

Hello everyone!

Вступление

Тема

Генерация 3D-изображений дискретных динамических систем, заданных на поверхностях, из трехцветных графов.

План работы

В ходе работы предполагается создать программу, которая генерирует различные трехцветные графы, проверяет их допустимость как инварианта для диффеоморфизма, заданного на поверхности, и рисует 3D-изображение с каскадом, соответствующим сгенерированному графу.

Трёхцветный граф

В этой главе будет представлено построение трёхцветного графа по градиентно-подобному каскаду на поверхности. Стоит отметить, что на языке трёхцветных графов получена полная топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на поверхностях.

Трёхцветный граф как полный топологический инвариант диффеоморфизма на поверхности

Определение 1. Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом n -многообразии, называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:

- 1) неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (т.е. состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);
- 2) для любых периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, тогда периодические точки называются источниками, если неустойчивое многообразие W_q^u имеет размерность n , стоками, если 0, и седлами при остальных.

Далее скажем, что для любой периодической точки p диффеоморфизма f компоненты связности $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) называются её устойчивыми (неустойчивыми) сепаратрисами.

Рассмотрим класс диффеоморфизмов на поверхности M^2 , тогда диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, если $W_p^s \cap W_q^u = \emptyset$ для любых различных седловых точек p, q .

Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек f и получим множество $M' = M^2 \setminus (W_{\Omega_f^0}^u \cup W_{\Omega_f^1}^u \cup W_{\Omega_f^1}^s \cup W_{\Omega_f^2}^s)$.

M' является объединением ячеек, гомеоморфных открытому двумерному диску, граница которых имеет один из 3-х следующих видов: (картинка с ячейками)

Пусть A - ячейка из M'

Определение 2. Конечным графом называется упорядоченная пара (B, E) , для которой выполнены следующие условия:

- 1) B - непустое конечное множество вершин
- 2) E - множество пар вершин, называемых рёбрами

Определение 3. Если граф содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a, b называют инцидентной ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e .

Определение 4. Путём в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида: $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k, k \geq 1$. Число k называется длиной пути, оно совпадает с числом входящих в него рёбер.

Определение 5. Граф называют связным, если любые две его вершины можно соединить путём.

Определение 6. Циклом длины $k \in \mathbb{N}$ в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$. Простым циклом называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.

Определение 7. Граф T называется трёхцветным графом, если:

- 1) множество рёбер графа T является объединением трёх подмножеств,

каждое из которых состоит из трёх рёбер одного и того же определённого цвета (цвета рёбер из разных подмножеств не совпадают, будем обозначать эти цвета буквами s , t , u , а рёбра для краткости будем называть s -, t -, u -рёбрами);

2) каждая вершина графа T инцидентна в точности трём рёбрам различных цветов;

3) граф не содержит циклов длины 1.

Определение 8. Простой цикл трёхцветного графа T назовём двухцветным циклом типа su , tu или st , если он содержит рёбра в точности двух цветов s и u , t и u , s и t соответственно. Непосредственно из определения трёхцветного графа следует, что длина любого двухцветного цикла является чётным числом (так как цвета рёбер строго чередуются), а отношение на множестве вершин, состоящее в принадлежности двёхцветному циклу определённого типа, является отношением эквивалентности.

Определение 9. Построим трёхцветный граф T_f , соответствующий диффеоморфизму $f \in G$, следующим образом:

1) вершины графа T_f взаимно однозначно соответствуют треугольным областям множества Δ ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t , u , если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s -, t - или u -кривую

Граф T_f полностью удовлетворяет определению трёхцветного графа

Теорема 1. Теорема 1. Для того чтобы диффеоморфизмы f, f' из класса G были топологически сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы из графы (T_f, P_f) и $(T_{f'}, P_{f'})$ были изоморфны

Определение 10. Определение 2. Трёхцветный граф (T, P) назовём допустимым, если он обладает следующими свойствами:

1) граф T связан;

2) длина любого su -цикла графа T равна 4;

3) автоморфизм P является периодическим.

Лемма 1. Пусть $f \in G$. Тогда трёхцветный граф (T_f, P_f) является допустимым.

Теорема 2. Пусть (T, P) - допустимый трёхцветный граф. Тогда существует диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ из класса G , граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P) . При этом:

- 1) эйлерова характеристика поверхности M^2 вычисляется по формуле $X(M^2) = v_0 - v_1 + v_2$, где v_0, v_1, v_2 - число всех tu -, su -, st -циклов графа T соответственно;
- 2) поверхность M^2 ориентируема тогда и только тогда, когда все циклы графа T имеют чётную длину

title2

title3

1 title4