Hello everyone!

Вступление

Тема

Генерация 3D-изображений дискретных динамических систем, заданных на поверхностях, из трехцветных графов.

План работы

В ходе работы предполагается создать программу, которая генерирует различные трехцветные графы, проверяет их допустимость как инварианта для диффеоморфизма, заданного на поверхности, и рисует 3D-изображение с каскадом, соответствующим сгенерированному графу.

Трёхцветный граф

В этой главе будет представлено построение трёхцветного графа по градиентно-подобному каскаду на поверхности. Стоит отметить, что на языке трёхцветных графов получена полная топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на поверхностях.

Трёхцветный граф как полный топологический инвариант диффеоморфизма на поверхности

Определение 1. *Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом n-многообразии, называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:*
1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (т.е. состоит из конечного чила периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);
2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W^s_p и неустойчивое многообразие W^u_q либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, тогда периодические точки называются источниками, если неустойчивое многообразие W^u_q имеет размерность n, стоками, если 0, и сёдлами при остальных.

Далее скажем, что для любой периодической точки p диффеоморфизма f компоненты связности $W^s_p \backslash p$ ($W^u_p \backslash p$) называются её устойчивыми (неустойчивыми) сепаратрисами.
Рассмотрим класс диффеоморфизмов на поверхности M^2, тогда диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, если $W^s_p \cap W^u_p = \emptyset$ для любых различных седловых точек p, q.
Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек f и получим множество $M' = M^2 \backslash (W^u_{\Omega^0_f} \cup W^u_{\Omega^1_f} \cup W^s_{\Omega^1_f} \cup W^s_{\Omega^2_f})$.
M' является объединением ячеек, гомеоморфных открытому двумерному диску, граница которых имеет один из 3-х следующих видов: (картинка с ячейками)
Пусть A - ячейка из M'

Определение 2. *Конечным графом называется упорядоченная пара (B,E), для которой выполнены следующие условия:*
1) B - непустое конечное множество вершин
2) E - множество пар вершин, называемых рёбрами

Определение 3. *Если граф содержит ребро e = (a,b), то каждую из вершин a, b называют инцидентной ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e.*

Определение 4. *Путём в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида:* $b_0, (b_0, b_1), b_1, \ldots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \ldots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k, k >= 1$. *Число k называется длиной пути, оно совпадает с числом входящих в него рёбер.*

Определение 5. *Граф называют связным, если любые две его вершины можно соединить путём.*

Определение 6. *Циклом длины* $k \in \mathbb{N}$ *в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида* $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \ldots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \ldots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$. *Простым циклом называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.*

Определение 7. *Граф T называется трёхцветным графом, если:*
1) множество рёбер графа T является объединением трёх подмножеств,

каждое из которых состоит из трёх рёбер одного и того же определенного цвета (цвета рёбер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s, t, u, а рёбра для краткости будем называть s-, t-, u-рёбрами);
2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трём рёбрам различных цветов;
3) граф не содержит циклов длины 1.

Определение 8. *Простой цикл трёхцветного графа T назовём двухцветным циклом типа su, tu или st, если он содержит рёбра в точности двух цветов s и u, t и u, s и t соответственно. Непосредственно из определения трёхцветного графа следует, что длина любого двухцветного цикла является чётным числом (так как цвета рёбер строго чередуются), а отношение на множестве вершин, состоящее в принадлежности двёхцветному циклу определённого типа, является отношением эквивалентности.*

Определение 9. *Построим трёхцветный граф T_f, соответствующий диффеоморфизму $f \in G$, следующим образом:*
1) вершины графа T_f взаимно однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ;
2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u, если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s-, t- или u-кривую

Граф T_f полностью удовлетворяет определению трёхцветного графа

Теорема 1. *Теорема 1. Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы их графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ были изоморфны*

Определение 10. *Определение 2. Трёхцветный граф (T,P) назовём допустимым, если он обладает следующими свойствами:*
1) граф T связен;
2) длина любого su-цикла графа T равна 4;
3) автоморфизм P является периодическим.

Лемма 1. *Пусть $f \in G$. Тогда трёхцветный граф (T_f, P_f) является допустимым.*

Теорема 2. *Пусть (T,P) - допустимый трёхцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ из класса G, граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T,P). При этом:*
1) эйлерова характеристика поверхности M^2 вычисляется по формуле $X(M^2) = v_0 - v_1 + v_2$, где v_0, v_1, v_2 - число всех tu-, su-, st-циклов графа T соответственно;
2) поверхность M^2 ориентируема тогда и только тогда, когда все циклы графа T имеют чётную длину

title2

title3

1 title4

Here is a general recipe for a polynomial whose level set is an n-torus in $\mathbb{R}^3$.

First, take the polynomial

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x-(i-1))(x-i) \\ &= x(x-1)^2(x-2)^2\cdots(x-(n-1))^2(x-n) \end{aligned}$$

which is positive as $x \to \pm\infty$, crosses zero at $x = 0$ and $x = n$, and touches zero from below at $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Examples: $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$.

Then let

$$g(x, y) = f(x) + y^2,$$

so that the set of points $g(x, y) = 0$ forms n connected loops ($n = 1$, $n = 2$, $n = 5$). Finally, define

$$h(x, y, z) = g(x, y)^2 + z^2 - r^2,$$

which "inflates"the loops in three dimensions. For small enough r, the level set $h(x, y, z) = 0$ is an n-torus. For example, here's $n = 2$ and $r = 0.1$, for which the zero level set of $h(x, y, z) = (x(x-1)^2(x-2) + y^2)^2 + z^2 - 0.01$ is plotted:

Here's another way to obtain a "double torus": you can start from the implicit equation of a lemniscate, which is a curve shaped like a figure-eight. One could, for instance, choose to use the lemniscate of Gerono:

$$x^4 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

or the hyperbolic lemniscate, which is the inverse curve of the hyperbola:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

(the famous lemniscate of Bernoulli is a special case of this, corresponding to the inversion of an equilateral hyperbola).

Now, to generate a double torus from these lemniscates, if you have the implicit Cartesian equation in the form $F(x, y) = 0$, you can perform the "inflation"step of Rahul's approach; that is, form the equation

$$F(x, y)^2 + z^2 = \varepsilon$$

where ε is a tiny number.

For instance, here's a double torus formed from the lemniscate of Bernoulli:

$$((x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2)^2 + z^2 = \frac{1}{100}$$