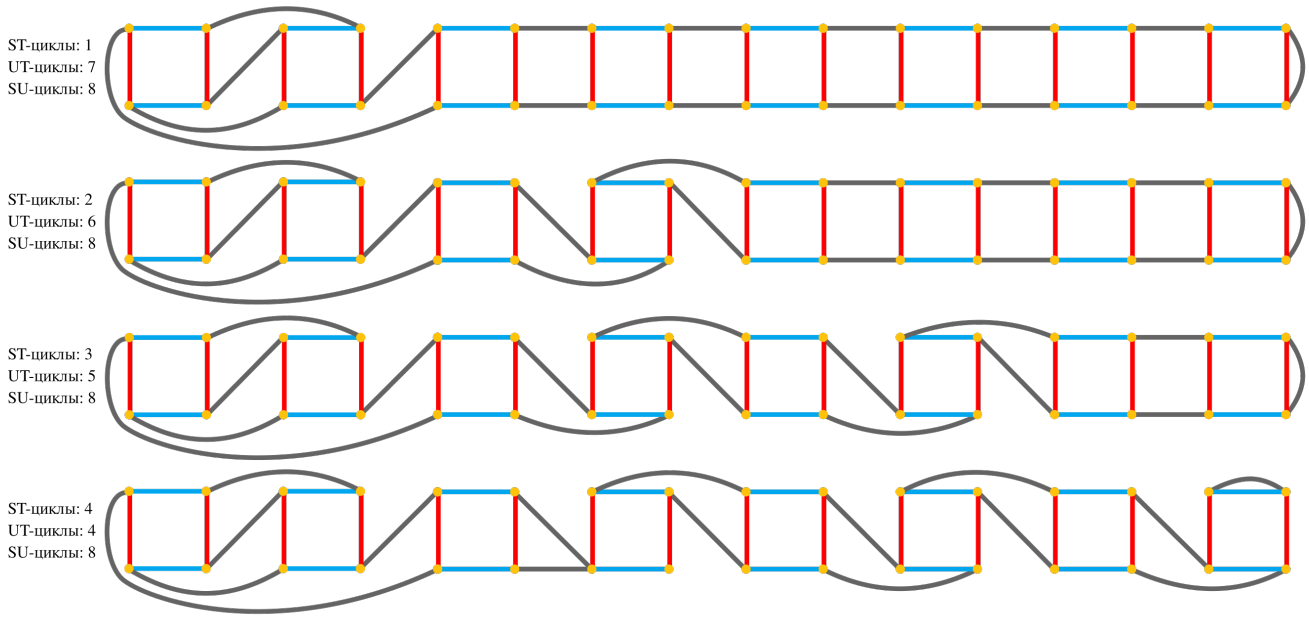

Рис. 3: Генератор графов для $e = 0$ и $\sigma = 8$

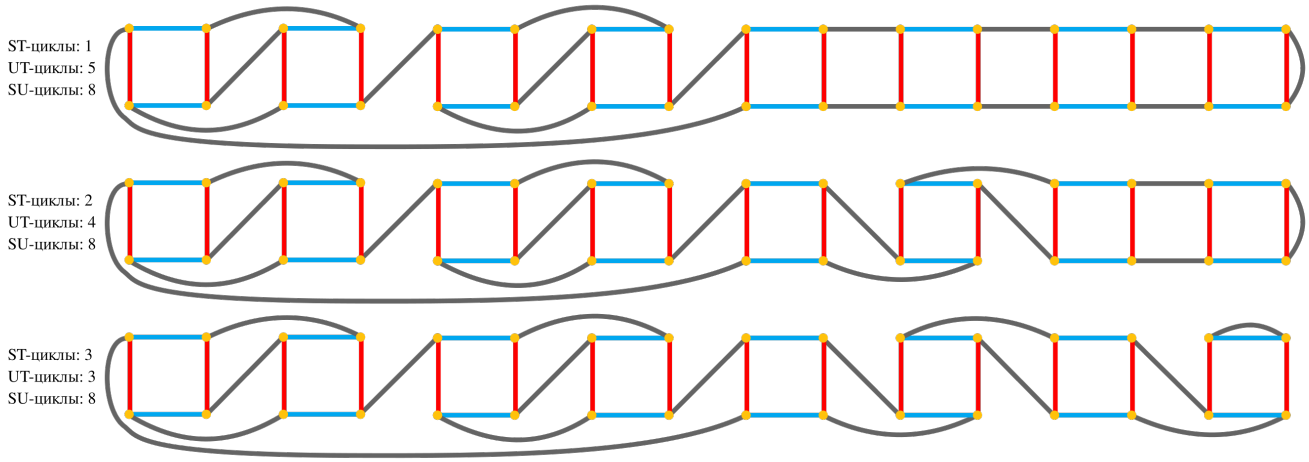

Рис. 4: Генератор графов для $e = -2$ и $\sigma = 8$

3.5 Поиск соседних неподвижных точек

Нам дан корректный трёхцветный граф, для дальнейшей визуализации динамической системы для каждой неподвижной точки необходимо найти соседние, то есть соединённые с данной неподвижной точкой сепаратрисой, неподвижные точки. Для этого реализуем функцию

find_neighbors, которая принимает на вход корректный трёхцветный граф, а выдаёт вектор, состящий из стоков, сёдел и источников, а также их соседей в правильной последовательности.

Для начала найдём все ST-, UT-, SU-циклы в исходном графе. Напомним, что каждый ST-цикл соответствует источнику, UT-цикл - стоку, SU-цикл - седлу. Из построения трёхцветного графа следует, что циклы имеют общее красное или синее ребро тогда и только тогда, когда неподвижные точки, представляющие эти циклы, соединены сепаратрисой, причём порядок обхода сепаратрис вокруг неподвижной точки соответствует порядку обхода рёбер графа, а также что одно ребро лежит ровно в двух двухцветных циклах, поэтому, найдя все двухцветные циклы, будем идти по ним в порядке обхода и для красных и синих рёбер будем смотреть, в каком ещё двухцветном цикле они лежат, далее сопоставляем новому двухцветному циклу для ребра неподвижную точку, соответствующую этому циклу. Проделаем это для всех неподвижных точек, получим искомый вектор.

3.6 Нахождение сепаратрис

Представим сферу как прямоугольник $[-90, 90]$ x $[0, 360]$, где все точки из отрезка -90 x $[0, 360]$ и из отрезка 90 x $[0, 360]$ отождествлены между собой. Впоследствии при визуализации этот прямоугольник будем отображать на сферу по формуле:

$$\begin{cases} x = r * sin(\psi) * cos(\phi) \\ x = r * sin(\psi) * sin(\phi) \\ x = r * cos(\psi) \end{cases}$$

Сепаратрисы будем представлять как пары, состоящие из цвета сепаратрисы, красная или синяя, и вектора координат, содержащего $a, a0, b, b0$ и при этом заданной формулой:

$$\begin{cases} x = a * t + a_0 \\ y = b * t + b_0 \end{cases}$$

где t $\in [0, 1]$.

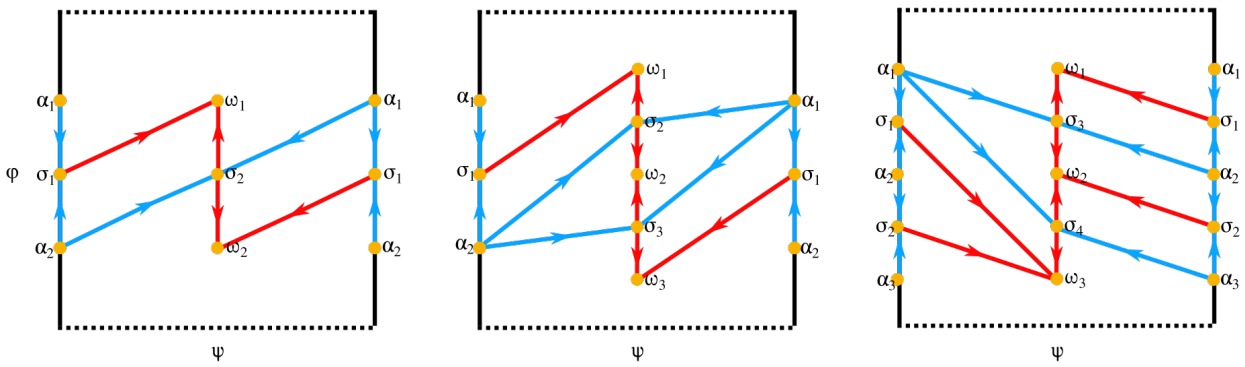

Рис. 5: Представление каскада на сфере.

Для нахождения координат сепаратрис на сфере реализована функция *find_separatres_coords*, она принимает на вход изначальный граф. Функция сначала запускает описанную выше функцию *find_neighbors* и находит соседние неподвижные точки для каждой неподвижной точки. Напомним, что возвращаемый функцией *find_neighbors* вектор устроен так, что он для каждой неподвижной точки содержит информацию о том, чем является неподвижная точка: стоком, источником или седлом. Функция *find_separatres_coords* проходит по вектору с соседями и выявляет набор источников и сёдел, которые должны быть расположены на краях прямоугольника, расположенных последовательно. Делает она это так: заходим в первый источник, ищем соседа-селдо, далее для этого седла ищем соседа-источник, которого у нас ещё нет в последовательности, далее для источника ищём соседа-седло, которого ещё не посетили, так повторяем до тех пор, пока не пройдём через все источники. После этого, функция аналогично выявляет расположенные последовательно оставшиеся стоки и сёдла, которые должны лежать в центре прямоугольника. Параллельно с этим функция для каждой неподвижной точки запоминает её координаты на этом прямоугольнике.

После того, как координаты неподвижных точек найдены, функция начинает поиск координат сепаратрис. Для этого используется вспомогательная функция *find_sep*. Она сначала находит координаты сепаратрис, расположенных по центру и с краю, там достаточно тривиальное расположение сепаратрис. После этого, функция пытается нарисовать сепаратрисы слева от центра: если отдельно взятая сепаратриса не пересеклась с остальными сепаратрисами, нарисованными справа, то рисуем её, если пересеклась, то переносим её в правую от центра часть. Для правой части отрисовываем все сепаратрисы, если какая-то пересеклась, то отражаем порядок и координаты неподвижных точек, распоженных по центру, и отрисовываем заново.

Полученные координаты сепаратрис уже отдельно от файла, в файле *main.cpp*, передаём в текстовый документ, который затем будет прочтён из файла с визуализацией.

Пересечение сепатарис находится при помощи функции *is_separatres_cross*, которая принимает на вход координаты двух сепаратрис, которые кеобходимо проверить на пересечение. Проверка сепаратрис на пересечение производится при помощи перебора всех возможных случаев (таких как пересечение, совпадение, параллельность) и переходом от параметрического задания прямой к каноническому, что при приравнивании поможет найти точку пересечения этих прямых. Если точка лежит на отрезке, то сепаратрисы пересеклись, если нет, то не пересеклись. При пересечении функция возвращает булевое значение True, в противном случае она возвращает False.

3.7 Unit-тестирование

Для стабильной работы программы при изменении в дальнейшем в каталоге под названием *graph_algorithms_unit_test* содержатся файлы, в которых написаны unit-тесты для различных функций. Если при изменении программа будет работать неправильно, то unit-тесты распознают аномалии.

4 Графическая часть

4.1 Работа с библиотекой Manim

Графическая часть программы, написанная в файле draw.py, отвечает за генерацию 3D-изображения дискретной динамической системы на сфере.

В файле определён класс DynamicalSystemSphere, который в дальнейшем будет указываться при запуске графической части.

Графическая часть работает по следующему алгоритму:

1) Считывается информация о сепаратрисах, полученная в результате запуска алгоритмической части;

2) Объявляется функция $func\_sphere$, задающая параметрически поверхность сферы:

$$\begin{cases} x = r * cos(u) * sin(v) - x0 \\ y = r * sin(u) * sin(v) - y0 \\ z = r * cos(v) - z0 \end{cases}$$

3) Объявляется функция *construct*, которая отвечает непосредственно за генерацию 3D-изображения. При помощи библиотеки Manim создаются поверхность сферы и оси OX, OY и OZ. Далее каждая сепаратриса, разбитая на 3 равные части, отличающиеся по цвету: более яркий красный и синий цвет соответствуют близости к стокам и источникам соответственно, а бледные оттенки этих цветов соответствуют близости к седлу, по отдельности добавляется на поверхность сферы.

Сепаратриса, заданная параметрически на прямоугольнике значениями $a, a0, b, b0$, отображается на поверхность сферы по правилу:

$$\begin{cases} x = cos(pi * (t * b + b0)/180) * sin(pi * (t * a + a0)/180) \\ y = cos(pi * (t * b + b0)/180) * cos(pi * (t * a + a0)/180) \\ z = sin(pi * (t * b + b0)/180) \end{cases}$$

где t принадлежит [0, 1] (причём для создания более «говорящей» картинки для различных оттенков сепаратрисы отрезок разбивается на 3 равные части, каждая из которых отображается независимо от остальных).

Для получения объёмного и «говорящего» изображения объявляется полный оборот камеры вокруг сферы.

4.2 Запуск и результат работы программы

Для запуска генерации 3D-изображения необходимо:

1) При помощи терминала установить библиотеку Manim на компьютер, если эта библиотека ещё не установлена.

2) Предварительно запустить алгоритмическую часть с введённым в неё корректным трёхцветным графом.

3) При помощи терминала перейти в каталог с файлом draw.py.

4) Запустить графическую часть при помощи команды:

manim -pqh draw.py DynamicalSystemSphere - для генерации изображения высокого качества;

manim -pql draw.py DynamicalSystemSphere - для генерации изображения низкого качества.

5 Ссылка на репозиторий в Github

Весь код расположен в репозитерии на Github по ссылке:
$https://github.com/dan1lka257/graphs\_and\_algorithms/tree/main$

6 Список литературы

[1] Гринес В.З., Капкаева С.Х., Починка О.В. Трёхцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, Математический сборник, 2014, том 205, номер 10, 19-46 с.

[2] Патон К., Алгоритм нахождения базы циклов для неориентированного графа, Communications of the ACM 12, 1969, 514-518 с.

[3] Круглов В.Е., Починка О.В., Топологическая сопряженность градиентноподобных потоков на поверхностях и эффективные алгоритмы ее различения, СМФН, 2022, том 68, выпуск 3, 467–487 с.

[4] Алексеев В.Е., Таланов В.А., Графы и модели вычислений, Издательство Нижегородского госуниверситета, 2004. 41-73 с.