

Доклад по функциям

Афанасьев Даниил

18 марта 2025 г.

Содержание

1	Функция $y = [x]$	3
2	Функция $y = \{x\}$	5
3	Функция $y = \text{sign}(x)$	8

1 Функция $y = [x]$

Функция $y = [x]$ обозначает функцию целой части (или функцию взятия целой части числа). Эта функция возвращает наибольшее целое число, которое меньше или равно x .

Математически это записывается так:

$$y = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Область определения

Функция $y = [x]$ определена для всех действительных чисел:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

Нули функции

Нули функции — это значения x , при которых $y = 0$. Целая часть числа x равна нулю на полуинтервале $[0, 1)$:

$$y = 0 \text{ при } x \in [0, 1).$$

Чётность\нечётность

Функция $y = [x]$ не является ни чётной, ни нечётной.

- $y(-x) = [-x]$.
- $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.

Периодичность

Функция $y = [x]$ не является периодической, так как её значения изменяются скачкообразно при переходе через целые числа.

Монотонность

Функция $y = [x]$ кусочно-постоянна на полуинтервалах $[n, n + 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$

Производная на этих интервалах:

$$y' = (x) = 0 \text{ для } x \in (n, n + 1).$$

В точках $x = n$ производная не существует.

Точки экстремума

Функция $y = [x]$ не имеет точек экстремума, так как она кусочно-постоянна.

Максимум и минимум функции

Функция $y = [x]$ не имеет максимума и минимума, так как её значения не ограничены сверху или снизу.

Выпуклость вверх\вниз, точки перегиба

Функция $y = [x]$ является кусочно-постоянной, и её график состоит из горизонтальных отрезков. На интервалах $(n, n + 1)$ функция линейна(постоянная), поэтому:

- Выпуклость вверх или вниз не определена.
- Точек перегиба нет.

Асимптоты

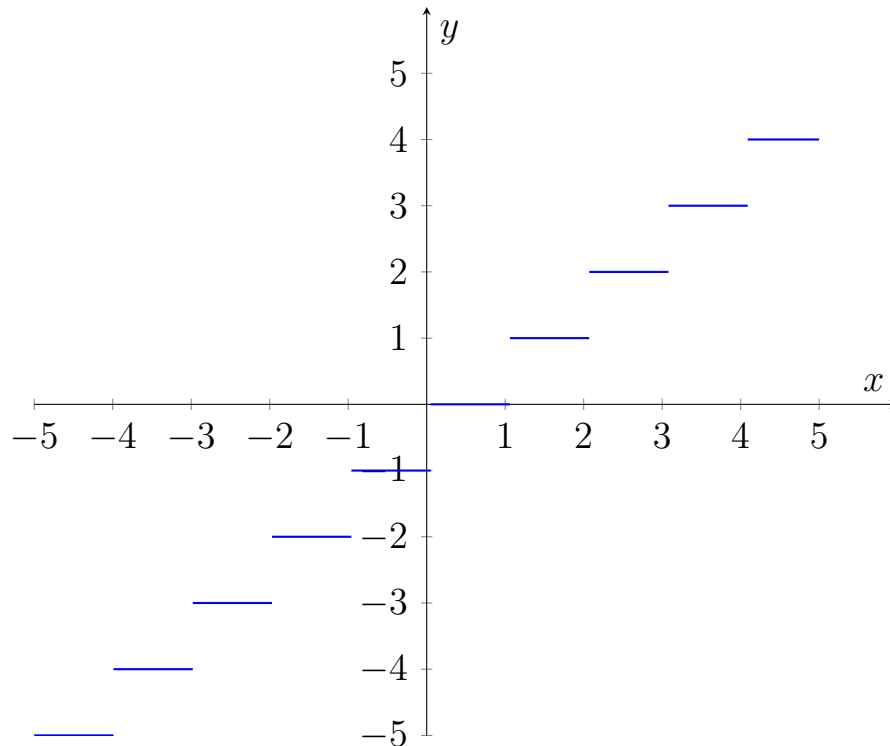
- Вертикальные асимптоты: отсутствуют.
- Горизонтальные асимптоты: отсутствуют.
- Наклонные асимптоты: отсутствуют.

Множество значений

Функция $y = [x]$ принимает все целые значения:

$$E(x) = \mathbb{Z}.$$

График функции



2 Функция $y = \{x\}$

Функция $y = x$ обозначает дробную часть числа x . Она определяется как разность между числом x и его целой частью $[x]$:

$$x = x - [x].$$

Область определения

Функция $y = x$ определена для всех действительных чисел:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

Нули функции

Нули функции — это значения x , при которых $y = 0$. Дробная часть числа x равна нулю, когда x — целое число:

$$y = 0 \text{ при } x \in \mathbb{Z}.$$

Чётность\нечётность

Функция $y = x$ является чётной, так как:

$$\{-x\} = \{x\} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Периодичность

Функция $y = x$ является периодической с периодом $T = 1$, так как:

$$\{x + 1\} = \{x\} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Монотонность

Функция $y = x$ линейна на интервалах $(n, n + 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Производная на этих интервалах:

$$y'(x) = 1 \text{ для } x \in (n, n + 1).$$

В точках $x = n$ производная не существует.

Точки экстремума

Функция $y = x$ не имеет точек экстремума, так как она линейно возрастает на интервалах $(n, n + 1)$

Максимум и минимум функции

- Минимум: $y = 0$ достигается при всех целых значениях x (т.е. $x \in \mathbb{Z}$).
- Максимум: y стремится к 1, но никогда не достигает её. Таким образом, точной верхней границей является 1, но максимум в строгом смысле отсутствует.

Выпуклость вверх\вниз, точки перегиба

Функция $y = x$ линейна на интервалах $(n, n + 1)$, поэтому:

- Выпуклость вверх или вниз не определена.
- Точек перегиба нет.

Асимптоты

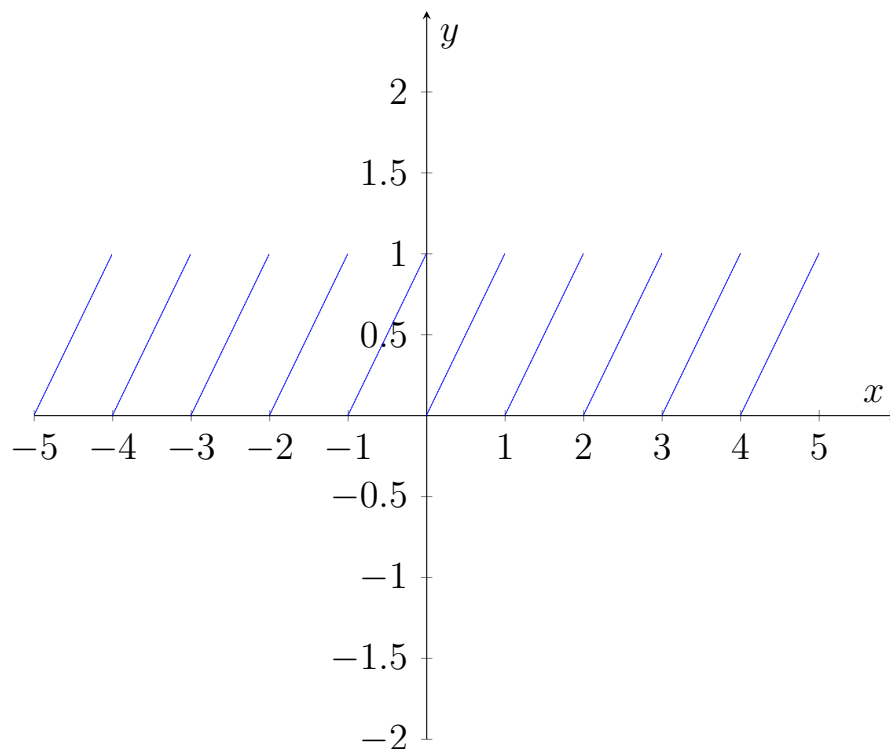
- Вертикальные асимптоты: отсутствуют.
- Горизонтальные асимптоты: отсутствуют.
- Наклонные асимптоты: отсутствуют.

Множество значений

Функция $y = x$ принимает значения на полуинтервале $[0, 1)$:

$$E(x) = [0, 1).$$

График функции



3 Функция $y = \text{sign}(x)$

Функция $y = \text{sign}(x)$ (или сигнум-функция) определяет знак числа x . Она возвращает:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Область определения

Функция $y = \text{sign}(x)$ определена для всех действительных чисел:

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

Нули функции

Нули функции — это значения x , при которых $y = 0$:

$$y = 0 \text{ при } x = 0.$$

Чётность\нечётность

Функция $y = \text{sign}(x)$ является нечётной, так как:

$$\text{sign}(-x) = -\text{sign}(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Периодичность

Функция $y = \text{sign}(x)$ не является периодической.

Монотонность

Функция $y = \text{sign}(x)$ постоянна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Производная на этих интервалах:

$$y'(x) = 0 \text{ для } x \neq 0.$$

В точке $x = 0$ производная не существует.

Точки экстремума

Функция $y = \text{sign}(x)$ не имеет точек экстремума, так как она постоянна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Точки разрыва

Функция $y = \text{sign}(x)$ имеет точку разрыва первого рода в $x = 0$. В этой точке:

- Левый предел: $\lim_{x \rightarrow -0} \text{sign}(x) = -1$
- Правый предел: $\lim_{x \rightarrow +0} \text{sign}(x) = 1$
- Значение функции в точке $x = 0$: $\text{sign}(0) = 0$.

Таким образом, в точке $x=0$ функция имеет скачок.

Максимум и минимум функции

Функция $y = \text{sign}(x)$ имеет максимум $y = 1$ при $x > 0$ и минимум $y = -1$ при $x < 0$.

Выпуклость вверх\вниз, точки перегиба

Функция $y = \text{sign}(x)$ постоянна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, поэтому:

- Выпуклость вверх или вниз не определена.
- Точек перегиба нет.

Асимптоты

- Вертикальные асимптоты: отсутствуют.
- Горизонтальные асимптоты: отсутствуют.
- Наклонные асимптоты: отсутствуют.

Множество значений

Функция $y = \text{sign}(x)$ принимает три значения:

$$E(y) = \{-1, 0, 1\}.$$

График функции

