Tarea Métodos Numéricos

Danae Govea Mendoza

6 de marzo de 2024

0.1. Tarea Errores

⋆ *Ejercicio 1:*

1. Encontrar el error absoluto de $y = \ln x$.
   De forma general, si tuviera un intervalo (x_i, y_i) que pudiera evaluar, el error absoluto se calcularía como: $\Delta x = |\ln x_i - y_i|$
   Donde x_i y y_i son los valores medidos y $\ln x_i$ los valores predichos.

2. Encontrar el error relativo de $y = \sqrt{x}$. Como el error relativo se encuentra con $\delta_x = \frac{\Delta x}{x_0}$, entonces en este caso $\delta_x = \frac{|\sqrt{x_i} - y_i|}{\sqrt{x_i}}$

⋆ *Ejercicio 2:*
Para a), como se tiene una x muy pequeña, la función no pasará 1, ni

2-

We will study the following function:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \tag{2.96}$$

(a) Start by plotting the function, using a grid of the form $x = 0.1 \times i$ for $i = 1, 2, \ldots, 100$. This should give you some idea of the values you should expect for $f(x)$ at small x.
(b) Verify your previous hunch by taking the limit $x \to 0$ and using L'Hôpital's rule.
(c) Now, see what value you find for $f(x)$ when $x = 1.2 \times 10^{-8}$. Does this make sense, even qualitatively?
(d) Use a trigonometric identity that enables you to avoid the cancellation. Evaluate the new function at $x = 1.2 \times 10^{-8}$ and compare with your analytical answer for $x \to 0$.

siquiera llegará a 1.
b) Tomando el límite de x que tiende a cero,
$\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x^2}) = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{2x}) =$ indeterminación

c) Tomando $x = 1{,}2 \times 10^{-8}$
$\longrightarrow f(x) = \frac{1-\cos 1{,}2\times 10^{-8}}{(1{,}2\times 10^{-8})^2} = 0$

Tiene sentido pues $1{,}2 \times 10^{-8}$ es un número muy pequeño, en la calculadora termina siendo 'redondeado' a cero.
d) Haciendo una sustitución trigonométrca en f(x), donde $\sin \frac{t}{2}^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \longrightarrow (2) \sin \frac{t}{2}^2 = 1 - \cos t$ Entonces, el límite queda como $\lim_{x \to 1{,}2 \times 10^{-8}} (\frac{2 \cos \frac{x}{2}^2}{x^2}) \approx 1{,}38 \times 10^{16}$

0.2. Tarea de números duales

1. ***Calcular la derivada en x = 0.5 de*** $f(x) = e^{\sin 2x}$
Sabiendo que $a = (a, a\prime)$, que $e^a = e^(a, a\prime) = (e^a, a\prime e^a)$ y que
$\sin a = \sin(a, a\prime) = (\sin a, a\prime \cos a)$, entonces:

$$e^{(\sin 2x, 2 \cos 2x)} = (e^{\sin 2x}, 2 \cos 2x e^{\sin 2x}) \tag{1}$$

Evaluando la expresión en x = 0.5, tenemos que
$f\prime(0{,}5) = (e^{\sin 1}, 2 \cos 1 e^{\sin 1})$
Esto quiere decir que la derivada de
$e^{\sin 1} = 2 \cos 1 e^{\sin 1} = 2{,}03490$

2. ***Calcular la derivada en x = 0.5 de*** $f(x) = x^2 \sin x$
$f(x) = (x^2, 2x) \times \sin(x, 1) = (x^2, 2x) \times (\sin x, \cos x)$
Por la propiedad de la multiplicación en números duales:
$a \times b = (ab, ab\prime + a\prime b)$
$\longrightarrow (x^2 \sin x, x^2 \cos x + 2x \sin x)$
Evaluando en x = 0.5, tenemos que
cuando $f(x) = x^2 \sin x$ su derivada es
$f\prime(0{,}5) = (0{,}5)^2 \cos 0{,}5 + \sin 0{,}5 = 0{,}25(1) + 8{,}726 \times 10^{-3} \approx 0{,}25872$

3. ***Calcular la derivada en x = 0.5 de*** $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$
Con este ejercicio tuve un poco de duda, pero lo que hice fue:
$f(x) = (\sin x, \cos x)^{(\tan x, (\sec x)^2)} \longrightarrow (\tan x \sin x, \cos x(\sec x)^2)) = (\sec x, \sec x)$
Evaluando en el punto x = 0.5,
$f\prime(0{,}5) = (\sec 0{,}5, \sec 0{,}5)$
Esto nos dice que la derivada en el punto x = 0.5 de $\sec x = 1$

0.3. Tarea derivación hacia adelante y hacia atrás

- **Obtener la expresión a segundo orden de la primera derivada caso discreto derecho**
Usando la extrapolación de Richardson que es
$G = \frac{2^P g(\frac{h}{2} - g(h)}{2^P - 1} + O(h^{P+Q})$
Usando la expresión de la derivada hacia adelante de primer orden:
$g(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
Tomamos que P = 1 ya que la derivada de primer orden, sustituimos en G y
$G = \frac{2^1 g(\frac{h}{2} - g(h)}{2^1 - 1} + O(h^{2*1}) \longrightarrow = 2g(\frac{h}{2} - g(h) + O(h^2)$

Sustituyendo empleando la fórmula de derivada hacia adelante:
$G = 2(\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x)}{\frac{h}{2}} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}) = 4(\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}) =$
$4(\frac{f(x+\frac{h}{2})-4f(x)-f(x+h)+f(x)}{h}) = 4(\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x+h)-3f(x)}{h}) + O(h^2)$
Esto significa que es de sgundo orden pues el error está elevado al segundo orden (h^2). Entonces, teniendo h^2, expresamos h como 2h al momento de comparar las fórmulas y tenemos
$4(\frac{f(x+h)-f(x+2h)-3f(x)}{2h}) + O(h^2) = \frac{1}{2h} - f_{i+2} + 4_{fi+1} - 3_{fi}$

- ⋆ **Obtener la expresión de la segunda derivada caso discreto derecho**
  Haciendo los debidos procedimientos con series de Taylor para $f(x+h)$ y $f(x-h)$ podemos obtener las expresiones
  $f(x+h) = f(x) + hf\prime(x) + \frac{h^2}{2}f\prime\prime(x) + O(h^3)$
  $f(x+h) = f(x) - hf\prime(x) + \frac{h^2}{2}f\prime\prime(x) + O(h^3)$
  Sumando las expresiones nos queda
  $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f\prime\prime(x) + O(h^3)$
  $\longrightarrow$ Despejando $f\prime\prime(x)$
  $\longrightarrow f\prime\prime(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} + O(h)$

- ⋆ **Obtener la expresión de la cuarta derivada caso discreto derecho**
  Cancelando los términos impares y utilizando
  $f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2})$ y $f(x+h) + f(x-h)$

  $\longrightarrow f(x+\frac{h}{2}) = f(x) + \frac{h}{2}f\prime(x) + \frac{h^2}{8}f\prime\prime(x) + \frac{h^3}{48}f\prime\prime\prime(x) + \frac{h^4}{384}f^{(4)}(x) + ...$
  $\longrightarrow f(x-\frac{h}{2}) = f(x) - \frac{h}{2}f\prime(x) + \frac{h^2}{8}f\prime\prime(x) - \frac{h^3}{48}f\prime\prime\prime(x) + \frac{h^4}{384}f^{(4)}(x) + ...$
  $\longrightarrow f(x+h) = f(x) + hf\prime(x) + \frac{h^2}{2}f\prime\prime(x) + \frac{h^3}{6}f\prime\prime\prime(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + ...$
  $\longrightarrow f(x-h) = f(x) - hf\prime(x) + \frac{h^2}{2}f\prime\prime(x) - \frac{h^3}{6}f\prime\prime\prime(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + ...$
  Sumando cada expresión correspondiente
  $f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2}) = 2f(x) + \frac{h^2}{4}f\prime\prime(x) + \frac{h^4}{192}f^{(4)}(x) + O(h^5)$
  $f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f\prime\prime(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O(h^5)$
  Sumándolos y despejando la $f^{(4)}(x)$
  $\longrightarrow f^{(4)}(x) = \frac{192}{17h^2}\left[f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2}) + f(x+h) + f(x-h) - 4f(x) - 5\frac{h^2}{4}f\prime\prime(x)\right]$