MATEMÁTICAS PARA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

Decimosegunda edición

ERNEST F. HAEUSSLER, JR. | RICHARD S. PAUL | RICHARD J. WOOD

PEARSON Prentice Hall ®

Reglas algebraicas para los números reales

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a(bc)=(ab)c$$
$$a(b+c)=ab+ac$$
$$a(b-c)=ab-ac$$
$$(a+b)c=ac+bc$$
$$(a-b)c=ac-bc$$
$$a+0=a$$
$$a\cdot 0=0$$
$$a\cdot 1=a$$
$$a+(-a)=0$$
$$-(-a)=a$$
$$(-1)a=-a$$
$$a-b=a+(-b)$$
$$a-(-b)=a+b$$
$$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$$
$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$$
$$(-a)b=-(ab)=a(-b)$$
$$(-a)(-b)=ab$$
$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$$
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$
$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a/b}{c/d}=\frac{ad}{bc}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}\quad(c\neq 0)$$

Exponentes

$$a^0=1\quad(a\neq 0)$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq 0)$$
$$a^m a^n=a^{m+n}$$
$$(a^m)^n=a^{mn}$$
$$(ab)^n=a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$
$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Radicales

$$\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$$
$$(\sqrt[n]{a})^n=a,\ \sqrt[n]{a^n}=a\quad(a>0)$$
$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{m/n}$$
$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

Productos especiales

$$x(y+z)=xy+xz$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$
$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$
$$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$

Fórmulas de factorización

$$ab+ac=a(b+c)$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf\ (x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f\ (x) \pm g\ (x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g\ (x) + g(x)f\ (x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f\ (x) - f(x)g\ (x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$$

Fórmulas de integración

Se supone que u es una función diferenciable de x.

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq 1$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0$$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Líneas rectas

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(fórmula de la pendiente)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma punto-intersección)
$x = \text{constante}$	(recta vertical)
$y = \text{constante}$	(recta horizontal)

Desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$.

Logaritmos

$\log_b x = y$ si y sólo si $x = b^y$

$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$

$\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

$\log_b m^r = r \log_b m$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^r = r$

$b^{\log_b m} = m$

$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Conteo

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Alfabeto griego

alfa	A	α	nu	N	ν
beta	B	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	ómicron	O	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
épsilon	E	ϵ	ro	P	ρ
zeta	Z	ζ	sigma	Σ	σ
eta	H	η	tau	T	τ
theta	Θ	θ	ípsilon	Υ	υ
iota	I	ι	fi	Φ	ϕ, φ
kappa	K	κ	ji	X	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	M	μ	omega	Ω	ω

Matemáticas para administración y economía

Matemáticas para administración y economía

Decimosegunda edición

Ernest F. Haeussler, Jr.
The Pennsylvania State University

Richard S. Paul
The Pennsylvania State University

Richard J. Wood
Dalhousie University

TRADUCCIÓN

Jesús Elmer Murrieta Murrieta
Maestro en Investigación de Operaciones
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Morelos

REVISIÓN TÉCNICA

Salvador Sandoval Bravo
Semei Leopoldo Coronado Ramírez
Juan Manuel Rodríguez Alfaro
Héctor Arturo Caramón Loyo
Víctor Hugo Gualajara Estrada
Departamento de Métodos
Cuantitativos Centro Universitario
de Ciencias Económico
Administrativas
Universidad de Guadalajara, México

Angélica Holguín López
Instituto de Ciencias Sociales
y Administración
Universidad Autónoma de
Ciudad Juárez, México

José Cruz Ramos Báez
Departamento de Matemáticas
Universidad Panamericana, México

Irma Beatriz Rumbos Pellicer
Departamento Académico de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Leopoldo Xavier Cárdenas González
Facultad de Ingeniería y Matemáticas
Universidad del Valle de Atemajac,
Guadalajara, México

María Graciela Scápolla
María Rosa Meoli
Facultad de Ciencias Económicas
Pontificia Universidad Católica Argentina

Jorge Augusto Pérez Alcázar
Departamento de Matemáticas
Escuela de Administración de Negocios,
Bogotá, Colombia

María Nubia Quevedo Cubillos
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Militar Nueva Granada,
Bogotá, Colombia

Sergio Iván Restrepo Ochoa
Mauricio Restrepo López
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia,
Medellín, Colombia

Vilma Ortiz de Jofre
Departamento de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Rafael Landívar,
Guatemala

Manuel Emilio Fuenzalida Álamos
Miguel Ángel Olivares Barrientos
Facultad de Ciencias y Tecnología
Universidad Adolfo Ibáñez, Chile

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Haeussler, Jr., Ernest F.; Richard S. Paul y Richard J. Wood

Matemáticas para administración y economía.
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1147-9

Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 920

ISBN 013-240422-2

Edición en español:
Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

Edición en inglés:
Acquisitions Editor: *Chuck Synovec*
Vice President and Editorial Director, Mathematics: *Christine Hoag*
Project Manager: *Michael Bell*
Production Editor: *Debbie Ryan*
Senior Managing Editor: *Linda Mihatov Behrens*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Manufacturing Buyer: *Maura Zaldivar*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Marketing Manager: *Wayne Parkins*
Marketing Assistant: *Jennifer de Leeuwerk*
Editorial Assistant/Print Supplements Editor: *Joanne Wendelken*
Art Director: *Maureen Eide*
Interior Designer: *Dina Curro*
Cover Designer: *Kris Carney*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Cover Photo: *Ian Cumming/Axiom Photographic Agency/Getty Images*
Manager,Cover Visual Research & Permissions: *Karen Sanatar*
Director, Image Resource Center: *Melinda Patelli*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission Coordinator: *Nancy Seise*
Photo Researcher: *Rachel Lucas*
Art Studio: *Laserwords*

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2008

Atlacomulco 500-5° piso
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519,
Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

PEARSON Educación ®

ISBN 10: 970-26-1147-4
ISBN 13: 978-970-26-1147-9
Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

Para Lesly

AGRADECIMIENTOS

Pearson Educación agradece a los centros de estudios y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Matemáticas para administración y economía.*

MÉXICO

ESCUELA BANCARIA Y COMERCIAL DISTRITO FEDERAL
Luis Guillermo Serrano Rolón
Fernando Márquez Chávez

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CIUDAD JUÁREZ
Josefina Reyes Lomelí
José Jiménez Jiménez

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TEPIC
Víctor Manuel Lamas Huízar

IPN ESCA TEPEPAN DISTRITO FEDERAL
Yolanda Chávez G.

ITESM CAMPUS CHIHUAHUA
Sofía Flores
Carlos Manzanera Quintana
Gabriela Athanea Luna

ITESM CAMPUS CIUDAD DE MÉXICO
Andrés González Nucamendi
Marlene Aguilar Abalo

ITESM CAMPUS CIUDAD JUÁREZ
Judith Camargo

ITESM CAMPUS ESTADO DE MÉXICO
Faustino Yescas Martínez
Fernando Vallejo

ITESM CAMPUS PUEBLA
Idali Calderón Salas
Gilberto Hernández Herrera

ITESM CAMPUS QUERÉTARO
Sithanantham Kanthinathinathan
Lauro Ayala Centeno
Dulce Hernández Méndez
María Rosa Hernández Mondragón
María Griselda Tapia Mercado

ITESM CAMPUS SANTA FÉ
Teresa de Jesús Cotera Rivera
Sergio Rogelio Morales Vargas

UNIVERSIDAD ANÁHUAC DEL SUR DISTRITO FEDERAL
Ana María Bravo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ
Eduardo Encerrado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUADALAJARA
Mario Mesino González

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE ATEMAJAC (UNIVA)
Ignacio Navarro Ruiz
Felipe Oregel Sánchez
Mónica Juárez Valenzuela
Leopoldo Xavier Cárdenas González

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA DISTRITO FEDERAL
Humberto Mondragón Suárez
Cristóbal Cárdenas Oviedo
Víctor Manuel Mendoza Olivares
Mariangela Borello
Gretel Ana Keller Cortina
Lázaro Francisco Vinicio Mendive Abreu
Esperanza Rojas Oropeza
Hugo Serrato González
Aurelio Morales Macías
Ramiro Garibay Jiménez
Efraín González Castillo
Irma Irián García Salazar
Alejandro Guillén Santiago
Marco Antonio Rodríguez Vélez
Patricia Novo Covarrubias
Erik Leal Enríquez
Miguel Ángel Álvarez Rodríguez
Daniel Smeke Zwaiman

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA
Lourdes Gasca

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA PUEBLA
Ramiro Bernal Cuevas
Verónica Neve González
Alfonso Álvarez Grayeb

UNIVERSIDAD LA SALLE DISTRITO FEDERAL
Cuauhtémoc Tenopala Granados

UNIVERSIDAD PANAMERICANA GUADALAJARA
Alberto Lancaster Jones
Cristina Eccius Wellmann
Carlos Guillermo Cedeño

UNIVERSIDAD PANAMERICANA DISTRITO FEDERAL
José Cruz Ramos Báez
Mariana Casillas
Ramón Díaz Nava
Fernando Cruz
Breno Madero
Mario Eduardo Martínez
Rosa Lilian Cota
María de Guadalupe Arroyo Santiesteban
Griselda Dávila Aragón
Ignacio García Juárez
Irén Castillo Saldaña
Vinicio Pérez Fonseca

UNIVERSIDAD POPULAR AUTÓNOMA DEL ESTADO DE PUEBLA (UPAEP)
Alejandro Narváez
Judith Águila Mendoza

COLOMBIA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Jamer Carmona López
Janeth Carolina Rendón Aguirre
Luis Eduardo Tobón Cardona
James Serna Mesa
Camilo Restrepo Estrada

UNIVERSIDAD CEIPA
Pablo Gallo
Francisco Jaramillo

UNIVERSIDAD DE LA SALLE
Marco Fidel Castillo

ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN DE NEGOCIOS-EAN
María Teresa Vargas

UNIVERSIDAD CENTRAL
Myriam Rodríguez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA
Nohora Nájera

COLEGIO UNIVERSIDAD MAYOR DE CUNDINAMARCA
José Diafonte Gutiérrez Muñoz

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA
Edgar Pinto Montenegro
Jose Tito Turga Arévalo
Juan de Jesús Díaz
Juan de Jesús Guerrero

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA-UPTC-TUNJA
Publio Suárez Sotomonte
Miguel Díaz Moreno
José Francisco Leguizamon

UNIVERSIDAD SUR COLOMBIANA
Julio Roberto Cano Barrera

UNIVERSIDAD DE LA SABANA
Mauricio Restrepo

UNIVERSIDAD PILOTO DE COLOMBIA
Marisol Camacho
Esperanza Florez
Carlos Garzón

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
Gladys Villamarín
Hilda González
Óscar Prada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
Álvaro Suárez
José René Camacho

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
Álvaro Moros
Fabio Molina

UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS
Héctor Ruiz

ECUADOR

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
Flavio Parra
Patricio Ruales

ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO
Arturo Zurita
Iván Ñúnez
Verónica Reina

UNIVERSIDAD TÉCNICA PARTICULAR DE LOJA
Lupe Beatriz Espejo

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA EQUINOCCIAL
Mauricio García

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR
Germán Luna
Casar Monroy

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO
Eduardo Alba

EL SALVADOR

ESCUELA SUPERIOR DE ECONOMÍA Y NEGOCIOS (ESEN)
Mario Morales
Francisco Montes

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE OCCIDENTE (UNICO)
Aroldo Linares
Víctor Hugo Quintana

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR (UES)
Óscar Méndez

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA DE ORIENTE (UES)
Rolando Montesinos
Pedro Flores
Sonia de Martínez
María Olga de Martínez

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE EL SALVADOR
Julio Orantes
Roberto Mendoza
Genaro Hernández

PERÚ

UNIVERSIDAD DE SAN MARTÍN DE PORRES
Randy Guardales Vásquez

UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS
Agustín Curo Cubas
Gloria Espinoza Colán

CONTENIDO

PREFACIO

La decimosegunda edición de *Matemáticas para administración y economía* continúa proporcionando los fundamentos matemáticos para los estudiantes de negocios, economía, y ciencias sociales y de la vida. Inicia con temas que no son de cálculo, como funciones, ecuaciones, matemáticas financieras, álgebra de matrices, programación lineal y probabilidad. Después avanza a través del cálculo de una y de varias variables, incluyendo las variables aleatorias continuas. Las demostraciones técnicas, las condiciones y comparaciones se describen de manera suficiente pero sin abundar demasiado. La filosofía que guía este texto nos ha llevado a incluir aquellas demostraciones y cálculos generales que den luz sobre la manera como se realizaron los cálculos correspondientes en los problemas aplicados. A menudo también se dan argumentos intuitivos informales.

Cambios en la organización de la decimosegunda edición

Los cambios en la organización de esta edición reflejan los comentarios de usuarios y revisores. El material del antiguo Apéndice A (como apareció en las ediciones 9 a 11) se ha incluido en el cuerpo del texto. En particular, la Notación de la sumatoria ahora aparece como la sección 5 del capítulo 1. La antigua sección de la Sumatoria del capítulo 14 también se ha incluido en la nueva sección 5 del capítulo 1. Muchos profesores opinaron que hacer coincidir la introducción de la notación de la sumatoria con otros conceptos importantes como la integral, podría representar una distracción. Nuestra intención al ubicar la sumatoria en el capítulo 1 es que este tema obtenga un estatus más apropiado. La notación de la sumatoria es simple, pero como será nueva para muchos alumnos, revitalizará un capítulo que de otra manera sólo sería un repaso para la mayoría de los estudiantes. Contar con la notación de la sumatoria al inicio del libro nos permite practicarla varias veces, de manera notable en el trabajo sobre análisis combinatorio y probabilidad (capítulo 8), antes de volverse indispensable, junto con la integral (capítulo 14).

El tema de interés compuesto continuamente se ha movido del capítulo 10 para convertirse en la sección 3 del capítulo 5, que está dedicado a las matemáticas financieras. Como las funciones exponenciales y el número *e* se introducen en el capítulo 4, se trata de un movimiento bastante natural que permite un tratamiento más unificado de las tasas de interés. Algunos profesores consideraron importante poder comparar el interés compuesto continuamente con el interés compuesto ordinario mientras este último todavía está fresco en la mente de los estudiantes. Sin embargo, las anualidades continuas aún se encuentran en el capítulo 15 como una aplicación de la integración.

Por último, diferenciabilidad y continuidad, que antes era una sección independiente, ahora se incluye como parte de la sección 1 en el capítulo 11, y se ha eliminado la sección "un comentario sobre funciones homogéneas" del capítulo 17.

Aplicaciones

Este libro incluye una gran cantidad y variedad de aplicaciones, destinadas al lector; de esta forma, los estudiantes ven cómo pueden utilizar las matemáticas que están aprendiendo. Estas aplicaciones cubren áreas tan diversas como administración, economía, biología, medicina, sociología, psicología, ecología, estadística, ciencias de la tierra y arqueología. Muchas de estas situaciones de la vida cotidiana se tomaron de la literatura existente, y están documentadas mediante referencias (en ocasiones de la Web). En algunas aplicaciones se ofrecen los antecedentes y el contexto con el fin de estimular el interés en el tema. Sin embargo, el texto es independiente, en el sentido de que no supone un conocimiento previo de los conceptos sobre los cuales están basadas esas aplicaciones. El elemento **Principios en práctica** proporciona a los estudiantes aún más aplicaciones. Ubicados en los márgenes (ladillos) de los capítulos 1 a 17, estos ejercicios adicionales ofrecen a los estudiantes aplicaciones del mundo real y más oportunidades para ver el material del capítulo puesto en la práctica. Un icono indica los problemas de Principios en práctica que pueden resolverse mediante el uso de una calculadora graficadora. Las respuestas a estos problemas específicos aparecen al final del texto.

Se ha simplificado el lenguaje y la terminología

En esta edición se ha hecho un esfuerzo especial para utilizar terminología adecuada, sin introducir de manera simultánea una palabra o frase alternativa conectada mediante la palabra *o*. Por ejemplo, cuando se presenta la terminología para un punto (a, b) en el plano, "a se llama *abscisa* o *coordenada* x ..." se ha sustituido por "a se llama *coordenada* x ...". En general, se ha tratado de emplear un lenguaje más coloquial cuando esto puede hacerse sin sacrificar la precisión matemática.

Pedagogía mejorada

Al revisar la sección 9.3, sobre Cadenas de Markov, nos dimos cuenta que se simplifica considerablemente el problema de encontrar vectores de estado estable si se escriben vectores de estado como columnas en lugar de filas. Esto requiere que una matriz de transición $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ tenga

$$t_{ij} = \text{probabilidad de que el siguiente estado sea } i \text{ dado que el estado actual es } j$$

pero evita las transposiciones artificiales posteriores.

En el capítulo 13, que trata sobre el trazado de curvas, se ha incrementado el uso de *gráficas de signo*. En particular, una gráfica de signo para una primera derivada siempre está acompañada por una línea adicional que interpreta los resultados para la función que será graficada. Así, en un intervalo donde se registra '+' para f' también se registra '/' para f y en un intervalo donde se registra '-' para f' también se registra '\' para f. Las cadenas resultantes de dichos elementos, por ejemplo /\/, con adornos adicionales que se describen en el texto, proporcionan un bosquejo muy preliminar de la curva en cuestión. Reconocemos que ésta es una técnica de pizarrón usada por muchos profesores pero que aparece muy pocas veces en libros de texto.

A lo largo del texto se ha conservado el popular enfoque "Ahora resuelva el problema n" de otros libros de Pearson Educación. El objetivo es que después de un ejemplo los estudiantes resuelvan un problema al final de la sección que refuerce las ideas del ejemplo. En su mayoría, estos problemas tienen número impar, de modo que los alumnos pueden verificar su trabajo con las respuestas que aparecen al final del texto.

En el mismo sentido, se ha extendido el uso de advertencias precautorias para el estudiante. Estas notas se indican con el título *ADVERTENCIA* y destacan errores que se cometen con frecuencia. Como sucedía con anterioridad, las **definiciones** se establecen y se muestran de manera clara. Los conceptos importantes, así como las reglas y fórmulas principales, se colocan dentro de recuadros para enfatizar su importancia.

Cada capítulo (excepto el 0) tiene una sección de repaso con una lista de términos y símbolos importantes, un resumen y una gran cantidad de problemas de repaso. En esta decimosegunda edición se incluye una lista que hace referencia a los ejemplos clave que corresponden a cada grupo de términos y símbolos relevantes.

Las respuestas a los problemas con número impar aparecen al final del libro. Para muchos de los problemas de diferenciación, las respuestas aparecen en forma "no simplificada" y "simplificada". (Por supuesto, "simplificada" es en cualquier caso un término subjetivo cuando se aplica a expresiones matemáticas, que tienden a presuponer la naturaleza de los cálculos subsecuentes con tales expresiones.) Esto permite a los estudiantes verificar con rapidez su trabajo.

Ejemplos y ejercicios

Se resuelven con detalle más de 850 ejemplos. Algunos incluyen una *estrategia* diseñada de manera específica para guiar al estudiante a través de la logística de la solución, antes de obtener ésta. Se incluye una gran cantidad de diagramas (casi 500) y ejercicios (más de 5000); de estos últimos, más de 900 son nuevos en esta edición. En cada serie de ejercicios, los grupos de problemas están organizados en orden creciente de dificultad. En muchos casos los problemas van desde los que sirven para practicar y se resuelven en forma mecánica, hasta los más interesantes que obligan a reflexionar. También se incluye gran variedad de problemas de la vida cotidiana con datos reales. Se ha hecho un esfuerzo considerable para alcanzar el equilibrio entre los ejercicios de entrenamiento y los problemas que requieren de la integración de los conceptos aprendidos.

Tecnología

Con el propósito de que el estudiante aprecie el valor de la *tecnología* actual, a lo largo del texto se presenta material opcional para calculadoras graficadora, tanto en la exposición como en los ejercicios, por varias razones: como una herramienta matemática, como una ayuda computacional y para visualizar y reforzar conceptos. Aunque el análisis de la tecnología correspondiente se ilustra con las pantallas de una calculadora TI-83 Plus, el enfoque es suficientemente general, de modo que pueda aplicarse en otras calculadoras graficadoras.

En las series de ejercicios, los problemas que se resuelven con calculadora se indican por medio de un icono como el que aparece al margen de este párrafo. Para dar al instructor flexibilidad en la planeación de tareas, estos problemas están colocados al final de las series de ejercicios.

Planeación del curso

Existe un número considerable de cursos que pueden utilizar este libro como texto. Como los profesores planifican el curso para que sirva a las necesidades específicas de una clase y de un temario en particular, no proporcionaremos directrices detalladas. Sin embargo, dependiendo de los antecedentes de los estudiantes, algunos profesores elegirán omitir el capítulo 0 (Repaso de álgebra).

Un programa que incluya tres trimestres de matemáticas, para estudiantes de administración bien preparados, puede iniciar un primer curso con el capítulo 1 y con los temas que le interese de los capítulos 2 a 9. Por ejemplo, si los estudiantes están tomando al mismo tiempo un curso de finanzas, podría optar por excluir el capítulo 5, que trata de matemáticas financieras (y así evitar la duplicidad de material para créditos distintos). Otros podrían considerar que el capítulo 7, que está dedicado a la programación lineal, incluye más material del que requieren sus estudiantes. En este caso, se puede prescindir de secciones específicas como las 7.3, 7.5 y 7.8, sin perder continuidad. Por otro lado, en la sección 1.1 se introducen algunos términos de administración, como ingresos totales, costo fijo, costo variable y rendimiento, que son recurrentes a lo largo del libro. De manera similar, en la sección 3.2 se introducen las nociones sobre las ecuaciones de oferta y demanda, y en la sección 3.6 se analiza el punto de equilibrio y el punto de quiebre, todos ellos de importancia fundamental para las aplicaciones de negocios.

Un segundo curso, de un solo trimestre, sobre cálculo diferencial podría utilizar el capítulo 10 sobre Límites y continuidad, seguido por los tres capítulos de diferenciación: del 11 al 13 . Aquí, la sección 12.6, sobre el Método de Newton, puede omitirse sin perder continuidad, mientras que otros profesores pueden preferir revisar el capítulo 4, que habla sobre Funciones exponenciales y logarítmicas antes de su estudio como funciones diferenciales.

Por último, con los capítulos 14 a 17 podría definirse un tercer curso de un solo trimestre sobre cálculo integral, con una introducción al cálculo multivariado. En un curso con aplicaciones resulta conveniente enfatizar el uso de tablas para encontrar integrales, y por ende el uso de técnicas “por partes” y “de fracciones parciales”, las secciones 15.1 y 15.2 respectivamente, deben considerarse como opcionales. El capítulo 16 ciertamente no es prerrequisito para el capítulo 17, y la sección 15.7, que trata de las integrales impropias, puede omitirse con seguridad si no se cubre el capítulo 16.

Las escuelas con dos periodos académicos por año tienden a dar a los estudiantes de administración un semestre dedicado a las matemáticas finitas y otro destinado al cálculo. Se recomiendan los capítulos 1 a 9 para el primer curso, iniciando donde lo permita la preparación de los estudiantes, y los capítulos 10 a 17 para el segundo semestre —sin incluir el material opcional.

Suplementos

El *Manual de soluciones del profesor* tiene respuestas desarrolladas para todos los problemas, incluyendo los ejercicios de Principios en práctica y los ejemplos de final de capítulo.

El *Test Item File* (Archivo de preguntas de examen), usado por algunos profesores proporciona más de 1700 preguntas de examen, clasificadas por capítulo y por sección. Incluye una herramienta de edición que permite agregar o modificar preguntas. También para el uso de los maestros contamos con el *TestGen*, un generador de exámenes algorítmico, completamente editable, que permite la creación de múltiples pruebas. Cabe mencionar que todo el material complementario se encuentra sólo en idioma inglés.

Reconocimientos

Agradecemos a los siguientes colegas su contribución con comentarios y sugerencias valiosos para el desarrollo de este libro:

E. Adibi (*Chapman University*); R. M. Alliston (*Pennsylvania State University*); R. A. Alo (*University of Houston*); K. T. Andrews (*Oakland University*); M. N. de Arce (*University of Puerto Rico*); E. Barbut (*University of Idaho*); G. R. Bates (*Western Illinois University*); D. E. Bennett (*Murray State University*); C. Bernett (*Harper College*); A. Bishop (*Western Illinois University*); P. Blau (*Shawnee State University*); R. Blute (*University of Ottawa*) S. A. Book (*California State University*); A. Brink (*St. Cloud State University*); R. Brown (*York University*); R. W. Brown (*University of Alaska*); S. D. Bulman-Fleming (*Wilfrid Laurier University*); D. Calvetti (*National College*); D. Cameron (University of Akron); K. S. Chung (*Kapiolani Community College*); D. N. Clark (*University of Georgia*); E. L. Cohen (*University of Ottawa*); J. Dawson (*Pennsylvania State University*); A. Dollins (*Pennsylvania State University*); G. A. Earles (*St. Cloud State University*); B. H. Edwards (*University of Florida*); J. R. Elliott (*Wilfrid Laurier University*); J. Fitzpatrick (*University of Texas at El Paso*); M. J. Flynn (*Rhode Island Junior College*); G. J. Fuentes (*University of Maine*); L. Gerber (*St. John's University*); T. G. Goedde (*The University of Findlay*); S. K. Goel (*Valdosta State University*); G. Goff (*Oklahoma State University*); J. Goldman (*DePaul University*); J. T. Gresser (*Bowling Green State University*); L. Griff (*Pennsylvania State University*); F. H. Hall (*Pennsylvania State University*); V. E. Hanks (*Western Kentucky University*); R. C. Heitmann (*The University of Texas at Austin*); J. N. Henry (*California State University*); W. U. Hodgson (*West Chester State College*); B. C. Horne. Jr. (*Virginia Polytechnic Institute and State University*); J. Hradnansky (*Pennsylvania State University*); P. Huneke (*The Ohio State University*); C. Hurd (*Pennsylvania State University*); J. A. Jimenez (*Pennsylvania State University*); W. C. Jones (*Western Kentuckv University*); R. M. King (*Gettysburg College*); M. M. Kostreva (*University of Maine*); G. A. Kraus (*Gannon University*); J. Kucera (*Washington State University*); M. R. Latina (*Rhode Island Junior College*); P. Lockwood-Cooke (*West Texas A&M University*); J. F. Longman (*Villanova University*); I. Marshak (*Loyola University of Chicago*); D. Mason (*Elmhurst College*); F. B. Mayer (*Mt. San Antonio College*); P. McDougle (*University of Miami*); F. Miles (*California State University*); E. Mohnike (*Mt. San Antonio College*); C. Monk (*University of Richmond*); R. A. Moreland (*Texas Tech University*); J. G. Morris (*University of Wisconsin-Madison*); J. C. Moss (*Paducah Community College*); D. Mullin (*Pennsylvania State University*); E. Nelson (*Pennsylvania State University*); S. A. Nett (*Western Illinois University*); R. H. Oehmke (*University of Iowa*); Y. Y. Oh (*Pennsylvania State University*); J. U. Overall (*University of La Verne*); A. Panayides (*William Patterson University*); D. Parker (*University of Pacific*); N. B.

Patterson (*Pennsylvania State University*); V. Pedwaydon (*Lawrence Technical University*); E. Pemberton (*Wilfrid Laurier University*); M. Perkel (*Wright State University*); D. B. Priest (*Harding College*); J. R. Provencio (*University of Texas*); L. R. Pulsinelli (*Western Kentucky University*); M. Racine (*University of Ottawa*); N. M. Rice (*Queen's University*); A. Santiago (*University of Puerto Rico*); J. R. Schaefer (*University of Wisconsin-Milwaukee*); S. Sehgal (*The Ohio State University*); W. H. Seybold. Jr. (*West Chester State College*); G. Shilling (*The University of Texas at Arlington*); S. Singh (*Pennsylvania State University*); L. Small (*Los Angeles Pierce College*); E. Smet (*Huron College*); J. Stein (*California State University, Long Beach*) M. Stoll (*University of South Carolina*); T. S. Sullivan (*Southern Illinois University Edwardsville*); E.A. Terry (*St. Joseph's University)*; A. Tierman (*Saginaw Valley State University*); B. Toole (*University of Maine*); J. W. Toole (*University of Maine*); D. H. Trahan (*Naval Postgraduate School*); J. P. Tull (*The Ohio State University*); L. O. Vaughan, Jr. (*University of Alabama in Birmingham*); L. A. Vercoe (*Pennsylvania State* University); M. Vuilleumier (*The Ohio State University*); B. K. Waits (*The Ohio State University*); A. Walton (*Virginia Polytechnic Institute and State University*); H. Walum (*The Ohio State University*); E. T. H. Wang (*Wilfrid Laurier University*); A. J. Weidner (*Pennsylvania State University*); L. Weiss (*Pennsylvania State University*); N. A. Weigmann (*California State University*); S. K. Wong (*Ohio State University*); G. Woods (*The Ohio State University*); C. R. B. Wright (*University of Oregon*); C. Wu (*University of Wisconsin-Milwaukee*); B. F. Wyman (*Ohio State University*).

Algunos ejercicios se tomaron de los problemas utilizados por los estudiantes de la Wilfrid Laurier University. Deseamos extender agradecimientos especiales al Departamento de Matemáticas de la Wilfrid Laurier University por conceder permiso a Prentice Hall para utilizar y publicar este material, y también agradecer a Prentice Hall por permitir utilizarlo.

Por último, expresamos nuestra sincera gratitud a los profesores y coordinadores de cursos de la Ohio State University y la Columbus State University, quienes tuvieron un gran interés en ésta y otras ediciones, y ofrecieron una gran cantidad de valiosas sugerencias.

En especial agradecemos a Cindy Trimble de C Trimble & Associates por su cuidadosa revisión de los manuscritos, de los manuales de solución y las páginas de respuestas. Su trabajo fue extraordinariamente detallado y útil para los autores.

Ernest F. Haeussler, Jr.
Richard S. Paul
Richard J. Wood

0

REPASO DE ÁLGEBRA

Aplicación práctica Modelado del comportamiento de una celda de carga

Lesley Griffith trabaja para una compañía de artículos de navegación en Antibes, Francia. Con frecuencia, necesita examinar recibos en los que sólo se reporta el pago total y después debe determinar la cantidad del total que representa el impuesto al valor agregado de Francia, conocido como el TVA que significa "Taxe à la Valeu Ajouté". La tasa del TVA francés es de 19.6%. Muchos de los negocios de Lesley provienen de proveedores o compradores italianos, por lo que debe lidiar con un problema similar en el caso de los recibos que contienen el impuesto italiano a las ventas, que es del 18%.

Un problema de este tipo parece reclamar una fórmula, pero mucha gente es capaz de resolverlo con el uso de números específicos, sin conocer la fórmula. Por lo tanto, si Lesley tiene un recibo francés de 200 euros, podría razonar de la siguiente manera: si el artículo cuesta 100 euros antes del impuesto, entonces el recibo final sería por 119.6 euros con un impuesto de 19.6 —y después en un acto de fé— *el impuesto en un recibo total de 200 es a 200 como 19.6 es a 119.6.* Establecido en forma matemática,

$$\frac{\text{impuesto en } 200}{200} = \frac{19.6}{119.6} \approx 16.4\%$$

En este punto es bastante claro que la cantidad de TVA en un recibo de 200 euros es aproximadamente el 16.4% de 200 euros, lo cual es de 32.8 euros, aproximadamente. De hecho, mucha gente podrá ahora inferir que

$$\text{impuesto en } R = R\left(\frac{p}{100 + p}\%\right)$$

da el impuesto en un recibo R, cuando la tasa del impuesto es p%. Así, si Lesley está satisfecha con su deducción, puede multiplicar sus recibos italianos por $\frac{18}{118}$% para determinar el impuesto que contienen.

Por supuesto, la mayoría de la gente no recuerda las fórmulas por mucho tiempo y no se siente segura si basa un cálculo monetario en un acto de fé. El propósito de este capítulo es revisar el álgebra necesaria para que el estudiante pueda construir sus propias fórmulas, *con confianza,* cuando las requiera. En particular se obtendrá la fórmula de Lesley, sin ninguna invocación misteriosa de la proporción, a partir de principios con los que todos están familiarizados. Este uso del álgebra aparecerá a lo largo del libro, a medida que se realicen *cálculos generales con cantidades variables*.

En este capítulo se revisarán los números reales, las expresiones algebraicas y las operaciones básicas que pueden realizarse con ellos. Este capítulo está diseñado para dar un repaso breve sobre algunos términos y métodos para la manipulación del cálculo simbólico. Sin duda usted ha estado expuesto a gran parte de este material con anterioridad. Sin embargo, como estos temas son importantes para el manejo de las matemáticas que vienen después, una rápida exposición de los mismos puede resultar benéfica. Destine el tiempo que sea necesario para las secciones en que necesita un repaso.

OBJETIVO

Familiarizarse con los conjuntos, la clasificación de los números reales y la recta de los números reales.

0.1 Conjuntos de números reales

Un **conjunto** es una colección de objetos. Por ejemplo, se puede hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, a saber, 6, 8 y 10. Cada objeto de un conjunto se denomina **elemento** de ese conjunto. No se preocupe si esto suena un poco circular. Las palabras *conjunto* y *elemento* son semejantes a *línea* y *punto* en geometría plana. No puede pedirse definirlos en términos más primitivos, es sólo con la práctica que es posible entender su significado. La situación es también parecida a la forma en la que un niño aprende su primer idioma. Sin conocer ninguna palabra, un niño infiere el significado de unas cuantas palabras muy simples y termina usándolas para construir un vocabulario funcional. Nadie necesita entender el mecanismo de este proceso para aprender a hablar. De la misma forma, es posible aprender matemáticas prácticas sin involucrarse con términos básicos no definidos.

Una manera de especificar un conjunto es haciendo una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es $\{6, 8, 10\}$, que puede denotarse mediante una letra, como A, lo que permite escribir $A = \{6, 8, 10\}$. Observe que $\{8, 10, 6\}$ también denota el mismo conjunto, así como $\{10, 10, 6, 8\}$. *Un conjunto está determinado por sus elementos* y ni las repeticiones ni los reordenamientos de una lista afectan al conjunto. Se dice que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de los enteros positivos} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aunque sí se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \ldots,$ forman el conjunto de los **enteros**:

$$\textit{conjunto de los enteros} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ADVERTENCIA

La razón por la que $q \neq 0$ es que no es posible dividir entre cero.

Todo entero es un número racional.

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. (El símbolo "$\neq$" se lee "no es igual a".) Por ejemplo, los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. Se observa que $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{-4}{-8}$, 0.5 y 50% representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional puesto que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todo entero es racional.

Todos los números racionales pueden representarse por medio de números decimales que *terminan*, como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$, o bien por *decimales periódicos que no terminan* (compuesto por un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\ldots$, y $\frac{2}{15} = 0.1333\ldots$. Los números que se representan mediante decimales *no priódicos que no terminan* se conocen como **números irracionales**. Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números π (pi) y $\sqrt{2}$ son ejemplos de números irracionales. Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales**.

Los números reales consisten en todos los números decimales.

Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero se selecciona un punto en la recta para representar el cero. Este punto se denomina *origen* (vea la figura 0.1). Después se elige una medida estándar de distancia, llamada *distancia unitaria*, y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta se asocia una distancia dirigida, que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se con-

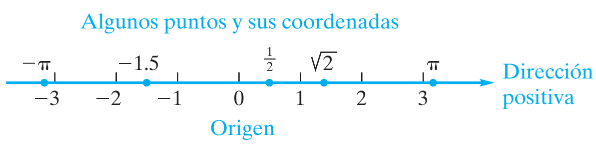


FIGURA 0.1 La recta de los números reales.

sideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (−). Por ejemplo, al punto ubicado a $\frac{1}{2}$ de unidad a la derecha del origen, le corresponde el número $\frac{1}{2}$, que se denomina la **coordenada** de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es −1.5. En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta se considera la dirección positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón se dice que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. A esta recta se le llama la **recta de los números reales**. Se tiene la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

Problemas 0.1

Clasifique los enunciados 1 a 12 como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1. −13 es un entero.

2. $\frac{-2}{7}$ es racional.

3. −3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\sqrt{25}$ no es un entero positivo.

8. $\sqrt{2}$ es un número real.

9. $\frac{0}{0}$ es racional.

10. $\sqrt{3}$ es un número natural.

11. −3 está a la derecha de −4 sobre la recta de los números reales.

12. Todo entero es positivo o negativo.

OBJETIVO

Nombrar, ilustrar y relacionar las propiedades de los números reales en términos de sus operaciones.

0.2 Algunas propiedades de los números reales

A continuación se establecerán algunas propiedades importantes de los números reales. Sean a, b y c números reales.

1. Propiedad transitiva de la igualdad

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c.$$

Por lo tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

2. Propiedad de cerradura de la suma y la multiplicación

Para todo número real a y b, existen números reales únicos $a + b$ y ab.

Esto significa que cualesquiera dos números pueden sumarse o multiplicarse y el resultado en cada caso es un número real.

3. Propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba$$

Esto significa que dos números pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden. Por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$ y $7(-4) = (-4)(7)$.

4. Propiedad asociativa de la suma y la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c$$

Esto significa que en la suma o multiplicación, los números pueden agruparse en cualquier orden. Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$; en ambos casos la suma es 9. En forma semejante, $2x + (x + y) = (2x + x) + y$ y $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$.

5. Propiedad de la identidad

Existen números reales únicos denotados 0 y 1 tales que para todo número real a,

$$0 + a = a \quad \text{y} \quad 1a = a$$

6. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

El número $-a$ se denomina el **inverso aditivo** de a.

Por ejemplo, como $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, puesto que $(-6) + (6) = 0$. Esto es, el inverso aditivo de -6 es 6, de modo que puede escribirse $-(-6) = 6$.

Para cada número real a, *excepto 0*, existe un único número real denotado por a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

El número a^{-1} se conoce como el **recíproco** o **inverso multiplicativo** de a.

ADVERTENCIA

El cero no tiene un inverso multiplicativo porque no existe un número que, al multiplicarlo por 0, dé 1.

Por lo tanto, todos los números *excepto 0*, tienen un recíproco. Como se recordará, a^{-1} puede escribirse como $\frac{1}{a}$. Por ejemplo, el recíproco de 3 es $\frac{1}{3}$, puesto que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Por ende, $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, puesto que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. *El recíproco de 0 no está definido*.

7. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca$$

Por ejemplo, aunque $2(3 + 4) = 2(7) = 14$, también puede escribirse

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$$

De manera similar,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20$$

y

$$x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x$$

La propiedad distributiva puede ser extendida a la forma

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

De hecho, puede extenderse a sumas que involucran cualquier cantidad de términos.

La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \quad \text{significa} \quad a + (-b)$$

donde $-b$ es el inverso aditivo de b. Así, $6 - 8$ significa $6 + (-8)$.

De manera semejante, se define la **división** en términos de la multiplicación. Si $b \neq 0$, entonces $a \div b$, o $\dfrac{a}{b}$ o a/b, está definida por

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1})$$

Como $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

$\frac{a}{b}$ significa a veces el recíproco de b.

Así, $\frac{1}{5}$ significa 3 veces $\frac{1}{5}$, donde $\frac{1}{5}$ es el recíproco de 5. Algunas veces se hace referencia a $a \div b$ o $\dfrac{a}{b}$ como la *razón* de a entre b. Se observa que como 0 no tiene recíproco, **la división entre 0 no está definida**.

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de las propiedades anteriores.

EJEMPLO 1 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Por lo tanto, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es el mismo que el de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En cualquier caso el resultado es 60.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 2 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Muestre que* $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$.

Solución: Por la definición de resta, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la suma, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Así, por la propiedad transitiva de la igualdad, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. Para hacerlo de manera más concisa, se omiten pasos intermedios y se escribe directamente

$$2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$$

b. *Muestre que* $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$.

Solución: Si se comienza por el lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned}(8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(definición de la resta)}\\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(propiedad asociativa)}\\ &= 8 + (x - y) && \text{(definición de resta)}\end{aligned}$$

Así que, por la propiedad transitiva de la igualdad,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y)$$

c. *Muestre que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

Solución: Por la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8)$$

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{y de manera similar} \quad 3(2y) = 6y$$

Por lo tanto, $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Muestre que* $\dfrac{ab}{c} = a\left(\dfrac{b}{c}\right)$ *para* $c \neq 0$.

Solución: Por la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \quad \text{para } c \neq 0$$

Pero por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right)$$

Sin embargo, por la definición de la división, $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$. Así que,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right)$$

También se puede mostrar que $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b$.

b. *Muestre que* $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ *para* $c \neq 0$.

Solución: Por la definición de la división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a+b}{c} = (a+b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Por lo que,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

Puede encontrarse el producto de varios números al considerar los productos de los números tomados de dos en dos. Por ejemplo, para encontrar el producto de x, y y z podría multiplicarse primero x por y y después multiplicar el producto resultante por z; esto es, encontrar $(xy)z$. O bien, la alternativa sería multiplicar x por el producto de y y z; esto es, encontrar $x(yz)$. La propiedad asociativa de la multiplicación garantiza que ambos resultados sean idénticos, sin importar cómo se agrupen los números. Por lo tanto, no es ambiguo escribir xyz. Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de la misma manera a la suma.

No sólo debe tenerse cuidado con los aspectos de la manipulación de las propiedades de los números reales, también debe conocerse y estar familiarizado con la terminología que involucra.

La lista siguiente establece las propiedades importantes de los números reales que deben estudiarse a fondo. La capacidad para manejar los números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero.

Propiedad	*Ejemplo(s)*
1. $a - b = a + (-b)$	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5$
2. $a - (-b) = a + b$	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9$
3. $-a = (-1)(a)$	$-7 = (-1)(7)$
4. $a(b + c) = ab + ac$	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54$
5. $a(b - c) = ab - ac$	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$
6. $-(a + b) = -a - b$	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$
7. $-(a - b) = -a + b$	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5$
8. $-(-a) = a$	$-(-2) = 2$
9. $a(0) = 0$	$2(0) = 0$
10. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14$
11. $(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14$
12. $\frac{a}{1} = a$	$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2$

Propiedad	*Ejemplo(s)*
13. $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$	$\frac{2}{7} = 2\left(\frac{1}{7}\right)$
14. $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$	$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}$
15. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$
16. $\frac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0$	$\frac{0}{7} = 0$
17. $\frac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0$	$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1$
18. $a\left(\frac{b}{a}\right) = b$	$2\left(\frac{7}{2}\right) = 7$
19. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0$	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
20. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$
21. $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b = a\left(\frac{b}{c}\right)$	$\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3}$
22. $\frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right)$	$\frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$
23. $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{ac}{bc}$ cuando $c \neq 0$	$\frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}$
24. $\frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)(c)} = \frac{-a}{bc} = \frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc}$	$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} = \frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}$
25. $\frac{a(-b)}{c} = \frac{(-a)b}{c} = \frac{ab}{-c} = \frac{(-a)(-b)}{-c} = -\frac{ab}{c}$	$\frac{2(-3)}{5} = \frac{(-2)(3)}{5} = \frac{2(3)}{-5} = \frac{(-2)(-3)}{-5} = -\frac{2(3)}{5} = -\frac{6}{5}$
26. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$
27. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$	$\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2-3}{9} = \frac{-1}{9}$
28. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{22}{15}$
29. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$	$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$
30. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$
31. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$	$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$
32. $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$	$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

La propiedad 23 podría llamarse el **principio fundamental de las fracciones**, el cual establece que *multiplicar o dividir tanto el numerador como el denominador de una fracción por el mismo número distinto de cero, tiene como resultado una fracción que es igual a la fracción original.* Así,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7 \cdot 8}{\frac{1}{8} \cdot 8} = \frac{56}{1} = 56$$

Por las propiedades 28 y 23 se tiene que

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 15 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{2}{3}$$

Este problema también puede resolverse al convertir $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y después utilizar la propiedad 26. Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ pueden escribirse con un denominador común de $5 \cdot 15$:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} \quad \text{y} \quad \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 5}$$

Sin embargo, 15 es el *menor* de dichos denominadores comunes, el cual se conoce como el *mínimo común denominador* (MCD) de $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$. Por lo tanto,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} - \frac{5}{12} &= \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} \qquad (\text{MCD} = 24) \\ &= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{9-10}{24} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

Problemas 0.2

Clasifique los enunciados 1 a 10 como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.
2. El recíproco de $\frac{7}{3}$ es $\frac{3}{7}$.
3. El inverso aditivo de 7 es $\frac{-1}{7}$.
4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$
5. $-x + y = -y + x$
6. $(x+2)(4) = 4x + 8$
7. $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$
8. $3\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$
*9. $x(5 \cdot y) = (x5) \cdot (xy)$
10. $x(4y) = 4xy$

Establezca cuál propiedad de los números reales se usa en los problemas 11 a 20.

11. $2(x+y) = 2x + 2y$
12. $(x+5) + y = y + (x+5)$
13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$
14. $\frac{5}{11} = \frac{1}{11} \cdot 5$
15. $5(b-a) = (a-b)(-5)$
16. $y + (x+y) = (y+x) + y$
17. $8 - y = 8 + (-y)$
18. $5(4+7) = 5(7+4)$
19. $(8+a)b = 8b + ab$
20. $(-1)[-3+4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$

En los problemas 21 a 26, muestre que los enunciados son verdaderos, para ello utilice las propiedades de los números reales.

*21. $2x(y-7) = 2xy - 14x$
22. $(a-b) + c = a + (c-b)$
23. $(x+y)(2) = 2x + 2y$
24. $2[27 + (x+y)] = 2[(y+27) + x]$
25. $x[(2y+1) + 3] = 2xy + 4x$
26. $(1+a)(b+c) = b + c + ab + ac$
*27. Muestre que $x(y - z + w) = xy - xz + xw$.
[*Suegerencia:* $b + c + d = (b+c) + d$.]

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

28. $-2 + (-4)$
29. $-6 + 2$
30. $6 + (-4)$
31. $7 - 2$
32. $7 - (-4)$
33. $-5 - (-13)$
34. $-a - (-b)$
35. $(-2)(9)$
36. $7(-9)$
37. $(-2)(-12)$
38. $19(-1)$
39. $\frac{-1}{\frac{-1}{9}}$
40. $-(-6 + x)$
41. $-7(x)$
42. $-12(x-y)$
43. $-[-6 + (-y)]$
44. $-3 \div 15$
45. $-9 \div (-27)$
46. $(-a) \div (-b)$
47. $2(-6+2)$
48. $3[-2(3) + 6(2)]$

49. $(-2)(-4)(-1)$ **50.** $(-12)(-12)$ **51.** $X(1)$

52. $3(x-4)$ **53.** $4(5+x)$ **54.** $-(x-2)$

55. $0(-x)$ **56.** $8\left(\frac{1}{11}\right)$ **57.** $\frac{5}{1}$

58. $\frac{14x}{21y}$ **59.** $\frac{3}{-2x}$ **60.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$

61. $\frac{a}{c}(3b)$ **62.** $(5a)\left(\frac{7}{5a}\right)$ **63.** $\frac{-aby}{-ax}$

64. $\frac{7}{y}\cdot\frac{1}{x}$ **65.** $\frac{2}{x}\cdot\frac{5}{y}$ **66.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

67. $\frac{5}{12}+\frac{3}{4}$ **68.** $\frac{3}{10}-\frac{7}{15}$ **69.** $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}$

70. $\frac{X}{\sqrt{5}}-\frac{Y}{\sqrt{5}}$ **71.** $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ **72.** $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$

73. $\frac{6}{\frac{x}{y}}$ **74.** $\frac{\frac{l}{3}}{m}$ **75.** $\frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{z}{xy}}$

76. $\frac{7}{0}$ **77.** $\frac{0}{7}$ **78.** $\frac{0}{0}$

79. $0\cdot 0$

0.3 Exponentes y radicales

OBJETIVO

Repasar los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, las raíces principales, los radicales y el procedimiento de racionalización del denominador.

El producto de $x\cdot x\cdot x$ de 3 veces x se abrevia x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura del producto de n veces x. La letra n en x^n se denomina *exponente* y a x se le llama *base.* De manera más específica, si n es un entero positivo se tiene que:

1. $x^n = \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{\text{factores } n}$
2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\cdots\cdot x}_{\text{factores } n}}$ para $x \neq 0$
3. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$
4. $x^0 = 1$

ADVERTENCIA

Algunos autores dicen que 0^0 no está definido. Sin embargo, $0^0 = 1$ es una definición consistente y a menudo útil.

EJEMPLO 1 Exponentes

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

b. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{243}$

c. $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$

d. $2^0 = 1, \pi^0 = 1, (-5)^0 = 1$

e. $x^1 = x$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Si $r^n = x$, donde n es un entero positivo, entonces r es una *raíz n-ésima* de x. Las segundas raíces, el caso $n = 2$, se llaman *raíces cuadradas*; y las raíces terceras, el caso $n = 3$, se llaman *raíces cúbicas*. Por ejemplo, $3^2 = 9$ y así 3 es una raíz cuadrada de 9. Como $(-3)^2 = 9$, -3 también es una raíz cuadrada de 9. De manera similar, -2 es una raíz cúbica de -8, puesto que $(-2)^3 = -8$, mientras que 5 es una raíz cuarta de 625 puesto que $5^4 = 625$.

Algunos números no tienen una raíz n-ésima que sea un número real. Por ejemplo, como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe un número real que sea una raíz cuadrada de -4.

La **raíz *n*-ésima principal**[1] de x es la raíz n-ésima de x que sea positiva si x es positiva, y es negativa si x es negativa y n es impar. La raíz n-ésima principal de x se denotará mediante $\sqrt[n]{x}$. Así,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Se define $\sqrt[n]{0} = 0$.

[1]El uso que se hace aquí de "n-ésima raíz principal" no coincide con el de los textos avanzados.

El símbolo $\sqrt[n]{x}$ se denomina **radical**. Aquí n es el *índice*, x es el *radicando* y $\sqrt{\ }$ es el *signo radical.* Con las raíces cuadradas principales, por lo regular se omite el índice y se escribe $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Por lo tanto, $\sqrt{9} = 3$.

Si x es positiva, la expresión $x^{p/q}$, donde p y q son enteros, sin factores comunes, y q es positiva, se define como $\sqrt[q]{x^p}$. Por lo que,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3};\ 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

ADVERTENCIA

Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada **principal** de 4 es 2, no -2. Por lo que, $\sqrt{4} = 2$.

A continuación se presentan las leyes básicas de los exponentes y radicales:[2]

Ley	*Ejemplo(s)*
1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256;\ x^2 \cdot x^3 = x^5$
2. $x^0 = 1$	$2^0 = 1$
3. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
4. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8;\ \frac{1}{x^{-5}} = x^5$
5. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16;\ \frac{x^8}{x^{12}} = \frac{1}{x^4}$
6. $\frac{x^m}{x^m} = 1$	$\frac{2^4}{2^4} = 1$
7. $(x^m)^n = x^{mn}$	$(2^3)^5 = 2^{15};\ (x^2)^3 = x^6$
8. $(xy)^n = x^n y^n$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$
9. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
10. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$	$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$
12. $x^{-1/n} = \frac{1}{x^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$4^{-1/2} = \frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
13. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$	$\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$
14. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$

EJEMPLO 2 Exponentes y radicales

ADVERTENCIA

Cuando se calcula $x^{m/n}$, con frecuencia resulta más fácil primero encontrar $\sqrt[n]{x}$ y después elevar el resultado a la m-ésima potencia. Así, $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

a. Por la ley 1,

$$x^6x^8 = x^{6+8} = x^{14}$$

$$a^3b^2a^5b = a^3a^5b^2b^1 = a^8b^3$$

$$x^{11}x^{-5} = x^{11-5} = x^6$$

$$z^{2/5}z^{3/5} = z^1 = z$$

$$xx^{1/2} = x^1x^{1/2} = x^{3/2}$$

[2]Aunque algunas leyes incluyen restricciones, éstas no son vitales para el presente estudio.

b. Por la ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

c. $$\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4 \qquad \text{(Leyes 16 y 14)}$$
$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4$$
$$= \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \text{(Ley 9)}$$

d. $$(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3} \qquad \text{(Ley 8)}$$
$$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2 \qquad \text{(Leyes 16 y 7)}$$
$$= (4)^2 a^2 = 16a^2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

La *racionalización del denominador* de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Se utiliza el principio fundamental de las fracciones, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^{1/2} \cdot 5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b. $$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2 \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6} \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}$$
$$= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 63

Los ejemplos siguientes ilustran varias aplicaciones de las leyes de los exponentes y radicales. Se entiende que todos los denominadores son distintos a cero.

EJEMPLO 4 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos en* $\dfrac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

Solución:

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2} \cdot y^3 \cdot \frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2} \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}$$

Al comparar esta respuesta con la expresión original, se concluye que puede llevarse un factor del numerador al denominador, y viceversa, al cambiar el signo del exponente.

b. *Simplifique* $\dfrac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}$$

c. *Simplifique* $(x^5y^8)^5$.

Solución:

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}$$

d. *Simplifique* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$.

Solución:

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}$$

e. *Simplifique* $\left(\dfrac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.

Solución:

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}$$

f. *Simplifique* $\dfrac{x^3}{y^2} \div \dfrac{x^6}{y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51

EJEMPLO 5 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos en* $x^{-1} + y^{-1}$ *y simplifique.*

Solución:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$$

b. *Simplifique* $x^{3/2} - x^{1/2}$ *con el uso de la ley distributiva.*

Solución:

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x-1)$$

c. *Elimine los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$.

Solución:

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}$$

d. *Elimine los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$.

Solución:

$$(x^{-1} - y^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y-x}{xy}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{xy}{y-x}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{(y-x)^2}$$

e. *Aplique la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$.

Solución:

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}\,y^{1/2} + 2x^{8/5}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41

EJEMPLO 6 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[4]{48}$.

Solución:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$$

b. *Reescriba* $\sqrt{2+5x}$ *sin utilizar el signo de radical.*

Solución:

$$\sqrt{2+5x} = (2+5x)^{1/2}$$

c. *Racionalice el denominador de* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$ *y simplifique.*

Solución:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}$$

d. *Simplifique* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 71

EJEMPLO 7 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[3]{x^6 y^4}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^6 y^4} &= \sqrt[3]{(x^2)^3 y^3 y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y}\\ &= x^2 y \sqrt[3]{y}\end{aligned}$$

b. *Simplifique* $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

c. *Simplifique* $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} &= \sqrt{25 \cdot 10} - \sqrt{25 \cdot 2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

d. *Si x es cualquier número real, simplifique* $\sqrt{x^2}$.

Solución:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 75

Problemas 0.3

Simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos en los problemas 1 a 14.

1. $(2^3)(2^2)$ **2.** x^6x^9 **3.** w^4w^8

4. z^3zz^2 ***5.** $\frac{x^3x^5}{y^9y^5}$ **6.** $(x^{12})^4$

7. $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$ **8.** $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$ **9.** $(2x^2y^3)^3$

10. $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$ **11.** $\frac{x^9}{x^5}$ **12.** $\left(\frac{2a^4}{7b^5}\right)^6$

13. $\frac{(x^3)^6}{x(x^3)}$ **14.** $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$

En los problemas 15 a 28, evalúe las expresiones.

15. $\sqrt{25}$ **16.** $\sqrt[4]{81}$ **17.** $\sqrt[7]{-128}$

18. $\sqrt{0.04}$ **19.** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ **20.** $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

21. $(49)^{1/2}$ **22.** $(64)^{1/3}$ **23.** $9^{3/2}$

24. $(9)^{-5/2}$ **25.** $(32)^{-2/5}$ **26.** $(0.09)^{-1/2}$

27. $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$ **28.** $\left(-\frac{64}{27}\right)^{2/3}$

En los problemas 29 a 40, simplifique las expresiones.

29. $\sqrt{50}$ **30.** $\sqrt[3]{54}$ **31.** $\sqrt[3]{2x^3}$

32. $\sqrt{4x}$ **33.** $\sqrt{16x^4}$ **34.** $\sqrt[4]{\frac{x}{16}}$

35. $2\sqrt{8} - 5\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$ **36.** $\sqrt{\frac{3}{13}}$

37. $(9z^4)^{1/2}$ **38.** $(16y^8)^{3/4}$

***39.** $\left(\frac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$ **40.** $\left(\frac{256}{x^{12}}\right)^{-3/4}$

En los problemas 41 a 52, escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final. Por ejemplo:

$$y^{-1}\sqrt{x} = \frac{x^{1/2}}{y}$$

***41.** $\frac{a^5b^{-3}}{c^2}$ **42.** $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$ **43.** $5m^{-2}m^{-7}$

44. $x + y^{-1}$ **45.** $(3t)^{-2}$ **46.** $(3-z)^{-4}$

47. $\sqrt[5]{5x^2}$ **48.** $(X^3Y^{-3})^{-3}$ **49.** $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

50. $\frac{u^{-2}v^{-6}w^3}{vw^{-5}}$ ***51.** $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$ **52.** $\sqrt[4]{a^{-3}b^{-2}a^5b^{-4}}$

En los problemas 53 a 58, escriba las formas exponenciales usando radicales.

53. $(2a-b+c)^{2/3}$ **54.** $(ab^2c^3)^{3/4}$

55. $x^{-4/5}$ **56.** $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$

57. $3w^{-3/5} - (3w)^{-3/5}$ **58.** $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$

En los problemas 59 a 68, racionalice los denominadores.

59. $\frac{6}{\sqrt{5}}$ **60.** $\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$ **61.** $\frac{4}{\sqrt{2x}}$

62. $\frac{y}{\sqrt{2y}}$ ***63.** $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$ **64.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{y^2}}$

65. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ **66.** $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ **67.** $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{a^2b}}$

68. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

En los problemas 69 a 90, simplifique las expresiones. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. Racionalice el denominador donde sea necesario para evitar la existencia de exponentes fraccionarios en el denominador.

69. $2x^2y^{-3}x^4$ **70.** $\frac{3}{u^{5/2}v^{1/2}}$

***71.** $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$ **72.** $\{[(3a^3)^2]^{-5}\}^{-2}$

73. $\frac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$ **74.** $\frac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$

***75.** $\sqrt[3]{x^2yz^3}\sqrt[3]{xy^2}$ **76.** $(\sqrt[4]{3})^8$

77. $3^2(32)^{-2/5}$ **78.** $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$

79. $(2x^{-1}y^2)^2$ **80.** $\frac{3}{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{x}}$

81. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$ **82.** $\sqrt{75k^4}$

83. $\frac{(ab^{-3}c)^8}{(a^{-1}c^2)^{-3}}$ **84.** $\sqrt[3]{7(49)}$

85. $\frac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\frac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$ **86.** $\sqrt{(-6)(-6)}$

87. $-\frac{8s^{-2}}{2s^3}$ **88.** $(a^5b^{-3}\sqrt{c})^3$

89. $(3x^3y^2 \div 2y^2z^{-3})^4$ **90.** $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}x^{-2}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$

OBJETIVO

Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas. Definir un polinomio, utilizar productos especiales y emplear la división larga para dividir polinomios.

0.4 Operaciones con expresiones algebraicas

Si se combinan números, representados por símbolos, mediante una o más operaciones de suma, resta, multiplicación, división, exponenciación o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

a. $\sqrt[3]{\frac{3x^3-5x-2}{10-x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consta de tres *términos*: $+5ax^3$, $-2bx$ y $+3$. Algunos de los *factores* del primer término, $5ax^3$, son $5, a, x, x^2, x^3, 5ax$ y ax^2. También, $5a$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si a lo largo del análisis de un problema a y b representan números fijos, entonces a y b se denominan *constantes*.

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios.* Aquéllas que tienen exactamente dos términos son *binomios* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios.* Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios.* Así, el multinomio $2x - 5$ es un binomio; el multinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

ADVERTENCIA

Las palabras *polinomio* y *multinomio* no son intercambiables. Por ejemplo, $\sqrt{x + 2}$ es un multinomio, pero no un polinomio. Por otro lado, $x + 2$ es un multinomio y un polinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica de la forma[3]

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes con $c_n \neq 0$. Se llama a n el *grado* del polinomio. Por lo tanto, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3, y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero; así, 5 es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio, sin embargo, no se le asigna ningún grado.

En los ejemplos siguientes se ilustrarán operaciones con expresiones algebraicas.

EJEMPLO 2 Suma de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: Primero deben eliminarse los paréntesis. Después, con el uso de la propiedad conmutativa de la suma, se reúnen todos los términos semejantes. Los *términos semejantes* son aquellos que sólo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo, $3x^2y$ y $4x^2y$ son semejantes, así como los pares $-2x$ y $6x$, y 1 y -3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) &= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3 \\ &= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3\end{aligned}$$

Por la propiedad distributiva,

$$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$$

y

$$-2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x$$

Por ende, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2 + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

EJEMPLO 3 Resta de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: Aquí aplicamos la definición de la resta y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}&(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3) \\ &\quad = (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3) \\ &\quad = (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3)\end{aligned}$$

[3]Los tres puntos indican todos los demás términos que, se entiende, están incluidos en la suma.

$$= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3$$
$$= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3$$
$$= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3$$
$$= -x^2y - 8x + 4$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

EJEMPLO 4 Eliminación de símbolos de agrupación

Simplifique $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$.

Solución: Primero deben eliminarse los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Después se repite el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación, y se combinan los términos semejantes siempre que sea posible. Se tiene

$$\begin{aligned} 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\} &= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\} \\ &= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\} \\ &= 3\{24x^2 + 26x - 15\} \\ &= 72x^2 + 78x - 45 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, puede considerarse $ax + c$ como un solo número y después utilizar la propiedad distributiva:

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d$$

Nuevamente se usa la propiedad distributiva, tenemos,

$$\begin{aligned} (ax + c)bx + (ax + c)d &= abx^2 + cbx + adx + cd \\ &= abx^2 + (ad + cb)x + cd \end{aligned}$$

Por lo que, $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$. En particular, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x - 2) &= 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2) \\ &= 2x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

A continuación se proporciona una lista de productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

Productos especiales

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva)
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$
4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio)
5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio)
6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de suma y diferencia)
7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio)
8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio)

EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$\begin{aligned}(x+2)(x-5) &= [x+2][x+(-5)]\\ &= x^2+(2-5)x+2(-5)\\ &= x^2-3x-10\end{aligned}$$

b. Por la regla 3,

$$\begin{aligned}(3z+5)(7z+4) &= 3\cdot 7z^2+(3\cdot 4+5\cdot 7)z+5\cdot 4\\ &= 21z^2+47z+20\end{aligned}$$

c. Por la regla 5,

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2-2(4)x+4^2\\ &= x^2-8x+16\end{aligned}$$

d. Por la regla 6,

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2+1}+3)(\sqrt{y^2+1}-3) &= (\sqrt{y^2+1})^2-3^2\\ &= (y^2+1)-9\\ &= y^2-8\end{aligned}$$

e. Por la regla 7,

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3+3(2)(3x)^2+3(2)^2(3x)+(2)^3\\ &= 27x^3+54x^2+36x+8\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

EJEMPLO 6 Multiplicación de multinomios

Encuentre el producto $(2t-3)(5t^2+3t-1)$.

Solución: Se trata a $2t-3$ como un solo número y se aplica la propiedad distributiva dos veces:

$$\begin{aligned}(2t-3)(5t^2+3t-1) &= (2t-3)5t^2+(2t-3)3t-(2t-3)1\\ &= 10t^3-15t^2+6t^2-9t-2t+3\\ &= 10t^3-9t^2-11t+3\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

En el ejemplo 3(b) de la sección 0.2, se muestra que $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$. De manera similar, $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}$. Con el uso de estos resultados, es posible dividir un multinomio entre un monomio, si se divide cada término del multinomio entre el monomio.

EJEMPLO 7 División de un multinomio entre un monomio

a. $\dfrac{x^3+3x}{x}=\dfrac{x^3}{x}+\dfrac{3x}{x}=x^2+3$

b. $$\begin{aligned}\frac{4z^3-8z^2+3z-6}{2z} &= \frac{4z^3}{2z}-\frac{8z^2}{2z}+\frac{3z}{2z}-\frac{6}{2z}\\ &= 2z^2-4z+\frac{3}{2}-\frac{3}{z}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47

División larga

Para dividir un polinomio entre un polinomio se usa la llamada división larga cuando el grado del divisor es menor o igual que el del dividendo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 División larga

Divida $2x^3 - 14x - 5$ *entre* $x - 3$.

Solución: Aquí $2x^3 - 14x - 5$ es el *dividendo* y $x - 3$ es el *divisor*. Para evitar errores, es mejor escribir el dividendo como $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$. Observe que las potencias de x están en orden decreciente. Se tiene

$$\begin{array}{rrl}
 & 2x^2 + 6x + 4 & \leftarrow \text{cociente} \\
\text{divisor} \rightarrow x - 3 & \overline{)2x^3 + 0x^2 - 14x - 5} & \leftarrow \text{dividendo} \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \qquad\qquad\quad & \\
 & 6x^2 - 14x \qquad\; & \\
 & \underline{6x^2 - 18x} \qquad\; & \\
 & 4x - 5 & \\
 & \underline{4x - 12} & \\
 & 7 & \leftarrow \text{residuo}
\end{array}$$

Observe que x (el primer término del divisor) dividió a $2x^3$ y se obtuvo $2x^2$. Después se multiplicó $2x^2$ por $x - 3$ y se obtuvo $2x^3 - 6x^2$. Después de restar $2x^3 - 6x^2$ de $2x^3 + 0x^2$, se obtuvo $6x^2$ y después "se bajó" el término $-14x$. Este proceso continúa hasta que se llega a 7, el *residuo*. Siempre se detendrá el proceso cuando el residuo sea 0 o un polinomio cuyo grado sea menor que el grado del divisor. La respuesta puede escribirse como

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x - 3}$$

Esto es, la respuesta a la pregunta

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = ?$$

tiene la forma

$$\text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

Una manera de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

El resultado del ejemplo puede verificarse mediante el uso de esta ecuación.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51

Problemas 0.4

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1. $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$

3. $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$

4. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$

5. $(\sqrt{a} + 2\sqrt{3b}) - (\sqrt{c} - 3\sqrt{3b})$

6. $(3a + 7b - 9) - (5a + 9b + 21)$

***7.** $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$

8. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$

9. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$

10. $4(2z - w) - 3(w - 2z)$

11. $3(3x + 3y - 7) - 3(8x - 2y + 2)$

12. $(u - 3v) + (-5u - 4v) + (u - 3)$

***13.** $5(x^2 - y^2) + x(y - 3x) - 4y(2x + 7y)$

14. $2 - [3 + 4(s - 3)]$

***15.** $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$

16. $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$

17. $-5(4x^2(2x + 2) - 2(x^2 - (5 - 2x)))$

18. $-\{-3[2a + 2b - 2] + 5[2a + 3b] - a[2(b + 5)]\}$

***19.** $(x + 4)(x + 5)$ **20.** $(u + 2)(u + 5)$

21. $(w + 2)(w - 5)$ **22.** $(z - 7)(z - 3)$

23. $(2x + 3)(5x + 2)$ **24.** $(t - 5)(2t + 7)$

25. $(X + 2Y)^2$ **26.** $(2x - 1)^2$

27. $(x - 5)^2$ **28.** $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$

29. $(\sqrt{3x} + 5)^2$ **30.** $(\sqrt{y} - 3)(\sqrt{y} + 3)$

31. $(2s - 1)(2s + 1)$ **32.** $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$

33. $(x^2 - 3)(x + 4)$ **34.** $(x + 1)(x^2 + x + 3)$

***35.** $(x^2 - 4)(3x^2 + 2x - 1)$ **36.** $(3y - 2)(4y^3 + 2y^2 - 3y)$

37. $x\{2(x + 5)(x - 7) + 4[2x(x - 6)]\}$

38. $[(2z + 1)(2z - 1)](4z^2 + 1)$

39. $(x + y + 2)(3x + 2y - 4)$

40. $(x^2 + x + 1)^2$ **41.** $(2a + 3)^3$

42. $(3y - 2)^3$ **43.** $(2x - 3)^3$

44. $(x + 2y)^3$ **45.** $\dfrac{z^2 - 18z}{z}$

46. $\dfrac{2x^3 - 7x + 4}{x}$ ***47.** $\dfrac{6x^5 + 4x^3 - 1}{2x^2}$

48. $\dfrac{(3y - 4) - (9y + 5)}{3y}$

49. $(x^2 + 5x - 3) \div (x + 5)$

50. $(x^2 - 5x + 4) \div (x - 4)$

***51.** $(3x^3 - 2x^2 + x - 3) \div (x + 2)$

52. $(x^4 + 2x^2 + 1) \div (x - 1)$

53. $x^3 \div (x + 2)$

54. $(6x^2 + 8x + 1) \div (2x + 3)$

55. $(3x^2 - 4x + 3) \div (3x + 2)$

56. $(z^3 + z^2 + z) \div (z^2 - z + 1)$

0.5 Factorización

OBJETIVO

Establecer las reglas básicas para factorizar y aplicarlas en la factorización de expresiones.

Cuando se multiplican entre sí dos o más expresiones, éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por lo que si $c = ab$, entonces a y b son factores del producto c. Al proceso por el cual una expresión se escribe como el producto de sus factores se le llama *factorización.*

A continuación se enlistan las reglas para la factorización de expresiones, la mayoría de las cuales surge de los productos especiales vistos en la sección 0.4. El lado derecho de cada identidad es la forma factorizada de la expresión del lado izquierdo.

Reglas para la factorización

1. $xy + xz = x(y + z)$ (factor común)

2. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

3. $abx^2 + (ad + cb)x + cd = (ax + c)(bx + d)$

4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto)

5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto)

6. $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (diferencia de dos cuadrados)

7. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$ (suma de dos cubos)

8. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ (diferencia de dos cubos)

Por lo general, cuando se factoriza un polinomio se eligen factores que a su vez sean polinomios. Por ejemplo, $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Usualmente, no se escribirá $x - 4$ como $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$ a menos que esto permita simplificar otros cálculos.

Siempre factorice completamente. Por ejemplo,

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$$

EJEMPLO 1 Factores comunes

a. *Factorice completamente* $3k^2x^2 + 9k^3x$.

Solución: Como $3k^2x^2 = (3k^2x)(x)$ y $9k^3x = (3k^2x)(3k)$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3k^2x$. Así que, por la regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k)$$

Observe que, aunque $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$, no puede decirse que la expresión esté completamente factorizada, puesto que $k^2x^2 + 3k^3x$ todavía puede factorizarse.

b. *Factorice completamente* $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$.

Solución:

$$8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2 = 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

EJEMPLO 2 Factorización de trinomios

a. *Factorice completamente* $3x^2 + 6x + 3$.

Solución: Primero se remueve un factor común. Después se factoriza por completo la expresión resultante. Así, se tiene

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x+1)^2 \qquad \text{(Regla 4)} \end{aligned}$$

b. *Factorice completamente* $x^2 - x - 6$.

Solución: Si este trinomio puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$, que es el producto de dos binomios, entonces deben determinarse los valores de a y de b. Como $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, se sigue que

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Al igualar los coeficientes correspondientes, se quiere

$$a + b = -1 \text{ y } ab = -6$$

Si $a = -3$ y $b = 2$, entonces ambas condiciones se cumplen y por ende,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Como verificación, es recomendable multiplicar el lado derecho para ver si coincide con el izquierdo.

c. *Factorice completamente* $x^2 - 7x + 12$.

Solución: $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 3 Factorización

Enseguida se presenta una variedad de expresiones completamente factorizadas. Los números entre paréntesis hacen referencia a las reglas utilizadas.

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (4)

b. $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$ (3)

c. $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$ (1)

$= 3y(2y - 3)(y + 2)$ (3)

d. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ (5)

e. $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$ (1)

f. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (6)

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (6)

g. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$ (2)

h. $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ (1), (1)

$= (x^2 - y^2)(a + b)$ (1)

$= (x + y)(x - y)(a + b)$ (6)

i. $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ (8)

j. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (7), (8)

Observe en el ejemplo 3(f) que $x^2 - 1$ es factorizable, pero $x^2 + 1$ no lo es. En el ejemplo 3(h), note que el factor común de $x^2 - y^2$ no fue evidente de inmediato.

Problemas 0.5

Factorice completamente las expresiones siguientes.

1. $2ax + 2b$
2. $6y^2 - 4y$
3. $10xy + 5xz$
4. $3x^2y - 9x^3y^3$
***5.** $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$
6. $6u^3v^3 + 18u^2vw^4 - 12u^2v^3$
7. $z^2 - 49$
8. $x^2 - x - 6$
***9.** $p^2 + 4p + 3$
10. $s^2 - 6s + 8$
11. $16x^2 - 9$
12. $x^2 + 2x - 24$
13. $a^2 + 12a + 35$
14. $4t^2 - 9s^2$
15. $x^2 + 6x + 9$
16. $y^2 - 15y + 50$
17. $5x^2 + 25x + 30$
18. $3t^2 + 12t - 15$
19. $3x^2 - 3$
20. $9y^2 - 18y + 8$
21. $6y^2 + 13y + 2$
22. $4x^2 - x - 3$
23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$
24. $9z^2 + 30z + 25$
25. $u^{13/5}v - 4u^{3/5}v^3$
26. $9x^{4/7} - 1$
27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$
28. $x^2y^2 - 4xy + 4$
29. $(4x + 2)^2$
30. $2x^2(2x - 4x^2)^2$
31. $x^3y^2 - 14x^2y + 49x$
32. $(5x^2 + 2x) + (10x + 4)$
33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$
34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$
35. $(y^4 + 8y^3 + 16y^2) - (y^2 + 8y + 16)$
36. $x^3y - 4xy + z^2x^2 - 4z^2$
37. $b^3 + 64$
38. $x^3 - 1$
39. $x^6 - 1$
40. $27 + 8x^3$
41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$
42. $(a + 5)^3(a + 1)^2 + (a + 5)^2(a + 1)^3$
43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$
44. $(X - 3I)(3X + 5I) - (3X + 5I)(X + 2I)$
45. $x^4 - 16$
46. $81x^4 - y^4$
47. $y^8 - 1$
48. $t^4 - 4$
49. $X^4 + 4X^2 - 5$
50. $x^4 - 10x^2 + 9$
51. $x^4y - 2x^2y + y$
52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$

OBJETIVO

Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. Racionalizar el denominador de una fracción.

0.6 Fracciones

Los alumnos deben poner un cuidado especial en el estudio de las *fracciones*. En la vida cotidiana, es común que se pierdan de vista las fracciones numéricas debido al uso de las calculadoras. Sin embargo, la comprensión de cómo manipular las fracciones de expresiones algebraicas es un prerrequisito esencial para el cálculo. La mayoría de las calculadoras no son de mucha ayuda.

Simplificación de fracciones

Mediante el uso del principio fundamental de las fracciones (sección 0.2), es posible simplificar expresiones algebraicas que son fracciones. Ese principio permite multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante será equivalente a la original. Se supone que las fracciones que se consideren tendrán denominadores distintos de cero. Por ende, asumimos que todos los factores de los denominadores en los ejemplos son distintos a cero. Con frecuencia, esto significará que se excluyen ciertos valores para las variables que se encuentran en los denominadores.

EJEMPLO 1 Simplificación de fracciones

a. *Simplifique* $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$.

Solución: Primero se factoriza completamente el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x - 4)}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre el factor común $x - 3$, se tiene

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{1(x+2)}{1(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

Por lo general, sólo se escribe

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

o bien

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-7x+12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

El proceso de eliminar el factor común, $x - 3$, se conoce comúnmente como “cancelación”.

b. *Simplifique* $\frac{2x^2+6x-8}{8-4x-4x^2}$.

Solución:

Observe que $1 - x$ se escribe como $(-1)(x - 1)$ para facilitar la cancelación.

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+6x-8}{8-4x-4x^2} &= \frac{2(x^2+3x-4)}{4(2-x-x^2)} = \frac{2(x-1)(x+4)}{4(1-x)(2+x)}\\ &= \frac{2(x-1)(x+4)}{2(2)[(-1)(x-1)](2+x)}\\ &= \frac{x+4}{-2(2+x)} = -\frac{x+4}{2(x+2)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Multiplicación y división de fracciones

La regla para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

EJEMPLO 2 Multiplicación de fracciones

a. $$\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+3}{x-5} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3}\cdot\frac{6x^2-6}{x^2+2x-8} &= \frac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}\\ &= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, donde $c \neq 0$, se tiene

En pocas palabras: para dividir entre una fracción se invierte el divisor y se multiplica.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

EJEMPLO 3 División de fracciones

a. $$\frac{x}{x+2}\div\frac{x+3}{x-5} = \frac{x}{x+2}\cdot\frac{x-5}{x+3} = \frac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}$$

b. $$\frac{\frac{x-5}{x-3}}{2x} = \frac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x-5}{x-3}\cdot\frac{1}{2x} = \frac{x-5}{2x(x-3)}$$

c. $$\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} = \frac{4x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{2x^2+8x} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

Racionalización del denominador

Algunas veces el denominador de una fracción tiene dos términos e incluye raíces cuadradas, como $2-\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Entonces, el denominador puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo convierta en una diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

La racionalización del *numerador* es un procedimiento similar.

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{x}{\sqrt{2}-6} = \frac{x}{\sqrt{2}-6}\cdot\frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}$$

b. $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53

Suma y resta de fracciones

En el ejemplo 3(b) de la sección 0.2, se mostró que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Esto es, si se suman dos fracciones que tienen un denominador común, entonces el resultado será una fracción cuyo denominador es el denominador común. El numerador será la suma de los numeradores de las fracciones originales. De manera similar, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

EJEMPLO 5 Suma y resta de fracciones

a. $$\frac{p^2-5}{p-2}+\frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2}$$

$$= \frac{p^2+3p-3}{p-2}$$

b. $$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}-\frac{x^2+2x}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)}-\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{x-4}{x+3}-\frac{x}{x+3}=\frac{(x-4)-x}{x+3}=-\frac{4}{x+3}$$

c. $$\frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4x+8}{x^2-9x+14}=\frac{x^2+x-5}{x-7}-\frac{x^2-2}{x-7}+\frac{-4}{x-7}$$
$$=\frac{(x^2+x-5)-(x^2-2)+(-4)}{x-7}$$
$$=\frac{x-7}{x-7}=1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores *diferentes*, utilice el principio fundamental de las fracciones para rescribirlas como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Después proceda con la suma (o resta) por el método descrito anteriormente.

Por ejemplo, para encontrar
$$\frac{2}{x^3(x-3)}+\frac{3}{x(x-3)^2}$$
es posible convertir la primera fracción en una fracción equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por $x-3$:
$$\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2}$$
también se puede convertir la segunda fracción multiplicando el numerador y el denominador por x^2:
$$\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}$$
Estas fracciones tienen el mismo denominador. Por lo tanto,
$$\frac{2}{x^3(x-3)}+\frac{3}{x(x-3)^2}=\frac{2(x-3)}{x^3(x-3)^2}+\frac{3x^2}{x^3(x-3)^2}$$
$$=\frac{3x^2+2x-6}{x^3(x-3)^2}$$
Se podrían haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con *cualquier* denominador común. Sin embargo, se prefirió convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x-3)^2$. Éste es el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones $2/[x^3(x-3)]$ y $3/[x(x-3)^2]$.

En general, para encontrar el MCD de dos o más fracciones, primero se factoriza completamente cada denominador. *El MCD es el producto de cada uno de los distintos factores que aparecen en los denominadores, cada uno elevado a la potencia más grande con la que aparece en alguno de los denominadores.*

EJEMPLO 6 Suma y resta de fracciones

a. *Reste:* $\dfrac{t}{3t+2}-\dfrac{4}{t-1}$.

Solución: El MCD es $(3t+2)(t-1)$. Así, se tiene
$$\frac{t}{(3t+2)}-\frac{4}{t-1}=\frac{t(t-1)}{(3t+2)(t-1)}-\frac{4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$
$$=\frac{t(t-1)-4(3t+2)}{(3t+2)(t-1)}$$
$$=\frac{t^2-t-12t-8}{(3t+2)(t-1)}=\frac{t^2-13t-8}{(3t+2)(t-1)}$$

b. *Sume:* $\dfrac{4}{q-1}+3$.

Solución: El MCD es $q-1$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{q-1}+3 &= \frac{4}{q-1}+\frac{3(q-1)}{q-1}\\ &= \frac{4+3(q-1)}{q-1}=\frac{3q+1}{q-1}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

EJEMPLO 7 Resta de fracciones

$$\begin{aligned}&\frac{x-2}{x^2+6x+9}-\frac{x+2}{2(x^2-9)}\\ &= \frac{x-2}{(x+3)^2}-\frac{x+2}{2(x+3)(x-3)} \qquad [\text{MCD} = 2(x+3)^2(x-3)]\\ &= \frac{(x-2)(2)(x-3)}{(x+3)^2(2)(x-3)}-\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)(x-3)(x+3)}\\ &= \frac{(x-2)(2)(x-3)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)}\\ &= \frac{2(x^2-5x+6)-(x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)}\\ &= \frac{2x^2-10x+12-x^2-5x-6}{2(x+3)^2(x-3)}\\ &= \frac{x^2-15x+6}{2(x+3)^2(x-3)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

En el ejemplo 8 se muestran dos métodos para simplificar una fracción "complicada".

EJEMPLO 8 Operaciones combinadas con fracciones

Simplifique $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$, donde $h \neq 0$.

Solución: Primero se combinan las fracciones en el numerador y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} &= \frac{\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{\dfrac{h}{1}}=\frac{-h}{x(x+h)h}=-\frac{1}{x(x+h)}\end{aligned}$$

La fracción original también puede simplificarse multiplicando el numerador y el denominador por el MCD de las fracciones implicadas en el numerador (y denominador), a saber, $x(x+h)$:

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} &= \frac{\left[\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right]x(x+h)}{h[x(x+h)]}\\ &= \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h}=\frac{-h}{x(x+h)h}=-\frac{1}{x(x+h)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 47

Problemas 0.6

Simplifique las expresiones de los problemas 1 a 6.

1. $\dfrac{a^2-9}{a^2-3a}$

2. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-4}$

***3.** $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2+x-20}$

4. $\dfrac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}$

5. $\dfrac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$

6. $\dfrac{12x^2-19x+4}{6x^2-17x+12}$

En los problemas 7 a 48 realice las operaciones y simplifique tanto como sea posible.

7. $\dfrac{y^2}{y-3}\cdot\dfrac{-1}{y+2}$

8. $\dfrac{t^2-9}{t^2+3t}\cdot\dfrac{t^2}{t^2-6t+9}$

***9.** $\dfrac{ax-b}{x-c}\cdot\dfrac{c-x}{ax+b}$

10. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$

***11.** $\dfrac{2x-2}{x^2-2x-8}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

12. $\dfrac{x^2+2x}{3x^2-18x+24}\div\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$

13. $\dfrac{\frac{X^2}{8}}{\frac{X}{4}}$

14. $\dfrac{\frac{3x^2}{7x}}{\frac{x}{14}}$

15. $\dfrac{\frac{2m}{n^2}}{\frac{6m}{n^3}}$

16. $\dfrac{\frac{c+d}{c}}{\frac{c-d}{2c}}$

17. $\dfrac{\frac{4x}{3}}{2x}$

18. $\dfrac{4x}{\frac{3}{2x}}$

19. $\dfrac{-9x^3}{\frac{x}{3}}$

20. $\dfrac{\frac{-12Y^4}{Y}}{4}$

21. $\dfrac{x-3}{\frac{x^2-7x+12}{x-4}}$

22. $\dfrac{\frac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$

23. $\dfrac{\frac{10x^3}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$

24. $\dfrac{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}{\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}}$

25. $\dfrac{\frac{x^2+7x+10}{x^2+6x+5}}{\frac{x^2-2x-8}{x^2-3x-4}}$

26. $\dfrac{\frac{(x+3)^2}{4x-3}}{\frac{7x+21}{9-16x^2}}$

27. $\dfrac{\frac{4x^2-9}{x^2+3x-4}}{\frac{2x-3}{1-x^2}}$

28. $\dfrac{\frac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\frac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$

***29.** $\dfrac{x^2}{x+3}+\dfrac{5x+6}{x+3}$

30. $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x}{x+2}$

31. $\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{3t}$

32. $\dfrac{9}{X^3}-\dfrac{1}{X^2}$

***33.** $1-\dfrac{x^3}{x^3-1}$

34. $\dfrac{4}{s+4}+s$

35. $\dfrac{4}{2x-1}+\dfrac{x}{x+3}$

36. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$

37. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

38. $\dfrac{4}{2x^2-7x-4}-\dfrac{x}{2x^2-9x+4}$

***39.** $\dfrac{4}{x-1}-3+\dfrac{-3x^2}{5-4x-x^2}$

40. $\dfrac{2x-3}{2x^2+11x-6}-\dfrac{3x+1}{3x^2+16x-12}+\dfrac{1}{3x-2}$

41. $(1+x^{-1})^2$

42. $(x^{-1}+y^{-1})^2$

43. $(x^{-1}-y)^{-1}$

44. $(a+b^{-1})^2$

45. $\dfrac{7+\frac{1}{x}}{5}$

46. $\dfrac{\frac{x+3}{x}}{x-\frac{9}{x}}$

***47.** $\dfrac{3-\frac{1}{2x}}{x+\frac{x}{x+2}}$

48. $\dfrac{\frac{x-1}{x^2+5x+6}-\frac{1}{x+2}}{3+\frac{x-7}{3}}$

En los problemas 49 y 50 realice las operaciones indicadas, pero no racionalice los denominadores.

49. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+h}}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

50. $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{5+a}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

En los problemas 51 a 60 simplifique y exprese su respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador.

51. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

52. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$

***53.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

54. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

55. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

56. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

57. $\dfrac{3}{t+\sqrt{7}}$

58. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$

59. $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}}-\dfrac{4}{1-\sqrt{2}}$

60. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2}\cdot\dfrac{x^2}{3}$

OBJETIVO

Analizar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, incluyendo las ecuaciones con literales y las ecuaciones fraccionarias y radicales, que conducen a ecuaciones lineales.

0.7 Ecuaciones, en particular ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que forman una ecuación se denominan **lados** (o **miembros**), y están separadas por el **signo de igualdad**, $=$.

EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

a. $x + 2 = 3$

b. $x^2 + 3x + 2 = 0$

c. $\dfrac{y}{y-4} = 6$

d. $w = 7 - z$

En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto: x, y, z, w y t. En consecuencia, se dice que las ecuaciones (a) y (c) son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, puesto que son números fijos.

Aquí se analizan las restricciones sobre las variables.

Nunca se permite que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por ejemplo, en

$$\frac{y}{y-4} = 6$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero; mientras que en

$$\sqrt{x-3} = 9$$

debe cumplirse que $x \geq 3$, de manera que la expresión dentro del símbolo de raíz cuadrada no sea negativa. (No es posible dividir entre cero ni obtener raíces cuadradas de números negativos.) En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable t representa el tiempo, los valores negativos de t pueden no tener sentido. Entonces debe suponerse que $t \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se denominan *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está involucrada una variable, la solución también se conoce como *raíz*. Al conjunto de todas las soluciones se le llama *conjunto solución* de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina simplemente *incógnita.* A continuación se ilustrarán estos términos.

EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. Obviamente, el único valor de x que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea $\{1\}$.

b. -2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque al sustituir -2 por x se logra que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$. Así que -2 es un elemento del conjunto solución, pero en este caso no es el único. Existe uno más, ¿podría usted encontrarlo?

c. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es el par de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe un número infinito de soluciones. ¿Podría pensar en otra?

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Ecuaciones equivalentes

Se dice que dos ecuaciones son *equivalentes* si ambas tienen las mismas soluciones; lo que significa, precisamente, que el conjunto solución de una es igual al conjunto solución de la otra. Resolver una ecuación puede implicar el realizar operaciones con ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga una ecuación equivalente. Existen tres operaciones que garantizan dicha equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio a (de) ambos lados de una ecuación, donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si $-5x = 5 - 6x$, entonces al sumar $6x$ en ambos lados se obtiene la ecuación equivalente $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$, que a su vez equivale a $x = 5$.

ADVERTENCIA

La equivalencia no está garantizada si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que involucra una variable.

2. Multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma constante distinta de cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces al dividir ambos lados entre 10 se obtiene la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, que también equivale a $x = \frac{1}{2}$.

3. Reemplazar cualquiera de los lados de una ecuación por una expresión equivalente.

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces al reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente $x^2 + 2x$ se obtiene la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

De nuevo: la aplicación de las operaciones 1 a 3 garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, es necesario aplicar otras operaciones distintas de la 1 a la 3. Dichas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes:

Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos lados de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

5. Dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

6. Elevar ambos lados de una ecuación al mismo exponente.

La operación 6 incluye la obtención de raíces en ambos lados.

Se ilustrarán las tres últimas operaciones. Por ejemplo, por inspección, la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Al multiplicar cada miembro por x (operación 4) se obtiene $x^2 - x = 0$, que se satisface si x es 0 o 1 (verifíquelo por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por lo tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

De la misma forma, puede verificar que la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o 3. Al dividir ambos lados entre $x - 4$ (operación 5) se obtiene $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Nuevamente no se tiene una equivalencia, puesto que en este caso se ha "perdido" una raíz. Observe que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

Por último, si se eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) se obtiene $x^2 = 4$, la cual es verdadera si $x = 2$ o -2. Pero -2 no es raíz de la ecuación dada.

De este análisis, resulta claro que cuando se realicen las operaciones 4 a 6 es necesario ser cuidadosos con las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6 *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por lo tanto, debe verificarse si la "solución" obtenida por estas operaciones satisface la ecuación *original.* La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, tal vez nunca pueda determinarse la raíz "perdida". Por ello, siempre que sea posible debe evitarse la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4 a 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, y generar soluciones diferentes a la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1 a 3 nunca afectan las restricciones.

TECNOLOGÍA

Puede utilizarse una calculadora graficadora para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que se desea determinar si 3/2 es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60$$

Primero, se reescribe la ecuación de modo que un lado sea 0. Al restar $19x + 60$ de ambos lados se obtiene la ecuación equivalente

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$$

En una calculadora graficadora TI-83 Plus se introduce la expresión $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$ como Y_1 y después se evalúa Y_1 en $x = 3/2$. En la figura 0.2 se muestra que el resultado es -66, el cual es diferente de cero. Por lo tanto, 3/2 no es una raíz. Sin embargo, si Y_1 se evalúa en $x = -5/2$ *se obtiene* 0. Entonces $-5/2$ es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable t, esto es,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60$$

entonces debería reemplazarse t por x, puesto que la calculadora evalúa Y_1 en un valor específico de x, no de t.

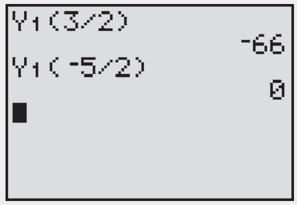


FIGURA 0.2 Para $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$, $3/2$ no es una raíz, pero $-5/2$ sí lo es.

Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal.*

DEFINICIÓN

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0 \tag{1}$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o una ecuación de grado uno, puesto que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal se realizan operaciones sobre ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones sean obvias, lo que significa hallar una ecuación en la que la variable quede aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva $5x - 6 = 3x$.

Solución: Se empieza por dejar los términos que incluyen a x en un lado y las constantes en el otro. Entonces se despeja x por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Se tiene

$$
\begin{aligned}
5x - 6 &= 3x \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) && \text{(al sumar } -3x \text{ en ambos lados)} \\
2x - 6 &= 0 && \text{(al simplificar, esto es, operación 3)} \\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 && \text{(al sumar 6 en ambos lados)} \\
2x &= 6 && \text{(al simplificar)} \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} && \text{(al dividir ambos lados entre 2)} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Resulta claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, se concluye que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Esto es, el conjunto solución es $\{3\}$. Puede describirse el primer paso en la solución de una ecuación como el acto de mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto se conoce comúnmente como *transposición*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma $2x + (-6) = 0$, es una ecuación lineal.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva $2(p + 4) = 7p + 2$.

Solución: Primero, se quitan los paréntesis. Después se agrupan los términos semejantes y se resuelve. Se tiene que

$$\begin{aligned}
2(p+4) &= 7p+2 & & \\
2p+8 &= 7p+2 & & \text{(propiedad distributiva)} \\
2p &= 7p-6 & & \text{(al restar 8 de ambos lados)} \\
-5p &= -6 & & \text{(al restar } 7p \text{ de ambos lados)} \\
p &= \frac{-6}{-5} & & \text{(al dividir ambos lados entre } -5) \\
p &= \frac{6}{5} & &
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resuelva $\dfrac{7x+3}{2} - \dfrac{9x-8}{4} = 6$.

Solución: Primero se eliminan las fracciones al multiplicar *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD), que es 4. Después se realizan varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

ADVERTENCIA

La propiedad distributiva requiere que ambos términos dentro del paréntesis se multipliquen por 4.

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) &= 4(6) & & \\
4 \cdot \frac{7x+3}{2} - 4 \cdot \frac{9x-8}{4} &= 24 & & \text{(propiedad distributiva)} \\
2(7x+3) - (9x-8) &= 24 & & \text{(al simplificar)} \\
14x + 6 - 9x + 8 &= 24 & & \text{(propiedad distributiva)} \\
5x + 14 &= 24 & & \text{(al simplificar)} \\
5x &= 10 & & \text{(al restar 14 de ambos lados)} \\
x &= 2 & & \text{(al dividir ambos lados entre 5)}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 a 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, como a, b, c o d, se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constantes literales**. Por ejemplo, en la ecuación con literales $x + a = 4b$, puede considerarse a y b como constantes arbitrarias. Las fórmulas como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si se quiere expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P dólares a una tasa de interés anual r en un periodo de t años. Exprese r en términos de I, P y t.*

Solución: Aquí se considera que r es la incógnita. Para aislar a r, se divide ambos lados entre Pt. Se tiene

$$I = Prt$$

$$\frac{I}{Pt} = \frac{Prt}{Pt}$$

$$\frac{I}{Pt} = r \text{ entonces } r = \frac{I}{Pt}$$

Cuando se dividen ambos lados entre Pt, se supone que $Pt \neq 0$, puesto que no es posible dividir entre 0. Se harán suposiciones semejantes al resolver otras ecuaciones con literales.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital de P dólares a una tasa de interés anual simple r durante un periodo de t años. Resuelva para P.*

Solución:

$$S = P + Prt$$

$$S = P(1 + rt) \qquad \text{(al factorizar)}$$

$$\frac{S}{1 + rt} = P \qquad \text{(al dividir ambos lados entre } 1 + rt\text{)}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 87

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resuelva $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$ para x.

Solución: Primero debe simplificarse la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan a x en un lado:

$$(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$$

$$ax + cx + x^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$ax + cx = 2ax + a^2$$

$$cx - ax = a^2$$

$$x(c - a) = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{c - a}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 89

EJEMPLO 8 Resolución del problema del "impuesto en un recibo"

Recuerde a Lesley Griffith, que se mencionó en el problema que aparece en los primeros párrafos de este capítulo. Ahora se generalizará esa situación para ilustrar con mayor profundidad el uso de ecuaciones con literales. Lesley tiene un recibo por una cantidad R y ella sabe que la tasa del impuesto sobre las ventas es p. Lesley desea conocer la cantidad que fue pagada por concepto de impuesto sobre la venta. Se sabe que

$$\text{precio} + \text{impuesto} = \text{recibo (monto del)}$$

Si se escribe P para denotar el precio (el cual todavía no se conoce), el impuesto es $(p/100)P$ de manera que se tiene

$$\begin{aligned} P + \frac{p}{100}P &= R \\ P\left(1 + \frac{p}{100}\right) &= R \\ P &= \frac{R}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ &= \frac{R}{\frac{100+p}{100}} \\ &= \frac{100R}{100+p} \end{aligned}$$

Se sigue que el impuesto pagado es

$$R - P = R - \frac{100R}{100+p} = R\left(1 - \frac{100}{100+p}\right) = R\left(\frac{p}{100+p}\right)$$

donde sería necesario verificar las manipulaciones con fracciones, y proporcionar más detalle, si fuera necesario. Recuerde que la tasa del impuesto francés es de 19.6% y el impuesto italiano es de 18%. Se concluye que Lesley sólo tiene que multiplicar un recibo francés por $\frac{19.6}{119.6} \approx 0.16388$ para determinar el impuesto que contiene, mientras que para un recibo italiano debe multiplicar la cantidad por $\frac{18}{118}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 107

Ecuaciones fraccionarias

Una **ecuación fraccionaria** es una ecuación en la que hay una incógnita en un denominador. En esta sección, se demostrará que al resolver una ecuación no lineal de este tipo puede obtenerse una ecuación lineal.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación fraccionaria

Resuelva $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{6}{x-3}$.

Solución:

Estrategia Primero se escribe la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después se utilizan las técnicas algebraicas estándar para resolver la ecuación lineal resultante.

Al multiplicar ambos lados por el MCD, $(x-4)(x-3)$, se tiene

$$\begin{aligned} (x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) &= (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right) \\ 5(x-3) &= 6(x-4) \qquad \text{(ecuación lineal)} \\ 5x - 15 &= 6x - 24 \\ 9 &= x \end{aligned}$$

En el primer paso, se multiplica cada lado por una expresión que incluya a la *variable* x. Como se mencionó con anterioridad, esto significa que no se tiene garantía de que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así que es necesario verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Como

$$\frac{5}{9-4} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

se observa que 9 sí satisface la ecuación original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 55

Una solución alternativa, que evita multiplicar ambos lados por el MCD, es la siguiente:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0$$

Si se supone que x no es 3 ni 4, y se combinan las fracciones se obtiene

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador no lo es. Así que $x = 9$.

Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso se deduce que el conjunto solución es el **conjunto vacío**, que se denota por $\emptyset$. En el ejemplo 10 se ilustra lo anterior.

EJEMPLO 10 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. *Resuelva* $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}$.

Solución: Al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$$

se concluye que el MCD es $(x + 2)(x - 4)$. Al multiplicar ambos lados por el MCD, se obtiene

$$\begin{aligned}
(x+2)(x-4)\left(\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4}\right) &= (x+2)(x-4)\cdot\frac{12}{(x+2)(x-4)}\\
(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) &= 12\\
3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) &= 12\\
3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 &= 12\\
-9x - 6 &= 12\\
-9x &= 18\\
x &= -2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no es posible dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es $\emptyset$. Aunque -2 es una solución de la ecuación (2), no lo es de la ecuación *original*.

b. *Resuelva* $\dfrac{4}{x-5} = 0$.

Solución: La única manera en que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0, pero su denominador no. Como el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es $\emptyset$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49

EJEMPLO 11 Ecuación con literales

Si $s = \dfrac{u}{au+v}$, *exprese u en términos de las letras restantes; esto es, resuelva para u.*

Solución:

Estrategia Como la incógnita, u, está en el denominador, primero se quitan las fracciones y después se resuelve para u.

$$\begin{aligned}
s &= \frac{u}{au+v}\\
s(au+v) &= u \qquad \text{(al multiplicar ambos lados por } au+v)\\
sau + sv &= u\\
sau - u &= -sv\\
u(sa-1) &= -sv\\
u &= \frac{-sv}{sa-1} = \frac{sv}{1-sa}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 91

Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

EJEMPLO 12 Resolución de una ecuación con radicales

Resuelva $\sqrt{x^2+33} - x = 3$.

Solución: Para resolver esta ecuación radical, se elevan ambos lados a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que es necesario verificar las "soluciones" resultantes. Se comienza por aislar el radical en un lado. Después se elevan al cuadrado ambos lados y se despeja utilizando las técnicas estándar. Así,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+33} &= x+3 \\ x^2+33 &= (x+3)^2 && \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \\ x^2+33 &= x^2+6x+9 \\ 24 &= 6x \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Por sustitución debe mostrarse que 4 es en realidad una raíz.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 79

Con algunas ecuaciones radicales, puede ser necesario elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como se muestra en el ejemplo 13.

EJEMPLO 13 Resolución de una ecuación con radicales

Resuelva $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

La razón por la que se desea un radical en cada lado es para evitar elevar al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.

Solución: Cuando una ecuación tiene dos términos que involucran radicales, primero se escribe de modo que en cada lado haya un radical, si es posible. Después se eleva al cuadrado y se resuelve. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{y-3} &= \sqrt{y}-3 \\ y-3 &= y-6\sqrt{y}+9 && \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \\ 6\sqrt{y} &= 12 \\ \sqrt{y} &= 2 \\ y &= 4 && \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \end{aligned}$$

Al sustituir 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* se obtiene $\sqrt{1} - \sqrt{4}$ que es -1. Como este resultado no es igual al del lado derecho, -3, no existe solución. Esto es, el conjunto solución es $\emptyset$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 77

Problemas 0.7

En los problemas 1 a 6, determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación, si es que alguno lo hace.

*1. $9x - x^2 = 0$; 1, 0
2. $12 - 7x = -x^2$; 4, 3
3. $z + 3(z-4) = 5$; $\frac{17}{4}$, 4
4. $2x + x^2 - 8 = 0$; 2, -4
5. $x(6+x) - 2(x+1) - 5x = 4$; -2, 0
6. $x(x+1)^2(x+2) = 0$; 0, -1, 2

En los problemas 7 a 16, determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

7. $x - 5 = 4x + 10$; $x = 4x + 15$
8. $8x - 4 = 16$; $x - \frac{1}{2} = 2$
9. $x = 4$; $x^3 = 64$
10. $2x^2 + 4 = 5x - 7$; $x^2 + 2 = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$
11. $x^2 - 2x = 0$; $x - 2 = 0$

12. $\dfrac{2}{x-2}+x=x^2;\ 2+x(x-2)=x^2(x-2)$

13. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3;\ x^2-1=3(x-1)$

14. $(x+3)(x+11)(x+7)=(x+3)(x+2);$
$(x+11)(x+7)=x+2$

15. $\dfrac{2x(3x+1)}{2x-3}=2x(x+4);\ 3x+1=(x+4)(2x-3)$

16. $2x^2-9=x;\ x^2-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{9}{2}$

Resuelva las ecuaciones 17 a 80.

17. $4x=10$

18. $0.2x=7$

19. $3y=0$

20. $2x-4x=-5$

21. $-8x=12-20$

22. $4-7x=3$

***23.** $5x-3=9$

24. $\sqrt{2}x+3=8$

25. $7x+7=2(x+1)$

26. $4s+3s-1=41$

***27.** $5(p-7)-2(3p-4)=3p$

28. $t=2-2[2t-3(1-t)]$

29. $\dfrac{x}{5}=2x-6$

30. $\dfrac{5y}{7}-\dfrac{6}{7}=2-4y$

***31.** $7+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}$

32. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}$

33. $r=\dfrac{4}{3}r-5$

34. $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{5x}{3}=9$

35. $3x+\dfrac{x}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5x$

36. $y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{5}$

37. $\dfrac{2y-3}{4}=\dfrac{6y+7}{3}$

38. $\dfrac{t}{4}+\dfrac{5}{3}t=\dfrac{7}{2}(t-1)$

39. $w-\dfrac{w}{2}+\dfrac{w}{6}-\dfrac{w}{24}=120$

40. $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{6x}{5}$

41. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2$

42. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7$

43. $\dfrac{9}{5}(3-x)=\dfrac{3}{4}(x-3)$

44. $\dfrac{2y-7}{3}+\dfrac{8y-9}{14}=\dfrac{3y-5}{21}$

45. $\dfrac{4}{3}(5x-2)=7[x-(5x-2)]$

46. $(2x-5)^2+(3x-3)^2=13x^2-5x+7$

47. $\dfrac{5}{x}=25$

48. $\dfrac{4}{x-1}=2$

***49.** $\dfrac{7}{3-x}=0$

50. $\dfrac{3x-5}{x-3}=0$

51. $\dfrac{3}{5-2x}=\dfrac{7}{2}$

52. $\dfrac{x+3}{x}=\dfrac{2}{5}$

53. $\dfrac{q}{5q-4}=\dfrac{1}{3}$

54. $\dfrac{4p}{7-p}=1$

***55.** $\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{2}{p-2}$

56. $\dfrac{2x-3}{4x-5}=6$

57. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{7}$

58. $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3}{x-2}$

59. $\dfrac{3x-2}{2x+3}=\dfrac{3x-1}{2x+1}$

60. $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{3-x}=0$

61. $\dfrac{y-6}{y}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{y+6}{y-6}$

62. $\dfrac{y-2}{y+2}=\dfrac{y-2}{y+3}$

63. $\dfrac{-5}{2x-3}=\dfrac{7}{3-2x}+\dfrac{11}{3x+5}$

64. $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{4}{1-2x}$

65. $\dfrac{9}{x-3}=\dfrac{3x}{x-3}$

66. $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{3x-4}{x^2-9}$

67. $\sqrt{x+5}=4$

68. $\sqrt{z-2}=3$

69. $\sqrt{3x-4}-8=0$

70. $4-\sqrt{3x+1}=0$

71. $\sqrt{\dfrac{x}{2}+1}=\dfrac{2}{3}$

72. $(x+6)^{1/2}=7$

73. $\sqrt{4x-6}=\sqrt{x}$

74. $\sqrt{4+3x}=\sqrt{2x+5}$

75. $(x-5)^{3/4}=27$

76. $\sqrt{y^2-9}=9-y$

***77.** $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=3$

78. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$

***79.** $\sqrt{z^2+2z}=3+z$

80. $\sqrt{\dfrac{1}{w}}-\sqrt{\dfrac{2}{5w-2}}=0$

En los problemas 81 a 92, exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

81. $I=Prt;\ r$

82. $P\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-R=0;\ P$

83. $p=8q-1;\ q$

84. $p=-3q+6;\ q$

85. $S=P(1+rt);\ r$

86. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ I$

***87.** $A=\dfrac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i};\ R$

88. $S=\dfrac{R[(1+i)^n-1]}{i};\ R$

***89.** $r=\dfrac{d}{1-dt};\ t$

90. $\dfrac{x-a}{b-x}=\dfrac{x-b}{a-x};\ x$

***91.** $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\ n$

92. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f};\ q$

93. Geometría Use la fórmula $P=2l+2w$ para encontrar la longitud l de un rectángulo cuyo perímetro P es de 660 m y cuyo ancho w es de 160 m.

94. Geometría Use la fórmula $V=\pi r^2h$ para encontrar la altura h de una lata de refresco cuyo volumen V es de 355 ml y cuyo radio r es 2 cm.

95. Impuesto de venta Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo cuyo impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares.

96. Ingreso El ingreso mensual total de una guardería por concepto del cuidado de x niños está dado por $r=450x$, y sus costos mensuales totales son $c = 380x + 3500$. ¿Cuántos niños necesitan inscribirse mensualmente para alcanzar el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

97. Depreciación lineal Si usted compra un artículo para uso empresarial, puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo cuando prepare la declaración de impuestos. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal,* en la cual la depreciación anual se calcula al dividir el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Suponga que el costo es C dólares, la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en dólares) del artículo al final de n años está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

98. Señal de radar Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una carretera, se envía una señal que es reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia F (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la señal original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8}$$

donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora y f es la frecuencia de la señal original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de policía dirige la señal de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su auto, y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿Puede reclamarle por conducir a exceso de velocidad?

99. Ahorros Bronwyn y Steve quieren comprar una casa, de manera que han decidido ahorrar, cada uno, la quinta parte de sus salarios. Bronwyn gana \$27.00 por hora y recibe un ingreso adicional de \$18.00 a la semana, por declinar las prestaciones de la compañía, mientras que Steve gana \$35.00 por hora más prestaciones. Entre los dos, quieren ahorrar al menos \$550.00 cada semana. ¿Cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

100. Relación presa-depredador Para estudiar cierta relación presa-depredador, se realizó un experimento[4] en el que un sujeto con los ojos vendados, el "depredador", se puso al frente de una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron discos de papel de lija, a manera de "presa". Durante un minuto el "depredador" buscó los discos palpando con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento se repitió con varias densidades de los discos (número de discos por 9 pies cuadrados). Se estimó que si y es el número de discos que se han retirado en 1 minuto cuando hay x discos sobre la mesa, entonces

$$y = a(1 - by)x$$

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para y.

101. Densidad de presas En cierta área, el número y de larvas de polilla que ha consumido un solo escarabajo a lo largo de un periodo determinado, está dado por

$$y = \frac{1.4x}{1 + 0.09x}$$

donde x es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas le permitiría sobrevivir a un escarabajo, si necesita consumir 10 larvas a lo largo del periodo dado?

102. Horas de servicio Suponga que fuera constante la razón del número de horas que una tienda de video está abierta, al número de clientes diarios. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda está abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

103. Tiempo de viaje El tiempo que le toma a un bote viajar una distancia dada río arriba (en contra de la corriente) puede calcularse al dividir la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación para calcular el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c, recorrer una distancia d. Resuelva su ecuación para c.

104. Torre inalámbrica Una torre inalámbrica tiene 100 metros de altura. Un ingeniero determina electrónicamente que la distancia desde la punta de la torre hasta una casa cercana es 1 metro mayor que la distancia horizontal desde la base de la torre hasta la casa. Escriba una ecuación para la diferencia en términos de la distancia horizontal desde la base de la torre hasta la casa. Resuelva la ecuación y posteriormente determine la distancia desde la punta de la torre hasta la casa.

105. Derrape de un automóvil La policía ha usado la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, que derrapó un tramo de d pies al frenar. La literal f es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino [como concreto, asfalto, grava o chapopote (brea)] y si está húmedo o seco. En la tabla 0.1 se dan algunos valores de f. ¿A 45 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapará un automóvil en un camino de concreto seco? Redondee su respuesta al pie más cercano.

TABLA 0.1

	Concreto	Chapopote
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

[4]C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *Canadian Entomologist* 91, núm. 7 (1959), 385-98.

106. Interés ganado Allison Bennett descubre que tiene \$1257 en una cuenta de ahorros que no ha usado por un año. La tasa de interés fue de 7.3% compuesto anualmente. ¿Cuánto interés ganó por esa cuenta a lo largo del último año?

***107. Impuesto en un recibo** En Nueva Escocia los consumidores pagan HST (*un impuesto de ventas*) de 15%. Tom Wood viaja desde Alberta, que tiene sólo el impuesto federal GST (*por bienes y servicios*) de 7%, hasta Nueva Escocia a una conferencia sobre química. Cuando después envía su reporte de gastos en Alberta, el contador se encuentra con el problema que su multiplicador usual de $\frac{7}{107}$ para determinar los impuestos en un recibo no produce los resultados correctos. ¿Qué porcentaje de los recibos que trajo Tom de Nueva Escocia son por el HST?

En los problemas 108 a 111 utilice una calculadora graficadora para determinar cuáles de los números especificados son raíces de las ecuaciones dadas.

108. $112x^2 = 6x + 1;\ \frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}$

109. $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2;\ 5, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

110. $\frac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7;\ \sqrt{6}, -\frac{47}{52}, \frac{14}{61}$

111. $\left(\frac{v}{v+3}\right)^2 = v;\ 0, \frac{27}{4}, \frac{13}{3}$

OBJETIVO

Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o mediante el uso de la fórmula cuadrática.

0.8 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender a resolver problemas más complejos, se abordarán los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas.*

DEFINICIÓN

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o una *ecuación de grado dos*, puesto que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a. *Resuelva* $x^2 + x - 12 = 0$.

Solución: El lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0$$

Considere $x - 3$ y $x + 4$ como dos cantidades cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más cantidades sea *cero*, entonces, al menos una de ellas *debe* ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 4 = 0$$

Al resolver estas ecuaciones se tiene que $x = 3$ y $x = -4$. Por lo tanto, las raíces de la ecuación original son 3 y -4, y el conjunto solución es $\{-4, 3\}$.

ADVERTENCIA

No se dividen ambos lados entre w (una variable) porque la equivalencia no está garantizada y puede "perderse" una raíz.

b. *Resuelva* $6w^2 = 5w$.

Solución: La ecuación se escribe como

$$6w^2 - 5w = 0$$

de modo que un lado sea 0. Al factorizar se obtiene

$$w(6w - 5) = 0$$

Si se hace cada factor igual a cero, se tiene

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0$$

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w = 5$$

Por lo tanto, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Observe que si se hubiera dividido ambos miembros de $6w^2 = 5w$ entre w y se hubiera obtenido $6w = 5$, la única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Esto es, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma el análisis de la operación 5 en la sección 0.7.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

ADVERTENCIA

Un problema como éste debe abordarse con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es cierto que al menos una de las dos cantidades deba ser -2. ¿Por qué?

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva $(3x - 4)(x + 1) = -2$.

Solución: Primero se multiplican los factores del lado izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un lado, se tiene

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}, 1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resuelva* $4x - 4x^3 = 0$.

Solución: Ésta es una *ecuación de tercer grado*. Se resuelve de la siguiente manera:

$$4x - 4x^3 = 0$$

$$4x(1 - x^2) = 0 \qquad \text{(al factorizar)}$$

$$4x(1 - x)(1 + x) = 0 \qquad \text{(al factorizar)}$$

ADVERTENCIA

No olvide que el factor x da lugar a una raíz.

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, se obtiene $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. Así,

$$x = 0 \text{ o } x = 1 \text{ o } x = -1$$

de manera que el conjunto solución es $\{-1, 0, 1\}$.

b. *Resuelva* $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$.

Solución: Tras factorizar $x(x + 2)^2$ en ambos términos del lado izquierdo, se tiene

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0$$

$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0$$

De aquí que, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de lo cual se concluye que el conjunto solución es $\{-\frac{7}{2}, -2, 0\}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

EJEMPLO 4 Una ecuación fraccionaria que conduce a una ecuación cuadrática

Resuelva

$$\frac{y+1}{y+3}+\frac{y+5}{y-2}=\frac{7(2y+1)}{y^2+y-6} \quad \textbf{(2)}$$

Solución: Al multiplicar ambos lados por el MCD, $(y+3)(y-2)$, se obtiene

$$(y-2)(y+1)+(y+3)(y+5)=7(2y+1) \quad \textbf{(3)}$$

Como la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable y, recuerde (sección 0.7) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) se tiene

$$2y^2-7y+6=0 \qquad \text{(ecuación cuadrática)}$$
$$(2y-3)(y-2)=0 \qquad \text{(al factorizar)}$$

Se ha mostrado que *si* y satisface la ecuación original *entonces* $y=\frac{3}{2}$ o $y=2$. Por lo tanto, $\frac{3}{2}$ y 2 son las únicas raíces *posibles* de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) puesto que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, puede verificarse que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación *original*. Por lo tanto su única raíz es $\frac{3}{2}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53

EJEMPLO 5 Solución por factorización

Resuelva $x^2=3$.

ADVERTENCIA

No concluya de inmediato que la solución de $x^2=3$ consiste sólo en $x=\sqrt{3}$.

Solución:

$$x^2=3$$
$$x^2-3=0$$

Factorizando, se obtiene

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$

Por lo tanto, $x-\sqrt{3}=0$ o bien $x+\sqrt{3}=0$, de modo que $x=\pm\sqrt{3}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Una forma más general de la ecuación $x^2=3$, es $u^2=k$. Igual que antes, puede mostrarse que

$$\text{Si } u^2=k \qquad \text{entonces} \qquad u=\pm\sqrt{k}. \quad \textbf{(4)}$$

Fórmula cuadrática

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, esto será evidente al tratar ese método en la ecuación $0.7x^2-\sqrt{2}x-8\sqrt{5}=0$. Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática* que proporciona las raíces de cualquier ecuación cuadrática.

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son constantes y $a\neq 0$, están dadas por

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En realidad la fórmula cuadrática no es difícil de obtener si primero se escribe la ecuación cuadrática de la forma

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

y después como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - K^2 = 0$$

para un número K, que aún debe determinarse. Esto conduce a

$$\left(x + \frac{b}{2a} - K\right)\left(x + \frac{b}{2a} + K\right) = 0$$

lo que a su vez lleva a $x = -\frac{b}{2a} + K$ o bien $x = -\frac{b}{2a} - K$ mediante los métodos que ya se han considerado. No es difícil inferir lo que debe ser K, pero se requiere un razonamiento más profundo para entender cómo es posible descubrir el valor de K sin conocer previamente la respuesta.

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Resuelva $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: Aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$. Por lo tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}$$

Las raíces son $\frac{17 + 7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $\frac{17 - 7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

Resuelva $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: Vea el acomodo de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$ y $c = 2$. Así que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}$$

Y por ende,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{o bien} \quad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, la única raíz es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Resuelva $z^2 + z + 1 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: Aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Ahora bien, $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe tal número real, puesto que el cuadrado de todo número real es no negativo. Entonces, la ecuación no tiene raíces reales.[5]

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

Esto describe la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos diferentes raíces reales, exactamente una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que $b^2 - 4ac > 0$, $= 0$ o < 0, respectivamente.

TECNOLOGÍA

Mediante la característica de programación de una calculadora graficadora, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. La figura 0.3 muestra un programa para la calculadora graficadora TI-83 Plus. A fin de ejecutarlo para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (vea la figura 0.4). Las raíces resultantes son $x = 1.25$ y $x = 0.4$.

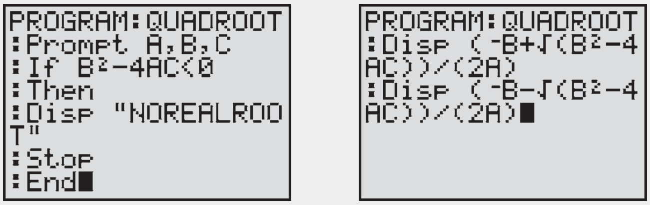


FIGURA 0.3 Programa para encontrar las raíces reales de $Ax^2 + Bx + C = 0$.

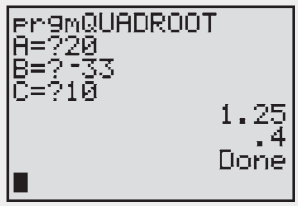


FIGURA 0.4 Raíces de $20x^2 - 33x + 10 = 0$.

Ecuaciones de formas cuadráticas

Algunas veces, una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En ese caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática**. El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

Resuelva $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{9}{x^3} + 8 = 0$.

Solución: Esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0$$

entonces es cuadrática en $1/x^3$, por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable w por $1/x^3$ se obtiene una ecuación cuadrática en la variable w, la cual puede resolverse:

$$w^2 + 9w + 8 = 0$$
$$(w + 8)(w + 1) = 0$$
$$w = -8 \quad \text{o} \quad w = -1$$

ADVERTENCIA

No suponga que -8 y -1 son soluciones de la ecuación *original*.

[5] $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ donde $i = \sqrt{-1}$ se denomina la *unidad imaginaria*. Debe enfatizarse que $i = \sqrt{-1}$ no es un número real. Los números complejos tienen la forma $a + ib$, en donde a y b son reales, pero no se estudian en este libro.

Si se regresa a la variable x, se tiene

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x^3} = -1$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \text{ o bien } x^3 = -1$$

de donde se concluye que

$$x = -\frac{1}{2} \text{ o bien } x = -1$$

Al verificar, se encuentra que estos valores de x satisfacen la ecuación original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49

Problemas 0.8

Resuelva por factorización los problemas 1 a 30.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0$
2. $t^2 + 3t + 2 = 0$
***3.** $t^2 - 8t + 15 = 0$
4. $x^2 + 3x - 10 = 0$
5. $x^2 - 2x - 3 = 0$
6. $x^2 - 16 = 0$
***7.** $u^2 - 13u = -36$
8. $3w^2 - 12w + 12 = 0$
***9.** $x^2 - 4 = 0$
10. $3u^2 - 6u = 0$
11. $t^2 - 5t = 0$
12. $x^2 + 9x = -14$
13. $4x^2 + 1 = 4x$
14. $2z^2 + 9z = 5$
15. $v(3v - 5) = -2$
16. $2 + x - 6x^2 = 0$
17. $-x^2 + 3x + 10 = 0$
18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y$
19. $2p^2 = 3p$
20. $-r^2 - r + 12 = 0$
21. $x(x + 4)(x - 1) = 0$
22. $(w - 3)^2(w + 1)^2 = 0$
***23.** $t^3 - 49t = 0$
24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$
25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$
26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0$
27. $(x - 3)(x^2 - 4) = 0$
28. $5(x^2 + x - 12)(x - 8) = 0$
29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0$
30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

En los problemas 31 a 44, encuentre todas las raíces reales con el uso de la fórmula cuadrática.

***31.** $x^2 + 2x - 24 = 0$
32. $x^2 - 2x - 15 = 0$
***33.** $4x^2 - 12x + 9 = 0$
34. $q^2 - 5q = 0$
35. $p^2 - 2p - 7 = 0$
36. $2 - 2x + x^2 = 0$
***37.** $4 - 2n + n^2 = 0$
38. $2x^2 + x = 5$
39. $4x^2 + 5x - 2 = 0$
40. $w^2 - 2w + 1 = 0$
41. $0.02w^2 - 0.3w = 20$
42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$
43. $2x^2 + 4x = 5$
44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0$

En los problemas 45 a 54, resuelva la ecuación de forma cuadrática dada.

45. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
46. $X^4 - 3X^2 - 10 = 0$
47. $\frac{3}{x^2} - \frac{7}{x} + 2 = 0$
48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0$
***49.** $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0$
50. $\frac{1}{x^4} - \frac{9}{x^2} + 8 = 0$
51. $(X - 5)^2 + 7(X - 5) + 10 = 0$
52. $(3x + 2)^2 - 5(3x + 2) = 0$
***53.** $\frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{12}{x - 2} + 35 = 0$
54. $\frac{2}{(x + 4)^2} + \frac{7}{x + 4} + 3 = 0$

Resuelva por cualquier método los problemas 55 a 76.

55. $x^2 = \frac{x + 3}{2}$
56. $\frac{x}{2} = \frac{7}{x} - \frac{5}{2}$
57. $\frac{3}{x - 4} + \frac{x - 3}{x} = 2$
58. $\frac{2}{2x + 1} - \frac{6}{x - 1} = 5$
59. $\frac{3x + 2}{x + 1} - \frac{2x + 1}{2x} = 1$
60. $\frac{6(w + 1)}{2 - w} + \frac{w}{w - 1} = 3$
61. $\frac{2}{r - 2} - \frac{r + 1}{r + 4} = 0$
62. $\frac{2x - 3}{2x + 5} + \frac{2x}{3x + 1} = 1$
63. $\frac{t + 1}{t + 2} + \frac{t + 3}{t + 4} = \frac{t + 5}{t^2 + 6t + 8}$
64. $\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x + 2}$
65. $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x(x - 1)} = \frac{2}{x^2}$
66. $5 - \frac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \frac{1 - x}{x}$
67. $\sqrt{2x - 3} = x - 3$
68. $3\sqrt{x + 4} = x - 6$
69. $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}$
70. $x + \sqrt{4x} - 5 = 0$
71. $\sqrt{z + 3} - \sqrt{3z} - 1 = 0$
72. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0$
73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0$

74. $\sqrt{y-2}+2=\sqrt{2y+3}$

75. $\sqrt{x+3}+1=3\sqrt{x}$

76. $\sqrt{\sqrt{t}+2}=\sqrt{3t-1}$

En los problemas 77 y 78, encuentre las raíces redondeadas a dos posiciones decimales.

77. $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0$

78. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0$

79. Geometría El área de un dibujo rectangular, que tiene un ancho de 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones del dibujo?

80. Temperatura La temperatura se ha incrementado X grados por día durante X días. Hace X días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha incrementado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado incrementando?

81. Economía Una raíz de la ecuación proveniente de la economía

$$\overline{M} = \frac{Q(Q+10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifíquela utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q es el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de oferta de dinero.

82. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.[6] La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla proteínica, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) de una rata, durante cierto periodo, estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que proporciona un aumento promedio de peso de 60 gramos?

83. Posología Existen varias reglas para determinar la dosis de medicinas adecuada para los niños una vez que se ha especificado la de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etcétera. A continuación se presentan dos reglas en donde A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño:

$$\text{Regla de Young:} \qquad c = \frac{A}{A+12}d$$

$$\text{Regla de Cowling:} \qquad c = \frac{A+1}{24}d$$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas bajo ambas reglas? Redondee su respuesta al año más cercano. Se presume que el niño se ha convertido en adulto cuando $c = d$. ¿A qué edad un niño se convierte en adulto de acuerdo con la regla de Cowling? ¿Y según la regla de Young? Si sabe cómo graficar funciones, grafique tanto $Y(A) = \frac{A}{A+12}$ y $C(A) = \frac{A+1}{24}$ como funciones de A, para $A \geq 0$, en el mismo plano. Con el empleo de las gráficas, haga una comparación más razonada de las reglas de Young y Cowling que la que se logra sólo cuando la edad en ambas coinciden.

84. Precio de envío de un bien En un análisis acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCanio[7] plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n-1)v^2 - 2nv + 1 = 0$$

y

$$nv^2 - (2n+1)v + 1 = 0$$

donde $n \geq 1$.

(a) Resuelva la primera ecuación para v.

(b) Resuelva la segunda ecuación para v si $v < 1$.

85. Movimiento Suponga que la altura h de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 39.2t - 4.9t^2,$$

donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos.

(a) ¿Después de cuántos segundos el objeto cae al piso?

(b) ¿Cuándo se encuentra a una altura de 68.2 m?

En los problemas 86 a 91 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres posiciones decimales. Para los problemas 86 y 87, confirme sus resultados de manera algebraica.

86. $2x^2 - 3x - 27 = 0$

87. $8x^2 - 18x + 9 = 0$

88. $10x^2 + 5x - 2 = 0$

89. $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0$

90. $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z)$

91. $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3$

[6] Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (eds.), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[7] S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics* 99, núm. 2 (1984), 329-49.

Aplicación práctica

Modelado del comportamiento de una celda de carga[8]

Una *celda de carga* es un dispositivo que mide una fuerza, como el peso, y lo traduce en una señal eléctrica. Las celdas de carga se encuentran en muchas aplicaciones, por ejemplo, en las básculas de baño. Cuando usted se pone de pie sobre la báscula, la celda de carga traduce la fuerza que su cuerpo ejerce sobre la plataforma en una señal eléctrica de voltaje variable, dependiendo de su peso. La señal eléctrica se convertirá en la información digital que aparece en la pantalla de la báscula.

Como todo dispositivo de medición, las celdas de carga tienen que ser predecibles y consistentes. Aunque una báscula de baño poco confiable no sobrevivirá en el mercado por mucho tiempo, probablemente no se considerará como un artículo peligroso. La confiabilidad en otras aplicaciones de las celdas de carga a menudo es considerablemente más seria. Las herramientas de elevación, como las grúas, deben contener celdas de carga que informen cuando el equipo esté alcanzando su límite de operación segura. En una aplicación de este tipo, un error puede resultar desastroso.

Un requerimiento común es que la salida de voltaje, V, esté vinculada con la fuerza de entrada, F, mediante una ecuación lineal como la que se analizó en la sección 0.7:

$$V = aF + b$$

Una respuesta lineal permite una sencilla transformación de voltaje a una lectura digital.

Suponga que una compañía que fabrica celdas de carga para grúas coloca una celda de prueba durante un ensayo de calibración, y obtiene los datos siguientes (la fuerza se mide en miles de libras y el voltaje en voltios).

Fuerza	Voltaje	Fuerza	Voltaje
150.000	0.11019	1650.000	1.20001
300.000	0.21956	1800.000	1.30822
450.000	0.32949	1950.000	1.41599
600.000	0.43899	2100.000	1.52399
750.000	0.54803	2250.000	1.63194
900.000	0.65694	2400.000	1.73947
1050.000	0.76562	2550.000	1.84646
1200.000	0.87487	2700.000	1.95392
1350.000	0.98292	2850.000	2.06128
1500.000	1.09146	3000.000	2.16844

Si la celda de carga funciona de manera adecuada, una ecuación lineal será un buen modelo para estos datos. En

otras palabras, al ubicar los valores de los datos como puntos en una gráfica, debe ser posible trazar una recta que pase a través de todos los puntos dentro de un margen de error aceptable.

Las matemáticas necesarias para determinar la recta que mejor modela los datos no son triviales. Por fortuna, una calculadora graficadora puede hacerlo de manera automática. El resultado es

$$V = 0.0007221F + 0.006081368 \qquad (5)$$

Al graficar tanto los datos como la ecuación se obtiene el resultado que se muestra en la figura 0.5.

Parece como si en verdad el modelo lineal coincidiera adecuadamente, pero, ¿es lo suficientemente bueno? Enseguida se verán las diferencias entre los voltajes medidos y los valores respectivos que pronostica el modelo lineal. Para cada magnitud de la fuerza en la tabla de datos, se resta del voltaje medido el voltaje correspondiente pronosticado mediante la ecuación (5).

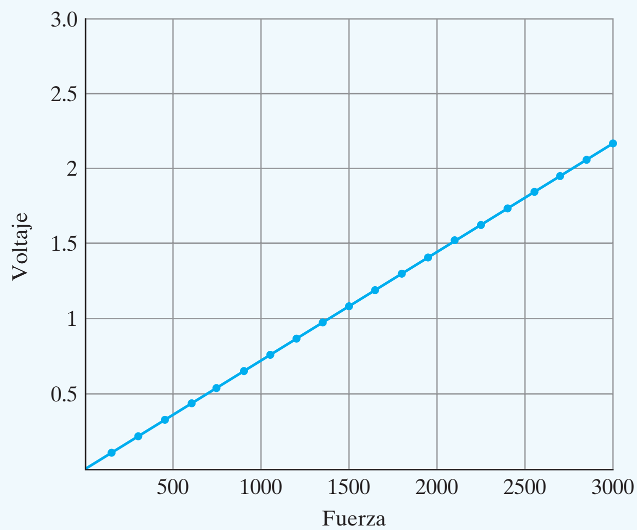


FIGURA 0.5 El modelo lineal.

[8] Basado en la sección 4.6.1 de *Engineering Statistics Handbook*, National Institute of Standards and Technology/SEMATECH, www.nist.gov/itl/div898/handbook/pmd/section6/pmd61.htm.

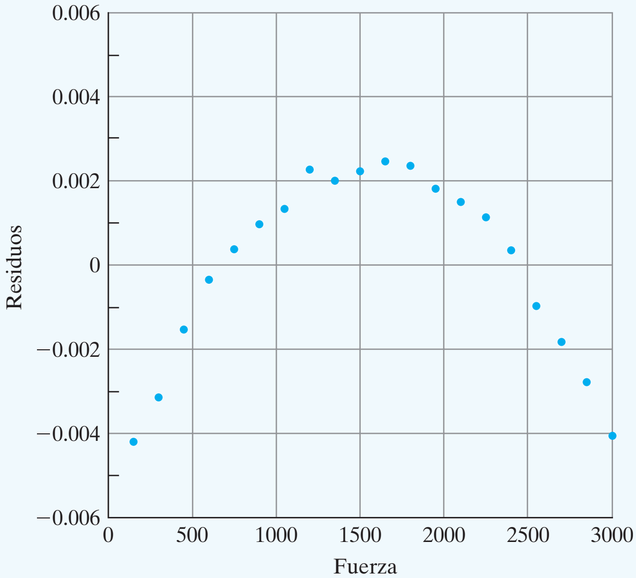


FIGURA 0.6 Gráfica de los residuos.

Por ejemplo, para el valor de fuerza, 450 000, se calcula

$$0.32949 - (0.0007221(450\,000) + 0.006081368) = -0.00154$$

Las diferencias calculadas se denominan los *residuos*.

Si se calcula el residuo correspondiente para cada valor de fuerza entonces es posible graficar puntos con coordenadas horizontales, dadas por la fuerza, y coordenadas verticales, dadas por los residuos, como en la figura 0.6.

Por ejemplo, uno de los puntos graficados es (450 000, −0.00154).

En apariencia, los datos que se localizan a la mitad de la figura 0.5 están ligeramente por arriba de la recta (residuos positivos), mientras que los que se encuentran en los extremos de la recta están ligeramente debajo de ella (residuos negativos). En otras palabras, el patrón de los datos tiene una ligera curvatura, la cual se hace evidente sólo cuando se grafican los residuos y se hace un "acercamiento" en la escala vertical.

La gráfica de los residuos parece una parábola (vea el capítulo 3). Puesto que la ecuación de una parábola tiene un término cuadrático, es de esperarse que una ecuación cuadrática sea un mejor modelo para predecir los datos, que uno lineal. Con base en la función de regresión cuadrática de una calculadora graficadora, se obtiene la ecuación

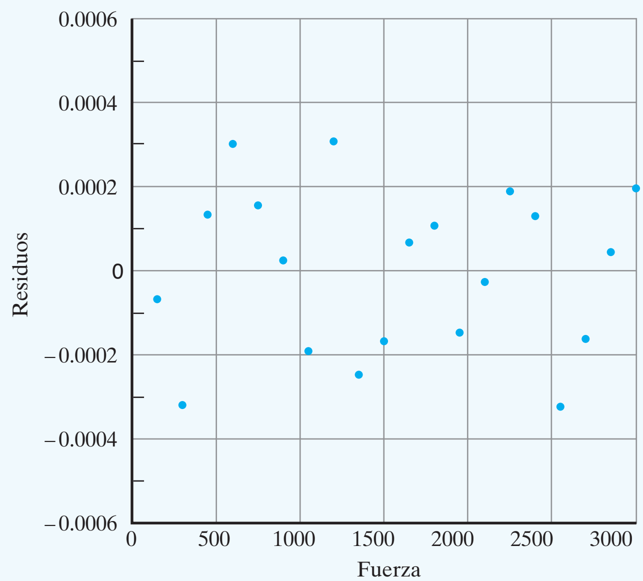
$$V = (-3.22693 \times 10^{-9})F^2 + 0.000732265F - 0.000490711$$

El coeficiente pequeño en el término de F al cuadrado indica una ligera falta de linealidad en los datos.

La ligera falta de linealidad obligará al fabricante de celdas de carga a tomar una decisión. Por un lado, una respuesta no lineal de la celda de carga podría producir mediciones peligrosamente imprecisas en algunas aplicaciones, en especial si la celda se utilizará para medir fuerzas que se encuentren fuera del rango de la prueba. (Las grúas montadas en barcos de carga algunas veces sostienen pesos de hasta 5000 toneladas o 10 millones de libras.) Por otra parte, todos los procesos de manufactura implican un compromiso entre lo que es ideal y lo que es factible en la práctica.

Problemas

1. Introduzca los valores de fuerza y voltaje como dos listas separadas en una calculadora graficadora, y luego utilice la función de regresión lineal del menú de estadística para generar una ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación lineal dada en el análisis precedente.
2. En la mayoría de las calculadoras graficadoras, si usted multiplica la lista de fuerzas por 0.0007221 y suma 0.006081368 y luego resta el resultado de la lista de voltajes, tendrá la lista de residuos. ¿Por qué se obtiene esto? Almacene los residuos como una nueva lista: luego grafíquelos y compare sus resultados con la figura 0.6.
3. Utilice la función de regresión cuadrática de la calculadora graficadora para generar una nueva ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación del análisis precedente.
4. El modelo cuadrático también tiene residuos, que cuando se grafican se observan de la siguiente manera:



Compare la escala del eje vertical con la respectiva de la figura 0.6. ¿Qué le sugiere esta comparación? ¿Qué sugiere el patrón de los datos para los residuos cuadráticos?

1

APLICACIONES Y MÁS ÁLGEBRA

Aplicación práctica Grabación de calidad variable

En este capítulo se aplicarán las ecuaciones a diferentes situaciones cotidianas. Después se hará lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en las que una cantidad es menor que ($<$), mayor que ($>$), menor o igual que ($\leq$), o mayor o igual que ($\geq$) alguna otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades consiste en la regulación de equipamiento deportivo. En un juego típico de las ligas mayores, se utilizan docenas de pelotas de béisbol, y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente $5\frac{1}{8}$ onzas; pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de $5\frac{1}{4}$, que es lo que señalan las reglas oficiales (`www.majorleaguebaseball.com`). Observe que *no menos que* es sinónimo de *mayor o igual que*, mientras que *no más que* es sinónimo de *menor* o *igual que*. Cuando se traducen los enunciados verbales a términos matemáticos, el primer paso es procurar evitar las palabras negativas. De cualquier forma, se tiene

$$\text{peso de la pelota} \geq 5 \text{ onzas} \quad \text{y} \quad \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

que pueden combinarse para obtener

$$5 \text{ onzas} \leq \text{peso de la pelota} \leq 5\frac{1}{4} \text{ onzas}$$

que resulta más sencillo de leer si se dice que la pelota debe pesar entre 5 y $5\frac{1}{4}$ onzas (*entre* incluye los valores extremos).

Se aplica otra desigualdad en el caso de los veleros de las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años. La International America's Cup Class (IACC) emplea la siguiente regla para definir un yate:

$$\frac{L + 1.25\sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.679} \leq 24.000 \text{ m}$$

El símbolo "$\leq$" significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho. L, S y DSP se especifican mediante complicadas fórmulas, pero en términos generales, L es la longitud, S es el área de las velas y DSP es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula de la IACC permite a los diseñadores de yates cierta flexibilidad. Suponga que un yate tiene $L = 20.2$ m, $S = 282$ m^2 y $DSP = 16.4$ m^3. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área de las velas y dejar sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, los valores típicos de L, S y DSP son tales que hacen que la expresión de lado izquierdo resulte tan cercana como sea posible a 24 m.

Además de analizar algunas aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto y se introducirá la notación de la sumatoria.

OBJETIVO

Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.

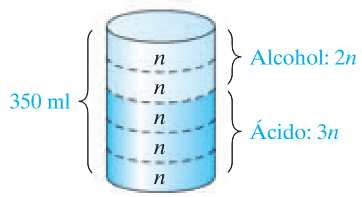


FIGURA 1.1 Solución química (ejemplo 1).

ADVERTENCIA

Observe que la solución a una ecuación no es necesariamente la solución al problema dado.

1.1 Aplicaciones de ecuaciones

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, deben traducirse las relaciones a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado*. Los ejemplos siguientes ilustran las técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de ellos de manera cuidadosa antes de pasar a los ejercicios.

EJEMPLO 1 Mezcla

Un químico debe preparar 350 ml *de una solución compuesta por dos partes de alcohol y tres partes de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?*

Solución: Sea n el número de mililitros de cada parte. La figura 1.1 muestra la situación. A partir del diagrama se tiene

$$\begin{aligned} 2n + 3n &= 350 \\ 5n &= 350 \\ n &= \frac{350}{5} = 70 \end{aligned}$$

Pero $n = 70$ *no* es la respuesta al problema original. Cada *parte* tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es $2n = 2(70) = 140$, y la cantidad de ácido es $3n = 3(70) = 210$. Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo un diagrama es útil para plantear un problema escrito.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

EJEMPLO 2 Plataforma de observación

Se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle [vea la figura 1.2(a)]. Sus dimensiones serán de 6 m *por* 12 m. *Habrá un cobertizo rectangular de* 40 m² *de área en el centro de la plataforma. La parte descubierta consistirá de un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?*

Solución: La figura 1.2(b) muestra un diagrama de la plataforma. Sea w el ancho (en metros) del pasillo. Entonces, la parte destinada al cobertizo tiene dimensiones de $12 - 2w$ por $6 - 2w$. Como su área debe ser de 40 m², donde área = (largo)(ancho), se tiene

$$\begin{aligned} (12 - 2w)(6 - 2w) &= 40 \\ 72 - 36w + 4w^2 &= 40 && \text{(al multiplicar)} \\ 4w^2 - 36w + 32 &= 0 \\ w^2 - 9w + 8 &= 0 && \text{(al dividir ambos lados entre 4)} \\ (w - 8)(w - 1) &= 0 \\ w &= 8,\ 1 \end{aligned}$$

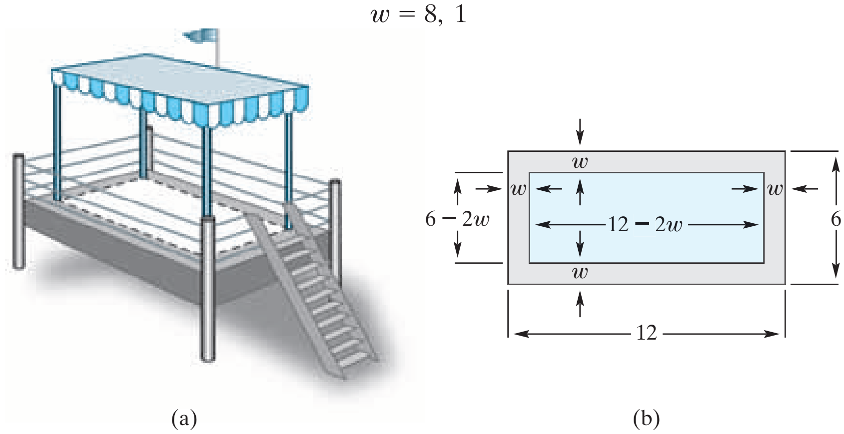


FIGURA 1.2 Pasillo en la plataforma (ejemplo 2).

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es la respuesta del problema, puesto que una de las dimensiones de la plataforma es de sólo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Las palabras clave que se presentan aquí son *costo fijo, costo variable, costo total, ingreso total* y *utilidad.* Éste es el momento de familiarizarse con dichos términos porque se utilizarán a lo largo del libro.

En el ejemplo siguiente se hace referencia a algunos términos de negocios y a su relación con una compañía manufacturera. **Costo fijo** es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etcétera. Este costo debe pagarse independientemente de que la fábrica produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como mano de obra y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producción:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})\ (\text{número de unidades vendidas})$$

Utilidad es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

EJEMPLO 3 Utilidad

La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 *y el costo fijo de* \$80 000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de artículos que deben venderse para obtener una utilidad de* \$60 000.

Solución: Sea q el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de administración de negocios, q representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es $6q$. Por lo tanto, el costo *total* será $6q + 80\,000$. El ingreso total por la venta de q unidades es $10q$. Como

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

el modelo para este problema es

$$60\,000 = 10q - (6q + 80\,000)$$

Al resolver se obtiene

$$\begin{aligned} 60\,000 &= 10q - 6q - 80\,000 \\ 140\,000 &= 4q \\ 35\,000 &= q \end{aligned}$$

Por lo tanto, deben venderse 35 000 unidades para obtener una ganancia de \$60 000.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 4 Precios

Sportcraft produce ropa deportiva para dama y planea vender su nueva línea de pantalones a las tiendas minoristas. El costo para ellos será de \$33 por pantalón. Para mayor comodidad del minorista, Sportcraft colocará una etiqueta con el precio en cada par de pantalones. ¿Qué cantidad debe ser impresa en las etiquetas de modo que el minorista pueda reducir este precio en un 20% *durante una venta y aún obtener una ganancia de* 15% *sobre el costo?*

Solución: Tome en cuenta el hecho de que

Observe que precio = costo + utilidad.

$$\text{precio de venta} = \text{costo por pantalón} + \text{utilidad por pantalón}$$

Sea p el precio en dólares impreso en la etiqueta de cada pantalón. Durante la venta, el minorista realmente recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más la utilidad, (0.15)(33). Por ende,

$$\begin{aligned} \text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\ p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33) \\ 0.8p &= 37.95 \\ p &= 47.4375 \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, el fabricante debe imprimir las etiquetas con un precio de $47.44.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

EJEMPLO 5 Inversión

Se invirtió un total de \$10 000 *en acciones de dos compañías, A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de* 6% *y* $5\frac{3}{4}$%, *respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de* \$588.75?

Solución: Sea x la cantidad, en dólares, invertida al 6%. Entonces se invirtió $10\,000 - x$ al $5\frac{3}{4}$%. El interés ganado en A fue $(0.06)(x)$ y en B fue $(0.0575)(10\,000 - x)$, que en total asciende a 588.75. De ahí que,

$$\begin{aligned} (0.06)x + (0.0575)(10\,000 - x) &= 588.75 \\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75 \\ 0.0025x &= 13.75 \\ x &= 5500 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se invirtieron \$5500 al 6%, y \$10 000 − \$5500 = \$4500 al $5\frac{3}{4}$%.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

EJEMPLO 6 Redención de un bono

El consejo de administración de Maven Corporation acuerda redimir algunos de sus bonos en dos años. Para entonces se requerirán \$1 102 500. *Suponga que en la actualidad la compañía reserva* \$1 000 000. *¿A qué tasa de interés compuesto anual, capitalizado anualmente, debe invertirse este dinero a fin de que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?*

Solución: Sea r la tasa de interés anual requerida. Al final del primer año, la cantidad acumulada será \$1 000 000 más el interés, $1\,000\,000r$, para un total de

$$1\,000\,000 + 1\,000\,000r = 1\,000\,000(1 + r)$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1\,000\,000(1 + r)$ más el interés de esto, que es $1\,000\,000(1 + r)r$. Así, el valor total al final del segundo año será

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r$$

Esto debe ser igual a \$1 102 500:

$$1\,000\,000(1 + r) + 1\,000\,000(1 + r)r = 1\,102\,500 \tag{1}$$

Como $1\,000\,000(1 + r)$ es un factor común de ambos términos del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned} 1\,000\,000\,(1 + r)(1 + r) &= 1\,102\,500 \\ 1\,000\,000\,(1 + r)^2 &= 1\,102\,500 \\ (1 + r)^2 &= \frac{1\,102\,500}{1\,000\,000} = \frac{11\,025}{10\,000} = \frac{441}{400} \\ 1 + r &= \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20} \\ r &= -1 \pm \frac{21}{20} \end{aligned}$$

Así, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la ecuación (1), se rechaza -2.05, puesto que es necesario que r sea positiva. Así que $r = 0.05$, de modo que la tasa buscada es 5%.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

A veces puede haber más de una manera de modelar un problema escrito, como lo muestra el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Renta de un departamento

Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Jardines de Parklane, que comprende 96 departamentos (pisos). Si la renta es de \$550 mensuales, todos los departamentos se ocupan. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir \$54 600 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?

Solución:

Método I: Suponga que r es la renta (en dólares) que se cobrará por cada departamento. Entonces el incremento sobre el nivel de \$550 es $r - 550$. Así, el número de aumentos de \$25 es $\frac{r-550}{25}$. Como cada aumento de \$25 causa que tres departamentos se desocupen, el número total de departamentos vacantes será $3\left(\frac{r-550}{25}\right)$. De aquí que el número total de departamentos rentados será $96 - 3\left(\frac{r-550}{25}\right)$. Como renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados) se tiene

$$\begin{aligned}
54\,600 &= r\left[96 - \frac{3(r-550)}{25}\right] \\
54\,600 &= r\left[\frac{2400 - 3r + 1650}{25}\right] \\
54\,600 &= r\left[\frac{4050 - 3r}{25}\right] \\
1\,365\,000 &= r\,(4050 - 3r)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1\,365\,000 = 0$$

Mediante la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned}
r &= \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1\,365\,000)}}{2(3)} \\
&= \frac{4050 \pm \sqrt{22\,500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25
\end{aligned}$$

Así que la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

Método II. Suponga que n es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será $25n$ y habrá $3n$ departamentos vacantes. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados)

se tiene

$$\begin{aligned}
54\,600 &= (550 + 25n)(96 - 3n) \\
54\,600 &= 52\,800 + 750n - 75n^2 \\
75n^2 - 750n + 1800 &= 0 \\
n^2 - 10n + 24 &= 0 \\
(n-6)(n-4) &= 0
\end{aligned}$$

Así, $n = 6$ o $n = 4$. La renta que debe cobrarse es $550 + 25(6) = \$700$ o bien $550 + 25(4) = \$650$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

Problemas 1.1

1. **Cercado** Se colocará una cerca alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies cuadrados y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de cerca se utilizarán?

2. **Geometría** El perímetro de un rectánsgulo es de 300 pies y su largo es dos veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.

3. **Oruga lagarta** Uno de los insectos desfoliadores más perjudiciales es la oruga lagarta, que se alimenta del bosque, de plantas de sombra y de árboles frutales. Cierta persona vive en un área en la que esta oruga se ha convertido en un problema, y desea fumigar los árboles de su propiedad antes de que ocurra una mayor desfoliación. Necesita 145 onzas de una solución compuesta de 4 partes de insecticida A y 5 partes de insecticida B. Después de preparada, la solución se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?

4. **Mezcla de concreto** Un constructor prepara cierto tipo de concreto, al mezclar una parte de cemento portland (hecho de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies cúbicos de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?

*5. **Acabado de muebles** De acuerdo con *The Consumer's Handbook* [Paul Fargis, ed. (Nueva York: Hawthorn, 1974)], un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene dos partes de aceite de linaza hervido y una parte de aguarrás. Si debe prepararse una pinta (16 onzas líquidas) de este producto, ¿cuántas onzas líquidas de aguarrás se necesitan?

6. **Administración de bosques** Una compañía maderera posee un bosque de forma rectangular de 1 milla por 2 millas. Si la compañía corta una franja uniforme de árboles a lo largo de los bordes exteriores de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja para conservar $\frac{3}{4}$ de milla cuadrada de bosque?

*7. **Vereda de jardín** Se va usar un terreno rectangular de 4 m por 8 m, para plantar un jardín. Se decide construir un corredor pavimentado en todo el borde, de manera que queden 12 metros cuadrados del terreno para cultivar flores. ¿Cuál debe ser el ancho del corredor?

8. **Conducto de ventilación** El diámetro de un conducto de ventilación es de 140 mm, y está unido a un conducto cuadrado, como se muestra en la figura 1.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Redondeando al milímetro más cercano, ¿cuál debe ser la longitud x de un lado de la sección cuadrada?

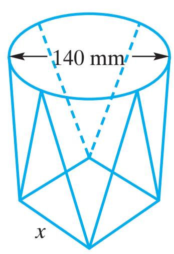


FIGURA 1.3 Conducto de ventilación (problema 8).

*9. **Utilidad** Una compañía de refinación de maíz produce gluten para alimento de ganado, con un costo variable de \$82 por tonelada. Si los costos fijos son \$120 000 al mes y el alimento se vende a \$134 la tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse al mes para que la compañía obtenga una utilidad mensual de \$560 000?

10. **Ventas** La gerencia de la compañía Smith quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de \$150 000. Se cuenta con los siguientes datos: precio unitario de venta, \$50; costo variable por unidad, \$25; costo fijo total, \$500 000. A partir de esta información, determine las unidades que deben venderse.

*11. **Inversión** Una persona desea invertir \$20 000 en dos empresas de modo que el ingreso total por año sea de \$1440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga un $7\frac{1}{2}$% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada empresa?

12. **Inversión** Una persona invirtió \$20 000, parte a una tasa de interés de 6% anual y el resto al 7% anual. El interés total al final de un año fue equivalente a una tasa de $6\frac{3}{4}$% anual sobre el total inicial de \$20 000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

*13. **Precios** El costo de un producto al menudeo es de \$3.40. Si el minorista desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe vender el producto?

14. **Retiro de bonos** En tres años, una compañía requerirá de \$1 125 800 con el fin de retirar algunos bonos. Si hoy invierte \$1 000 000 para este propósito, ¿cuál debe ser la tasa de interés, capitalizado anualmente, que debe recibir sobre este capital para retirar los bonos?

*15. **Programa de expansión** En dos años, una compañía iniciará un programa de expansión. Ha decidido invertir \$3 000 000 ahora, de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de \$3 245 000, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?

16. **Negocios** Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas, en dólares, será $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$1200, encuentre los valores de q para los que

$$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

(Esto es, que la utilidad sea cero.)

17. **Alojamiento en dormitorio** El dormitorio de una universidad puede alojar a 210 estudiantes. Este otoño hay cuartos disponibles para 76 jóvenes de nuevo ingreso. En promedio, un 95% de aquellos estudiantes de nuevo ingreso que pidieron una solicitud realmente reservan un cuarto. ¿Cuántas solicitudes debe distribuir el colegio si quiere recibir 76 reservaciones?

18. **Encuestas** Se aplicó una encuesta a un grupo de personas, y el 20%, o 700, de ellas prefirió un nuevo producto que la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

19. **Salario de una guardia de prisión** Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las guardias era 30% menor (\$200 menos) por mes, que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un guardia masculino. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

20. Huelga de conductores Hace algunos años, los transportistas de cemento sostuvieron una huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían $7.50 por hora y trabajaban 260 días, 8 horas diarias durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para compensar la pérdida de esos 46 días en un año?

21. Punto de equilibrio Un fabricante de juegos de video, vende cada copia en $21.95. El costo de fabricación de cada copia es de $14.92. Los costos fijos mensuales son de $8500. Durante el primer mes de ventas de un juego nuevo, ¿cuántos debe vender para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total sea igual al costo total)?

22. Club de inversión Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por $4000. El bono da un rendimiento de 7% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para hospitales. El precio de cada acción es de $15 y se gana un dividendo de $0.60 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club para obtener el 6% anual de su inversión total en acciones y bonos?

23. Cuidado de la vista Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros $35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales de ese tipo, hasta cubrir un *total* máximo de $100. Determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa para un empleado.

24. Control de calidad El fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras habían sido devueltas por imperfecciones durante cierto tiempo.

(a) Si c barras de dulce se fabrican en un año, ¿cuántas barras puede esperar el fabricante por concepto de devolución?

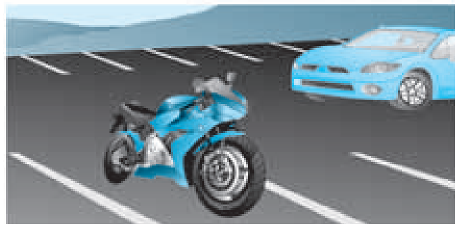
(b) Se proyecta que este año el consumo anual del dulce será de 600 millones de barras. ¿Cuántas barras aproximadamente tendrá que producir el fabricante, si toma en cuenta las devoluciones?

25. Negocios Suponga que los clientes comprarán q unidades de un producto si el precio es de $(80 - q)/4$ dólares *cada uno.* ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso por ventas sea de $400?

26. Inversión ¿En cuánto tiempo se triplicará una inversión a interés simple con una tasa del 4.5% anual? [*Una pista:* Vea el ejemplo 6(a) de la sección 0.7 y exprese el 4.5% como 0.045.]

27. Alternativas en los negocios El inventor de un juguete nuevo ofrece a la compañía Kiddy Toy los derechos de exclusividad para su fabricación y venta por la suma total de $25 000. Después de estimar que las posibles ventas futuras al cabo de un año serán nulas, la compañía está revisando una propuesta alternativa: dar un pago total de $2000 más una regalía de $0.50 por cada unidad vendida. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para hacer esta alternativa tan atractiva al inventor como la petición original? [*Una pista:* Determine cuándo son iguales los ingresos con ambas propuestas.]

28. Estacionamiento Un estacionamiento mide 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y en uno de los lados. Encuentre el ancho de cada franja.



***29. Rentas** Usted es el jefe de asesores financieros de una compañía que posee un complejo con 50 oficinas. Si la renta es de $400 mensuales, todas las oficinas se ocupan. Sin embargo, por cada incremento de $20 mensuales se quedarán dos oficinas vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de $20 240 mensuales por concepto de rentas en ese complejo. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

30. Inversión Hace seis meses, una compañía de inversiones tenía una cartera de $3 100 000, que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó en $\frac{1}{10}$, mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó en $\frac{1}{10}$. El valor actual de la cartera es $3 240 000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

31. Ingreso El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de $10 000, si el precio debe ser mayor de $50?

32. Razón precio-utilidad La *razón precio-utilidad* (P/U) de una compañía es la razón que se obtiene al dividir el valor de mercado de una acción común en circulación, entre las utilidades por acción. Si P/U se incrementa en 10% y los ingresos por acción aumentan en 20%, determine el incremento porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

33. Equilibrio de mercado Si el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 10$ unidades del producto al mercado, y que los consumidores demandarán $200 - 3p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Encuentre ese valor de p.

34. Equilibrio de mercado Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: A un precio de p dólares por unidad, la oferta es $2p^2 - 3p$ y la demanda es $20 - p^2$.

35. Cerca de seguridad Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11 200 pies cuadrados en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres lados por la barda (vea la figura 1.4). Si se van a utilizar 300 pies de cerca, ¿cuáles serán las dimensiones del área rectangular?

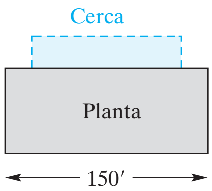


FIGURA 1.4 Cerca de seguridad (problema 35).

36. Diseño de empaque Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado a 2 pulgadas desde cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (vea la figura 1.5). La caja deberá contener 50 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio?

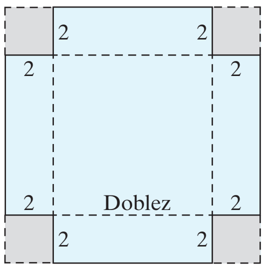


FIGURA 1.5 Construcción de una caja (problema 36).

37. Diseño de producto Una compañía de dulces fabrica la popular barra Dandy. La golosina de forma rectangular tiene 10 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (vea la figura 1.6). Debido a un incremento en los costos, el fabricante ha decidido disminuir el volumen de la barra en un drástico 28%. El grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva Dandy?

FIGURA 1.6 Barra de dulce (problema 37).

38. Diseño de producto Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio); vea la figura 1.7. Debido a un incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen de cada dulce en un 22%. Para hacerlo, se conservará el mismo grosor y radio exterior, pero el radio interno se hará mayor. En la actualidad, el grosor es de 2.1 mm, el radio interno es de 2 mm y el radio exterior de 7.1 mm. Encuentre el radio interno del nuevo estilo de arandela. (*Una pista:* el volumen V de un disco sólido es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h el grosor del disco.)

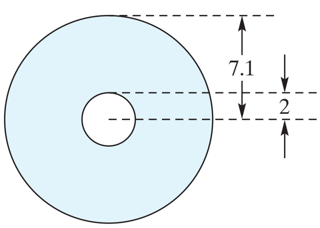


FIGURA 1.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

39. Saldo compensatorio Un *saldo compensatorio* se refiere a la práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte del préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una empresa obtiene un préstamo de \$100 000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar \$20 000 en depósito y usar sólo \$80 000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, la compañía Barber Die debe pedir prestados \$195 000. El banco Third National, con el que no han tenido tratos previos, requiere de un saldo compensatorio del 16%. Redondeando a la unidad de millar de dólares más cercana, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios? Ahora resuelva el problema general de determinar la cantidad L de un préstamo que se necesita para manejar gastos de tamaño E si el banco requiere un saldo compensatorio de p%.

40. Plan de incentivos Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. La comisión por cada máquina que un agente venda es de \$40. La comisión de *cada* máquina vendida se incrementa en \$0.04; por cada máquina que se venda en exceso de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas será de \$40.08. ¿Cuántas máquinas debe vender un agente para obtener ingresos por \$30 800?

41. Bienes raíces Una compañía fraccionadora compra un terreno en \$7200. Después de vender todo, excepto 20 acres, con una ganancia de \$30 por acre sobre su costo original, recuperó el costo total de la parcela. ¿Cuántos acres se vendieron?

42. Margen de utilidad El *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta empresa aumentó en 0.02 con respecto al año pasado. El año pasado vendió su producto en \$3.00 por unidad y tuvo un ingreso neto de \$4500. Este año incrementó el precio de su producto en \$0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de \$7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántas unidades vendió el año pasado y cuántas vendió este año?

43. Negocios Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de producir cada unidad de A es \$2 más que el de B. Los costos de producción de A y B son \$1500 y \$1000, respectivamente, y se producen 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

OBJETIVO

Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

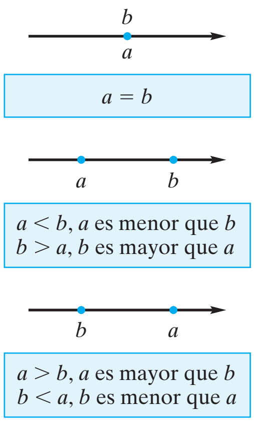


FIGURA 1.8 Posiciones relativas de dos puntos.

1.2 Desigualdades lineales

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. O bien a y b coinciden, o bien, a se encuentra a la izquierda de b, o a se encuentra a la derecha de b (vea la figura 1.8).

Si a y b coinciden entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, se dice que a es menor que b y se escribe $a < b$, donde el *símbolo de desigualdad* "$<$" se lee "es menor que". Por otro lado, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y se escribe $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "$\leq$" se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "$\geq$" está definido como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. En este caso, se dice que a es mayor o igual a b.

Se usarán las palabras *números reales* y *puntos* de manera intercambiable, puesto que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, puede hablarse de los puntos $-5, -2, 0, 7$ y 9, y escribir $7 < 9$, $-2 > -5$, $7 \leq 7$ y $7 \geq 0$. (Vea la figura 1.9.) Resulta claro que si $a > 0$, entonces a es positiva; si $a < 0$, entonces a es negativa.

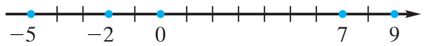


FIGURA 1.9 Puntos sobre la recta numérica.

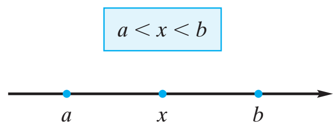


FIGURA 1.10 $a < x$ y $x < b$.

Suponga que $a < b$, y x está entre a y b. (Vea la figura 1.10.) Entonces no sólo $a < x$, sino que también $x < b$. Esto se indica al escribir $a < x < b$. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$. (Vea de nuevo la figura 1.9.)

La siguiente definición se establece en términos de la relación menor que ($<$), pero se aplica también a las otras relaciones ($>, \leq, \geq$).

DEFINICIÓN

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Por supuesto, las desigualdades se representan por medio de símbolos de desigualdad. Si los símbolos de dos desigualdades apuntan en la misma dirección, entonces se dice que tienen el *mismo sentido*. Si no, se dice que son de *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por lo tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene el sentido contrario de $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que se establecen a continuación.

Reglas para las desigualdades

Recuerde que las reglas también se aplican $\leq$, $>$ y $\geq$.

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b, \quad \text{entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número positivo, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original.

ADVERTENCIA

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando ambos lados se multiplican o se dividen por un número negativo.

En forma simbólica

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo***, entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido ***contrario*** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(c) > b(c) \text{ y } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ y $-2 < 0$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\frac{4}{-2} > \frac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, y se toma el recíproco de cada lado, entonces resulta otra desigualdad con sentido contrario a la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ o bien } a < b < 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Por ejemplo, $2 < 4$, entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ y $-4 < -2$, entonces $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$.

6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y se eleva cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. De manera simbólica,

$$\text{si } 0 < a < b \text{ y } n > 0, \text{ entonces } a^n < b^n.$$

Para el entero positivo n, esta regla también da

$$\text{si } 0 < a < b, \text{ entonces } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

Se dice que un par de *desigualdades* es *equivalente* si cuando cualquiera de ellas es verdadera la otra también lo es. Es fácil mostrar que cuando se aplica cualquiera de las reglas 1 a 6 a una desigualdad, el resultado es una desigualdad equivalente. Ahora se aplicarán las reglas 1 a 4 a una *desigualdad lineal*.

La definición también se aplica a $\leq$, $>$ y $\geq$.

DEFINICIÓN

Una ***desigualdad lineal*** en la variable x es una desigualdad que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0,$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Es de esperarse que la desigualdad sea verdadera para algunos valores de x y falsa para otros. Para ***resolver*** una desigualdad que involucra una variable deben encontrarse todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es verdadera.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

CRECIMIENTO DE BACTERIAS

Un vendedor tiene un ingreso mensual dado por $I = 200 + 0.8S$, donde S es el número de productos vendidos en un mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 al mes?

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $2(x - 3) < 4$.

Solución:

Estrategia Es necesario reemplazar la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned} 2(x-3) &< 4 & \\ 2x - 6 &< 4 & \text{(Regla 4)} \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 & \text{(Regla 1)} \\ 2x &< 10 & \text{(Regla 4)} \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} & \text{(Regla 2)} \\ x &< 5 & \text{(Regla 4)} \end{aligned}$$

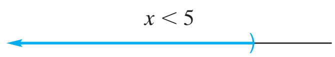


FIGURA 1.11 Todos los números reales menores que 5.

Todas las desigualdades son equivalentes. Por lo tanto, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Por ejemplo, la desigualdad es cierta para $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$ y 4.9. La solución puede escribirse simplemente como $x < 5$ y puede representarse de manera geométrica por medio de la semirrecta azul de la figura 1.11. El paréntesis indica que 5 *no está incluido* en la solución.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD LINEAL

El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro tipos de alimentos con distintos valores nutricionales para los animales de pastoreo del zoológico. Sea x_1 el número de bolsas de alimento 1, x_2 el número de bolsas de alimento 2, y así sucesivamente. El número de bolsas necesarias de cada tipo de alimento puede describirse mediante las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = 150 - x_4$$
$$x_2 = 3x_4 - 210$$
$$x_3 = x_4 + 60$$

Desarrolle cuatro desigualdades que contengan a x_4 a partir de estas ecuaciones, para ello suponga que ninguna variable puede ser negativa.

En el ejemplo 1, la solución consistió en un conjunto de números, a saber, todos los menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las x tales que $x < 5$ puede denotarse por la *notación de intervalo* $(-\infty, 5)$. El símbolo $-\infty$ no es un número, sino sólo una convención para indicar que el intervalo incluye todos los números menores a 5.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b$ se conoce como un **intervalo cerrado**, que incluye los números a y b, los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota por $[a, b]$ y se muestra en la figura 1.12(a). Los corchetes indican que a y b *están incluidos* en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las x para las que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** y se denota por (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto [vea la figura 1.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, se tienen los intervalos mostrados en la figura 1.13.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $3 - 2x \leq 6$.

Solución:

ADVERTENCIA

Al dividir ambos lados entre -2 se invierte el sentido de la desigualdad.

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\leq 6 & \\ -2x &\leq 3 & \text{(Regla 1)} \\ x &\geq -\frac{3}{2} & \text{(Regla 3)} \end{aligned}$$

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$, en notación de intervalo, $[-\frac{3}{2}, \infty)$. Esto se representa geométricamente en la figura 1.14.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Intervalo cerrado $[a, b]$ (a)

Intervalo abierto(a, b) (b)

FIGURA 1.12 Intervalos cerrado y abierto.

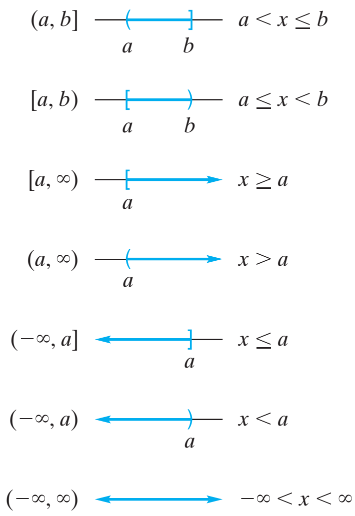


FIGURA 1.13 Intervalos.

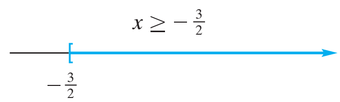


FIGURA 1.14 El intervalo $[-\frac{3}{2}, \infty)$.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva $\frac{3}{2}(s-2)+1 > -2(s-4)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(s-2)+1 &> -2(s-4) \\
2\left[\frac{3}{2}(s-2)+1\right] &> 2[-2(s-4)] && \text{(Regla 2)} \\
3(s-2)+2 &> -4(s-4) \\
3s-4 &> -4s+16 \\
7s &> 20 && \text{(Regla 1)} \\
s &> \frac{20}{7} && \text{(Regla 2)}
\end{aligned}$$

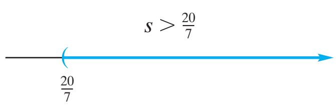


FIGURA 1.15 El intervalo $(\frac{20}{7}, \infty)$.

La solución es $(\frac{20}{7}, \infty)$; vea la figura 1.15.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades lineales

a. *Resuelva* $2(x-4)-3 > 2x-1$.

Solución:

$$\begin{aligned}
2(x-4)-3 &> 2x-1 \\
2x-8-3 &> 2x-1 \\
-11 &> -1
\end{aligned}$$

Como nunca será cierto que $-11 > -1$, no existe solución y el conjunto solución es $\emptyset$.

b. *Resuelva* $2(x-4)-3 < 2x-1$.

Solución: Si se procede como en el inciso (a), se obtiene $-11 < -1$. Esto es verdadero para todos los números reales x, de modo que la solución es $(-\infty, \infty)$; vea la figura 1.16.

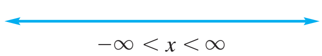


FIGURA 1.16 El intervalo $(-\infty, \infty)$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

Problemas 1.2

Resuelva las desigualdades de los problemas 1 a 34. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $3x > 12$

2. $4x < -2$

3. $5x - 11 \leq 9$

4. $5x \leq 0$

5. $-4x \geq 2$

6. $2y + 1 > 0$

***7.** $5 - 7s > 3$

8. $4s - 1 < -5$

***9.** $3 < 2y + 3$

10. $4 \leq 3 - 2y$

11. $x + 5 \leq 3 + 2x$

12. $-3 \geq 8(2 - x)$

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$

***15.** $2(4x - 2) > 4(2x + 1)$

16. $4 - (x + 3) \leq 3(3 - x)$

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$

***19.** $\frac{5}{6}x < 40$

20. $-\frac{2}{3}x > 6$

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$

22. $\frac{3y - 2}{3} \geq \frac{1}{4}$

23. $-3x + 1 \leq -3(x - 2) + 1$

24. $0x \leq 0$

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}$

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}$

27. $2x + 13 \geq \frac{1}{3}x - 7$

28. $3x - \frac{1}{3} \leq \frac{5}{2}x$

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r$

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t$

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}$

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}$

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434$

34. $\frac{3y - 1}{-3} < \frac{5(y + 1)}{-3}$

35. Ahorros Cada mes del año pasado, Brittany ahorró más de \$50 pero menos de \$150. Si S representa sus ahorros totales del año, describa S con el uso de desigualdades.

36. Trabajo Con el uso de desigualdades, simbolice el enunciado siguiente: El número de horas de trabajo x necesarias para fabricar un producto no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

37. Geometría En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

38. Gasto Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si compra un estéreo que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que puede comprar.

OBJETIVO

Modelar situaciones reales en términos de desigualdades.

1.3 Aplicaciones de las desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción) son \$70 000. Si el precio de venta de un calentador es \$35, ¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?

Solución:

Estrategia Recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Debe encontrarse el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por lo tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70\,000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

y se desea la utilidad > 0. Así que,

$$\text{ingreso total} - \text{costo total} > 0$$

$$35q - (21q + 70\,000) > 0$$

$$14q > 70\,000$$

$$q > 5000$$

Como el número de calentadores debe ser un entero no negativo, se observa que deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 *mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (gas, aceite y operador) sería de* \$180 *por cada día que la máquina se utilice. Si fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de* \$20 000 *y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de* \$230 *por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?*

Solución:

Estrategia Se determinarán expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así se encontrará cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son (12)(3000), y los costos diarios de $180d$. Si la máquina se compra, el costo por año es $20\,000 + 230d$. Se desea que

$$\text{costo}_{\text{renta}} < \text{costo}_{\text{compra}}$$

$$12(3000) + 180d < 20\,000 + 230d$$

$$36\,000 + 180d < 20\,000 + 230d$$

$$16\,000 < 50d$$

$$320 < d$$

Por lo tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar su renta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

EJEMPLO 3 Razón de circulante

La *razón de circulante* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar), sobre sus pasivos circulantes (como préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la compañía Ace Sports Equipment decide pedir un préstamo a corto plazo para aumentar su inventario. La compañía tiene activos circulantes de \$350 000 *y pasivos de* \$80 000*. ¿Cuánto puede pedir prestado si quiere que su razón de circulante no sea menor que* 2.5*? (Nota: los fondos recibidos se consideran como activo circulante y el préstamo como pasivo circulante.)*

Solución: Sea x la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos circulantes serán $350\,000 + x$ y sus pasivos circulantes $80\,000 + x$. Así,

$$\text{razón de circulante} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350\,000 + x}{80\,000 + x}$$

Se quiere que

$$\frac{350\,000 + x}{80\,000 + x} \geq 2.5$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, conduce a una desigualdad lineal.

Como x es positiva, también lo es $80\,000 + x$. Por lo que pueden multiplicarse ambos lados de la desigualdad por $80\,000 + x$ y su sentido permanecerá igual. Se tiene

$$350\,000 + x \geq 2.5(80\,000 + x)$$
$$150\,000 \geq 1.5x$$
$$100\,000 \geq x$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta \$100 000 y aún mantener una razón de circulante no menor que 2.5.

EJEMPLO 4 Publicaciones

Una editorial determina que el costo de publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$1.50. *El ingreso recibido de los distribuidores es* \$1.40 *por revista. El ingreso por publicidad es* 10% *del ingreso recibido de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de* 10 000. *¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que se obtengan utilidades?*

Solución:

Estrategia Se tiene que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

entonces se encuentra una expresión para la utilidad y después se establece como mayor que 0.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10\,000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así que,

$$\text{ingreso total} - \text{costo total} > 0$$
$$1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10\,000)] - 1.50q > 0$$
$$1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q > 0$$
$$0.04q - 1400 > 0$$
$$0.04q > 1400$$
$$q > 35\,000$$

Por lo tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35 000. Esto es, deben venderse al menos 35 001 ejemplares para garantizar utilidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 1.3

*1. **Utilidad** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600 000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la empresa tenga utilidades.

2. **Utilidad** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2.50 y el de mano de obra de \$4. El costo fijo constante, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades.

*3. **Arrendamiento *versus* compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de comprar un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Puede rentar un automóvil por \$420 al mes (cotizado anualmente). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es \$0.06. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700, y los otros costos ascenderían a \$0.08 por milla. ¿Cuál es el mínimo de millas que tendría que conducir por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce N prendas con un costo de mano de obra total (en dólares)

de 1.3N y un costo total por material de 0.4N. Los costos fijos constantes de la planta son de $6500. Si cada camiseta se vende en $3.50, ¿cuántas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

***5.** **Publicaciones** El costo unitario de publicación de una revista es de $0.55. Cada revista se vende al distribuidor en $0.60, y la cantidad que se recibe por publicidad es el 10% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas por arriba de las 30 000. Encuentre el número mínimo de revistas que pueden publicarse sin pérdida —esto es, tal que la utilidad ≥ 0— suponiendo que se venderán 90% de los ejemplares.

6. **Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo por mano de obra para producir un reloj es de $2.00. Sin embargo, si un despertador se produce durante horas extra su costo asciende a $3.00. La gerencia ha decidido no gastar más de $25 000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11 000 aparatos esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

7. **Inversión** Una compañía invierte un total de $30 000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5% y $6\frac{3}{4}\%$. Desea un rendimiento anual que no sea menor al $6\frac{1}{2}\%$. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}\%$?

8. **Razón de circulante** La razón de circulante de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de $570 000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de circulante no sea menor que 2.6? (Vea el ejemplo 3 para una explicación de la razón de circulante.)

9. **Asignación de ventas** En la actualidad, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy, su precio unitario es de $4. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en $0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que $10 750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. **Ingresos** Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q} + 1$ dólares por cada una. ¿Cuál es el número mínimo que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que $5000?

11. **Sueldo por hora** Con frecuencia se paga a los pintores por hora, o bien, por trabajo terminado. El tipo de pago que reciben puede hacer variar la velocidad a la que trabajan. Por ejemplo, suponga que pueden trabajar por $9.00 la hora, o bien, por $320 más $3 por cada hora trabajada por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, resulta claro que el sueldo por hora es mejor. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

12. **Compensación** Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas en el que usted elige entre dos métodos para determinar su salario anual. Un método paga $35 000 más un bono del 3% sobre sus ventas del año. El otro método paga una comisión directa del 5% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

13. **Razón de la prueba del ácido** La *razón de la prueba del ácido* (o *razón rápida*) de un negocio es la razón de sus activos líquidos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— sobre sus pasivos circulantes. La mínima razón para que una compañía tenga finanzas sólidas es de 1.0 aproximadamente, pero, por lo general, esto varía un poco de una industria a otra. Si una compañía tiene $450 000 en efectivo y valores, y tiene $398 000 en pasivos circulantes, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón rápida en 1.3 o por arriba de este valor?

OBJETIVO

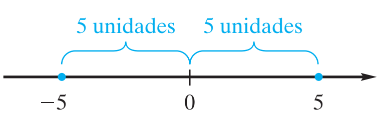
Resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valores absolutos.

1.4 Valor absoluto

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, la distancia desde el cero hasta un número x se llama **valor absoluto** de x, y se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, porque tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del 0 (vea la figura 1.17). En forma similar, $|0| = 0$. Advierta que $|x|$ nunca puede ser negativa, esto es $|x| \geq 0$.

El valor absoluto de un número real es su valor cuando no se toma en cuenta su signo.



$|5| = |-5| = 5$

FIGURA 1.17 Valor absoluto.

Si x es positiva o cero, entonces x es simplemente la misma x, de modo que pueden omitirse las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x$$

Por lo tanto, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que se ha cambiado el signo de x. La definición geométrica del valor absoluto es equivalente a lo siguiente:

DEFINICIÓN

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ADVERTENCIA

$\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, sino $\sqrt{x^2} = |x|$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no -2. Esto concuerda con el hecho que $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Observe que $|-x| = |x|$ es consecuencia de la definición.

Si se aplica la definición, se tiene $|3| = 3$, $|-8| = -(-8) = 8$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

También, $|-x|$ no necesariamente es x, así $|-x - 1|$ no es necesariamente $x + 1$. Por ejemplo, si se hace $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resuelva* $|x - 3| = 2$.

Solución: Esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por lo tanto,

$$x - 3 = 2 \quad \text{o bien} \quad x - 3 = -2$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. *Resuelva* $|7 - 3x| = 5$.

Solución: Esta ecuación es cierta si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Al resolver estas ecuaciones se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

c. *Resuelva* $|x - 4| = -3$.

Solución: El valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\emptyset$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

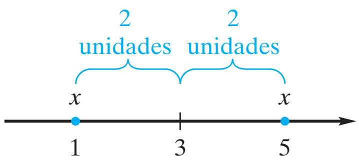


FIGURA 1.18 La solución de $|x - 3| = 2$ es 1 o 5.

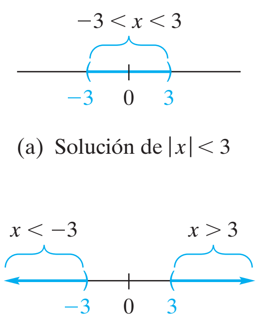
Puede interpretarse $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$ como la distancia entre a y b. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 puede calcularse

$$\text{con} \quad |9 - 5| = \quad |4| = 4$$
$$\text{o con} \quad |5 - 9| = |-4| = 4$$

En forma similar, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 es de 2 unidades. Por lo tanto, x puede ser 1 o 5, como se muestra en el ejemplo 1(a) y en la figura 1.18.

Desigualdades con valor absoluto

Ahora se estudiarán las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades del cero. Por lo tanto, x debe estar entre -3 y 3, esto es, en el intervalo $-3 < x < 3$ [vea la figura 1.19(a)]. Por otro lado, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del cero. Así que existen dos intervalos en la solución: $x < -3$ o $x > 3$ [vea la figura 1.19(b)]. Estas ideas pueden extenderse de la manera siguiente: Si $|x| \leq 3$, entonces $-3 \leq x \leq 3$; si $|x| \geq 3$, entonces $x \leq -3$ o bien $x \geq 3$. En la tabla 1.1 se da un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.



(a) Solución de $|x| < 3$

(b) Solución de $|x| > 3$

FIGURA 1.19 Soluciones para $|x| < 3$ y $|x| > 3$.

TABLA 1.1

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \leq d$	$-d \leq x \leq d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ o $x > d$
$\lvert x\rvert \geq d$	$x \leq -d$ o $x \geq d$

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resuelva* $|x - 2| < 4$.

Solución: El número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del 0. Con base en el análisis anterior, esto significa que $-4 < x - 2 < 4$. El procedimiento para resolver esta desigualdad puede establecerse como sigue:

$$
\begin{aligned}
-4 &< x - 2 < 4 \\
-4 + 2 &< x < 4 + 2 \qquad \text{(al sumar 2 a cada miembro)} \\
-2 &< x < 6
\end{aligned}
$$

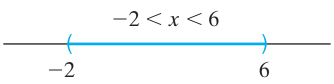


FIGURA 1.20 La solución de $|x - 2| < 4$ es el intervalo $(-2, 6)$.

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original. (Vea la figura 1.20.)

b. *Resuelva* $|3 - 2x| \leq 5$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
-5 \leq 3 - &2x \leq 5 \\
-5 - 3 \leq -&2x \leq 5 - 3 \qquad \text{(al restar 3)} \\
-8 \leq -&2x \leq 2 \\
4 \geq &x \geq -1 \qquad \text{(al dividir entre } -2\text{)} \\
-1 \leq &x \leq 4 \qquad \text{(al reescribir)}
\end{aligned}
$$

Observe que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* al dividir entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resuelva* $|x + 5| \geq 7$.

Solución: Aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del 0. Así que, $x + 5 \leq -7$ *o bien* $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ *o bien* $x \geq 2$. Por lo tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Esta colección de números puede abreviarse escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$$

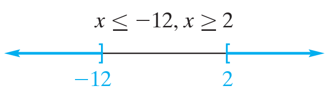


FIGURA 1.21 La unión $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$.

donde el símbolo $\cup$ es llamado el símbolo de la *unión* (vea la figura 1.21). Expresado de manera formal, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste de todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

ADVERTENCIA

Las desigualdades $x \leq -12$ o $x \geq 2$ en (a) y $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$ en (b) no pueden combinarse en un solo intervalo como se hizo en los ejemplos 1 y 2.

b. *Resuelva* $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ *o bien* $3x - 4 > 1$. Así que $3x < 3$ *o bien* $3x > 5$. Por lo tanto, $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

NOTACIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Exprese el enunciado siguiente con el uso de la notación de valor absoluto: el peso real w de una caja de cereal puede tener una diferencia de 0.3 onzas en comparación con el peso establecido en la caja, que es de 22 onzas.

EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Use la notación de valor absoluto para expresar los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades de 5.

Solución:

$$|x - 5| < 3$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

Solución:

$$|x - 6| \geq 7$$

c. $x < 3$ y al mismo tiempo $x > -3$.

Solución:

$$|x| < 3$$

d. x está a más de 1 unidad de -2.

Solución:

$$|x - (-2)| > 1$$
$$|x + 2| > 1$$

e. x está a menos de σ (letra griega "sigma") unidades de μ (letra griega "mu").

Solución:

$$|x - \mu| < \sigma$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

Propiedades del valor absoluto

Cinco propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a - b| = |b - a|$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números. La propiedad 5 se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$

b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$

c. $|7 - x| = |x - 7|$

d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3};\ \left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}$

e. $\left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}$

f. $-|2| \leq 2 \leq |2|$

g. $|(-2) + 3| = |1| = 1 \leq 5 = 2 + 3 = |-2| + |3|$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 1.4

Evalúe la expresión de valor absoluto en los problemas 1 a 10.

1. $|-13|$ **2.** $|2^{-1}|$ **3.** $|8 - 2|$

4. $|(-4 - 6)/2|$ ***5.** $|2(-\frac{7}{2})|$ **6.** $|3 - 5| - |5 - 3|$

7. $|x| < 4$ **8.** $|x| < 10$ **9.** $|2 - \sqrt{5}|$

10. $|\sqrt{5} - 2|$

***11.** Utilice el símbolo de valor absoluto para expresar cada uno de los siguientes enunciados:
(a) x está a menos de 3 unidades de 7.
(b) x difiere de 2 en menos de 3.
(c) x no está a más de 5 unidades de 7.

(d) La distancia entre 7 y x es 4.
(e) $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
(f) x está entre -3 y 3, pero no es igual a 3 ni a -3.
(g) $x < -6$ o $x > 6$.
(h) El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3 unidades.
(i) El ingreso promedio mensual x (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100 unidades.

12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que $f(x)$ y L difieren en menos de ϵ unidades.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2 de dos productos pueden diferir en no más de 9 (dólares).

14. Determine todos los valores de x tales que $|x - \mu| \leq 2\sigma$.

Resuelva la ecuación o desigualdad dada en los problemas 15 a 36.

15. $|x| = 7$ **16.** $|-x| = 2$ **17.** $\left|\frac{x}{5}\right| = 7$

18. $\left|\frac{5}{x}\right| = 12$ ***19.** $|x - 5| = 8$ **20.** $|4 + 3x| = 6$

21. $|5x - 2| = 0$ **22.** $|7x + 3| = x$ **23.** $|7 - 4x| = 5$

24. $|5 - 3x| = 2$ **25.** $|x| < M$, para $M > 0$

26. $|-x| < 3$ **27.** $\left|\frac{x}{4}\right| > 2$ **28.** $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$

***29.** $|x + 9| < 5$ **30.** $|2x - 17| < -4$ ***31.** $\left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$

32. $|1 - 3x| > 2$ **33.** $|5 - 8x| \leq 1$ **34.** $|4x - 1| \geq 0$

35. $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4$ **36.** $\left|\frac{x - 7}{3}\right| \leq 5$

Exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto en los problemas 37 y 38.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 35.2 m, con un margen de precisión de ± 20 cm.

38. La diferencia en temperatura entre dos sustancias químicas que se van a mezclar no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

39. **Estadística** En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev establece que si x *es* una variable aleatoria, μ es su media, y σ es su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \geq \frac{1}{h^2}$$

Encuentre los valores de x tales que $|x - \mu| > h\sigma$.

40. **Margen de error en manufactura** En la fabricación de cierto artefacto, la dimensión promedio de una parte es 0.01 cm. Con el uso del símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de un artefacto, no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.

OBJETIVO

Escribir y evaluar sumas en notación de sumatoria.

1.5 Notación de sumatoria

Hubo un tiempo en el que los profesores hacían a sus estudiantes sumar todos los enteros positivos de 1 a 105 (por ejemplo), tal vez como castigo por un comportamiento incorrecto mientras el profesor estaba fuera del salón de clases. En otras palabras, los estudiantes debían encontrar

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105 \quad (1)$$

Un ejercicio similar consistía en encontrar

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 81 + 100 + 121 \quad (2)$$

La notación de los tres puntos implica la idea de continuar la tarea, usando el mismo patrón, hasta que el último de los términos dados explícitamente haya sido sumado. En esta notación no hay reglas definidas acerca de cuántos términos del principio y del final deben especificarse. Se deben proporcionar los que sean necesarios para asegurarse de que el lector no encuentre ambigua la expresión. Lo anterior es demasiado impreciso para muchas aplicaciones matemáticas.

Suponga que para cualquier entero positivo i se define $a_i = i^2$. Entonces, por ejemplo, $a_6 = 36$ y $a_8 = 64$. La instrucción, "Sume todos los números a_i, donde i toma los valores enteros desde 1 hasta el 11 inclusive" es un enunciado preciso de la ecuación (2). Sería preciso aún sin considerar la fórmula que define los valores a_i, y esto conduce a lo siguiente:

DEFINICIÓN

Si, para cada entero positivo i, se da un número único a_i, y m y n son enteros positivos, donde $m \leq n$, entonces ***la suma de los números a_i, donde i toma sucesivamente los valores desde m hasta n se denota***

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Así

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \tag{3}$$

La $\sum$ es la letra griega sigma mayúscula, a partir de la cual obtuvimos la letra S. Significa "suma" y la expresión $\sum_{i=m}^{n} a_i$, puede leerse como la suma de todos los números a_i, donde i va desde m hasta n (se entiende que a través de los enteros positivos). La descripción de a_i puede ser muy simple. Por ejemplo, en la ecuación (1) tenemos $a_i = i$ y

$$\sum_{i=1}^{105} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 105 \tag{4}$$

mientras que la ecuación (2) es

$$\sum_{i=1}^{11} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 121 \tag{5}$$

Se ha definido solamente una notación, que se llama ***notación de sumatoria***. En la ecuación (3), i es el *índice de sumatoria* y m y n se llaman las *cotas de la sumatoria*. Es importante entender de esta explicación que el índice de sumatoria puede reemplazarse por cualquier otro, de manera que se tiene

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{\alpha=m}^{n} a_\alpha = \sum_{N=m}^{n} a_N$$

por ejemplo. En cada caso, al remplazar el índice de sumatoria por los enteros positivos desde m hasta n y sumar se obtiene

$$a_m + a_{m+1}\ a_{m+2} + \cdots + a_n$$

A continuación se ilustran estos conceptos con algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 1 Evaluación de sumas

Evalúe las sumas dadas.

a. $\sum_{n=3}^{7} (5n - 2)$

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{7} (5n - 2) &= [5(3) - 2] + [5(4) - 2] + [5(5) - 2] + [5(6) - 2] + [5(7) - 2]\\ &= 13 + 18 + 23 + 28 + 33\\ &= 115\end{aligned}$$

b. $\sum_{j=1}^{6} (j^2 + 1)$

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{6} (j^2 + 1) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1)\\ &= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37\\ &= 97\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

EJEMPLO 2 Escritura de una suma con el uso de la notación de sumatoria

Escriba la suma $14 + 16 + 18 + 20 + 22 + \cdots + 100$ *en notación de sumatoria.*

Solución: Existen muchas formas de expresar esta suma en notación de sigma. Un método consiste en resaltar que los valores que se suman son $2n$, para $n = 7$ a 50. Entonces, la suma puede escribirse como

$$\sum_{n=7}^{50} 2n$$

Otro método consiste en destacar que los valores que se suman son $2k + 12$, para $k = 1$ a 44. La suma puede representarse entonces como

$$\sum_{k=1}^{44}(2k + 12)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Como la notación de sumatoria se usa para expresar la adición de términos, pueden usarse las propiedades de la suma cuando se realizan operaciones de adición escritas en notación de sumatoria. Al aplicar estas propiedades, puede crearse una lista de propiedades y fórmulas para la notación de sumatoria.

Por la propiedad distributiva de la suma

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por lo tanto, en notación de sumatoria

$$\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (6)$$

Observe que c debe ser constante con respecto a i para que la ecuación (6) pueda usarse.

Por la propiedad conmutativa de la suma,

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Entonces, se tiene

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \qquad (7)$$

Algunas veces se desea cambiar las cotas de la sumatoria:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{p+n-m} a_{i+m-p} \qquad (8)$$

Una suma de 37 términos puede verse como la suma de los primeros 17 términos más la suma de los siguientes 20. La siguiente regla generaliza esta observación

$$\sum_{i=m}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i \qquad (9)$$

Además de estas cuatro reglas básicas, existen algunas otras reglas útiles. Las primeras dos surgen, respectivamente, de las ecuaciones (6) y (7):

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \qquad (10)$$

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i \qquad (11)$$

El establecimiento de las siguientes tres fórmulas se perfeccionan mediante un método para realizar demostraciones conocido como inducción matemática, y cuya validez no demostraremos aquí.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{14}$$

Sin embargo, la ecuación (12) puede deducirse. Si se suman las siguientes ecuaciones de manera vertical, término por término,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

se obtiene

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

y como existen n términos a la derecha, se concluye

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observe que si el profesor asigna la tarea de calcular

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + 104 + 105$$

como un *castigo,* y si él conoce la fórmula dada por la ecuación (12), entonces el trabajo de un estudiante puede revisarse de manera rápida con

$$\sum_{i=1}^{105} i = \frac{105(106)}{2} = 105 \cdot 53 = 5300 + 265 = 5565$$

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de la notación de sumatoria

Evalúe las sumas dadas.

a. $\sum_{j=30}^{100} 4$ **b.** $\sum_{k=1}^{100} (5k+3)$ **c.** $\sum_{k=1}^{200} 9k^2$

Soluciones:

a.

$$\begin{aligned} \sum_{j=30}^{100} 4 &= \sum_{j=1}^{71} 4 && \text{[por la ecuación (8)]} \\ &= 4 \cdot 71 && \text{[por la ecuación (10)]} \\ &= 284 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (5k+3) &= \sum_{k=1}^{100} 5k + \sum_{k=1}^{100} 3 && \text{[por la ecuación (7)]} \\ &= 5\left(\sum_{k=1}^{100} k\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{100} 1\right) && \text{[por la ecuación (6)]} \end{aligned}$$

$$= 5\left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right) + 3(100) \qquad \text{[por las ecuaciones (12) y (10)]}$$
$$= 25\,250 + 300$$
$$= 25\,550$$

c.
$$\sum_{k=1}^{200} 9k^2 = 9\sum_{k=1}^{200} k^2 \qquad \text{[por la ecuación (6)]}$$
$$= 9\left(\frac{200 \cdot 201 \cdot 401}{6}\right) \qquad \text{[por la ecuación (13)]}$$
$$= 24\,180\,300$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 1.5

En los problemas 1 y 2, proporcione las cotas y el índice de la sumatoria para cada expresión.

1. $\sum_{t=12}^{17}(8t^2 - 5t + 3)$ **2.** $\sum_{m=3}^{450}(8m - 4)$

Evalúe las sumas dadas en los problemas 3 a 6.

3. $\sum_{i=1}^{7} 6i$ **4.** $\sum_{p=0}^{4} 10p$

***5.** $\sum_{k=3}^{9}(10k + 16)$ **6.** $\sum_{n=7}^{11}(2n - 3)$

Exprese las sumas dadas en notación de sumatoria en los problemas 7 a 12.

7. $36 + 37 + 38 + 39 + \cdots + 60$

8. $1 + 4 + 9 + 16 + 25$

***9.** $5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8$

10. $11 + 15 + 19 + 23 + \cdots + 71$

11. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$

12. $10 + 100 + 1000 + \cdots + 100\,000\,000$

Evalúe las sumas dadas en los problemas 13 a 26.

13. $\sum_{k=1}^{43} 100$ **14.** $\sum_{k=35}^{135} 2$

15. $\sum_{k=1}^{n}\left(5 \cdot \frac{1}{n}\right)$ **16.** $\sum_{k=1}^{200}(k - 100)$

17. $\sum_{k=51}^{100} 10k$ **18.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+1}k^2$

***19.** $\sum_{k=1}^{20}(5k^2 + 3k)$ **20.** $\sum_{k=1}^{100}\frac{3k^2 - 200k}{101}$

21. $\sum_{k=51}^{100} k^2$ **22.** $\sum_{k=1}^{50}(k + 50)^2$

23. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\left[4 - \left(\frac{2k}{10}\right)^2\right]\left(\frac{2}{10}\right)\right\}$

24. $\sum_{k=1}^{100}\left\{\left[4 - \left(\frac{2}{100}k\right)^2\right]\left(\frac{2}{100}\right)\right\}$

25. $\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[5 - \left(\frac{3}{n} \cdot k\right)^2\right]\frac{3}{n}\right\}$

26. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(n+1)(2n+1)}$

1.6 Repaso

Términos y símbolos importantes

		Ejemplos
Sección 1.1	**Aplicaciones de ecuaciones**	
	costo fijo costo variable costo total ingreso total utilidad	Ej. 3, p. 48
Sección 1.2	**Desigualdades lineales**	
	$a < b$ $a \le b$ $a > b$ $a \ge b$ $a < x < b$	Ej. 1, p. 56
	desigualdad sentido de una desigualdad	Ej. 2, p. 56
	desigualdades equivalentes desigualdad lineal	Ej. 1, p. 56
	intervalo intervalo abierto intervalo cerrado extremos	
	(a, b) $[a, b]$ $(-\infty, b)$ $(-\infty, b]$ (a, ∞) $[a, \infty)$ $(-\infty, \infty)$	Ej. 3, p. 57

Sección 1.3	Aplicaciones de las desigualdades	
	renta *versus* compra	Ej. 2, p. 59
	activos circulantes pasivos circulantes razón de circulante	Ej. 3, p. 59
Sección 1.4	**Valor absoluto**	
	distancia valor absoluto, $\lvert x\rvert$ unión, $\cup$	Ej. 3, p. 63
Sección 1.5	Notación de sumatoria	
	notación $\sum$ índice cotas	Ej. 1, p. 66

Resumen

Cuando un problema se expresa con palabras, no trae consigo una ecuación. En lugar de ello, es necesario replantearlo al traducir los enunciados verbales en una ecuación (o en una desigualdad). Esto se conoce como *modelado matemático.* Es importante leer primero el problema más de una vez hasta entender con claridad cuál es la información que se proporciona y cuál es la que se debe encontrar. Después, se debe seleccionar una variable para representar la cantidad desconocida que se desea determinar. Se utilizan las relaciones y datos dados en el problema, y se traducen en una ecuación que involucre a la variable. Por último, se resuelve la ecuación, y se comprueba si su solución responde lo que se desea conocer. Algunas veces la solución de la *ecuación* no será la respuesta al *problema*, pero puede ser útil en la obtención de dicha respuesta.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}$$

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas})$$

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$

Los símbolos de desigualdad $<, \leq, >$ y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, que es un enunciado en el que un número es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que al ser aplicadas a una desigualdad garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad |x| = -x \text{ si } x < 0$$

Se interpreta $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución de la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo $(-d, d)$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos y está dada por $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$. Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
3. $|a - b| = |b - a|$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Resuelva la ecuación o la desigualdad de los problemas 1 a 15.

1. $5x - 2 \geq 2(x - 7)$
2. $2x - (7 + x) \leq x$
3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$
4. $-2(x + 6) > x + 4$
5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$
6. $3(5 - \frac{7}{3}q) < 9$
7. $\dfrac{x + 5}{3} - \dfrac{1}{2} \leq 2$
8. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < \dfrac{x}{5}$
9. $\dfrac{1}{4}s - 3 \leq \dfrac{1}{8}(3 + 2s)$
10. $\dfrac{1}{3}(t + 2) \geq \dfrac{1}{4}t + 4$
11. $|3 - 2x| = 7$
12. $\left|\dfrac{5x - 6}{13}\right| = 0$
13. $|2z - 3| < 5$
14. $4 < \left|\dfrac{2}{3}x + 5\right|$
15. $|3 - 2x| \geq 4$
16. Evalúe $\sum_{i=1}^{5}(i + 2)^3$ al elevar al cubo el binomio, primero y después usar las ecuaciones (10), (12), (13) y (14) de la sección 1.5.
17. Evalúe $\sum_{i=3}^{7} i^3$ usando $\sum_{i=1}^{7} i^3 - \sum_{i=1}^{2} i^3$. Explique por qué funciona y cite algunas ecuaciones de la sección 1.5 que puedan usarse. Explique por qué la respuesta es necesariamente la misma que en el problema 16.
18. **Utilidad** ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?
19. **Bolsa de Valores** En cierto día, se negociaron 1132 diferentes títulos en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban ganancias de las que mostraban una pérdida, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron pérdidas?
20. **Impuesto a las ventas** El impuesto sobre las ventas en cierto estado es de 6.5%. Si durante un año hubo un total de \$3039.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?

21. Asignación de producción Una compañía fabricará un total de 10 000 unidades de su producto en las plantas A y B. Los datos disponibles son los siguientes:

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	$5	$5.50
Costos fijos	$30 000	$35 000

Considerando las dos plantas, la compañía ha decidido asignar no más de $117 000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

22. Tanques de propano Una compañía va a reemplazar dos tanques de propano por un tanque nuevo. Los tanques viejos son cilíndricos, cada uno tiene 25 pies de altura. El primero tiene un radio de 10 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo es esencialmente esférico y tendrá la misma capacidad que los dos antiguos tanques juntos. Determine su radio. [*Una pista:* El volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base circular y h es la altura del tanque. El volumen de un tanque esférico es $W = \frac{4}{3}\pi R^3$, donde R es el radio del tanque.]

23. Razón operativa La *razón operativa* de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) sobre las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón operativa menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón operativa en el rango de 80 a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas de $236 460 en un periodo, formule una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón operativa por debajo de 90%.

Aplicación práctica

Aplicación práctica

Grabación de calidad variable[1]

En la actualidad, existe una gran variedad de equipo tecnológico para grabar películas, programas de televisión, programas de computadora, juegos y canciones. Independientemente de que sea un iPod, un DVD, un CD o incluso una videograbadora, casi siempre es posible grabar a relaciones de compresión variables con calidad variable.

(Si usted utiliza un antiguo dispositivo de cinta con diferentes *velocidades*, entonces la velocidad más rápida tiene una relación de 1 a 1, mientras que la más lenta, que permite almacenar r veces más tiene una compresión de r a 1. Por ejemplo el estándar del VHS, SP, es 1 a 1, mientras que el LP es 2 a 1 y el EP es 3 a 1.)

El medio de almacenamiento puede ser un disco, una cinta (o algo que aún no se encuentra en el mercado), pero siempre existe una relación cantidad-calidad que es inherente a cualquier dispositivo de grabación imaginable. Para cualquier medio, entre más información se almacene gracias a una mayor compresión, se obtiene menor calidad.

A manera de ejemplo, suponga que desea grabar una película de 210 minutos en un DVD. Para lograr que quepa en un solo disco a una relación de compresión fija, necesitaría la relación que permite entre 3 y 4 horas de tiempo de grabado. La relación que logra la calidad adecuada para una película permite sólo 2 horas de grabación aproximadamente y, por lo tanto, usar únicamente ésa no sería suficiente. Sin embargo, quizá usted desee grabar tanto como fuera posible, a la mejor calidad, al cambiar de una relación a otra a un tiempo determinado.

Se resolverá el problema de encontrar el tiempo *de cambio* de un modo general que sea útil para todas las aplicaciones de este tipo. Se desea almacenar M minutos en un dispositivo que con una compresión de 1 a 1 almacenará m minutos. Existen relaciones de compresión disponibles de r a 1 y R a 1, digamos que $1 < r < R$, de manera que R corresponde a empaquetar más, a una calidad menor. El número $\frac{M}{r}$ da el número de minutos 1 a 1 o minutos reales que se necesitarán para almacenar M minutos a una relación de r a 1. Si el número $\frac{M}{r}$ es mayor que m, entonces no se podrán almacenar todos los M minutos en nuestro dispositivo a una relación r. Suponiendo que $\frac{M}{R}$ *es* menor que m, deseamos encontrar el tiempo t cuando será necesario cambiar de r a R para grabar todos los M minutos.

Si se graban t minutos con la relación r, entonces se consumirán $\frac{t}{r}$ de los m minutos disponibles con relación 1 a 1 de tiempo de grabación. Los restantes $M - t$ minutos consumirán otros $\frac{M-t}{R}$ de los m minutos disponibles 1 a 1 a relación R. Así, para usar *todo* el espacio de grabación disponible, debemos encontrar t tal que

$$\frac{t}{r} + \frac{M-t}{R} = m$$

Aunque esta ecuación, que es completamente literal, podría parecer complicada, es muy sencilla con respecto a t, la variable que se desea encontrar. De hecho es *lineal* en t, y se necesitan sólo unos cuantos pasos para obtener una solución general.

$$\begin{aligned}
\frac{t}{r} + \frac{M}{R} - \frac{t}{R} &= m \\
\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)t &= m - \frac{M}{R} \\
\left(\frac{R-r}{rR}\right)t &= \frac{mR-M}{R} \\
t &= \frac{mR-M}{R} \cdot \frac{rR}{R-r} \\
t &= \frac{r(mR-M)}{R-r}
\end{aligned}$$

Observe que la fórmula no es simétrica con respecto a r y R. Si inicia a los cuántos minutos después de empezar a grabar en alta calidad se debe cambiar a la calidad menor, con la intención de completar la grabación en el espacio disponible. Si se desea guardar el componente de calidad más alta para el *final* de la grabación, sería necesario ajustar la fórmula. Vea los problemas 1, 2, 3, 4 y 7. Debe enfatizarse que no hace falta memorizar la fórmula (a menos que se planee utilizarla con mucha frecuencia). Es el método lo que es más importante. La existencia de la solución general asegura que el método siempre funcionará. Trate de plantear y resolver los problemas específicos usando el método, en vez de sustituir en la fórmula, cuando pase a los ejercicios.

Para aprender más acerca de los esquemas de compresión de datos visite `wikipedia.org` y busque "*data compression*" y términos relacionados.

[2]Adaptado de Gregory N. Fiore, "An Application of Linear Ecuations to the VCR", *Mathematics Teacher,* 81 (octubre de 1988), 570-72. Con permiso del National Council of Teachers of Mathemathics.

Problemas

Una videograbadora que usa cinta estándar T-120 graba durante 2 horas en modo SP. Así que $m = 120$ para dicho equipo de grabación estándar. Utilice este valor en los problemas 1 a 4.

1. Si se usan los modos LP y SP, en ese orden, para grabar una película de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe cambiarse *de* LP *a* SP?
2. Si se utilizan los modos EP y SP, en ese orden, para grabar un programa de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuántos minutos después de iniciado el programa debe cambiarse de EP a SP?
3. Si los modos LP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de M minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de LP a SP?
4. Los modos EP y SP se utilizan en ese orden para grabar una película de M minutos de duración, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?
5. Para un CD estándar, el valor de m es de 74 aproximadamente. Utilice la función Solver de una calculadora graficadora para resolver la ecuación

$$\frac{x}{12} + \frac{1080 - x}{20} = 74$$

Después, de manera similar, resuelva la ecuación

$$\frac{x}{15} + \frac{1590 - x}{24} = 74$$

6. En el contexto de la grabación comprimida de audio en CD, ¿qué representa cada una de las ecuaciones del problema 5?
7. Obtenga la fórmula general para encontrar el tiempo necesario para cambiar la relación de grabación si la calidad más alta (relación r) debe reservarse para el final de la grabación.

2

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Suponga que un hombre de 180 libras bebe cuatro cervezas, una tras otra. Se sabe que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se elevará y después disminuirá y regresará en forma paulatina hasta cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye de nuevo?

Si se obtienen los valores medidos de la CAS para este bebedor en particular, pueden mostrarse en una tabla, como sigue:

Tiempo (h)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
CAS(%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

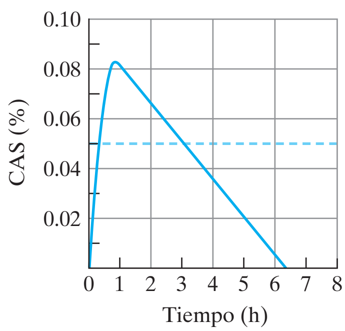
Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podría relacionarse la CAS con el tiempo t utilizando una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el capítulo 0):

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad \text{si } t \le 0.97$$

$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \qquad \text{si } t > 0.97$$

Sin embargo, como con la tabla, después de ver las ecuaciones resulta difícil entender de inmediato lo que sucede con la CAS a lo largo del tiempo.



Quizá la mejor descripción de los cambios en la CAS a través del tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí, se observa con facilidad qué es lo que sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, alcanza un máximo de 0.083% después de una hora aproximadamente, y luego desciende de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades para conducir un vehículo empiezan a fallar. La curva variará de un bebedor a otro, pero por lo general las mujeres se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo por la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua en el cuerpo de ambos sexos.

La relación entre tiempo y contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de una función. En este capítulo se tratan a fondo las funciones y sus gráficas.

OBJETIVO

Entender lo que es una función y determinar sus dominios y valores.

2.1 Funciones

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. Se trata de uno de los conceptos más elementales de las matemáticas, y es esencial para el estudio del cálculo.

Con frecuencia escuchamos en el habla cotidiana de personas educadas frases como "las tasas de interés están en función de los precios del petróleo" o "el monto de la pensión está en función de los años trabajados" o "la concentración de alcohol en la sangre después de beber cerveza es una función del tiempo". Algunas veces, tales expresiones concuerdan con el uso matemático, pero no siempre. Debemos ser más cuidadosos con el uso que hacemos de la palabra *función,* a fin de que sea útil matemáticamente, sin embargo hay características dentro de su uso cotidiano que vale la pena destacar.

Por ejemplo, el espíritu que fundamenta los ejemplos anteriores podría enunciarse como "las cantidades de tipo Y están en función de las cantidades de tipo X". Existen dos tipos de cantidades —aunque es posible que Y sea igual que X— y el valor de X parece *determinar* de alguna manera el valor de Y. En general, el uso no es simétrico en X y en Y. A modo de ilustración: la frase "los precios del petróleo están en función de las tasas de interés" no parece verdadera. La mayor parte de la gente no cree que ni siquiera la manipulación de las tasas de interés que lleva a cabo la Reserva Federal de Estados Unidos pueda determinar los precios del petróleo. La mayoría de los economistas recordarán aquella ocasión en la que la tasa de interés federal estuvo al 6% y el precio del barril de petróleo fue de \$30; y la vez en que la tasa de interés también era de 6%, pero el precio del barril de petróleo ascendió a \$40. Una tasa de interés dada no asegura un único precio del petróleo. Por lo tanto, la cantidad de *entrada*, la tasa de interés, no *determina* la cantidad de *salida*, el precio del petróleo. Por otro lado, suponga que una persona que acaba de beber cinco cervezas se somete a una prueba de concentración de alcohol en la sangre a partir de ese momento y cada hora durante las siguientes seis. Para cada uno de los valores de tiempo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la medición de la concentración de alcohol en la sangre producirá *exactamente un valor*.

Para nuestros propósitos, este último ejemplo proporciona la clave para que el uso de la palabra *función* sea preciso: *para cada valor de entrada, x (un tiempo), existe exactamente un valor de salida, y (una concentración de alcohol en la sangre)*.

De hecho, con este criterio *no* es correcto decir que "las tasas de interés están en función de los precios del petróleo". Aunque podría pensarse que los altos precios del petróleo son la *causa* de las dificultades económicas, no es cierto que un valor del precio del petróleo determine una tasa de interés única. Para ver esto con mayor claridad puede visitar

```
http://www.wtrg.com/oil_graphs/oilprice1947.gif
```

y

```
http://www.goldeagle.com/editorials_00/leopold011400.html
```

A partir del primer sitio de Internet, pueden determinarse dos ocasiones (bastante recientes) en las que el precio del petróleo fue el mismo. Si el segundo sitio indica que en ambas existieron diferentes tasas de interés, entonces se tiene la prueba de que un precio particular del petróleo no da lugar a una cierta tasa de interés. Tampoco es cierto que "el monto de una pensión está en función de los años trabajados". Si el valor de los "años trabajados" es 25, el valor del "monto de la pensión" aún no puede determinarse. En la mayoría de las organizaciones, el director general y el gerente de sistemas tendrán pensiones de retiro muy diferentes después de 25 años de servicio. Sin embargo, en este ejemplo podría decirse que, *de acuerdo con el perfil del puesto*, el monto de la pensión está en función de los años trabajados.

Si se invierten \$100 a una tasa de interés simple del 6%, entonces el interés ganado I es una función de la cantidad de tiempo t que el dinero permanece invertido. Estas cantidades están relacionadas por la fórmula

$$I = 100(0.06)t \qquad \textbf{(1)}$$

Aquí, para cada valor de t, existe exactamente un valor de I dado por la ecuación (1). En una situación como ésta, con frecuencia se escribe $I(t) = 100(0.06)t$ para reforzar la idea de que el valor de I está determinado por el valor de t. Algunas veces se escribe $I = I(t)$ para expresar que I es una función de t aun si no se conoce una fórmula que lo especifique. La fórmula (1) asigna la salida 3 a la entrada $\frac{1}{2}$ y la salida 12 a la entrada 2. Puede pensarse en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: Multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación con flechas:

$$t \mapsto I \qquad \text{o} \qquad t \mapsto 100(0.06)t$$

Una fórmula proporciona el modo de describir una regla para cubrir potencialmente un número infinito de casos, pero si existe sólo una cantidad finita de valores para la variable de entrada, como en el caso al inicio del capítulo, entonces la *regla* obtenida a partir de las observaciones registradas en la tabla, puede no ser parte de ninguna *fórmula* reconocible. A continuación, se usará la palabra *regla* en lugar de *fórmula* para poder incluir esta útil generalización.

DEFINICIÓN

Una ***función*** es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el ***dominio*** de la función. Al conjunto de todos los números posibles de salida se le llama ***rango*** (o ***codominio***).

Para la función del interés definida por la ecuación (1), el número de entrada t no puede ser negativo, puesto que en este ejemplo el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos (esto es, todo $t \geq 0$, donde la variable proporciona el tiempo transcurrido desde el momento en que se hizo la inversión).

Hasta aquí se ha usado el término *función* en un sentido restringido porque, en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y sus capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implícita. Sin embargo, por el momento sólo se considerarán las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa los números de entrada para una función se denomina **variable independiente**. Una variable que representa los números de salida se denomina **variable dependiente**, porque su valor *depende* del valor de *la variable independiente.* Se dice que la variable dependiente es una *función de la variable independiente.* Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la variable dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación:

$$y = x + 2 \tag{2}$$

define a y como una función de x. La ecuación proporciona la regla, "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$, entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

ADVERTENCIA

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero esta relación no es una función de x.

No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por lo tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones con dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x, existe exactamente una salida, $2x$. Así que y es una función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y, existe exactamente una salida, $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

Por lo general, las letras f, g, h, F, G, etcétera, se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (2), $y = x + 2$, define a y como una función de x, donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que se elige f para representar esta regla.

Entonces se dice que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, se escribe $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". De manera similar, $f(-4) = -2$. En general, si x es cualquier entrada, se tiene la notación siguiente:

$f(x)$ es un *número de salida*.

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio de f.

$$\overset{\text{entrada}}{\downarrow}$$
$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{salida}}}$$

Así, la salida $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, puede escribirse $y = f(x) = x + 2$ o simplemente,

$$f(x) = x + 2$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, se reemplaza con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10$$

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$

ADVERTENCIA

$f(x)$ **no** significa f por x, $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

Los números de salida como $f(-4)$ se llaman **valores de la función**. Tenga en mente que dichos valores están en el rango de f.

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la "notación de funciones". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g\colon x \mapsto x^3 + x^2$$

En otras palabras, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^3 + 2^2 = 12 \\ g(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 \\ g(t) &= t^3 + t^2 \\ g(x+1) &= (x+1)^3 + (x+1)^2 \end{aligned}$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x + 1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$.

Cuando se haga referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, se puede decir con toda libertad que la ecuación es una función. Así, se habla de "la función $g(x) = x^3 + x^2$" y, de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla proporciona valores de la función que también son números reales.

Por ejemplo, suponga que

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}$$

Aquí puede usarse cualquier número real para x excepto 6, porque el denominador es 0 cuando x es 6. Así que se entiende que el dominio de h consiste en todos los números reales excepto 6.

Igualdad de funciones

Decir que dos funciones f y g son iguales, denotado por $f = g$, es igual a decir que

1. El dominio de f es igual al dominio de g.
2. Para toda x en el dominio de f y g, $f(x) = g(x)$.

El requisito 1 dice que un número x está en el dominio de f si y sólo si está en el dominio de g. Así que, si se tiene que $f(x) = x^2$, sin mención explícita del dominio, y $g(x) = x^2$ para $x \geq 0$, entonces $f \neq g$. Aquí, el dominio de f es toda la recta real $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Por otro lado, si se tiene $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2 + 2x + 1$, entonces se entiende que tanto para f como para g el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el criterio para decidir si $f = g$ consiste en saber si, para cada número real x, se tiene que $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Pero esto es cierto; es un caso especial, el número 4, expuesto en la sección 0.4 correspondiente a los productos especiales. De hecho, los antiguos libros de texto se refieren a los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ como "identidades", para indicar que son ciertos para cualquier valor admisible de la variable, y para distinguirlos de los enunciados del tipo $(x + 1)^2 = 0$, que son verdaderos sólo para algunos valores de x.

Dadas las funciones f y g, se tiene que $f \neq g$ *ya sea porque* el dominio de f es diferente del dominio de g *o porque* existe alguna x para la cual $f(x) \neq g(x)$.

EJEMPLO 1 Determinación de la igualdad de funciones

Determine cuáles de las siguientes funciones son iguales.

a. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}$

b. $g(x) = x + 2$

c. $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d. $k(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Solución: El dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de 1, mientras que el de g es el conjunto de todos los números reales. (Aquí se sigue la convención de que el dominio es el conjunto de todos los números reales para los cuales la regla tiene sentido.) Se tendrá que decir más acerca de funciones como h y k, que se definen por *casos* en el ejemplo 4 de la sección 2.2. Aquí se observa que tanto el dominio de h como el de k es $(-\infty, \infty)$, puesto que para ambos existe una regla que tiene sentido para todos los números reales. Los dominios de g, h y k son iguales entre sí, pero el de f es diferente. Entonces, por el requerimiento 1 para la igualdad de funciones $f \neq g$, $f \neq h$ y $f \neq k$. Por definición, $g(x) = h(x) = k(x)$ para toda $x \neq 1$, de manera que la igualdad de g, h y k depende de sus valores en 1. Como $g(1) = 3$, $h(1) = 0$ y $k(1) = 3$, se concluye que $g = k$ y que $g \neq h$ (y que $h \neq k$). Aunque este ejemplo pudiera parecer artificial, es representativo de las situaciones que surgen frecuentemente en el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

DETERMINACIÓN DE DOMINIOS

El área de un círculo depende de la longitud de su radio.

a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.

b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?

c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

EJEMPLO 2 Determinación de dominios

Encuentre el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

Solución: No es posible dividir entre cero, así que deben encontrarse todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Así que se iguala el denominador a cero y se resuelve para x:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 && \text{(ecuación cuadrática)} \\ (x-2)(x+1) &= 0 && \text{(al factorizar)} \\ x &= 2, -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de f consiste en todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$

Solución: $\sqrt{2t-1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual a cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t-1}$ no es un número real. (Es un *número imaginario*.)

Como los valores de la función deben ser números reales, por lo menos hasta este momento, debe suponerse que:

$$\begin{aligned} 2t - 1 &\geq 0 \\ 2t &\geq 1 \qquad \text{(al sumar 1 en ambos lados)} \\ t &\geq \frac{1}{2} \qquad \text{(al dividir ambos lados entre 2)} \end{aligned}$$

Así, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

DETERMINACIÓN DEL DOMINIO Y DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN

El tiempo necesario para recorrer una cierta distancia depende de la velocidad a la cual se haga el recorrido.

a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo si la distancia a recorrer es 300 millas y la velocidad es r.

b. ¿Cuál es el dominio de esta función fuera de contexto?

c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?

d. Encuentre $t(x)$, $t\left(\frac{x}{2}\right)$ y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.

e. ¿Qué le pasa al tiempo si la velocidad se reduce (divide) por una constante c? Describa esta situación con el uso de una ecuación.

EJEMPLO 3 Determinación del dominio y de los valores funcionales

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Puede utilizarse cualquier número real como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. *Encuentre* $g(z)$.

Solución: Al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5$$

b. *Encuentre* $g(r^2)$.

Solución: Al reemplazar cada x por r^2 en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5$$

c. *Encuentre* $g(x + h)$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31(a)

ADVERTENCIA

No confunda la notación. En el ejemplo 3(c), se encontró $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. Pero $g(x + h)$, $g(x) + h$ y $g(x) + g(h)$ son cantidades totalmente distintas.

EJEMPLO 4 Determinación de un cociente de diferencia

Si $f(x) = x^2$, *determine* $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución: La expresión $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencia**. Aquí el numerador es una diferencia de valores de la función. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h \end{aligned}$$

El cociente de diferencia de una función es un concepto importante para el cálculo.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, la función de interés estudiada con anterioridad, $I = 100(0.06)t$, tiene $t \geq 0$ porque t representa el tiempo. El ejemplo 5 ilustra algo similar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

FUNCIÓN DE DEMANDA

Suponga que la demanda semanal de pizzas en un restaurante es $p = 26 - \frac{q}{40}$.

a. Si el precio actual es de \$18.50 por pizza, ¿cuántas se venden cada semana?

b. Si se venden 200 pizzas semanales, ¿cuál es el precio actual?

c. Si el propietario desea duplicar el número de pizzas vendidas cada semana (a 400), ¿cuál debe ser el precio?

EJEMPLO 5 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \mapsto \frac{100}{q} = p$$

Por ejemplo,

$$20 \mapsto \frac{100}{20} = 5$$

esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda**. La variable independiente es q, y la variable dependiente es p. Como q no puede ser 0 (la división entre 0 no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio consiste en todos los valores de q tales que $q > 0$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 43

Se ha visto que una función es esencialmente una *correspondencia* en la que a cada número de entrada en el dominio, se asigna un único número de salida en el rango. En la figura 2.1 se muestran por medio de flechas algunos ejemplos de asignaciones para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$. El ejemplo siguiente ilustra una correspondencia funcional que no está dada por medio de una fórmula algebraica.

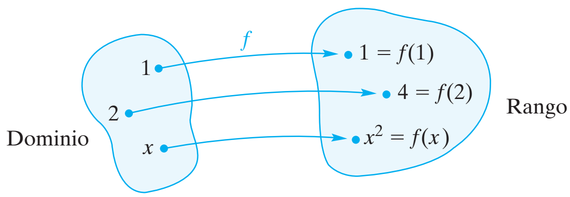


FIGURA 2.1 Correspondencia funcional para $f(x) = x^2$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

PROGRAMA DE OFERTA

p **Precio por unidad en dólares**	q **Cantidad ofrecida por semana**
500	11
600	14
700	17
800	20

EJEMPLO 6 Programa de la oferta

La tabla de la figura 2.2 es un *programa de oferta*. Indica una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes surtirán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, es decir $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11 \quad f(600) = 14 \quad f(700) = 17 \quad \text{y} \quad f(800) = 20$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, es decir $p = g(q)$, y

$$g(11) = 500 \quad g(14) = 600 \quad g(17) = 700 \quad \text{y} \quad g(20) = 800$$

Se habla de f y g como **funciones de oferta**.

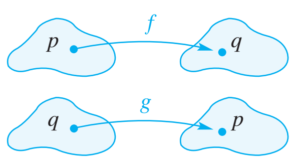


FIGURA 2.2 Programa de oferta y funciones de oferta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 53

TECNOLOGÍA

Los valores de una función pueden calcularse fácilmente con una calculadora graficadora. Por ejemplo, suponga que

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$$

y que se quiere encontrar $f(0.7)$, $f(-2.31)$ y $f(10)$. Con una calculadora TI-83 Plus, primero se introduce la función como Y_1:

$$Y_1 = 17X\hat{}4 - 13X\hat{}3 + 7$$

Después se presiona la tecla “Table” y de manera sucesiva se introducen los valores de x .7, -2.31 y 10. Los resultados se muestran en la figura 2.3. Debe notarse que existen otros métodos para evaluar funciones por medio de la TI-83 Plus.

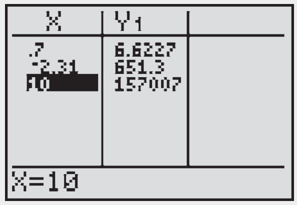


FIGURA 2.3 Tabla de valores para la función para $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$.

Problemas 2.1

En los problemas 1 a 4, determine si las funciones dadas son iguales.

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

2. $G(x) = (\sqrt{x+1})^2$; $H(x) = x + 1$

***3.** $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
$g(x) = x - 1$

En los problemas 5 a 16, obtenga el dominio de cada función.

5. $f(x) = \dfrac{8}{x}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{5}$

***7.** $h(x) = \sqrt{x - 3}$

8. $K(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z - 1}}$

9. $f(z) = 3z^2 + 2z - 4$

10. $H(x) = \dfrac{x}{x + 8}$

11. $f(x) = \dfrac{9x - 9}{2x + 7}$

12. $g(x) = \sqrt{4x + 3}$

13. $g(y) = \dfrac{4}{y^2 - 4y + 4}$

14. $\phi(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 + x - 6}$

15. $h(s) = \dfrac{4 - s^2}{2s^2 - 7s - 4}$

16. $G(r) = \dfrac{2}{r^2 + 1}$

Determine los valores de la función para cada una de las funciones de los problemas 17 a 28.

17. $f(x) = 2x + 1$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$

18. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4)$, $H(\sqrt{2})$, $H\left(\dfrac{2}{3}\right)$

19. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8)$, $G(u)$, $G(u^2)$

20. $F(x) = -5x$; $F(s)$, $F(t + 1)$, $F(x + 3)$

21. $\gamma(u) = 2u^2 - u$; $\gamma(-2)$, $\gamma(2v)$, $\gamma(x + a)$

22. $h(v) = \dfrac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16)$, $h\left(\dfrac{1}{4}\right)$, $h(1 - x)$

23. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x + h)$

24. $H(x) = (x + 4)^2$; $H(0)$, $H(2)$, $H(t - 4)$

25. $k(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 + 2}$; $k(5)$, $k(3x)$, $k(x + h)$

26. $k(x) = \sqrt{x - 3}$; $k(4)$, $k(3)$, $k(x + 1) - k(x)$

27. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0)$, $f(64)$, $f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

28. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32)$, $g(-64)$, $g(t^{10})$

En los problemas 29 a 36 encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

29. $f(x) = 4x - 5$

30. $f(x) = \dfrac{x}{2}$

***31.** $f(x) = x^2 + 2x$

32. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

33. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

34. $f(x) = x^3$

***35.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{x + 8}{x}$

37. Si $f(x) = 5x + 3$, encuentre $\dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

38. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$, encuentre $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

En los problemas 39 a 42, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

39. $9y - 3x - 4 = 0$

40. $x^2 + y = 0$

41. $y = 7x^2$

42. $x^2 + y^2 = 1$

***43.** La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

44. Suponga que $f(b) = a^2b^3 + a^3b^2$. (a) Encuentre $f(a)$. (b) Encuentre $f(ab)$.

45. **Valor de un negocio** Un negocio cuyo capital original es de \$25 000, tiene ingresos y gastos semanales de \$6500 y \$4800, respectivamente. Si se conservan todas las utilidades, exprese el valor V del negocio al final de t semanas, como una función de t.

46. **Depreciación** Si una máquina de \$30 000 se deprecia 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor V de la máquina después que han transcurrido t años.

47. **Función de utilidad** Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

48. **Función de demanda** Suponga que la función de demanda anual para que cierto actor protagonice una película es $p = \dfrac{1\,200\,000}{q}$, donde q es el número de películas que protagoniza durante el año. Si el artista actualmente cobra \$600 000 por película, ¿cuántas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro cintas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

49. Función de oferta Suponga que la función de oferta semanal por una libra de café, la mezcla propia de un expendio local es $p = \frac{q}{48}$, donde q es el número de libras de café que se ponen en venta cada semana. ¿Cuántas libras semanales deben ofrecerse si el precio es de \$8.39 por libra? ¿Cuántas libras a la semana deben ofrecerse para su venta si el precio de cada una es de \$19.49? ¿Cómo cambia la oferta conforme el precio se incrementa?

50. Altas de un hospital Una compañía de seguros examinó los registros de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de pacientes dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(900)$. (d) ¿Al cabo de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad ($1/2 = 0.500$) del grupo?

51. Psicología Se realizó un experimento para analizar la respuesta humana a las descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió que le asignaran una magnitud de 10, y la llamaron estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas, la respuesta R consistía en un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con la del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I en microamperes) y se estimó mediante

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500} \qquad 500 \leq I \leq 3500$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_0)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el hecho de duplicar la intensidad?

52. Psicología En un experimento de aprendizaje,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Con el uso de este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

***53. Programa de demanda** La tabla siguiente se conoce como un *programa de demanda*, y proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, haga una lista con los números en el dominio de f. Encuentre $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Encuentre $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	**Cantidad de demanda por semana**, q
\$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas 54 a 57, utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$

55. $f(x) = \dfrac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$

56. $f(x) = (20.3 - 3.2x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.3)$, (b) $f(-0.02)$, (c) $f(1.9)$

57. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}x^2 + 7.31(x + 1)}{5.03}}$; (a) $f(12.35)$, (b) $f(-123)$, (c) $f(0)$

2.2 Funciones especiales

OBJETIVO

Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

FUNCIONES CONSTANTES

Suponga que las primas mensuales de un seguro médico para un individuo son \$125.00.

a. Escriba las primas mensuales del seguro médico como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.

b. ¿Cómo cambian las primas del seguro médico conforme aumentan las visitas al doctor?

c. ¿Qué tipo de función es ésta?

En esta sección se verán funciones que tienen formas y representaciones especiales. Se iniciará con la *función constante*, tal vez el tipo más sencillo de función que existe:

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h consiste en todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2 \quad h(-387) = 2 \quad h(x + 3) = 2$$

Se llama a h una *función constante*, puesto que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, se tiene esta definición:

Una función de la forma $h(x) = c$, donde c es una *constante*, se llama **función constante**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

[1] Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.
[2] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York; Academic Press, 1983).

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \cdots, c_0$ son constantes en las que $c_n \neq 0$, se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama el **grado** del polinomio, y c_n es el **coeficiente principal**. Así,

Cada término de una función polinomial es, o bien una constante, o bien, una constante por una potencia entera positiva de x.

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas**, respectivamente. Por ejemplo, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. La función constante $f(x) = 0$ también se considera una función polinomial, pero no tiene ningún grado asignado. El dominio de cualquier función polinomial consiste en todos los números reales.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

FUNCIONES POLINOMIALES

La función $d(t) = 3t^2$, para $t \geq 0$, representa la distancia en metros que un automóvil puede recorrer en t segundos cuando tiene una aceleración constante de 6 m por segundo.

a. ¿Qué tipo de función es ésta?
b. ¿Cuál es el grado?
c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 1.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Como $f(x) = 2x^{-3}$ y el exponente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional**.

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional, puesto que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

Toda función polinomial es una función racional.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional, porque $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si un cliente compra de 0 a 5 pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares, el precio es de \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Funciones definidas por partes

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq s < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \leq 8 \end{cases}$$

Ésta se llama **función definida por partes**, puesto que su regla está dada por más de una expresión. Aquí s es la variable independiente, y el dominio F es toda s tal que $-1 \leq s \leq 8$. El valor de s determina cuál expresión debe usarse.

Determine $F(0)$: como $-1 \leq 0 < 1$, se tiene $F(0) = 1$.

Determine $F(2)$: como $1 \leq 2 \leq 2$, se tiene $F(2) = 0$.

Determine $F(7)$: como $2 < 7 \leq 8$, se sustituye 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

TECNOLOGÍA

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83 Plus, la figura 2.4 muestra una secuencia de pasos para la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ -x & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Como $|x|$ proporciona un número real único para cada número real x, el valor absoluto, $|-|$, es una función.

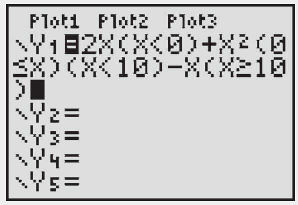


FIGURA 2.4 Introducción de una función definida por partes.

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $|-|(x) = |x|$ se denomina la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, el dominio de $|-|$ son todos los números reales. Algunos valores de esta función son

$$|16| = 16$$
$$|-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}$$
$$|0| = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

En los ejemplos siguientes se utiliza la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, donde r es un entero positivo, se lee "***r* factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r$$

También se define

$$0! = 1$$

Para cada entero no negativo n, $(-)!(n) = n!$ determina un número único, de manera que puede decirse que $(-)!$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros no negativos.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

FACTORIALES

Deben colocarse siete libros diferentes en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b. $3!(6 - 5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

EJEMPLO 7 Genética

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

Suponga que se reproducen dos conejillos de indias de color negro, y tienen cinco crías. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de las crías sean de color café y las otras negras, es una función de r, por ejemplo, $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

La letra P en $P = P(r)$ se usa de dos formas. En el lado derecho, P representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P consiste en todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determine la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.

Solución: Para encontrar $P(3)$, se tiene

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35

Problemas 2.2

En los problemas 1 a 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4$

2. $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x - 3}{3}$

***3.** $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

4. $g(x) = 3^{-2}x^2$

En los problemas 5 a 8 determine si la función dada es una función racional.

***5.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 4}$

6. $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$

7. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

8. $g(x) = 4x^{-4}$

Determine el dominio de cada función de los problemas 9 a 12.

9. $h(z) = 19$

10. $f(x) = \sqrt{\pi}$

11. $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x > 1 \\ 4 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 3 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

Establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada en los problemas 13 a 16.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6$

14. $g(x) = 7x$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} - 3x^5 + 2x^6 + x^7$

16. $f(x) = 9$

Evalúe las funciones para cada caso de los problemas 17 a 22.

17. $f(x) = 8$; $f(2)$, $f(t + 8)$, $f(-\sqrt{17})$

18. $g(x) = |x - 3|$; $g(10)$, $g(3)$, $g(-3)$

***19.** $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$;

$F(10)$, $F(-\sqrt{3})$, $F(0)$, $F\left(-\dfrac{18}{5}\right)$

20. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

$f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$

***21.** $G(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$;

$G(8)$, $G(3)$, $G(-1)$, $G(1)$

22. $F(\theta) = \begin{cases} 2\theta - 5 & \text{si } \theta < 2 \\ \theta^2 - 3\theta + 1 & \text{si } \theta > 2 \end{cases}$;

$F(3)$, $F(-3)$, $F(2)$

En los problemas 23 a 28 determine el valor de cada expresión.

23. $6!$

24. $0!$

25. $(4 - 2)!$

26. $6! \cdot 2!$

***27.** $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

28. $\dfrac{8!}{5!(8-5)!}$

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba su costo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué tipo de función es?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene una longitud tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un dado es de \$850, y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Se invierte un capital de P dólares a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para estimular las ventas a grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 12, cada boleto cuesta \$9.50. Si su grupo es de 12 o más, cada boleto cuesta \$8.75. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales El grupo que cursa matemáticas financieras ha elegido a un comité integrado por cuatro personas, para quejarse con el magisterio por la inclusión de la notación factorial en el curso. Decidieron que, para ser más eficaces, los miembros se harían nombrar A, G, M y S, y que el miembro A cabildearía con los profesores cuyos apellidos iniciaran con las letras A a la F, el miembro G con los profesores cuyas iniciales fueran de la G a la L y así sucesivamente. ¿De cuántas maneras puede el comité nombrar a sus miembros con este procedimiento? ¿De cuántas formas podría nombrarse un comité integrado por cinco personas con cinco letras diferentes?

*35. **Genética** Bajo ciertas condiciones, si dos adultos con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. **Genética** En el ejemplo 7, determine la probabilidad de que los ojos de las cinco crías sean de color café.

37. **Crecimiento de bacterias** Existe un cultivo en el cual se están desarrollando las bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \le T \le 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \le 39 \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f y **(b)** encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas 38 a 41, use su calculadora para encontrar los valores de las funciones indicados para cada caso. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.19x^4 - 27.99 & \text{si } x \ge 5.99 \\ 0.63x^5 - 57.42 & \text{si } x < 5.99 \end{cases}$

(a) $f(7.98)$ **(b)** $f(2.26)$ **(c)** $f(9)$

39. $f(x) = \begin{cases} 29.5x^4 + 30.4 & \text{si } x < 3 \\ 7.9x^3 - 2.1x & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

(a) $f(2.5)$ **(b)** $f(-3.6)$ **(c)** $f(3.2)$

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12 & \text{si } -8 \le x < -2 \\ x^2 - 4x^{-2} & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$ **(b)** $f(-14.9)$ **(c)** $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3) & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2 & \text{si } -5 \le x < 0 \\ \sqrt{2.1x+3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$ **(b)** $f(46)$ **(c)** $f(-2/3)$

OBJETIVO

Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división, multiplicación por una constante y composición.

2.3 Combinaciones de funciones

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x$$

Al sumar $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10$$

En general, para cualesquiera funciones f y g, se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** $\frac{f}{g}$ como sigue:[4]

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para } g(x) \ne 0 \end{aligned}$$

[3]Adaptado de F. K. E. Imrie y A. J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA: MIT Press, 1975).

[4]En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g. En el cociente tampoco se permite ningún valor de x para el cual $g(x)$ sea 0.

Un caso especial de fg merece una mención especial. Para cualquier número real c y cualquier función f, se define cf mediante

$$(cf)(x) = c \cdot f(x)$$

Este tipo restringido de producto se llama **producto escalar**. El producto escalar tiende a compartir algunas propiedades con las sumas (y las restas), a diferencia de los productos (y cocientes) en general.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, se tiene

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x^2 + 3x \\
(f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x^2 - 3x \\
(fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3 \\
\frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3} \quad \text{para } x \neq 0 \\
(\sqrt{2}f)(x) &= \sqrt{2}f(x) = \sqrt{2}x^2
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ *y* $g(x) = x^2 + 3x$, *encuentre*

a. $(f+g)(x)$
b. $(f-g)(x)$
c. $(fg)(x)$
d. $\frac{f}{g}(x)$
e. $(\frac{1}{2}f)(x)$

Solución:

a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x-1) + (x^2+3x) = x^2 + 6x - 1$
b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x-1) - (x^2+3x) = -1 - x^2$
c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x-1)(x^2+3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x$
d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-1}{x^2+3x}$
e. $\left(\frac{1}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}(f(x)) = \frac{1}{2}(3x-1) = \frac{3x-1}{2}$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3(a)-(f)

Composición

También pueden combinarse dos funciones al aplicar primero una función a un número, y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3 \cdot 2 = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6$$

Después, se determina que la salida 6 se convierte en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

Al aplicar primero g y después f, se envía el 2 al 36:

$$2 \overset{g}{\mapsto} 6 \overset{f}{\mapsto} 36$$

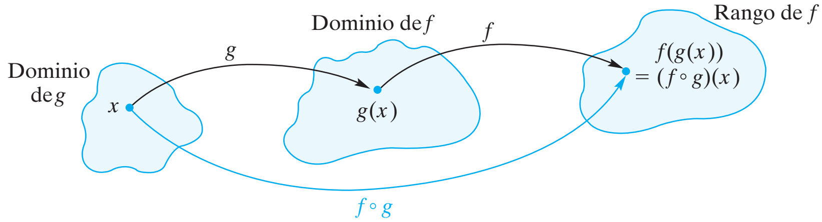


FIGURA 2.5 Composición de f con g.

De manera más general, se reemplazará el 2 por x, donde x está en el dominio de g (vea la figura 2.5). Al aplicar g a x, se obtiene el número $g(x)$, el cual se supone está en el dominio de f. Al aplicar f a $g(x)$, se obtiene $f(g(x))$, se lee "f de g de x", que está en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado se llama *composición,* y la función que se obtiene, denotada por $f \circ g$, se conoce como la *función compuesta* de f con g. Dicha función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. (Vea la flecha inferior en la figura 2.5.) De esta manera, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

DEFINICIÓN

Si f y g son funciones, la ***composición de*** f ***con*** g ***es la función*** $f \circ g$ ***definida por***

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, puede obtenerse una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como se vio anteriormente.

Cuando se trata con números reales y la operación de suma, 0 es un caso especial, para cualquier número real a, se tiene

$$a + 0 = a = 0 + a$$

El número 1 tiene una propiedad similar con respecto a la multiplicación. Para cualquier número real a, se tiene

$$a1 = a = 1a$$

A manera de referencia, en la sección 2.4 se observa que la función I definida por $I(x) = x$, satisface, para cualquier función f,

$$f \circ I = f = I \circ f$$

donde se considera la igualdad de funciones como se definió en la sección 2.1. De hecho, para cualquier x,

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = I(f(x)) = (I \circ f)(x)$$

La función I se llama la función *identidad*.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

COMPOSICIÓN

Un CD cuesta x dólares al mayoreo. El precio que la tienda paga al mayorista está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, donde x es el precio que la tienda paga.Escriba una función compuesta para determinar el precio al cliente como una función del precio al mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Encuentre*

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f)(x)$

ADVERTENCIA

Por lo general, $f \circ g$ y $g \circ f$ son muy diferentes. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$$

pero se tiene

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1$$

Observe que $(f \circ g)(1) = \sqrt{2}$, mientras que $(g \circ f)(1) = 2$. Tampoco confunda $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1}$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x+1)$$

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x, y f obtiene la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$$

El dominio de g consiste en todos los números reales x, y el de f en todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición esté constituido por todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio está formado por todas las $x \geq -1$, o de manera equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x, y g suma 1 al resultado. De esta manera g suma 1 a $\sqrt{x}$, y se tiene

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

El dominio de f consiste en todas las $x \geq 0$, y el dominio de g en todos los números reales. Por lo que el dominio de la composición está constituido por todas las $x \geq 0$, para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, a saber, toda $x \geq 0$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

La composición es *asociativa*, lo que significa que para cualesquiera tres funciones f, g y h,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$, $G(p) = 2p + 1$ *y* $H(p) = |p|$, *encuentre*

a. $F(G(p))$

b. $F(G(H(p)))$

c. $G(F(1))$

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p+1) = (2p+1)^2 + 4(2p+1) - 3 = 4p^2 + 12p + 2 = (F \circ G)(p)$

b. $F(G(H(p))) = (F \circ (G \circ H))(p) = ((F \circ G) \circ H)(p) = (F \circ G)(H(p)) = (F \circ G)(|p|) = 4|p|^2 + 12|p| + 2 = 4p^2 + 12|p| + 2$

c. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN COMO UNA COMPOSICIÓN

Suponga que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x + 3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

EJEMPLO 4 Expresión de una función como una composición

Exprese $h(x) = (2x - 1)^3$ *como una composición.*

Solución: Se observa que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que se determina $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x-1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

que da h como una composición de dos funciones.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

TECNOLOGÍA

Se pueden combinar dos funciones con el uso de una calculadora graficadora. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

que se introducen como Y_1 y Y_2, según se muestra en la figura 2.6. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene al evaluar Y_4 en 3.

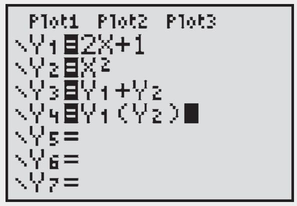


FIGURA 2.6 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

Problemas 2.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)(0)$ **(c)** $(f - g)(x)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(-2)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(3)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$
(j) $(g \circ f)(3)$

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)(4)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}(2)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(2)$

***3.** Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^2 - x$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f - g)(x)$ **(c)** $(f - g)\left(-\frac{1}{2}\right)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $\frac{f}{g}(x)$ **(f)** $\frac{f}{g}\left(-\frac{1}{2}\right)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(g \circ f)(x)$ **(i)** $(g \circ f)(-3)$

4. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5$, encuentre lo siguiente.

(a) $(f + g)(x)$ **(b)** $(f + g)\left(\frac{2}{3}\right)$ **(c)** $(f - g)(x)$
(d) $(fg)(x)$ **(e)** $(fg)(7)$ **(f)** $\frac{f}{g}(x)$
(g) $(f \circ g)(x)$ **(h)** $(f \circ g)(12\,003)$ **(i)** $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \frac{4}{p}$ y $g(p) = \frac{p-2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

***7.** Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \frac{2}{t-1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(t) = \sqrt{t}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

***9.** Si $f(v) = \frac{1}{v^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(v)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas 11 a 16, determine las funciones f y g tales que h(x) = f(g(x)).

11. $h(x) = 11x - 7$

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

***13.** $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$

15. $h(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{x + 3}}$

16. $h(x) = \frac{2 - (3x - 5)}{(3x - 5)^2 + 2}$

17. Utilidad Cierto expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra vendida.
(a) Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras vendidas.
(b) Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.
(c) Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras vendidas.

18. Geometría Suponga que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 2)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos.[5] Se denota con S el valor numérico de la posición social, con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}$$

[5]R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

Además, suponga que el ingreso de una persona I es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que describe esta función?

Determine los valores indicados para las funciones f y g dadas en los problemas 21 a 24. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2$, $g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$
(a) $(f + g)(4.5)$, **(b)** $(f \circ g)(-2)$

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$, $g(x) = 11.2x + 5.39$
(a) $\dfrac{f}{g}(-2)$, **(b)** $(g \circ f)(-10)$

23. $f(x) = x^{4/5}$, $g(x) = x^2 - 8$
(a) $(fg)(7)$, **(b)** $(g \circ f)(3.75)$

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$
(a) $(f - g)(7.3)$, **(b)** $(f \circ g)(-4.17)$

OBJETIVO

Introducir las funciones inversas, sus propiedades y usos.

2.4 Funciones inversas

Así como $-a$ es el número para el cual

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

y, para $a \neq 0$, a^{-1} es el número para el cual

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

entonces, dada una función f, cabe preguntarse acerca de la existencia de una función g que satisfaga

$$f \circ g = I = g \circ f \tag{1}$$

donde I es la función identidad, que se explicó en el fragmento titulado "composición" de la sección 2.3, y dada por $I(x) = x$. Suponga que se tiene g como se indicó antes, y una función h que también satisface (1) de manera que

$$f \circ h = I = h \circ f$$

Entonces

$$h = h \circ I = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = I \circ g = g$$

muestra que hay, a lo más, una función que satisface los requerimientos de g en (1). En la jerga matemática, g está determinada de forma única por f y, por lo tanto, se le da un nombre, $g = f^{-1}$, lo cual refleja su dependencia de f. La función f^{-1} se lee como f **inversa** y se llama la **inversa** de f.

El inverso aditivo $-a$ existe para cualquier número a; el inverso multiplicativo a^{-1} existe precisamente si $a \neq 0$. La existencia de f^{-1} impone a una función f un fuerte requisito. Puede mostrarse que f^{-1} existe si y sólo si, para toda a y b, siempre que $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$. Puede ser útil pensar que una f así, puede *cancelarse* (*a la izquierda*).

ADVERTENCIA

No confunda f^{-1}, la inversa de f, y $\dfrac{1}{f}$, el recíproco multiplicativo de f. Desafortunadamente, la nomenclatura para las funciones inversas interfiere con el uso numérico de $(-)^{-1}$. Por lo general, $f^{-1}(x)$ es diferente de $\dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Por ejemplo, $I^{-1} = 1$ (puesto que $I \circ I = I$) entonces $I^{-1}(x) = x$, pero $\dfrac{1}{I}(x) = \dfrac{1}{I(x)} = \dfrac{1}{x}$.

> Una función f que satisface
>
> para toda a y b, si $\quad f(a) = f(b), \quad$ entonces $\quad a = b$
>
> se llama una función **uno a uno**.

De este modo, puede decirse que una función tiene una inversa precisamente si es uno a uno. Una forma equivalente de expresar la condición de uno a uno es:

para toda a y b, si $\quad a \neq b, \quad$ entonces $\quad f(a) \neq f(b)$

así que entradas distintas dan lugar a salidas diferentes. Observe que esta condición no se cumple para muchas funciones simples. Por ejemplo si $f(x) = x^2$, entonces $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (1)^2 = f(1)$ y $-1 \neq 1$ muestra que la función cuadrática no es uno a uno. De manera similar, $f(x) = |x|$ no es uno a uno.

En general, el dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.

Aquí debe hacerse notar que (1) es equivalente a

$$f(f^{-1}(x)) = x = f^{-1}(f(x)) \tag{2}$$

La primera ecuación se aplica para toda x en el dominio de f^{-1} y la segunda ecuación es aplicable para toda x en el dominio de f. En general, el dominio de f^{-1}, que es igual al rango de f, puede ser muy diferente al dominio de f.

EJEMPLO 1 Inversas de funciones lineales

De acuerdo con la sección 2.2, una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, es una función lineal. *Muestre que una función lineal es uno a uno. Encuentre la inversa de* $f(x) = ax + b$ *y muestre que también es lineal.*

Solución: Suponga que $f(u) = f(v)$, esto es

$$au + b = av + b \tag{3}$$

Para mostrar que f es uno a uno, debe comprobarse que de esta suposición se sigue que $u = v$. Al restar b de ambos lados de (3) se obtiene $au = av$, de donde se sigue que $u = v$ al dividir ambos lados entre a. (Se supone que $a \neq 0$.) Como f se obtuvo tras multiplicar primero por a y luego sumar b, es de esperarse que el efecto de f pueda eliminarse al restar primero b y dividir después entre a. Entonces, considere $g(x) = \dfrac{x-b}{a}$. Se tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a\frac{x-b}{a} + b = (x-b) + b = x$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(ax+b)-b}{a} = \frac{ax}{a} = x$$

Como g satisface los requerimientos de (1), se sigue que g es la inversa de f. Esto es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a} = \dfrac{1}{a}x + \dfrac{-b}{a}$ y la última igualdad muestra que f^{-1} también es una función lineal.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Identidades para las inversas

Muestre que

a. *Si f y g son funciones uno a uno, la composición $f \circ g$ también es uno a uno y* $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
b. *Si f es uno a uno $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Solución:

a. Suponga que $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$, esto es $f(g(a)) = f(g(b))$. Como f es uno a uno, $g(a) = g(b)$. Dado que g es uno a uno, $a = b$ y esto muestra que $f \circ g$ es uno a uno. Las ecuaciones

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ I \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I$$

y

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ I \circ g = g^{-1} \circ g = I$$

muestran que $g^{-1} \circ f^{-1}$ es la inversa de $f \circ g$, lo cual, de manera simbólica, corresponde a la igualdad $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

b. En las ecuaciones (2) reemplace f por f^{-1}. Al tomar g como f se muestra que las ecuaciones (1) están resueltas, y de esto de obtiene $(f^{-1})^{-1} = f$.

EJEMPLO 3 Uso de inversas para resolver ecuaciones

Muchas ecuaciones toman la forma $f(x) = 0$, donde f es una función. Si f es una función uno a uno, entonces la ecuación tiene $x = f^{-1}(0)$ como su única solución.

Solución: Si se aplica f^{-1} a ambos lados de $f(x) = 0$ se obtiene $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ muestra que $x = f^{-1}(0)$ es la única solución posible. Como $f(f^{-1}(0)) = 0$, $f^{-1}(0)$ es realmente una solución.

EJEMPLO 4 Restricción del dominio de una función

Puede suceder que una función f cuyo dominio sea el natural, que consiste en todos los números para los cuales la regla de definición tiene sentido, no sea uno a uno, y aún así pueda obtenerse una función g uno a uno al restringir el dominio de f.

Solución: Por ejemplo, se ha mostrado que la función $f(x) = x^2$ no es uno a uno, pero la función $g(x) = x^2$ *donde el dominio explícito dado como* $[0, \infty)$ sí lo es. Como $(\sqrt{x})^2 = x$ y $\sqrt{x^2} = x$, para $x \geq 0$, se sigue que $\sqrt{}$ es la inversa de la función cuadrática restringida g. A continuación se presenta un ejemplo más artificial. Sea $f(x) = |x|$ (con su dominio natural). Sea $g(x) = |x|$ en *donde el dominio está dado explícitamente como* $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$. La función g es uno a uno y por ende tiene una inversa.

EJEMPLO 5 Determinación de la inversa de una función

Para determinar la inversa de una función f uno a uno, resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x en términos de y para obtener $x = g(y)$. Entonces $f^{-1}(x) = g(x)$. Para ilustrar, *encuentre* $f^{-1}(x)$ *si* $f(x) = (x - 1)^2$, *para* $x \geq 1$.

Solución: Sea $y = (x-1)^2$, para $x \geq 1$. Entonces $x - 1 = \sqrt{y}$ y, por lo tanto, $x = \sqrt{y} + 1$. Se sigue que $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 2.4

Encuentre la inversa de la función dada en los problemas 1 a 6.

*1. $f(x) = 3x + 7$

2. $g(x) = 2x + 1$

3. $F(x) = \frac{1}{2}x - 7$

4. $f(x) = (4x - 5)^2$, para $x \geq \frac{5}{4}$

*5. $A(r) = \pi r^2$, para $r \geq 0$

6. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

En los problemas 7 a 10, determine si la función es uno a uno o no.

7. $f(x) = 5x + 12$

8. $g(x) = (5x + 12)^2$

9. $h(x) = (5x + 12)^2$, para $x \geq -\frac{12}{5}$

10. $F(x) = |x - 9|$

Resuelva cada ecuación de los problemas 11 y 12, mediante la determinación de una función inversa.

11. $(4x - 5)^2 = 23$, para $x \geq \frac{5}{4}$

12. $\frac{4}{3}\pi r^3 = 100$

13. **Función de demanda** La función

$$p = p(q) = \frac{1\,200\,000}{q} \qquad q > 0$$

expresa el sueldo p de una actriz, por película, como una función del número de películas q que protagoniza. Exprese el número de cintas en las que actúa, en términos de su sueldo por película. Muestre que la expresión es una función de p. Muestre que la función resultante es inversa a la función que especifica a p en términos de q.

14. **Función de oferta** La función de la oferta semanal de una libra de café, la mezcla de la casa, en una cafetería es

$$p = p(q) = \frac{q}{48} \qquad q > 0$$

donde q es la oferta de café en libras por semana, y p es el precio por libra. Exprese q como una función de p y demuestre la relación entre las dos funciones.

OBJETIVO

Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y la recta horizontal, y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

2.5 Gráficas en coordenadas rectangulares

El **sistema de coordenadas rectangulares** permite especificar y localizar puntos en un plano. También proporciona una manera geométrica de representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano, se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 2.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora se llamará a la recta horizontal el *eje x* y a la vertical el *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje x no necesariamente es la misma que la del eje y.

El plano en el que se encuentran los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o simplemente, *plano x, y*. Todos los puntos que contiene pueden marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto P en la figura 2.8(a), se trazan líneas perpendiculares al eje x y al eje y, que pasen por el punto P. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por lo tanto, P determina dos números, 4 y 2, entonces se dice que las **coordenadas rectangulares** de P están dadas por el **par ordenado** $(4, 2)$. La palabra *ordenado* es importante. En la figura 2.8(b), el punto correspondiente a $(4, 2)$ no es el mismo que para $(2, 4)$:

$$(4, 2) \neq (2, 4)$$

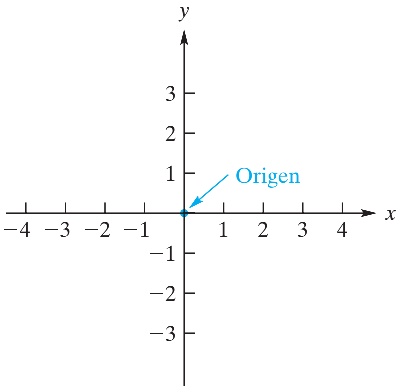


FIGURA 2.7 Ejes de coordenadas.

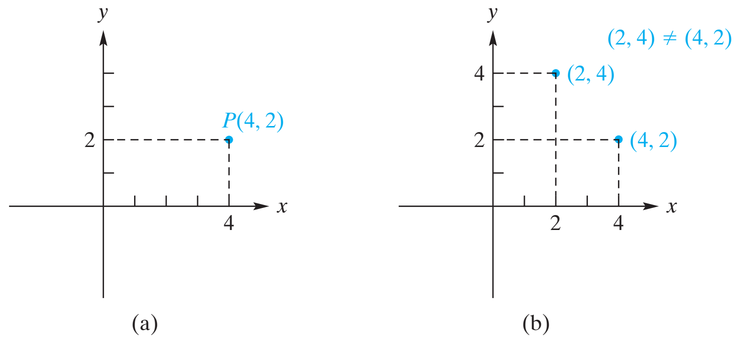


FIGURA 2.8 Coordenadas rectangulares.

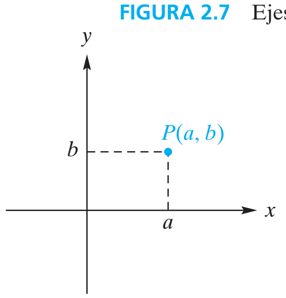


FIGURA 2.9 Coordenadas de P.

En general, si P es un punto cualquiera, entonces sus coordenadas rectangulares se determinan por un par ordenado de la forma (a, b). (Vea la figura 2.9.) Se llama a a la *abscisa*, o *coordenada x* de P, y a b la *ordenada* o *coordenada y* de P.

De esta manera, cada punto en un plano coordenado puede asociarse exactamente con un par ordenado (a, b) de números reales. Asimismo, es claro que cada par ordenado (a, b) de números reales, puede asociarse exactamente con un punto en ese plano. Como existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, se hace referencia al punto P con coordenada *x*, a, y coordenada *y*, b, simplemente como el punto (a, b), o como $P(a, b)$. Además, se usan las palabras *punto* y *par ordenado* en forma intercambiable.

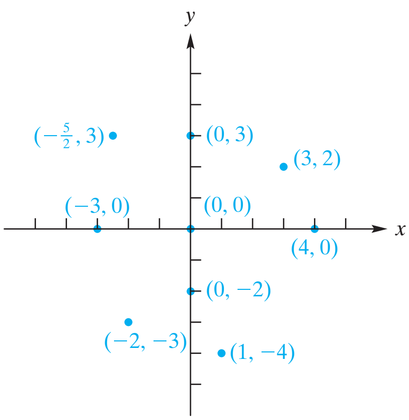


FIGURA 2.10 Coordenadas de puntos.

En la figura 2.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está localizado una unidad a la derecha del eje y, y cuatro unidades por debajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todo punto en el eje y es 0, y la coordenada y de todo punto sobre el eje x es 0.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (figura 2.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) en donde $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos sobre los ejes no están en ningún cuadrante.

Con el uso de un sistema de coordenadas rectangulares, pueden representarse geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3 \qquad \textbf{(1)}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y uno de y que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si $x = 1$, al sustituir en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

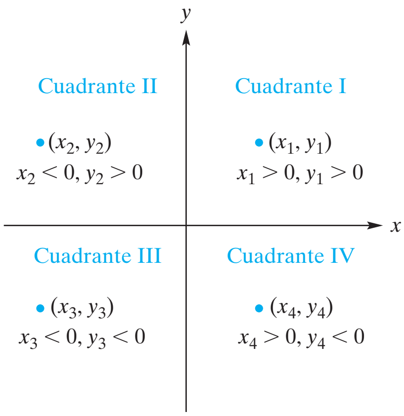


FIGURA 2.11 Cuadrantes.

x	y
-4	5
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5

(a)

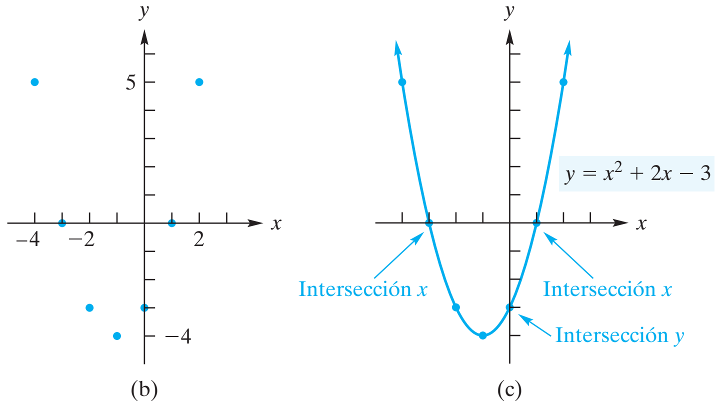


FIGURA 2.12 Graficando de $y = x^2 + 2x - 3$.

Así, una solución es $x = 1, y = 0$. De manera similar,

$$\text{si } x = -2 \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

y entonces $x = -2, y = -3$, también es una solución. Al seleccionar otros valores para x, se obtienen más soluciones [vea la figura 2.12(a)]. Debe quedar claro que existe una cantidad infinita de soluciones para la ecuación (1).

Cada solución da origen a un punto (x, y). Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 2.12(b) se han graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Como la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo es de interés la forma general de la gráfica. Por esta razón se grafican suficientes puntos de modo que pueda inferirse su forma. (Las técnicas de cálculo que se estudiarán en el capítulo 13 harán que esta "inferencia" sea mucho más clara.) Después, se unen esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, se obtiene la curva de la figura 2.12(c). Por supuesto, entre más puntos se marquen, mejor será la gráfica. Aquí se supone que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia sólo se dice que la intersección y es -3 y las intersecciones x son -3 y 1.

El punto $(0, -3)$ donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva interseca al eje x *se* llaman las *intersecciones x*. En general, se tiene la definición siguiente.

DEFINICIÓN

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero se determina que $y = 0$, y se resuelve para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero se establece que $x = 0$ y se resuelve para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, se desea determinar las intersecciones x. Sea $y = 0$, al resolver para x se obtiene

$$0 = x^2 + 2x - 3$$
$$0 = (x + 3)(x - 1)$$
$$x = -3, 1$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como se vio con anterioridad. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a 0, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a 0. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión dónde interseca la gráfica a los ejes.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

INTERSECCIONES Y GRÁFICA

Rachel ha ahorrado \$7250 para su educación universitaria. Planea gastar \$600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determine las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y haga el bosquejo de su gráfica.

Solución: Si $y = 0$, entonces

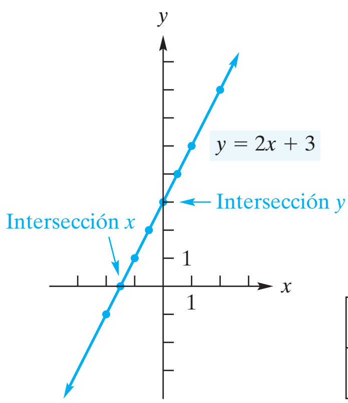
$$0 = 2x + 3 \quad \text{de modo que} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Así, la intersección x es $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 2.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	2	-2
y	3	0	4	2	5	1	7	-1

FIGURA 2.13 Gráfica de $y = 2x + 3$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

INTERSECCIONES Y GRÁFICA

El precio de admisión a un parque de diversiones es de \$24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de juegos x que el cliente utiliza, y el costo de admisión y para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

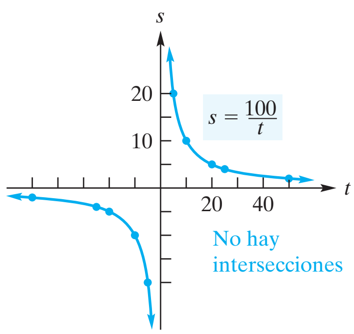
Determine las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \frac{100}{t}$, y haga un bosquejo de la gráfica.

Solución: Para trazar la gráfica, se marcará el eje horizontal con t y el eje vertical con s (figura 2.14). Como t no puede ser igual a 0 (la división entre 0 no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t, puesto que si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

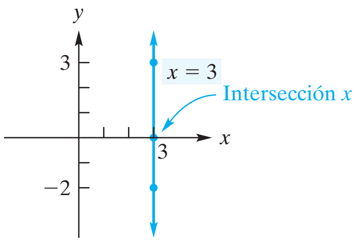
no tiene solución. Recuerde, la única forma en que una fracción puede ser 0 es con un numerador que valga 0. En la figura 2.14 se muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, donde k es una constante diferente de 0, corresponde a una *hipérbola rectangular*.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11



t	5	-5	10	-10	20	-20	25	-25	50	-50
s	20	-20	10	-10	5	-5	4	-4	2	-2

FIGURA 2.14 Gráfica de $s = \frac{100}{t}$.



x	3	3	3
y	0	3	−2

FIGURA 2.15 Gráfica de $x = 3$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

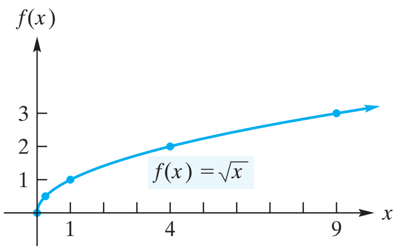
Determine las intersecciones de la gráfica de $x = 3$, y bosqueje la gráfica.

Solución: Puede pensarse en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y, si se escribe como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Porque $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3, 0)$. No existe intersección y, puesto que x no puede ser 0. (Vea la figura 2.15.) La gráfica es una recta vertical.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

Cada función f da lugar a una ecuación, a saber $y = f(x)$, la cual es un caso especial de las ecuaciones que se han estado graficando. Su gráfica consiste en todos los puntos $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. Los ejes verticales pueden etiquetarse como y o $f(x)$, donde f es el nombre de la función, y se denomina **eje de los valores de la función**. *Suele etiquetarse el eje horizontal con la variable independiente, pero tome en cuenta que los economistas etiquetan el eje vertical con la variable independiente.* Observe que al graficar una función se obtienen las "soluciones" (x, y) que hacen verdadera la función $y = f(x)$. Para cada x en el dominio de f, se tiene exactamente una y, que se consiguió al evaluar $f(x)$. El par resultante $(x, f(x))$ es un punto sobre la gráfica y éstos son los únicos puntos sobre la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

Una observación geométrica útil es que la gráfica de una función tiene cuando mucho un punto de intersección con alguna recta vertical en el plano. Recuerde que la ecuación de una recta vertical necesariamente es de la forma $x = a$, donde a es una constante. Si a no está en el dominio de la función f, entonces $x = a$ no intersecará la gráfica de $y = f(x)$. Si a está en el dominio de la función f entonces $x = a$ intersecará la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y sólo ahí. Y viceversa, si un conjunto de puntos en el plano tiene la propiedad de que cualquier recta vertical interseca al conjunto al menos una vez, entonces el conjunto de puntos es en realidad la gráfica de una función. (El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales a que presentan la propiedad de que la línea $x = a$ interseca el conjunto de puntos dado, y de que para tal a el valor funcional correspondiente es la coordenada y del único punto de intersección de la línea $x = a$ y el conjunto de puntos dado.) Ésta es la base de la **prueba de la recta vertical** que se analizará después del ejemplo 7.



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 2.16 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Haga la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: La gráfica se muestra en la figura 2.16. Se marca el eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$, no ± 3. Tampoco pueden elegirse valores negativos de x, puesto que no se desean números imaginarios para $\sqrt{x}$. Esto es, debe tenerse $x \geq 0$. Ahora se considerarán las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$ o $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, las intersecciones x y y son las mismas, a saber, $(0, 0)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Brett rentó una bicicleta en una tienda de alquiler, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas a lo largo de una pista, y después regresó por el mismo camino. Grafique la función tipo valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Grafique $p = G(q) = |q|$.

Solución: Se usa la variable independiente q para marcar el eje horizontal. El eje de los valores funcionales puede marcarse como $G(q)$ o p (vea la figura 2.17). Note que las intersecciones q y p se ubican en el mismo punto $(0, 0)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

DEFINICIÓN

Una **raíz** de una función f es cualquier valor de x para el cual $f(x) = 0$.

q	0	1	-1	3	-3	5	-5
p	0	1	1	3	3	5	5

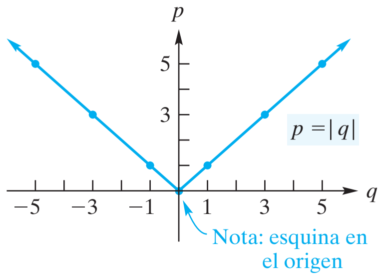


FIGURA 2.17 Gráfica de $p = |q|$.

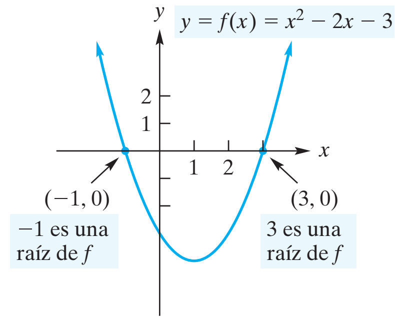


FIGURA 2.18 Raíces de una función.

Por ejemplo, una raíz de la función $f(x) = 2x - 6$ es 3 porque $f(3) = 2(3) - 6 = 0$. Aquí, 3 se llama raíz *real*, puesto que es un número real. Se observa que las raíces de f pueden encontrarse al establecer $f(x) = 0$ y resolver para x. Así, las raíces de una función son precisamente las intersecciones x de su gráfica, ya que es en estos puntos donde $f(x) = 0$.

Para ilustrarlo, en la figura 2.18 se muestra la gráfica de la función de $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$. Las intersecciones x de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son raíces de f, o de manera equivalente, -1 y 3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

TECNOLOGÍA

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora graficadora, primero se expresa la ecuación en la forma $f(x) = 0$:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Después se grafica f y luego se estiman las intersecciones x, ya sea con el uso de zoom y trace o por medio de la operación de extracción de raíces (vea la figura 2.19). Observe que se define la ventana para $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 5$.

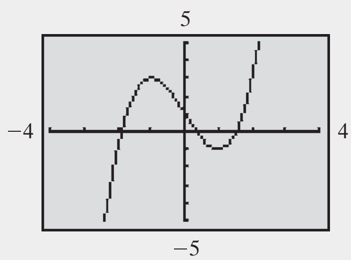


FIGURA 2.19 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente -1.88, 0.35 y 1.53.

La figura 2.20 muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que al número de entrada x en el eje horizontal le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

A partir de la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f consiste en todos los números reales. Observe que el conjunto de todos los puntos en la coordenada y en la gráfica se compone del conjunto de todos los números no negativos.

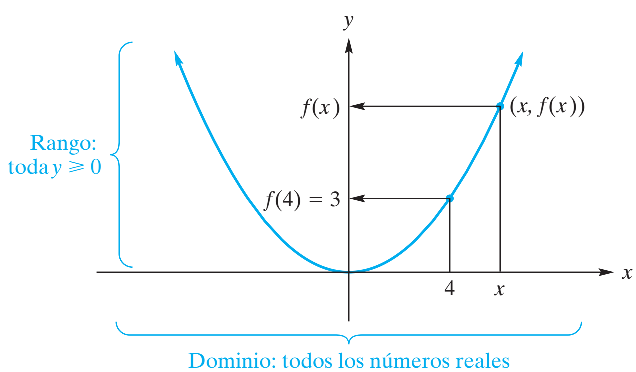


FIGURA 2.20 Dominio, rango y valores de la función.

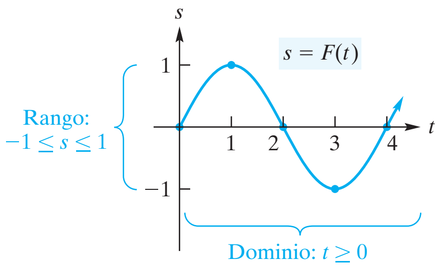


FIGURA 2.21 Dominio, rango y valores funcionales.

Así, el rango de f es toda $y \geq 0$. Esto muestra que puede hacerse una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función al examinar su gráfica. *En general, el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica, y el rango son todos los valores y en esa gráfica.* Por ejemplo, la figura 2.16 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. A partir de la figura 2.17 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \geq 0$.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 2.21 muestra la gráfica de una función F. Se supone que la gráfica se repite indefinidamente a la derecha de 4. Entonces el dominio de F es toda $t \geq 0$. El rango es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores que toma la función son

$$F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad F(2) = 0 \quad F(3) = -1$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

TECNOLOGÍA

Con el uso de una calculadora graficadora puede estimarse el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 2.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$, y el rango está compuesto de todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Puede estimarse el valor mínimo para y, ya sea con el uso de trace y zoom o al seleccionar la operación “minimum”.

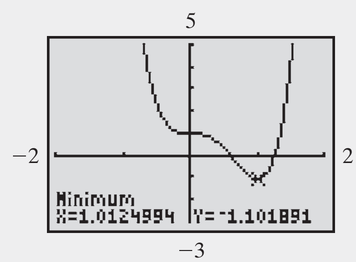


FIGURA 2.22 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Los clientes pagan $0.53 por termia (1 millón de calorías) para un consumo que va de 0 a 70 termias, y $0.74 por cada termia por encima de 70. Grafique la función definida por partes que representa el costo mensual de t termias de gas.

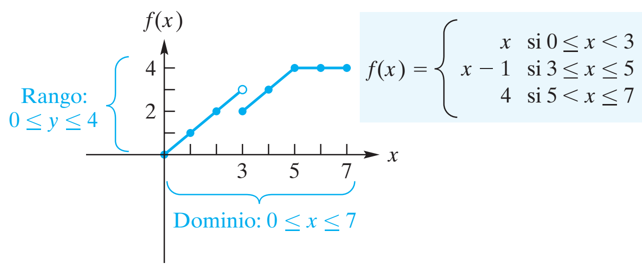
EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Grafique la función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 4 & \text{si } 5 < x \leq 7 \end{cases}$$

Solución: El dominio de f es $0 \leq x \leq 7$. Se presenta la gráfica en la figura 2.23, donde el *punto que no está relleno* significa que éste *no* se incluye en la gráfica. Observe que el rango de f se compone de todos los números reales y tales que $0 \leq y \leq 4$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 35



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 2.23 Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil de determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 2.24(a) observe que la x dada está asociada con *dos* valores de y: y_1 y y_2. Por lo tanto, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical**. Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en dos puntos al menos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando no puede dibujarse dicha recta vertical, la curva *sí* es la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 2.24 no representan funciones de x, pero las de la figura 2.25 sí.

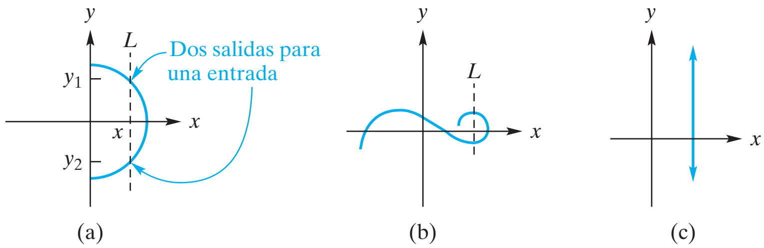


FIGURA 2.24 y no es una función de x.

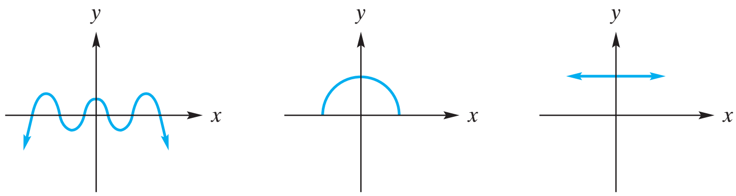


FIGURA 2.25 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de x

Grafique $x = 2y^2$.

Solución: Aquí es más fácil seleccionar valores de y, y después encontrar los correspondientes a x. En la figura 2.26 se muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 39

Después de haber determinado si una curva es la gráfica de una función, quizá mediante la prueba de la recta vertical, existe una forma fácil de decir si la función en cuestión es uno a uno. En la figura 2.20 se observa que $f(4) = 3$ y, en apariencia, también $f(-4) = 3$. Como los valores de entrada diferentes -4 y 4 producen la misma salida, la función no es uno a uno. Visto de otra manera, se tiene la siguiente regla general, llamada la **prueba de la recta horizontal**. Si puede dibujarse una recta *horizontal* L que interseca la gráfica de una función en dos puntos al menos, entonces la función *no* es uno a uno. Cuando no se puede dibujar tal recta horizontal, la función es uno a uno.

x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	-1	2	-2	3	-3

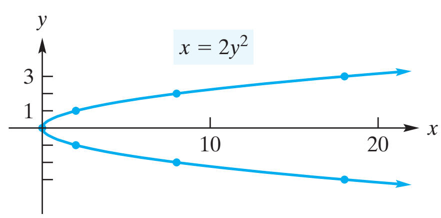


FIGURA 2.26 Gráfica de $x = 2y^2$.

Problemas 2.5

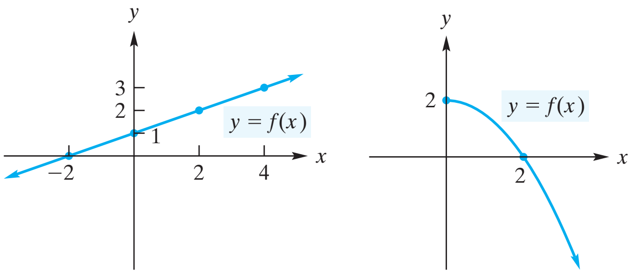
En los problemas 1 y 2, localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(2, 7), (8, -3), (-\frac{1}{2}, -2), (0, 0)$

2. $(-4, 5), (3, 0), (1, 1), (0, -6)$

3. En la figura 2.27(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(2), f(4)$ y $f(-2)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

4. En la figura 2.27(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0)$ y $f(2)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

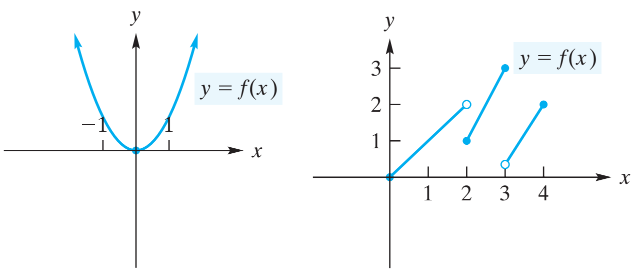


(a) (b)

FIGURA 2.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

***5.** En la figura 2.28(a) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(1)$ y $f(-1)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?

6. En la figura 2.28(b) se muestra la gráfica de $y = f(x)$.
(a) Estime $f(0), f(2), f(3)$ y $f(4)$.
(b) ¿Cuál es el dominio de f?
(c) ¿Cuál es el rango de f?
(d) ¿Cuál es una raíz real de f?



(a) (b)

FIGURA 2.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas 7 a 20, determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga su bosquejo. Con base en la gráfica, responda: ¿es y una función de x? Si es así, ¿se trata de una función uno a uno? ¿Cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$

8. $y = x + 1$

***9.** $y = 3x - 5$

10. $y = 3 - 2x$

***11.** $y = x^4$

12. $y = \frac{2}{x^2}$

***13.** $x = 0$

14. $y = 4x^2 - 16$

15. $y = x^3$

16. $x = -9$

17. $x = -|y|$

18. $x^2 = y^2$

19. $2x + y - 2 = 0$

20. $x + y = 1$

En los problemas 21 a 34, grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $s = f(t) = 4 - t^2$

22. $f(x) = 5 - 2x^2$

23. $y = h(x) = 3$

24. $g(s) = -17$

25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$

26. $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$

27. $f(t) = -t^3$

28. $p = h(q) = 1 + 2q + q^2$

***29.** $s = f(t) = \sqrt{t^2 - 9}$

30. $F(r) = -\frac{1}{r}$

***31.** $f(x) = |2x - 1|$

32. $v = H(u) = |u - 3|$

33. $F(t) = \frac{16}{t^2}$

34. $y = f(x) = \frac{2}{x - 4}$

En los problemas 35 a 38, grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

***35.** $c = g(p) = \begin{cases} p + 1 & \text{si } 0 \le p < 7 \\ 5 & \text{si } p \ge 7 \end{cases}$

36. $\phi(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 20 - x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \ge 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 5 \\ x - 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

***39.** ¿Cuáles de las gráficas de la figura 2.29 representan funciones de x?

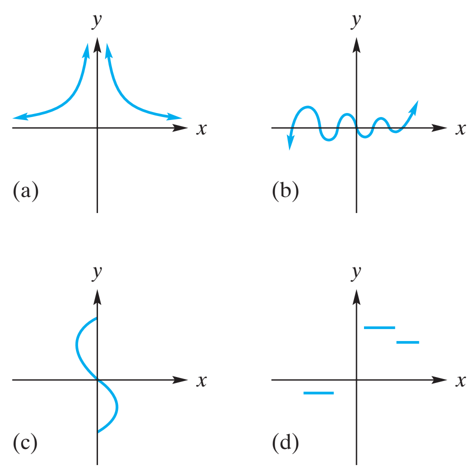


FIGURA 2.29 Diagrama para el problema 39.

40. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 2.30 representan funciones de x uno a uno?

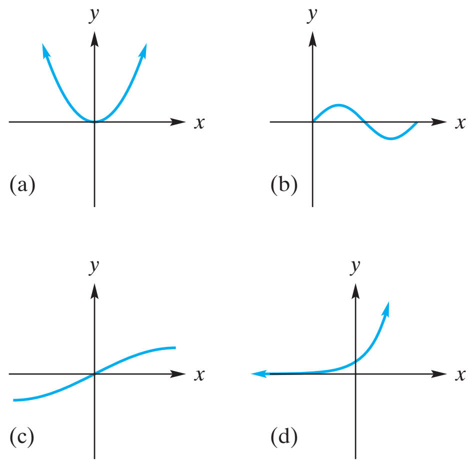


FIGURA 2.30 Diagrama para el problema 40.

41. Pagos de una deuda Tara tiene cargos por \$2400 en sus tarjetas de crédito. Planea liquidarlas por medio de pagos mensuales de \$275. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, después de haber hecho x pagos, e identifique las intersecciones con los ejes.

42. Determinación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de cierto platillo a lo largo del día. De 6:00 p.m. a 8:00 p.m., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 a.m. hasta las 2:30 p.m., pagan la mitad del precio. De 2:30 p.m. hasta las 4:30 p.m., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 p.m. hasta las 6:00 p.m., obtienen \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 p.m. hasta el cierre, a las 10:00 p.m., se concede a los clientes \$5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo del platillo a lo largo del día para un precio de cena de \$18.

43. Programa de oferta De acuerdo con el siguiente programa de oferta (vea el ejemplo 6 de la sección 2.1), grafique cada pareja cantidad-precio; seleccione el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de oferta.* Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida a medida que se incrementa el precio?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad ofrecida?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	\$10
100	20
150	30
190	40
210	50

44. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda.* Indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Grafique cada par precio-cantidad; seleccione el eje vertical para los precios posibles, y una los puntos con una curva suave. De esta manera, se aproximan los puntos entre los datos dados. El resultado se llama *curva de demanda.* Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (es decir, ¿qué le pasa a la cantidad demandada a medida que el precio disminuye?). ¿Es el precio por unidad una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	Precio por unidad, p
5	\$20
10	10
20	5
25	4

45. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000 & \text{si } 0 \le x < 7 \\ -100x + 1700 & \text{si } 7 \le x < 14 \\ -100x + 2400 & \text{si } 14 \le x < 21 \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el tiempo x.

46. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un patrón de letras, después se le pidió que recordara tantas letras como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de patrones con x letras. La gráfica de los resultados se ajusta aproximadamente a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{si } 4 < x \le 5 \\ 4.5 & \text{si } 5 < x \le 12 \end{cases}$$

Grafique esta función.[6]

En los problemas 47 a 50, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

47. $5x^3 + 7x = 3$

48. $x^2(x - 3) = 2x^4 - 1$

49. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2$

50. $(x - 2)^3 = x^2 - 3$

En los problemas 51 a 54, utilice una calculadora graficadora para determinar todas las raíces reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

51. $f(x) = x^3 + 5x + 7$

52. $f(x) = 2x^4 - 1.5x^3 + 2$

53. $g(x) = x^4 - 1.7x^2 + 2x$

54. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1$

En los problemas 55 a 57, utilice una calculadora graficadora para determinar (a) el valor máximo de $f(x)$ y (b) el valor mínimo de $f(x)$ para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

55. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10 \quad 1 \le x \le 4$

[6] Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus. *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

56. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1 \quad -1 \leq x \leq 1$

57. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5} \quad 3 \leq x \leq 5$

58. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos lugares decimales.

59. Con base en la gráfica de $f(x) = 1 - 4x^3 - x^4$, encuentre (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) las raíces reales de f. Redondee los valores a dos lugares decimales.

60. De la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1.1}{3.8 + x^{2/3}}$, encuentre (a) el rango de f y (b) las intersecciones. (c) ¿f tiene raíces reales? Redondee los valores a dos lugares decimales.

61. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \leq x \leq 5$. Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

2.6 Simetría

OBJETIVO

Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen, y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección se analizarán varias ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría.* En un capítulo posterior se verá que el cálculo es de *gran* utilidad en la graficación, pues ayuda a determinar la forma de la gráfica. Proporciona técnicas muy poderosas para establecer si una curva "ondula" o no entre los puntos.

Considere la gráfica de $y = x^2$ de la figura 2.31. La parte que se ubica a la izquierda del eje y es la reflexión sobre dicho eje de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (a, b) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-a, b)$ también debe pertenecer a la gráfica. Se dice que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

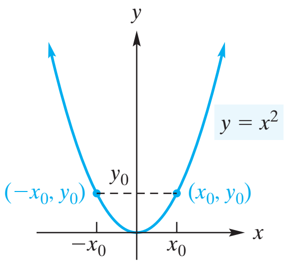


FIGURA 2.31 Simetría con respecto al eje y.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y*** si y sólo si $(-a, b)$ está en la gráfica cuando (a, b) lo está.

EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje y

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje y.

Solución: Suponga que (a, b) es *cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces

$$b = a^2$$

Debe mostrarse que las coordenadas de $(-a, b)$ satisfacen $y = x^2$. Pero

$$(-a)^2 = a^2 = b$$

muestra que esto es cierto. Así se ha *probado* con álgebra simple lo que la imagen de la gráfica permitía suponer: La gráfica de $y = x^2$ *es* simétrica con respecto al eje y.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

Cuando se prueba la simetría en el ejemplo 1, (a, b) pudo haber sido cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante se escribirá (x, y) para hacer referencia a cualquier punto en la gráfica. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, resulta una ecuación equivalente.

Se muestra otro tipo de simetría mediante la gráfica de $x = y^2$ en la figura 2.32. Aquí la parte de la gráfica que se localiza debajo del eje x es la reflexión respecto al eje x, de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a ella. Se dice que es *simétrica con respecto al eje x*.

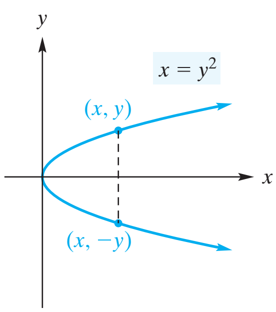


FIGURA 2.32 Simetría con respecto al eje x.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** si y sólo si $(x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

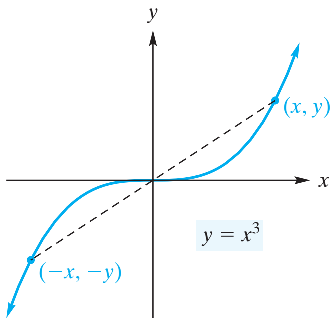


FIGURA 2.33 Simetría con respecto al origen.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, al aplicar esta prueba a la gráfica de $x = y^2$, se observa que $(-y)^2 = x$ si y sólo si $y^2 = x$, simplemente porque $(-y)^2 = y^2$. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Se ilustra un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, mediante la gráfica de $y = x^3$ (figura 2.33). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a ella.

DEFINICIÓN

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y sólo si $(-x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, si se aplica esta prueba a la gráfica de $y = x^3$, que se mostró en la figura 2.33, se obtiene

$$-y = (-x)^3$$
$$-y = -x^3$$
$$y = x^3$$

donde las tres ecuaciones son equivalentes, en particular la primera y la última. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

En la tabla 2.1 se resumen las pruebas para la simetría. Cuando se sabe que una gráfica tiene simetría, puede hacerse su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

TABLA 2.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. *Después determine las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Simetría *Con respecto al eje x:* Al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al eje y: Al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$, se obtiene

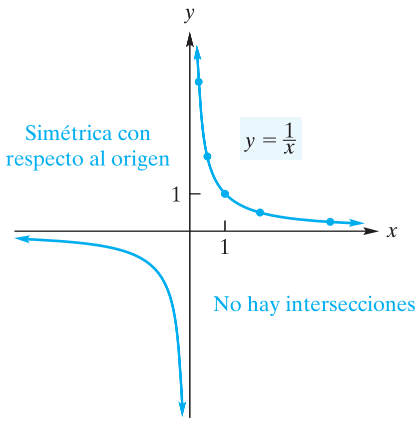
$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = -\frac{1}{x}$$

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje y.

Con respecto al origen: Al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{esto es} \quad y = \frac{1}{x}$$

que es equivalente a la ecuación dada. En consecuencia, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al origen.



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 2.34 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

Intersecciones Como x no puede ser 0, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Análisis Como no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x > 0$, sólo se obtienen puntos en el primer cuadrante. En la figura 2.34 se muestra una parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, esa parte se refleja con respecto al origen para obtener la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encuentre las intersecciones y haga el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* Al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por lo tanto, la gráfica *no* es simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: Al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad y = 1 - x^4$$

que es equivalente a la ecuación dada. Por ende, la gráfica *sí* es simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: Al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$, se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4 \quad \text{esto es} \quad -y = 1 - x^4 \quad \text{esto es} \quad y = -1 + x^4$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no* es simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x se establece que $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= 0 \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &= 0 \\ (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) &= 0 \\ x = 1 \quad &\text{o} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, se determina que $x = 0$. Entonces $y = 1$, por lo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Análisis Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, puede hacerse el bosquejo de la gráfica *completa* mediante la simetría con respecto al eje y (figura 2.35).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

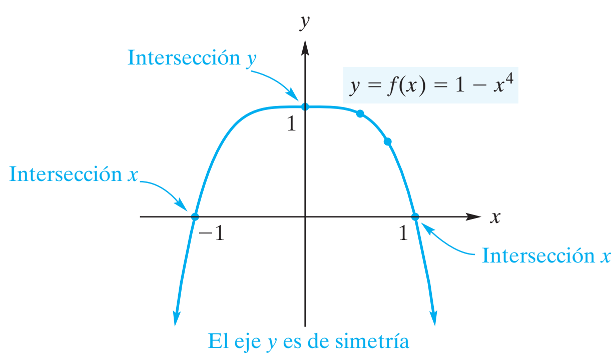


FIGURA 2.35 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

La única *función* cuya gráfica es simétrica con respecto al eje x es la función constante 0.

La función constante $f(x) = 0$, para toda x, puede identificarse fácilmente como simétrica con respecto al eje x. En el ejemplo 3, se mostró que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Para cualquier *función* f, suponga que la gráfica de $y = f(x)$ tiene simetría con el eje x. De acuerdo con la definición, esto significa que también se tiene que $-y = f(x)$. Lo anterior indica que para una x arbitraria en el dominio de f se tiene $f(x) = y$ y $f(x) = -y$. Puesto que para una función cada valor de x determina un solo valor de y, se debe tener que $y = -y$, y esto implica $y = 0$. Como x es arbitraria, se sigue que si la gráfica de una *función* es simétrica con respecto al eje x, entonces la función debe ser la constante 0.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Examine la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$, *para las intersecciones y simetrías. Haga el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y de esta manera, $y = \pm 2$. Por lo tanto, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Con el eje x:* Al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como se obtiene la ecuación original, puede afirmarse que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: Al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

de nuevo se obtiene la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje y.

Con el origen: Al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$, se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36 \quad \text{esto es} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

como ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Análisis En la figura 2.36 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave. Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación mediante la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen puede obtenerse el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y) puede obtenerse la gráfica completa.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

Este hecho puede ayudar a ahorrar tiempo durante la verificación de las simetrías.

En el ejemplo 4, la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir**.

x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

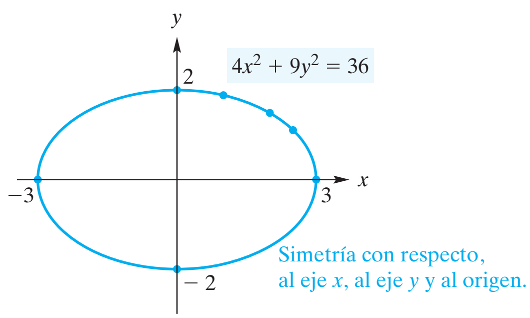


FIGURA 2.36 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

EJEMPLO 5 Simetría con respecto a la recta $y = x$

DEFINICIÓN

*Una gráfica es **simétrica con respecto a la recta** $y = x$ si y sólo si (b, a) está en la gráfica cuando (a, b) lo está.*

Otra forma de establecer la definición es decir que al intercambiar los papeles de x y y en la ecuación dada se obtiene una ecuación equivalente.

Use la definición anterior para mostrar que $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto a la línea $y = x$.

Solución: Al intercambiar los papeles de x y y se obtiene $y^2 + x^2 = 1$, lo cual es equivalente a $x^2 + y^2 = 1$. Así que $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica con respecto a $y = x$.

El punto con coordenadas (b, a) es la reflexión sobre (imagen especular en) la línea $y = x$ del punto (a, b). Si f es una función uno a uno, $b = f(a)$ si y sólo si $a = f^{-1}(b)$. Así que la gráfica de f^{-1} es la reflexión (imagen especular) en la línea $y = x$ de la gráfica de f. Es interesante notar que para *cualquier* función f puede obtenerse la reflexión de la gráfica de f. Sin embargo, la imagen resultante puede no ser la gráfica de una función. Para que esta imagen reflejada sea la gráfica de una función, debe pasar la prueba de la recta vertical. No obstante, las rectas verticales y horizontales son reflejos, una de la otra, sobre la línea $y = x$, y se observa que para que la imagen reflejada de la gráfica de f pase la prueba de la recta vertical, la gráfica de f debe pasar la prueba de la línea horizontal. Ocurre esto último precisamente si f es uno a uno, que a su vez sucede si y sólo si f tiene una inversa.

EJEMPLO 6 Simetría y funciones inversas

Bosqueje la gráfica de $g(x) = 2x + 1$ y su inversa en el mismo plano.

Solución: Como se estudiará a detalle en el capítulo 3, la gráfica de g es la línea recta con pendiente 2 e intersección de y. Esta línea, la recta $y = x$, y el reflejo de $y = 2x + 1$ en $y = x$ se muestran en la figura 2.37.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

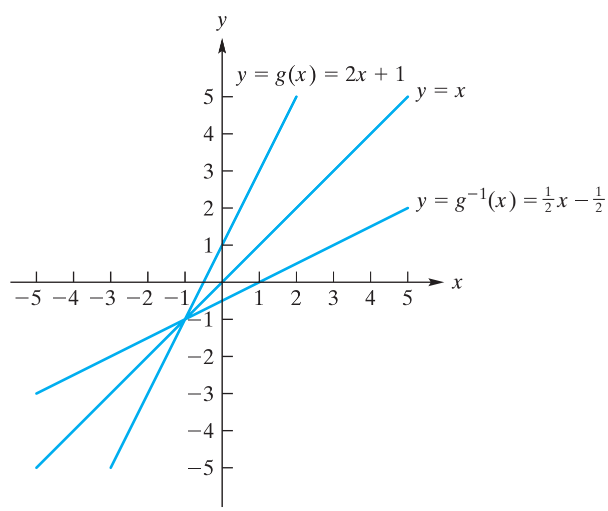


FIGURA 2.37 Gráfica de $y = g(x)$ y $y = g^{-1}(x)$.

Problemas 2.6

En los problemas 1 a 16, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a la línea $y = x$. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$

2. $y = f(x) = x^2 - 4$

3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$

4. $x = y^3$

5. $16x^2 - 9y^2 = 25$

6. $y = 57$

***7.** $x = -2$

8. $y = |2x| - 2$

***9.** $x = -y^{-4}$

10. $y = \sqrt{x^2 - 25}$

11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$

12. $x^2 + xy + y^3 = 0$

13. $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 1}$

14. $x^2 + xy + y^2 = 0$

15. $y = \dfrac{3}{x^3 + 8}$

16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$

En los problemas 17 a 24, determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a la línea $y = x$. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $3x + y^2 = 9$

18. $x - 1 = y^4 + y^2$

***19.** $y = f(x) = x^3 - 4x$

20. $3y = 5x - x^3$

21. $|x| - |y| = 0$

22. $x^2 + y^2 = 16$

***23.** $9x^2 + 4y^2 = 25$

24. $x^2 - y^2 = 4$

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 5 - 1.96x^2 - \pi x^4$ es simétrica con respecto al eje *y*, y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$, y (c) el rango de *f*. Redondee todos los valores a dos lugares decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje *y*, y después grafique la función. Determine todas las raíces reales de *f*. Redondee sus respuestas a dos lugares decimales.

***27.** Bosqueje la gráfica de $f(x) = -3x + 2$ y su inversa en el mismo plano.

2.7 Traslaciones y reflexiones

OBJETIVO

Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas, y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

Hasta ahora, el enfoque de este texto en relación con las gráficas se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier posible simetría. Pero esta técnica no es necesariamente la ruta predilecta. Más adelante se analizarán gráficas con otras técnicas. Sin embargo, algunas funciones y las gráficas a las que están asociadas aparecen con tanta frecuencia, que resulta útil memorizarlas. En la figura 2.38 se muestran seis de tales funciones.

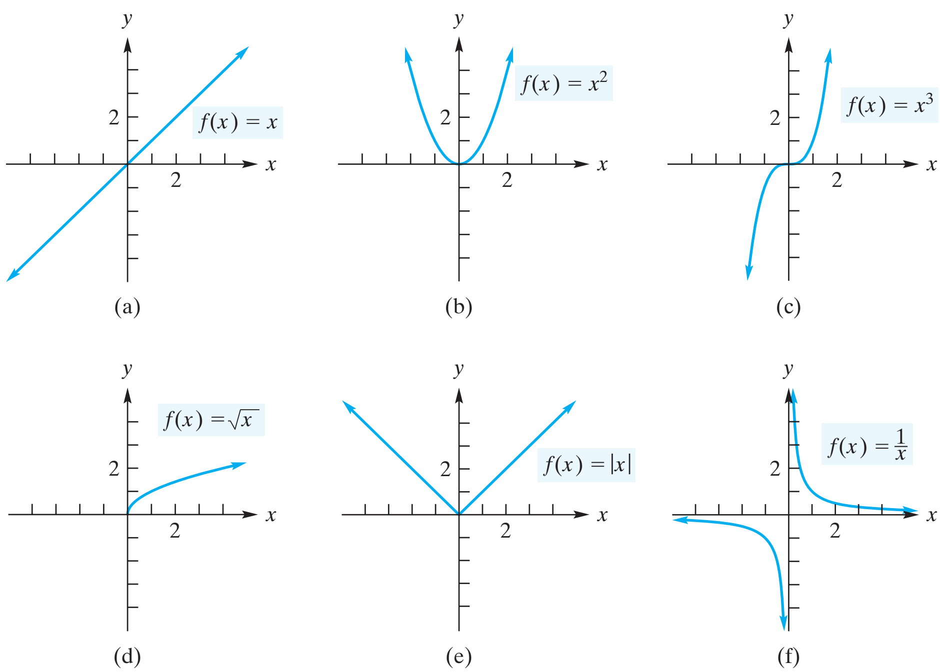


FIGURA 2.38 Funciones utilizadas con frecuencia.

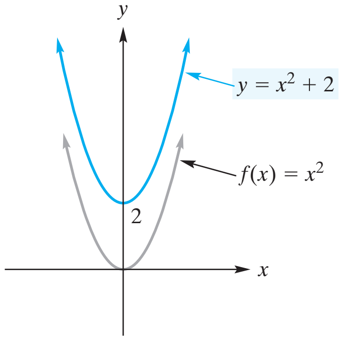


FIGURA 2.39 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, puede obtenerse la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de la función original, mediante una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, puede utilizarse la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar $y = x^2 + 2$. Observe que $y = f(x) + 2$. Por lo tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y = x^2 + 2$, es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de $f(x) = x^2$. Esto significa que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es simplemente la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba (vea la figura 2.39). Se dice que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x) = x^2$. La tabla 2.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

TABLA 2.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	**Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación**
$y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
$y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
$y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
$y = cf(x) \quad c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor c
$y = cf(x) \quad c \quad 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor c

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Haga el bosquejo de la gráfica de $y = (x - 1)^3$.

Solución: Se observa que $(x - 1)^3$ es x^3 en donde x ha sido reemplazada por $x - 1$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$, que tiene la forma $f(x - c)$, donde $c = 1$. De la tabla 2.2, la gráfica de $y = (x - 1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha (vea la figura 2.40).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

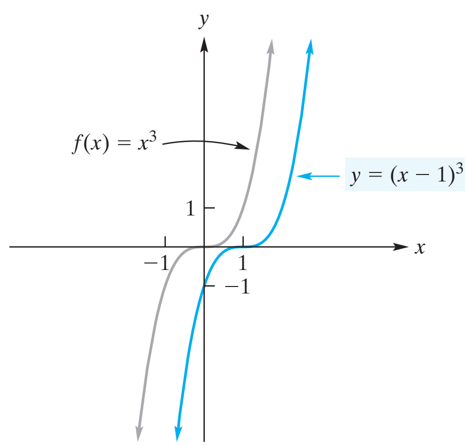


FIGURA 2.40 Gráfica de $y = (x - 1)^3$.

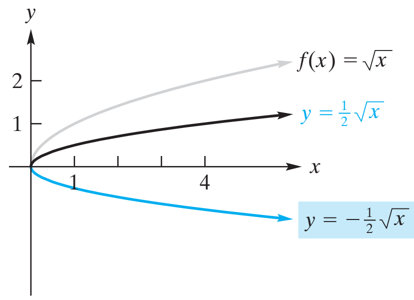


FIGURA 2.41 Para graficar $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Bosqueje la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: Este problema puede resolverse en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, donde $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verticalmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 2.2; vea la figura 2.41). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 2.2; vea la figura 2.41).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Problemas 2.7

En los problemas 1 a 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 2.38 y las técnicas de transformación para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^3 - 1$

2. $y = -x^2$

***3.** $y = \dfrac{1}{x-2}$

4. $y = \sqrt{x+2}$

***5.** $y = \dfrac{2}{3x}$

6. $y = |x| - 2$

7. $y = |x+1| - 2$

8. $y = -\dfrac{1}{3}\sqrt{x}$

9. $y = 1 - (x-1)^2$

10. $y = (x-1)^2 + 1$

11. $y = \sqrt{-x}$

12. $y = \dfrac{5}{2-x}$

En los problemas 13 a 16, describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = -2f(x+3) + 2$

14. $y = f(x+3) - 4$

15. $y = f(-x) - 5$

16. $y = f(3x)$

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[5]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$, para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = k\sqrt[3]{x}$ para $k = 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe la contracción y el alargamiento verticales comparados con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la que se obtiene por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = \sqrt[3]{x}$ con respecto al eje x.

2.8 Repaso

Términos y símbolos importantes

		Ejemplos
Sección 2.1	**Funciones**	
	función dominio rango variable independiente	Ej. 2, p. 78
	variable dependiente valor funcional, $f(x)$	Ej. 3, p. 79
	cociente de diferencia, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Ej. 4, p. 79
	función de demanda función de oferta	Ej. 5, Ej. 6, p. 80
Sección 2.2	**Funciones especiales**	
	función constante función polinomial (lineal y cuadrática)	Ej. 1, Ej. 2, p. 82, 83
	función racional función definida por partes	Ej. 3, Ej. 4, p. 83
	valor absoluto, $\lvert x \rvert$ factorial, $r!$	Ej. 5, Ej. 6, p. 84

Sección 2.3	**Combinaciones de funciones**	
	$f+g$ $f-g$ fg f/g función compuesta, $f\circ g$	Ej. 1, Ej. 2, p. 87, 88
Sección 2.4	**Funciones inversas**	
	función inversa, f^{-1} función uno a uno	Ej. 1, p. 92
Sección 2.5	**Gráficas en coordenadas rectangulares**	
	sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas	
	origen plano x, y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto	
	cuadrante gráfica de una ecuación intersección x intersección y	Ej. 1, p. 96
	gráfica de una función eje de valores de la función raíces de una función	Ej. 4, p. 97
	prueba de la recta vertical prueba de la recta horizontal	Ej. 8, p. 100
Sección 2.6	**Simetría**	
	simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y	Ej. 1, p. 103
	simetría con respecto al origen simetría con respecto a $y=x$	Ej. 6, p. 107
Sección 2.7	**Traslaciones y reflexiones**	
	traslaciones horizontales y verticales	Ej. 1, p. 109
	alargamiento y reflexión	Ej. 2, p. 110

Resumen

Una función f es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida $f(x)$ a cada número de entrada x. Por lo general, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para conseguir un valor particular $f(a)$ de la función, se reemplaza cada x en la ecuación por a.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada, y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se especifique lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son las funciones constantes, las funciones polinomiales y las funciones racionales. Una función que está definida por más de una expresión se denomina función definida por partes.

Una función tiene una inversa si y sólo si es uno a uno.

En economía, las funciones de oferta (o demanda) indican una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

Un sistema de coordenadas rectangulares permite representar de manera geométrica ecuaciones con dos variables, en particular aquellas que surgen de funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Se grafica un número suficiente de puntos y se conectan (donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea evidente. Los puntos donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al determinar y igual a 0 y resolver para x; una intersección y se encuentra al determinar x igual a 0 y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y=f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Las raíces de f son los valores de x para los cuales $f(x)=0$. Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar su dominio y rango.

Para verificar que una gráfica representa una función se utiliza la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar la gráfica de una función en más de un punto.

Para verificar que una función es uno a uno, se utiliza la prueba de la recta horizontal. Una recta horizontal no puede cortar la gráfica de una función uno a uno en más de un punto. Cuando la función pasa la prueba de la recta horizontal, la gráfica de la inversa puede obtenerse al reflejar la gráfica original en la línea $y=x$.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto de reflexión (imagen especular) permite bosquejar la gráfica con menos puntos que los que serían necesarios de otro modo. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto a $y=x$	Intercambie x y y en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 2.2 de la sección 2.7.

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

Proporcione el dominio de cada función de los problemas 1 a 6.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 5}$
2. $g(x) = x^4 + 5|x - 1|$
3. $F(t) = 7t + 4t^2$
4. $G(x) = 18$
5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$
6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s - 5}}{4}$

En los problemas 7 a 14, encuentre los valores de la función para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7;\ f(0),\ f(-3),\ f(5),\ f(t)$
8. $h(x) = 7;\ h(4), h\left(\dfrac{1}{100}\right), h(-156), h(x + 4)$
9. $G(x) = \sqrt[4]{x - 3};\ G(3), G(19), G(t + 1), G(x^3)$
10. $F(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4};\ F(-1), F(0), F(5), F(x + 3)$
11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u + 4}}{u};\ h(5), h(-4), h(x), h(u - 4)$
12. $H(s) = \dfrac{(s - 4)^2}{3};\ H(-2), H(7), H\left(\dfrac{1}{2}\right), H(x^2)$
13. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ 4 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases};$
 $f(4),\ f(-2),\ f(0),\ f(1)$
14. $f(q) = \begin{cases} -q + 1 & \text{si } -1 \leq q < 0 \\ q^2 + 1 & \text{si } 0 \leq q < 5 \\ q^3 - 99 & \text{si } 5 \leq q \leq 7 \end{cases};$
 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right),\ f(0),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right),\ f(5),\ f(6)$

En los problemas 15 a 18 encuentre (a) $f(x + h)$ y (b) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$
16. $f(x) = 11x^2 + 4$
17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$
18. $f(x) = \dfrac{7}{x + 1}$
19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, encuentre lo siguiente:
 (a) $(f + g)(x)$
 (b) $(f + g)(4)$
 (c) $(f - g)(x)$
 (d) $(fg)(x)$
 (e) $(fg)(1)$
 (f) $\dfrac{f}{g}(x)$
 (g) $(f \circ g)(x)$
 (h) $(f \circ g)(5)$
 (i) $(g \circ f)(x)$
20. Si $f(x) = -x^2$ y $g(x) = 3x - 2$, determine lo siguiente:
 (a) $(f + g)(x)$
 (b) $(f - g)(x)$
 (c) $(f - g)(-3)$
 (d) $(fg)(x)$
 (e) $\dfrac{f}{g}(x)$
 (f) $\dfrac{f}{g}(2)$
 (g) $(f \circ g)(x)$
 (h) $(g \circ f)(x)$
 (i) $(g \circ f)(-4)$

En los problemas 21 a 24, encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ g(x) = x + 1$
22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{4},\ g(x) = \sqrt{x}$
23. $f(x) = \sqrt{x + 2},\ g(x) = x^3$
24. $f(x) = 2,\ g(x) = 3$

En los problemas 25 y 26, encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y, al origen y a $x = y$. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 3x - x^3$
26. $\dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 4$

En los problemas 27 y 28, encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 - x^2$
28. $y = 3x - 7$

En los problemas 29 a 32, trace la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$
30. $f(x) = |x| + 1$
31. $y = g(t) = \dfrac{2}{|t - 4|}$
32. $h(u) = \sqrt{-5u}$
33. Grafique la siguiente función definida por partes y proporcione su dominio y rango:
$$y = f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.
35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.
36. **Ecuación de tendencia** Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150\,000 + 3000t$, donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Encuentre las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 2.42, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?

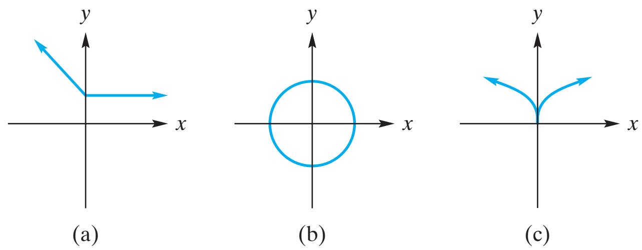


FIGURA 2.42 Diagrama para el problema 37.

38. Si $f(x) = (x^2 - x + 7)^3$, encuentre (a) $f(2)$ y (b) $f(1.1)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Encuentre todas las raíces reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4 & \text{si } x < 0 \\ 6 + 4.1x - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+5}(x^2 - 4)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todas las raíces reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^2 + x^k$, donde $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

Aplicación práctica

Aplicación práctica

Una experiencia con impuestos

En ocasiones, escuchará a algún estadounidense quejarse de que una fuente de ingresos inesperada lo *empujará* al *tabulador* siguiente en la clasificación de los impuestos, y la subsecuente especulación de que esto significará una reducción en sus *ingresos netos*. Es verdad que en Estados Unidos el impuesto federal sobre el ingreso se determina mediante funciones definidas por partes (estas partes son llamadas frecuentemente *tabuladores*), pero veremos que no hay *saltos* en el pago de impuestos como una función del ingreso. La creencia de que un incremento en el ingreso antes de impuestos significará una reducción en el ingreso neto es una leyenda urbana.

Examinaremos las tasas de impuestos federales en 2006 para un matrimonio que hace una declaración conjunta. El documento correspondiente es la forma Y-1, que está disponible en `http://www.irs.gov/formspub/article/0,,id=5150856,00.html` (vea la figura 2.43).

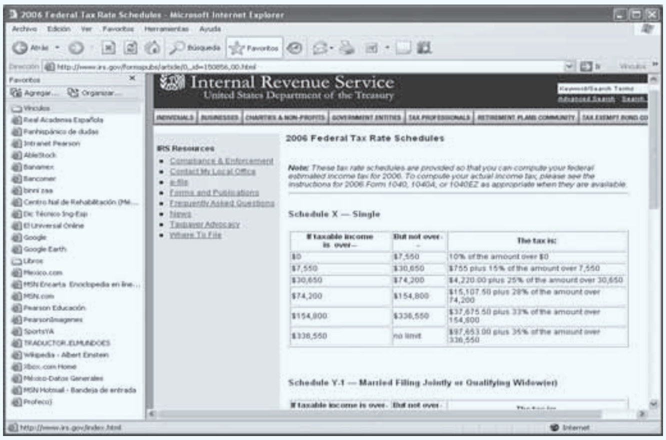


FIGURA 2.43 Página principal de la Internal Revenue Service (oficina recaudadora de impuestos en Estados Unidos).

La forma Y-1 define una función, llámela f, de ingreso x, para $x \geq 0$. De hecho, para cualquier $x \geq 0$, x pertenece exactamente a uno de los intervalos

$$[0,\ 15\ 100]$$
$$(15\ 100,\ 61\ 300]$$
$$(61\ 300,\ 123\ 700]$$
$$(123\ 700,\ 188\ 450]$$
$$(188\ 450,\ 336\ 550]$$
$$(336\ 550,\ \infty)$$

y tan pronto como se determina el intervalo, existe una regla simple que se aplica para calcular un valor único $f(x)$.

Por ejemplo, para calcular $f(79\ 500)$, los impuestos sobre un ingreso de \$79 500, observe primero que 79 500 pertenece al intervalo $(61\ 300, 123\ 700]$ y para dicha x la fórmula de impuestos es $f(x) = 8440 + 0.25(x - 61\ 300)$, dado que $x - 61\ 300$ es el ingreso por encima \$61 300 y se grava a la tasa del $25\% = 0.25$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(79\ 500) &= 8\ 440 + 0.25(79\ 500 - 61\ 300) \\ &= 8\ 440 + 0.25(18\ 200) \\ &= 8\ 440 + 4\ 550 \\ &= 12\ 990 \end{aligned}$$

Con propósitos de ilustrar mejor el ejemplo, se ha escrito la forma Y-1 en una notación genérica para una función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 0.10x & \text{si } 0 \leq x \leq 15\ 100 \\ 1510 + 0.15(x - 15\ 100) & \text{si } 15\ 100 < x \leq 61\ 300 \\ 8440 + 0.25(x - 61\ 300) & \text{si } 61\ 300 < x \leq 123\ 700 \\ 24\ 040 + 0.28(x - 123\ 700) & \text{si } 123\ 700 < x \leq 188\ 450 \\ 42\ 170 + 0.33(x - 188\ 450) & \text{si } 188\ 450 < x \leq 336\ 550 \\ 91\ 043 + 0.35(x - 336\ 550) & \text{si } x > 336\ 550 \end{cases}$$

Con estas fórmulas, podemos representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 2.44.

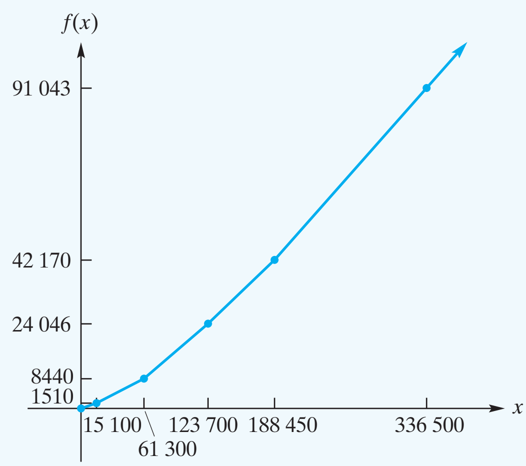


FIGURA 2.44 Función del impuesto con respecto al ingreso.

Problemas

Use la función de impuesto al ingreso, para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable durante el año 2006.

1. \$23 000
2. \$85 000
3. \$290 000
4. \$462 700
5. Busque la forma X más reciente en `http://www.irs.gov/formspubs/article/0,,id5150856,00.html` y repita los problemas 1 a 4 para el caso de un solo contribuyente.
6. ¿Por qué es relevante que $f(15\,100) = \$1510, f(61\,300) = \$8440$, etcétera?
7. Defina la función g por $g(x) = x - f(x)$. Así que $g = I - f$, donde I es la función identidad en la sección 2.3. La función g proporciona, para cada ingreso antes de impuestos, la cantidad que el contribuyente retiene de su ingreso y es, como f, una función definida por partes. Escriba una descripción completa para g, en términos de las clasificaciones, como lo hicimos para f.
8. Grafique la función g definida en el problema 7. Observe que si $a < b$, entonces $g(a) < g(b)$. Esto muestra que si se incrementa el ingreso antes de impuestos, entonces el ingreso neto aumenta, independientemente de que haya un salto o un tabulador más alto (con lo que se derrumba una leyenda urbana).

3

RECTAS, PARÁBOLAS Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Aplicación práctica Planes de cobro en telefonía celular

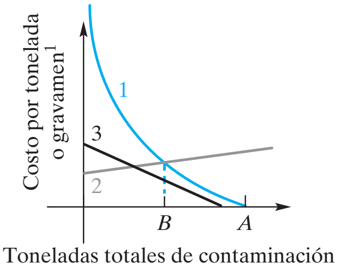
Para resolver el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que las fábricas contaminen, pero obligarlas a que paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación, mayor pago o gravamen. El objetivo es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la curva 1 representa el costo por tonelada de reducir la contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada normalmente puede reducir de alguna forma su contaminación a un costo pequeño. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y en algún momento crece de manera indefinida. Esto se ilustra por medio de la curva 1, que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximan a 0. (Se recomienda al lector tratar de entender por qué este *modelo* es razonablemente exacto.)

La recta 2 es un esquema de gravamen menos estricto con una operación industrial limpia, pero que cobra una cantidad creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece. En contraste, la recta 3 es un esquema en el que los fabricantes que contaminan poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por cada tonelada (pero más de manera global). Si se pasa por alto la cuestión de si se trata de algo justo o no, ¿qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?

Al enfrentarse con un gravamen por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación *mientras ahorre más en costos de gravamen que en costos por reducción de contaminación.* Los esfuerzos de reducción continúan hasta que los costos por reducir la contaminación superan el ahorro en gravámenes.

En la segunda mitad de este capítulo se estudian los sistemas de ecuaciones. Aquí, la curva 1 y la recta 2 representan un sistema de ecuaciones, mientras que la curva 1 y la recta 3 representan otro. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la recta 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad A a una cantidad B, mientras que el esquema de la recta 3 no funciona como una medida de control de contaminación, puesto que deja el nivel de contaminación en el A.



[1]Técnicamente, éste es el costo *marginal* por tonelada (vea la sección 11.3).

OBJETIVO

Desarrollar la noción de pendiente y formas diferentes de las ecuaciones de rectas.

3.1 Rectas

Pendiente de una recta

Muchas de las relaciones que se establecen entre cantidades pueden representarse de manera adecuada por medio de rectas. Una característica de las rectas es su “inclinación”. Por ejemplo, en la figura 3.1 la recta L_1 crece más rápido, conforme va de izquierda a derecha, que la recta L_2. En este sentido L_1 está más inclinada o empinada.

Para medir la inclinación de una recta se usa la noción de *pendiente*. En la figura 3.2, a medida que nos movemos a lo largo de la recta L de $(1, 3)$ a $(3, 7)$, la coordenada x aumenta de 1 a 3, y la coordenada y aumenta de 3 a 7. La tasa promedio de cambio de y con respecto a x es la razón

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

La razón de 2 significa que por cada unidad de aumento en x hay un *incremento* de 2 unidades en y. Debido a este aumento, la recta *se eleva* de izquierda a derecha. Puede demostrarse que, sin importar cuáles puntos de L se elijan para calcular la razón del cambio en y sobre el cambio en x, el resultado siempre es 2, que se llama la *pendiente* de la recta.

DEFINICIÓN

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} \right) \quad \textbf{(1)}$$

ADVERTENCIA

No tener pendiente es diferente a tener una pendiente de cero.

Una recta vertical no tiene pendiente, porque cualesquiera dos puntos sobre ella deben tener $x_1 = x_2$ [vea la figura 3.3(a)], lo que da un denominador de cero en la ecuación (1). Para una recta horizontal, cualesquiera dos puntos deben tener $y_1 = y_2$ [vea la figura 3.3(b)]. Esto da un numerador de cero en la ecuación (1) y, por lo tanto, la pendiente de la recta es cero.

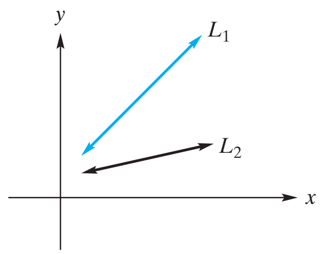


FIGURA 3.1 La recta L_1 está “más inclinada” que la recta L_2.

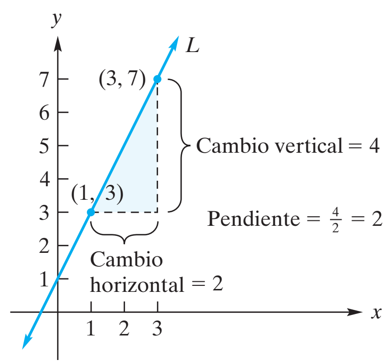
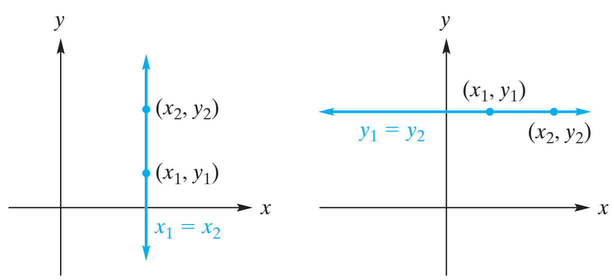


FIGURA 3.2 Pendiente de una recta.



(a) Sin pendiente (b) Pendiente igual a cero

FIGURA 3.3 Rectas vertical y horizontal.

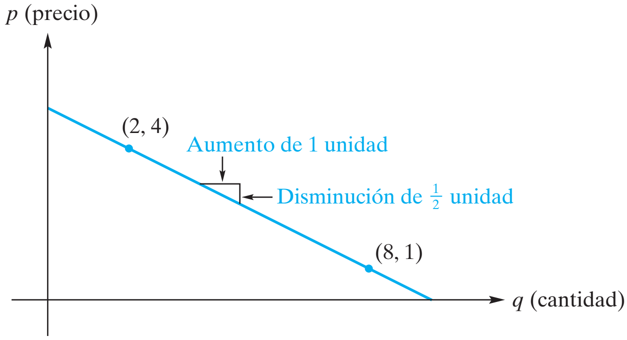


FIGURA 3.4 Recta precio-cantidad.

Este ejemplo muestra cómo puede interpretarse la pendiente.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

RELACIÓN PRECIO-CANTIDAD

Un doctor compró un automóvil nuevo en el año 2001 por \$32 000. En el 2004 lo vendió a un amigo en \$26 000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta y el año en que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

EJEMPLO 1 Relación precio-cantidad

La recta de la figura 3.4 muestra la relación entre el precio p de un artículo (en dólares) y la cantidad q de artículos (en miles) que los consumidores comprarán a ese precio. Encuentre e interprete la pendiente.

Solución: En la fórmula de la pendiente (1), se reemplaza x por q y y por p. Puede seleccionarse cualquier punto de la figura 3.4 como (q_1, p_1). Si $(2, 4) = (q_1, p_1)$ y $(8, 1) = (q_2, p_2)$, se tiene que

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1-4}{8-2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

La pendiente es negativa, $-\frac{1}{2}$. Esto significa que por cada unidad que aumente la cantidad (un millar de artículos) corresponde una **disminución** de $\frac{1}{2}$ (dólar por artículo). Debido a esta disminución, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

En resumen, la orientación de una recta puede caracterizarse por su pendiente:

Pendiente cero:	recta horizontal
Pendiente indefinida:	recta vertical
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha

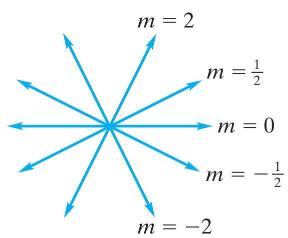


FIGURA 3.5 Pendientes de rectas.

En la figura 3.5 se muestran rectas con diferentes pendientes. Observe que *entre más cercana a 0 es la pendiente, la recta está más cerca de ser horizontal. Entre mayor valor absoluto tenga la pendiente, la recta estará más cerca de ser vertical.* Es necesario remarcar que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o ambas son verticales.

Ecuaciones de rectas

Si se conocen un punto y la pendiente de una recta, es posible encontrar una ecuación cuya gráfica represente dicha recta. Suponga que la recta L tiene pendiente m y pasa a través del punto (x_1, y_1). Si (x, y) es *cualquier* otro punto sobre L (vea la figura 3.6), puede encontrarse una relación algebraica entre x y y. Si se utiliza la fórmula de la pendiente con los puntos (x_1, y_1) y (x, y), se obtiene

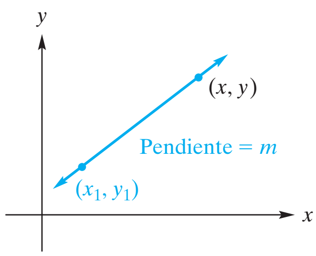


FIGURA 3.6 Recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \textbf{(2)}$$

Todo punto de L satisface la ecuación (2). También es cierto que *todo* punto que satisfaga la ecuación (2) debe pertenecer a L. Por lo tanto, la ecuación (2) es una ecuación para L, y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

*es la **forma punto-pendiente** de una ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y tiene pendiente m.*

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

FORMA PUNTO-PENDIENTE

La nueva licenciatura de matemáticas aplicadas de una universidad ha aumentado su matrícula en 14 estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si la carrera tenía matriculados 50 estudiantes en su tercer año, ¿cuál es una ecuación para el número de estudiantes S inscritos en la licenciatura como una función del número de años T desde su inicio?

EJEMPLO 2 Forma punto-pendiente

Determine una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(1, -3)$.

Solución: Al utilizar una forma punto-pendiente con $m = 2$ y $(x_1, y_1) = (1, -3)$, se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-3) = 2(x - 1)$$
$$y + 3 = 2x - 2$$

que puede reescribirse como

$$2x - y - 5 = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

Se puede encontrar con facilidad una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, como lo muestra el ejemplo 3.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

DETERMINACIÓN DE UNA RECTA A PARTIR DE DOS PUNTOS

Determine una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos dados. Una temperatura de 41°F es equivalente a 5°C y una temperatura de 77°F es equivalente a 25°C.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta a partir de dos puntos

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(-3, 8)$ y $(4, -2)$.

Solución:

Estrategia Primero se determinará la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después se sustituirá la pendiente y uno de los puntos en la forma punto-pendiente.

La recta tiene pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}$$

Al usar una forma punto-pendiente con $(-3, 8)$ como (x_1, y_1), se obtiene

Al seleccionar $(4, -2)$ como (x_1, y_1) se obtiene el mismo resultado.

$$y - 8 = -\frac{10}{7}[x - (-3)]$$
$$y - 8 = -\frac{10}{7}(x + 3)$$
$$7y - 56 = -10x - 30$$
$$10x + 7y - 26 = 0$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

Recuerde que un punto $(0, b)$ donde una gráfica interseca al eje y se llama una intersección y (o intersección vertical) (vea la figura 3.7). Si se conocen la pendiente m y la intersección y, b, de una recta, una ecuación para la recta es [mediante el uso de una forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (0, b)$]

$$y - b = m(x - 0)$$

Al resolver para y se obtiene $y = mx + b$, llamada la *forma pendiente-intersección* de una ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

*es la **forma pendiente-intersección** de una ecuación de la recta con pendiente m e intersección y igual a b.*

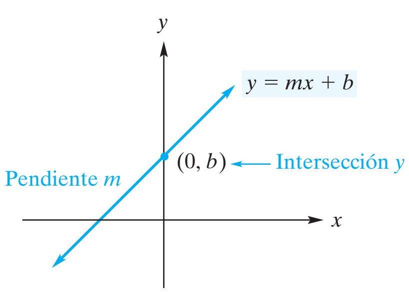


FIGURA 3.7 Recta con pendiente m e intersección y igual a b.

EJEMPLO 4 Forma pendiente-ordenada al origen (intersección)

Encuentre una ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y igual a -4.

Solución: Al utilizar la forma pendiente-intersección $y = mx + b$ donde $m = 3$ y $b = -4$, se obtiene

$$y = 3x + (-4)$$
$$y = 3x - 4$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

DETERMINACIÓN DE LA PENDIENTE E INTERSECCIÓN CON EL EJE Y DE UNA RECTA

Una fórmula para obtener la dosis recomendada (en miligramos) de medicamento para un niño de t años de edad es

$$y = \frac{1}{24}(t+1)a$$

donde a es la dosis para adultos. Un medicamento contra el dolor que no requiere prescripción médica tiene $a = 1000$. Determine la pendiente y la intersección y de esta ecuación.

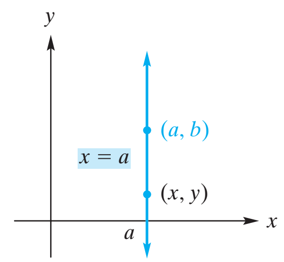


FIGURA 3.8 Recta vertical que pasa por (a, b).

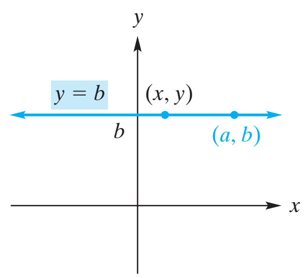


FIGURA 3.9 Recta horizontal que pasa por (a, b).

ADVERTENCIA

No confunda las formas de las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales. Recuerde cuál tiene la forma $x =$ constante y cuál de ellas tiene la forma $y =$ constante.

EJEMPLO 5 Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta

Determine la pendiente y la intersección y de la recta con ecuación $y = 5(3 - 2x)$.

Solución:

Estrategia Se reescribirá la ecuación de modo que tenga la forma pendiente-intersección $y = mx + b$. Entonces, la pendiente es el coeficiente de x y la intersección y es el término constante.

Se tiene

$$y = 5(3 - 2x)$$
$$y = 15 - 10x$$
$$y = -10x + 15$$

Por lo tanto, $m = -10$ y $b = 15$, de modo que la pendiente es -10 y la intersección y es 15.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

Si una recta *vertical* pasa por (a, b) (vea la figura 3.8), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $x = a$. La coordenada y puede tener cualquier valor. Por ende, una ecuación de la recta es $x = a$. En forma similar, una ecuación de la recta *horizontal* que pasa por (a, b) es $y = b$ (vea la figura 3.9). Aquí la coordenada x puede tener cualquier valor.

EJEMPLO 6 Ecuaciones de rectas horizontales y verticales

a. Una ecuación de la recta vertical que pasa por $(-2, 3)$ es $x = -2$. Una ecuación de la recta horizontal que pasa por $(-2, 3)$ es $y = 3$.

b. Los ejes x y y son rectas horizontal y vertical, respectivamente. Como $(0, 0)$ pertenece a ambos ejes, una ecuación del eje x es $y = 0$ y una del eje y es $x = 0$.

AHORA RESUELVA LOS PROBLEMAS 21 Y 23

A partir del análisis previo puede demostrarse que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, y ni A ni B son simultáneamente igual a cero. A ésta se le llama la **ecuación lineal general** (o *ecuación de primer grado*) **en las variables *x* y *y***, y se dice que x y y están **relacionadas linealmente**. Por ejemplo, una ecuación lineal general para $y = 7x - 2$ es $(-7)x + (1)y + (2) = 0$. Y viceversa, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta. En la tabla 3.1 se presentan las diferentes formas de ecuaciones para rectas.

TABLA 3.1 Formas de ecuaciones de rectas

Forma punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-intersección	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

El ejemplo 3 sugiere que podría añadirse otro renglón a la tabla. Para el caso en el que se sabe que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta, entonces la pendiente de esa recta es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y podría decirse que $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ es la ***forma de dos puntos*** *para una ecuación de una recta que pasa por los puntos* (x_1, y_1) y (x_2, y_2). En gran medida, la decisión entre memorizar muchas fórmulas o sólo unos cuantos principios para la resolución de problemas es una cuestión de gusto.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

CONVERSIÓN ENTRE FORMAS DE ECUACIONES DE RECTAS

Determine una forma lineal general de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius cuya forma pendiente-intersección es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

ADVERTENCIA

Esto ilustra que la forma lineal general de una recta no es única.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN LINEAL GENERAL

Haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius que encontró en la sección Principios en práctica 5. ¿Cómo puede usar esta gráfica para convertir una temperatura expresada en Celsius a Fahrenheit?

EJEMPLO 7 Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

a. *Encuentre una forma lineal general de la recta cuya forma pendiente-intersección es*

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

Solución: Si se determina que un lado de la ecuación sea igual a 0, se tiene

$$\frac{2}{3}x + y - 4 = 0$$

que es la forma lineal general con $A = \frac{2}{3}$, $B = 1$ y $C = -4$. Una forma alternativa puede obtenerse al eliminar las fracciones:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

b. *Encuentre la forma pendiente-intersección de la recta que tiene una forma lineal general* $3x + 4y - 2 = 0$.

Solución: Se desea la forma $y = mx + b$, de modo que se resolverá la ecuación dada para y. Se tiene

$$3x + 4y - 2 = 0$$

$$4y = -3x + 2$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

que es la forma pendiente-intersección. Note que la recta tiene pendiente de $-\frac{3}{4}$ e intersección y igual a $\frac{1}{2}$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

EJEMPLO 8 Gráfica de una ecuación lineal general

Haga el bosquejo de la gráfica $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución:

Estrategia Como ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una línea recta. Por lo tanto, sólo es necesario determinar dos puntos diferentes para poder hacer el bosquejo. Se encontrarán las intersecciones con los ejes coordenados.

Si $x = 0$, entonces $-3y + 6 = 0$, de modo que la intersección y es 2. Si $y = 0$, entonces $2x + 6 = 0$, de manera que la intersección x es -3. Ahora es posible dibujar la recta que pasa por $(0, 2)$ y $(-3, 0)$. (Vea la figura 3.10.)

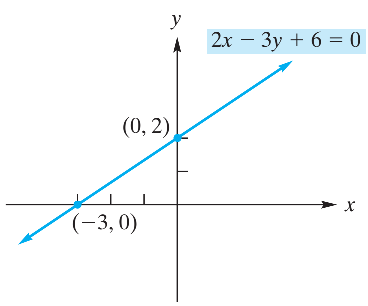


FIGURA 3.10 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

TECNOLOGÍA

Para graficar la ecuación del ejemplo 8 con una calculadora graficadora, primero se expresa y en términos de x:

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$3y = 2x + 6$$

$$y = \frac{1}{3}(2x + 6)$$

En esencia, y se expresa como una función de x; la gráfica se muestra en la figura 3.11.

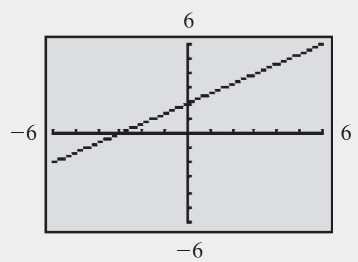


FIGURA 3.11 Gráfica en calculadora de $2x - 3y + 6 = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares

Como se estableció previamente, existe una regla para rectas paralelas:

Rectas paralelas *Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.*

De aquí que cualquier recta sea paralela a sí misma.

También existe una regla para rectas perpendiculares. Vea otra vez la figura 3.5 y observe que la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ es perpendicular a la recta con pendiente 2. El hecho de que la pendiente de cada una de ellas sea el recíproco negativo de la pendiente de la otra recta, no es coincidencia, como lo establece la siguiente regla.

Rectas perpendiculares *Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si*

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Aún más, toda recta horizontal y toda vertical son perpendiculares entre sí.

En lugar de limitarse a recordar esta ecuación para la condición de perpendicularidad, se recomienda observar la razón por la que tiene sentido. Para que dos rectas sean perpendiculares, cuando ninguna de ellas es vertical, necesariamente una se elevará de izquierda a derecha mientras que la otra descenderá de izquierda a derecha. Así que las pendientes deben tener signos diferentes. Además, si una está muy inclinada, entonces la otra será relativamente plana, lo cual sugiere una relación como la proporcionada por los recíprocos.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Muestre que un triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(7, 7)$ no es un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 9 Rectas paralelas y perpendiculares

En la figura 3.12 se muestran dos rectas que pasan por $(3, -2)$. *Una es paralela y la otra es perpendicular a la recta* $y = 3x + 1$. *Determine las ecuaciones de estas rectas.*

Solución: La pendiente de $y = 3x + 1$ es 3. Por tanto, la recta que pasa por $(3, -2)$, que es *paralela* a $y = 3x + 1$, también tiene pendiente 3. Al utilizar la forma punto-pendiente, se obtiene

$$y - (-2) = 3(x - 3)$$
$$y + 2 = 3x - 9$$
$$y = 3x - 11$$

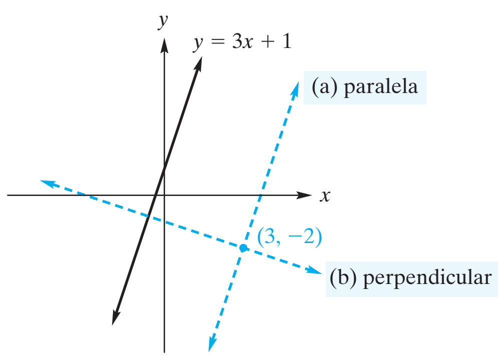


FIGURA 3.12 Rectas paralela y perpendicular a $y = 3x + 1$ (ejemplo 9).

La pendiente de la recta *perpendicular* a $y = 3x + 1$ debe ser $-\frac{1}{3}$ (el recíproco negativo de 3). Mediante la forma punto-pendiente, se obtiene

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -\frac{1}{3}(x - 3) \\ y + 2 &= -\frac{1}{3}x + 1 \\ y &= -\frac{1}{3}x - 1 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 55

Problemas 3.1

En los problemas 1 a 8, encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. (4, 1), (7, 10)　　**2.** (−2, 10), (5, 3)

***3.** (6, −2), (8, −3)　　**4.** (2, −4), (3, −4)

5. (5, 3), (5, −8)　　**6.** (0, −6), (3, 0)

7. (5, −2), (4, −2)　　**8.** (1, −7), (9, 0)

En los problemas 9 a 24, encuentre una ecuación lineal general ($Ax + By + C = 0$) de la recta que tiene las propiedades indicadas, y haga el bosquejo de cada recta.

***9.** Pasa por $(-1, 7)$ y tiene pendiente -5

10. Pasa por el origen y tiene pendiente 75

11. Pasa por $(-2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$

12. Pasa por $(-\frac{5}{2}, 5)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$

***13.** Pasa por $(-6, 1)$ y $(1, 4)$

14. Pasa por $(5, 2)$ y $(6, -4)$

15. Pasa por $(-3, -4)$ y $(-2, -8)$

16. Pasa por $(0, 0)$ y $(2, 3)$

***17.** Tiene pendiente 2 y su intersección *y* es 4

18. Tiene pendiente 5 y su intersección *y* es -7

19. Tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y su intersección *y* es -3

20. Tiene pendiente 0 y su intersección *y* es $-\frac{1}{2}$

***21.** Es horizontal y pasa por $(-5, -3)$

22. Es vertical y pasa por $(-1, -1)$

***23.** Pasa por $(2, -3)$ y es vertical

24. Pasa por el origen y es horizontal

En los problemas 25 a 34 encuentre, si es posible, la pendiente y la intersección y de la recta determinada por la ecuación, y haga el bosquejo de la gráfica.

***25.** $y = 4x - 6$　　**26.** $x - 2 = 6$

***27.** $3x + 5y - 9 = 0$　　**28.** $y + 4 = 7$

29. $x = -5$　　**30.** $x - 9 = 5y + 3$

31. $y = 3x$　　**32.** $y - 7 = 3(x - 4)$

33. $y = 3$　　**34.** $6y - 24 = 0$

En los problemas 35 a 40 encuentre una forma lineal general y la forma pendiente-intersección de la ecuación dada.

35. $2x = 5 - 3y$　　**36.** $3x + 2y = 6$

***37.** $4x + 9y - 5 = 0$　　**38.** $3(x - 4) - 7(y + 1) = 2$

39. $-\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -4\frac{3}{4}$　　**40.** $y = \frac{1}{300}x + 8$

En los problemas 41 a 50 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

41. $y = 7x + 2,\ y = 7x - 3$

42. $y = 4x + 3,\ y = 5 + 4x$

43. $y = 5x + 2,\ -5x + y - 3 = 0$

44. $y = x,\ y = -x$

45. $x + 3y + 5 = 0,\ y = -3x$

46. $x + 3y = 0,\ x + 6y - 4 = 0$

47. $y = 3,\ x = -\frac{1}{3}$

48. $x = 3,\ x = -3$

49. $3x + y = 4,\ x - 3y + 1 = 0$

50. $x - 2 = 3,\ y = 2$

En los problemas 51 a 60 encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Si es posible, dé la respuesta en la forma pendiente-intersección.

51. Pasa por $(1, 1)$ y es paralela a $y = -\frac{x}{4} - 2$

52. Pasa por $(2, -8)$ y es paralela a $x = -4$

53. Pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = 2$

54. Pasa por $(3, -4)$ y es paralela a $y = 3 + 2x$

***55.** Es perpendicular a $y = 3x - 5$ y pasa por $(3, 4)$

56. Es perpendicular a $y = -4$ y pasa por $(1, 1)$

57. Pasa por $(5, 2)$ y es perpendicular a $y = -3$

58. Pasa por $(4, -5)$ y es perpendicular a la recta $3y = -\frac{2x}{5} + 3$

59. Pasa por $(-7, -5)$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 6 = 0$

60. Pasa por $(-4, 10)$ y es paralela al eje *y*

61. Una recta pasa por $(1, 2)$ y por $(-3, 8)$. Determine el punto en la recta que tiene coordenada *x* de 5.

62. Una recta tiene pendiente 3 e interseca al eje *y* en $(0, 1)$. ¿El punto $(-1, -2)$ pertenece a la recta?

63. **Acciones** En 1996, las acciones de una compañía de hardware computacional se cotizaron en \$37 cada una. Sin embargo, en 2006 la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a \$8. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció para el periodo 1996-2006, en donde los años se ubiquen en el eje x y el precio en el eje y. Encuentre una interpretación para la pendiente.

En los problemas 64 y 65 determine una ecuación de la recta que describa la información siguiente.

64. Cuadrangulares En una temporada, un jugador de las ligas mayores de béisbol anotó 14 cuadrangulares al final del tercer mes y 20 al final del quinto mes.

65. Negocios La propietaria de una salchichonería inicia su negocio con una deuda de \$100 000. Después de cinco años de operación, ha acumulado una utilidad de \$40 000.

66. Fecha de parto Puede estimarse la longitud, L, de un feto humano de más de 12 semanas por medio de la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, donde L está en centímetros y t en semanas desde la concepción. Un obstetra utiliza la longitud del feto, medido por medio de ultrasonido, para determinar la edad aproximada del feto y establecer una fecha de parto para la madre. La fórmula debe reescribirse para tener como resultado una edad, t, dada la longitud fetal, L. Determine la pendiente y la intersección con el eje L de la ecuación.

67. Lanzamiento de disco Un modelo matemático puede aproximar la distancia con que se ganó en el lanzamiento de disco en los Juegos Olímpicos mediante la fórmula $d = 184 + t$, donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1948. Determine una forma lineal general de esta ecuación.

68. Mapa del campus Un mapa de coordenadas de un campus universitario indica las coordenadas (x, y) de tres edificios importantes como sigue: centro de cómputo, $(3.5, -1.5)$; laboratorio de ingeniería, $(0.5, 0.5)$, y biblioteca $(-1, -2.5)$. Encuentre las ecuaciones (en la forma pendiente-intersección) de las trayectorias en línea recta que conectan (a) el laboratorio de ingeniería con el centro de cómputo, y (b) el laboratorio de ingeniería con la biblioteca. ¿Son estas dos trayectorias perpendiculares entre sí?

69. Geometría Muestre que los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$ y $D(2, 7)$ son los vértices de un paralelogramo (los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos).

70. Ángulo de aproximación Una avioneta aterriza en un aeropuerto con un ángulo de aproximación de 45 grados, o pendiente de -1. Inicia su descenso cuando tiene una elevación de 3600 pies. Determine la ecuación que describe la relación entre la altitud de la aeronave y la distancia recorrida, suponiendo que el ángulo de aproximación comienza en la distancia 0. Haga una gráfica de su ecuación en una calculadora graficadora. Si el aeropuerto está a 3800 pies desde donde el aeroplano inicia su aterrizaje, ¿qué le dice la gráfica acerca de la aproximación?

71. Ecuación de costo El costo diario promedio, C, de un cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59.82 por año, durante la década de 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128.50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década como una función del número de años, T, desde 1990?

72. Ecuación de ingreso Un pequeño negocio realiza sus pronósticos de ingreso de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de \$50 000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por \$330 000. Encuentre una ecuación que describa la relación entre los ingresos, R, y el número de años, T, desde la apertura del negocio.

73. Grafique $y = -0.9x + 7.3$ y verifique que la intersección y sea 7.3.

74. Grafique las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = 1.5x + 1$$
$$y = 1.5x - 1$$

y

$$y = 1.5x + 2.5$$

¿Qué observa en las orientaciones de estas rectas? ¿Por qué este resultado es de esperarse, a partir de las ecuaciones de las rectas?

75. Grafique la recta $y = 7.1x + 5.4$. Determine las coordenadas de cualesquiera dos puntos de la recta y utilícelos para estimar la pendiente. ¿Cuál es la pendiente real de la recta?

76. Con el uso de la pantalla estándar y el mismo rectángulo de visualización, grafique las rectas con ecuaciones

$$0.1875x - 0.3y + 0.94 = 0$$

y

$$0.32x + 0.2y + 1.01 = 0$$

Ahora, cambie a una pantalla cuadrada (por ejemplo, en la calculadora TI-83, utilice ZOOM, ZSquare). Observe que las rectas aparentan ser perpendiculares entre sí. Pruebe que esto es cierto.

3.2 Aplicaciones y funciones lineales

OBJETIVO

Desarrollar la noción de curvas de demanda y oferta, e introducir las funciones lineales.

En economía, muchas situaciones pueden describirse con el uso de líneas rectas, como lo demuestra el ejemplo 1.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

NIVELES DE PRODUCCIÓN

Un fabricante de artículos deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por día para fabricar esquís y botas para esquiar. Si la fabricación de un esquí toma 8 unidades de tiempo y la fabricación de una bota toma 14, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos artículos.

EJEMPLO 1 Niveles de producción

Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para elaborar los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si x y y denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación

$$4x + 2y = 100 \qquad \text{donde } x, y \geq 0$$

Por lo tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al despejar y se obtiene

$$y = -2x + 50 \qquad \text{(forma pendiente-intersección)}$$

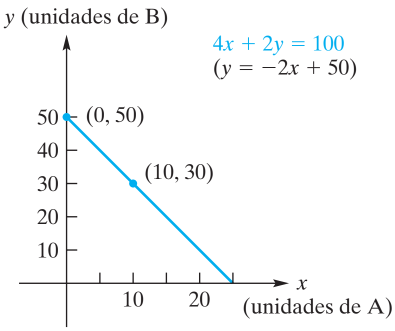


FIGURA 3.13 Niveles de producción relacionados linealmente.

de manera que la pendiente es -2. La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo, si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan $\frac{4}{2} = 2$ unidades *menos* de B. De acuerdo con lo anterior, cuando x aumenta en 1 unidad, el valor correspondiente de y disminuye en 2 unidades. Para bosquejar la gráfica de $y = -2x + 50$, puede utilizarse la intersección con el eje y (0, 50) y el hecho de que cuando $x = 10$, $y = 30$. (Vea la figura 3.13).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

Curvas de demanda y de oferta

Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente, de ese producto, que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante cierto periodo. Por lo general, a mayor precio la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad está dado por p, y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por q, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de demanda**. Su gráfica es la **curva de demanda**. En la figura 3.14(a) se muestra dicha curva. De acuerdo con la práctica de la mayoría de los economistas, el eje horizontal es el eje q y el vertical es el eje p. Aquí se supondrá que el precio por unidad está dado en dólares y el periodo es una semana. Así, el punto (a, b) en la figura 3.14(a) indica que a un precio de b dólares por unidad, los consumidores demandarán a unidades por semana. Como ni los precios ni las cantidades negativas tienen sentido, tanto a como b deben ser no negativos. Para la mayoría de los productos, un incremento en la cantidad demandada corresponde a una disminución en el precio. Así que, por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha, como en la figura 3.14(a).

ADVERTENCIA

Usualmente, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones. Por ejemplo, podría representarse la demanda de insulina por medio de una recta vertical, puesto que esta demanda permanece constante sin importar el precio.

Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de artículos que los *productores* están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio por unidad es mayor la cantidad que los productores están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada. Si p denota el precio por unidad y q la cantidad correspondiente, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de oferta**, y su gráfica es una **curva de oferta**. La figura 3.14(b) muestra una curva de oferta. Si p está en dólares y el periodo es una semana, entonces el punto (c, d) indica que a un precio de d dólares cada una, los productores proveerán c unidades por semana. Al igual que antes, c y d son no negativos. Una curva de oferta casi siempre asciende de izquierda a derecha, como en la figura 3.14(b). Esto indica que un fabricante suministrará una mayor cantidad del producto a precios mayores.

Observe que una función cuya gráfica desciende de izquierda a derecha o se eleva de izquierda a derecha *a lo largo de todo su dominio* pasará la prueba de la recta horizontal de la sección 2.5. Puede afirmarse que tanto la curva de demanda como la curva de oferta de la figura 3.15 intersecan cuando mucho una sola vez a cualquier recta horizontal. Así, si la curva de demanda es la gráfica de una función $p = D(q)$, entonces D tendrá una inversa y es posible despejar sólo q y así obtener $q = D^{-1}(p)$. De manera similar, si la curva de oferta es la gráfica de una función $p = S(q)$, entonces S también es uno a uno, tiene una inversa S^{-1}, y es posible escribir $q = S^{-1}(p)$.

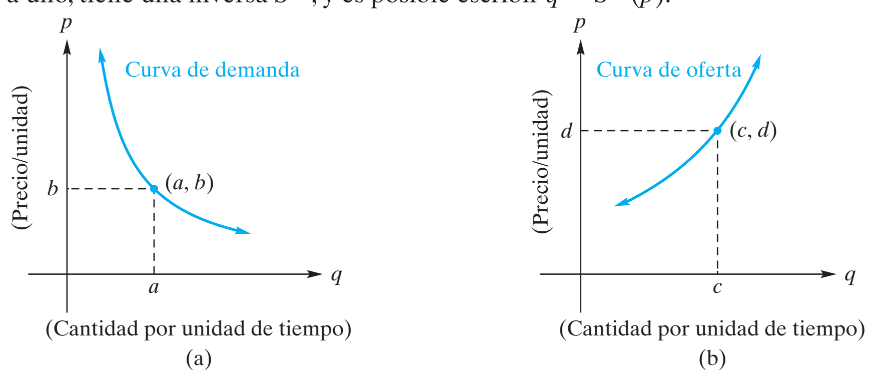


FIGURA 3.14 Curvas de demanda y de oferta.

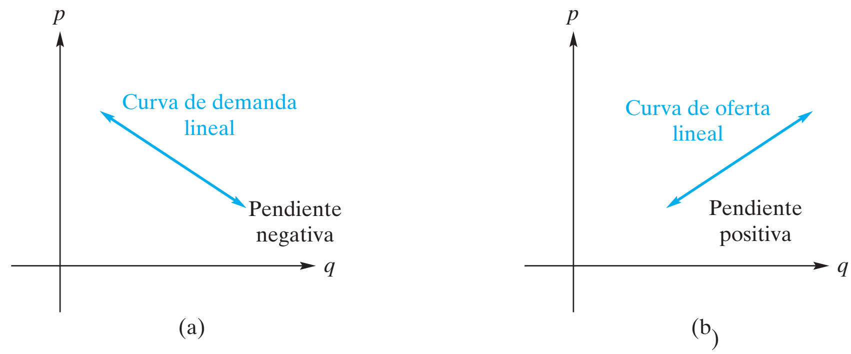


FIGURA 3.15 Curvas de demanda y oferta lineales.

Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son rectas (vea la figura 3.15). Se les denomina curvas de oferta *lineal* y de demanda *lineal.* Tienen ecuaciones en las que p y q se relacionan de manera lineal. Debido a que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, tiene pendiente negativa [vea la figura 3.15(a)]. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, porque la curva asciende de izquierda a derecha [vea la figura 3.15(b)].

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE DEMANDA

La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de \$575 cada uno y 800 unidades cuando el precio es de \$725 por televisor. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponga un comportamiento lineal.

EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de demanda

Imagine que la demanda por semana de un producto es de 100 *unidades, cuando el precio es de* \$58 *por unidad, y de* 200 *a un precio de* \$51 *cada una. Determine la ecuación de demanda, suponga que es lineal.*

Solución:

Estrategia Dado que la ecuación de demanda es lineal, la curva de demanda debe ser una recta. Se sabe que la cantidad q y el precio p se relacionan linealmente de modo que $p = 58$ cuando $q = 100$ y $p = 51$ cuando $q = 200$. Por lo que los datos dados pueden representarse en un plano de coordenadas q, p [vea la figura 3.15(a)] por los puntos (100, 58) y (200, 51). Con ellos es posible encontrar una ecuación de la recta —esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por (100, 58) y (200, 51) es

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}$$

Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1)$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100)$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65 \qquad \textbf{(1)}$$

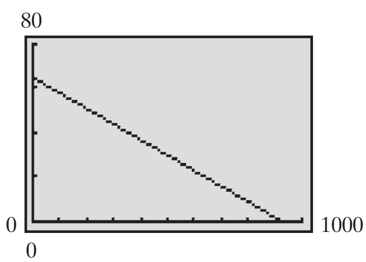


FIGURA 3.16 Gráfica de la función de demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

Por costumbre, una ecuación de demanda (así como una ecuación de oferta) expresa p en términos de q, lo que en realidad define una función de q. Por ejemplo, la ecuación (1) define p como una función de q, y por ello se le llama la *función de demanda* para el producto (vea la figura 3.16).

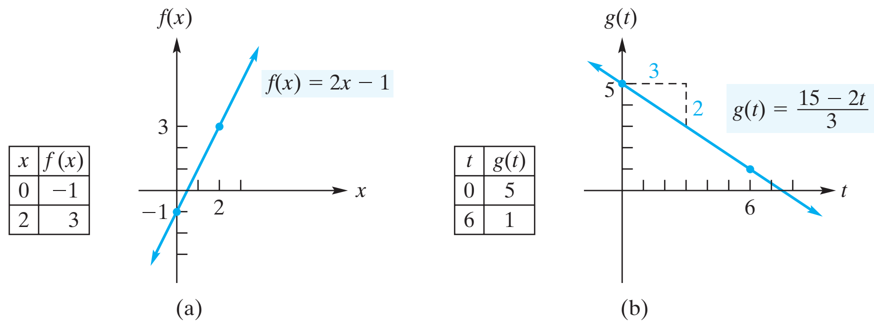
AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

Funciones lineales

En la sección 2.2 se describió una *función lineal* como una función polinomial de grado 1. A continuación se da una definición más explícita.

DEFINICIÓN

Una función f es una *función lineal* si y sólo si $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$.



x	$f(x)$
0	−1
2	3

t	$g(t)$
0	5
6	1

FIGURA 3.17 Gráficas de funciones lineales.

Suponga que $f(x) = ax + b$ es una función lineal y que $y = f(x)$. Entonces $y = ax + b$, la cual es la ecuación de una recta con pendiente a e intersección y igual a b. Así, **la gráfica de una función lineal es una recta que no es vertical ni horizontal**. Se dice que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente a.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

GRÁFICAS DE FUNCIONES LINEALES

Una compañía que se dedica a reparar computadoras cobra una cantidad fija por servicio, más una tarifa por hora. Si x es el número de horas necesarias para un servicio, el costo total se describe mediante la función $f(x) = 40x + 60$. Grafique la función después de encontrar y dibujar dos puntos.

EJEMPLO 3 Gráficas de funciones lineales

a. *Grafique* $f(x) = 2x - 1$.

Solución: Aquí f es una función lineal (con pendiente 2), de modo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, sólo se necesita graficar dos puntos y después dibujar una recta que pase por ellos [vea la figura 3.17(a)]. Observe que uno de los puntos que se han graficado es la intersección con el eje vertical, -1, que ocurre cuando $x = 0$.

b. *Grafique* $g(t) = \dfrac{15 - 2t}{3}$.

Solución: Observe que g es una función lineal porque puede expresarse en la forma $g(t) = at + b$.

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5$$

La gráfica de g *se* muestra en la figura 3.17(b). Como la pendiente es $-\frac{2}{3}$, observe que cuando t aumenta en 3 unidades, $g(t)$ *disminuye* en 2.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN LINEAL

La altura de los niños entre los 6 y 10 años de edad puede modelarse mediante una función lineal de la edad t en años. La altura de una niña cambia en 2.3 pulgadas por año, y tiene una estatura de 50.6 pulgadas a los 8 años. Encuentre una función que describa la altura de esta niña a la edad de t años.

EJEMPLO 4 Determinación de una función lineal

Suponga que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$. Encuentre $f(x)$.

Solución: Como f es lineal, tiene la forma $f(x) = ax + b$. La pendiente es 2, de modo que $a = 2$, y se tiene

$$f(x) = 2x + b \tag{2}$$

Ahora se determinará b. Como $f(4) = 8$, en la ecuación (2) se reemplaza x por 4 y se despeja b:

$$f(4) = 2(4) + b$$
$$8 = 8 + b$$
$$0 = b$$

Entonces, $f(x) = 2x$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5

DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Es de suponer que un collar antiguo tenga un valor de $360 después de 3 años y de $640 luego de 7 años. Determine una función que describa el valor del collar después de x años.

EJEMPLO 5 Determinación de una función lineal

Si $y = f(x)$ es una función lineal tal que $f(-2) = 6$ y $f(1) = -3$, encuentre $f(x)$.

Solución:

Estrategia Los valores de la función corresponden a puntos sobre la gráfica de f. Con ellos es posible determinar una ecuación de la recta y, por lo tanto, de la función lineal.

La condición $f(-2) = 6$ significa que cuando $x = -2$, entonces $y = 6$. Por lo tanto, $(-2, 6)$ pertenece a la gráfica de f, que es una recta. De manera similar, $f(1) = -3$ implica que $(1, -3)$ también pertenece a la recta. Si se establece $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ y $(x_2, y_2) = (1, -3)$, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3$$

Puede encontrarse una ecuación de la recta mediante el uso de la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 6 &= -3[x - (-2)] \\ y - 6 &= -3x - 6 \\ y &= -3x \end{aligned}$$

Como $y = f(x)$, $f(x) = -3x$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si se establece $(x_1, y_1) = (1, -3)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

En numerosas investigaciones se recopilan y se grafican los datos en un sistema de coordenadas. Un análisis de los resultados podría indicar una relación funcional entre las variables involucradas. Por ejemplo, los datos pueden ser aproximados por puntos en una recta. Esto indicaría una relación funcional lineal, como en el ejemplo que se presenta a continuación.

EJEMPLO 6 Dieta para gallinas

Al probar una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. Suponga que el peso promedio de una gallina al inicio la dieta fue de 40 gramos, y 25 días después fue de 675 gramos.

a. *Determine w como una función lineal de d.*

Solución: Como w es una función lineal de d, su gráfica es una línea recta. Cuando $d = 0$ (al inicio de la dieta), $w = 40$. Por lo tanto, $(0, 40)$ pertenece a la gráfica (vea la figura 3.18). De manera similar, $(25, 675)$ pertenece a la gráfica. Si se establece $(d_1, w_1) = (0, 40)$ y $(d_2, w_2) = (25, 675)$, la pendiente de la recta es

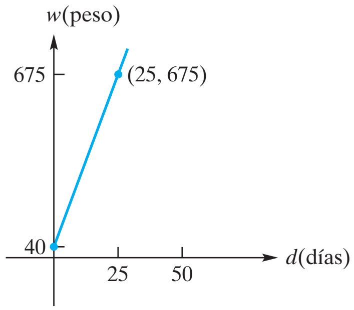


FIGURA 3.18 Función lineal que describe la dieta para gallinas.

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}$$

Después de usar la forma punto-pendiente, se tiene

$$\begin{aligned} w - w_1 &= m(d - d_1) \\ w - 40 &= \frac{127}{5}(d - 0) \\ w - 40 &= \frac{127}{5}d \\ w &= \frac{127}{5}d + 40 \end{aligned}$$

que expresa w como una función lineal de d.

b. *Determine el peso promedio de una gallina cuando $d = 10$.*

Solución: Cuando $d = 10, w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$. Así, el peso promedio de una gallina 10 días después del inicio de la dieta es de 294 gramos.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

Problemas 3.2

En los problemas 1 a 6, determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal, luego bosqueje la gráfica.

1. $y = f(x) = -4x$ **2.** $y = f(x) = x + 1$

***3.** $h(t) = 5t - 7$ **4.** $f(s) = 3(5 - s)$

5. $h(q) = \dfrac{2 - q}{7}$ **6.** $h(q) = 0.5q + 0.25$

En los problemas 7 a 14, determine $f(x)$, si f es una función lineal que tiene las propiedades dadas.

***7.** pendiente $= 4$, $f(2) = 8$ **8.** $f(0) = 3$, $f(4) = -5$

***9.** $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$ **10.** pendiente $= -2$, $f(\frac{2}{5}) = -7$

11. pendiente $= -\frac{2}{3}$, $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$ **12.** $f(1) = 1$, $f(2) = 2$

13. $f(-2) = -1$, $f(-4) = -3$ **14.** pendiente $= 0.01$, $f(0.1) = 0.01$

***15. Ecuación de demanda** Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12.75 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18.75 cada una. Encuentre la ecuación de la demanda, suponga que es lineal. Determine el precio unitario cuando se demandan 37 unidades.

16. Ecuación de demanda La demanda semanal para un CD es de 26 000 unidades cuando el precio es \$12 cada una, y de 10 000 cuando el precio unitario es de \$18. Encuentre una ecuación de demanda para el CD, suponga que es lineal.

17. Ecuación de oferta Un fabricante de refrigeradores producirá 3000 unidades cuando el precio sea de \$940 y 2200 unidades cuando el precio sea \$740. Suponga que el precio, p, y la cantidad producida, q, están relacionadas de manera lineal. Encuentre la ecuación de oferta.

18. Ecuación de oferta Imagine que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 cuando el precio es 30. Encuentre la ecuación de oferta, suponga que el precio p y la cantidad q se relacionan linealmente.

***19. Ecuación de costo** Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es \$40 y para 20 unidades es de \$70. Si el costo, c, se relaciona linealmente con la producción, q, encuentre una ecuación lineal que relacione c y q. Encuentre el costo de producir 35 unidades.

20. Ecuación de costo Un anunciante contrata a un impresor y éste le cobra \$79 por 100 copias de un volante y \$88 por 400 copias de otro volante. El impresor cobra un costo fijo, más un cargo adicional por cada copia de volantes de una sola página. Determine una función que describa el costo de un trabajo de impresión, si x es el número de copias que se hacen.

***21. Tarifas de electricidad** Una compañía de electricidad cobra 12.5 centavos por kilowatt-hora más un cargo base mensual a los clientes residenciales. La factura mensual de un cliente es de \$51.65 por 380 kilowatt-hora. Encuentre una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si x es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes.

22. Terapia con radiación Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante medicamentos y radiación. Cada centímetro cúbico de la droga que será utilizada contiene 210 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 305 unidades curativas. El paciente requiere 2410 unidades curativas. Si se administran d centímetros cúbicos de droga y r minutos de radiación, determine una ecuación que relacione d y r. Grafique la ecuación para $d \geq 0$ y $r \geq 0$; etiquete el eje horizontal como d.

23. Depreciación Suponga que el valor de una bicicleta de montaña disminuye cada año en 10% de su valor original. Si el valor inicial es de \$1800, encuentre una ecuación que exprese el valor v de la bicicleta t años después de su compra, donde $0 \leq t \leq 10$. Bosqueje la ecuación, seleccione t como el eje horizontal y v como el eje vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? Este método para considerar el valor del equipo se denomina *depreciación lineal.*

24. Depreciación Un televisor nuevo se deprecia \$120 por año, y tiene un valor de \$340 después de cuatro años. Encuentre una función que describa su valor, si x es la edad en años del aparato.

25. Apreciación Un nuevo edificio de departamentos se vendió por \$960 000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba \$45 000 por año, mientras ellos fueron los propietarios. Encuentre una función lineal que describa la apreciación del inmueble, si x es el número de años desde la compra original.

26. Apreciación Se espera que una casa que fue comprada en \$245 000 duplique su valor en 15 años. Encuentre una ecuación lineal que describa el valor de la casa después de t años.

27. Cargos por reparación Una compañía que repara copiadoras para negocios, cobra una cantidad fija por servicio, más una tarifa por hora. Si un cliente recibe un cargo por \$159 de un servicio de una hora, y otro cargo por \$287 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, donde x es el número de horas.

28. Longitud de la lana de las ovejas Las ovejas a las que se les mantiene a altas temperaturas ambientales aumentan su ritmo respiratorio, r (por minuto), a medida que la longitud de la lana, l (en centímetros) disminuye.[2] Suponga que ciertas ovejas, cuya lana presenta una longitud de 2 cm, tienen un ritmo respiratorio (promedio) de 160, y que otras ovejas, cuya lana mide 4 cm, tienen un ritmo respiratorio de 125. Suponga que r y l se

---
[2]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology.* 2a. ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974).

relacionan linealmente. (a) Encuentre una ecuación que proporcione r en términos de l. (b) Encuentre el ritmo respiratorio de una oveja cuya lana tiene una longitud de 1 cm.

29. Línea de isocostos En análisis de producción, una *línea de isocostos* es una recta cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden comprarse por el mismo monto. Suponga que un granjero ha asignado \$20 000 para la compra de x toneladas de fertilizante (que cuesta \$200 por tonelada) y ha destinado y acres de tierra (cuyo costo es de \$2000 por acre). Encuentre una ecuación de la línea de isocostos que describa las distintas combinaciones que pueden comprarse con \$20 000. Observe que ni x ni y pueden ser negativas.

30. Línea de isoutilidad Un fabricante produce los productos X y Y para los cuales las ganancias por unidad son de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden x unidades de X, y y unidades de Y, entonces la ganancia total P está dada por $P = 4x + 6y$, donde $x, y \geq 0$. (a) Bosqueje la gráfica de esta ecuación para $P = 240$. El resultado se conoce como *línea de isoutilidad*, y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para $P = 240$. (c) Si $P = 600$, determine la pendiente, (d) ¿Son paralelas las rectas de isoutilidad para los productos X y Y?

31. Escala de calificaciones A fin de poder comparar, un profesor quiere cambiar la escala de calificaciones de un conjunto de exámenes escritos, de manera que la calificación máxima siga siendo 100, pero que el promedio sea 65 en lugar de 56. (a) Encuentre una ecuación lineal que lo logre. [*Una pista:* Se quiere que 56 se convierta en 65 y 100 permanezca como 100. Considere los puntos (56, 65) y (100, 100), y de manera más general, (x, y), donde x es la calificación anterior y y es la nueva. Encuentre la pendiente y utilice la forma punto-pendiente. Exprese y en términos de x.] (b) Si en la nueva escala 62 es la calificación mínima para acreditar, ¿cuál fue la calificación mínima para acreditar en la escala original?

32. Psicología El resultado del experimento psicológico de Stemberg[3] sobre la recuperación de información es que el tiempo de reacción, R, de una persona, en milisegundos, de acuerdo con las estadísticas, es una función lineal del tamaño del conjunto de memoria N de la manera siguiente:

$$R = 38N + 397$$

Bosqueje la gráfica para $1 \leq N \leq 5$. ¿Cuál es la pendiente?

33. Psicología En cierto experimento de aprendizaje que requiere repetición y memoria,[4] se estimó que la proporción p de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo t (en segundos), donde t se ubica entre 5 y 9. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 segundos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada segundo adicional en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. (a) Encuentre una ecuación que exprese p en términos de t. (b) ¿Qué proporción de elementos se recordaron con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

34. Dieta para cerdos Tras las pruebas realizadas con una dieta experimental para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo, de acuerdo con las estadísticas, era una función lineal del número de días, d, después de haber iniciado la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio del régimen fue de 21 kg, y a partir de entonces ganó 6.3 kg cada 10 días, determine w como una función de d, y calcule el peso de un cerdo 55 días después de que inició la dieta.

35. Canto de grillos Los biólogos han descubierto que el número de cantos (sonidos) por minuto que emiten los grillos de cierta especie están relacionados con la temperatura. La relación es casi lineal. A 68°F, los grillos emiten casi 124 cantos (sonidos) por minuto. A 80°F producen 172 por minuto aproximadamente. (a) Encuentre una ecuación que proporcione la temperatura en grados Fahrenheit, t, en términos del número de cantos, c, por minuto. (b) Si se cuentan los cantos sólo durante 15 segundos, ¿cómo puede estimarse rápidamente la temperatura?

3.3 Funciones cuadráticas

OBJETIVO

Hacer bosquejos de parábolas que surgen de funciones cuadráticas.

En la sección 2.2 se describió una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. En otras palabras,

DEFINICIÓN

Una función f es una ***función cuadrática*** si y sólo si $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $F(t) = -3t^2$ son cuadráticas. Sin embargo, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *no* es cuadrática, porque no puede escribirse en la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$.

[3] G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

[4] D. L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, vol. 10, ed. G. H. Bower (Nueva York: Academic Press, Inc., 1976), p. 77.

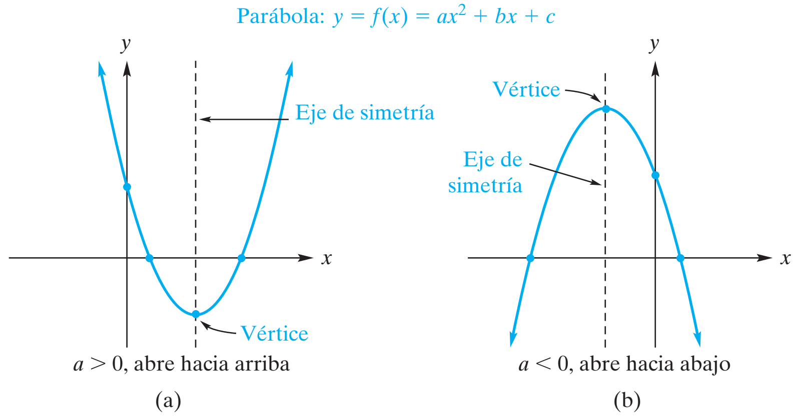


FIGURA 3.19 Parábolas.

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se llama **parábola** y su forma se asemeja a la de las curvas de la figura 3.19. Si $a > 0$, la gráfica se extiende hacia arriba de manera indefinida, y se dice que la parábola *abre hacia arriba* [figura 3.19(a)]. Si $a < 0$, entonces la parábola *abre hacia abajo* [figura 3.19(b)].

Cada parábola de la figura 3.19 es *simétrica* con respecto a una recta vertical, que se llama el **eje de simetría** de la parábola. Es decir, si se doblara la página a lo largo de una de estas rectas, las dos mitades de la parábola correspondiente coincidirían. El eje (de simetría) *no* es parte de la parábola, pero resulta útil para bosquejarla.

En la figura 3.19 también se muestran puntos con la etiqueta **vértice**, donde el eje corta a la parábola. Si $a > 0$, el vértice es el punto "más bajo" de la parábola. Esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo en ese punto. Al realizar manipulaciones algebraicas sobre $ax^2 + bx + c$ (lo que se conoce como *completar el cuadrado*), no sólo puede determinarse este valor mínimo, sino también dónde ocurre. Se tiene

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c$$

Al sumar y restar $\dfrac{b^2}{4a}$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

de modo que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Puesto que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $a > 0$, se sigue que $f(x)$ tiene un valor mínimo cuando $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, esto es, cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$. La coordenada y correspondiente a este valor de x es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$. Así, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Éste también es el vértice de la parábola que abre hacia abajo ($a < 0$), pero en este caso $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es el valor máximo de $f(x)$. [Vea la figura 3.19(b).]

Observe que una función cuya gráfica es una parábola no es uno a uno, ya sea en el caso donde la parábola se abre hacia arriba o donde abre hacia abajo, puesto que existen muchas líneas horizontales que cortarán la gráfica dos veces. Sin embargo, si se restringe el dominio de una función cuadrática a $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ o bien a $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, entonces la función restringida pasará la prueba de la recta horizontal y por lo tanto será uno a uno. (Existen muchas otras restricciones de una función cuadrática que son uno a uno; sin embargo, sus dominios consisten en más de un intervalo.) Se sigue que dichas funciones cuadráticas restringidas tienen funciones inversas.

El punto donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje y (esto es, la intersección y) se da cuando $x = 0$. La coordenada y de este punto es c, de modo que la intersección con el eje y es c. En resumen, se tiene lo siguiente.

Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
3. La intersección y es c.

Puede hacerse un rápido bosquejo de la gráfica de una función cuadrática al localizar primero el vértice, la intersección y y unos cuantos puntos más, como aquéllos donde la parábola interseca al eje x. Las *intersecciones* x se encuentran al establecer que $y = 0$ y resolver para x. Una vez que se encuentran las intersecciones y el vértice, es relativamente fácil trazar la parábola apropiada a través de estos puntos. En el caso de que las intersecciones con el eje x estén muy cercanas al vértice o que no existan intersecciones con el eje x, se determina un punto en cada lado del vértice, de modo que pueda hacerse un bosquejo razonable de la parábola. Tenga en cuenta que al trazar una recta vertical (con línea punteada) a través del vértice se obtiene el eje de simetría. Si se grafican puntos a un lado del eje, pueden obtenerse, por simetría, los correspondientes del otro lado.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un vendedor de automóviles cree que su utilidad diaria por la venta de furgonetas está dada por $P(x) = -x^2 + 2x + 399$, donde x es el número de vehículos vendidos. Determine el vértice de la función y sus intersecciones con los ejes, y haga una gráfica de la función. Si su modelo es correcto, comente sobre la factibilidad de vender furgonetas.

EJEMPLO 1 Gráfica de una función cuadrática

Grafique la función cuadrática $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

Solución: Aquí $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y, por lo tanto, tiene un punto más alto. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$$

La coordenada y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Así, el vértice es $(-2, 16)$, de modo que el valor máximo de $f(x)$ es 16. Como $c = 12$, la intersección y es 12. Para encontrar las intersecciones x, se determina que y igual a 0 en $y = -x^2 - 4x + 12$ y se despeja x:

$$0 = -x^2 - 4x + 12$$
$$0 = -(x^2 + 4x - 12)$$
$$0 = -(x + 6)(x - 2)$$

Entonces, $x = -6$ o $x = 2$, de modo que las intersecciones x son -6 y 2. Ahora se traza el vértice, el eje de simetría y las intersecciones [vea la figura 3.20(a)]. Como (0, 12) está a *dos* unidades a la *derecha* del eje de simetría, existe un punto correspondiente *dos* unidades a la *izquierda* del eje con la misma coordenada y. Por lo tanto, se obtiene el punto $(-4, 12)$. Al unir todos los puntos, se traza una parábola que abre hacia abajo. [Vea la figura 3.20(b).]

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

EJEMPLO 2 Gráfica de una función cuadrática

Grafique $p = 2q^2$.

Solución: Aquí p es una función cuadrática de q, donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Como $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y, por lo tanto, tiene un punto más bajo. La coorde-

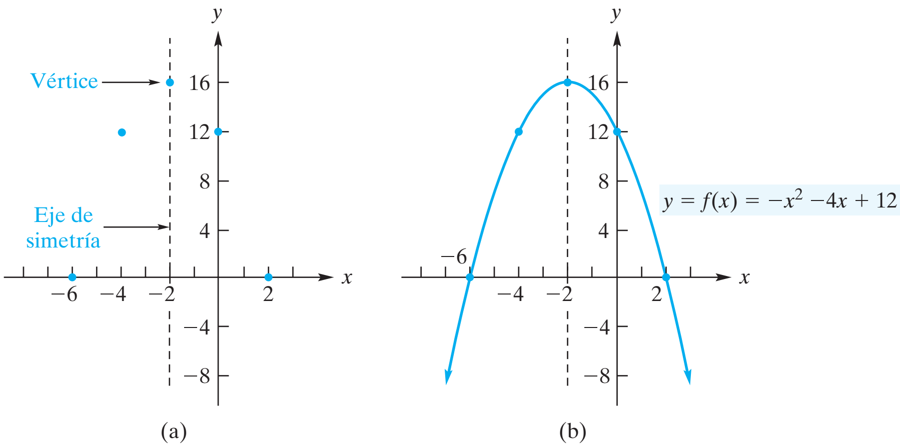


FIGURA 3.20 Gráfica de la parábola $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

q	p
2	8
−2	8

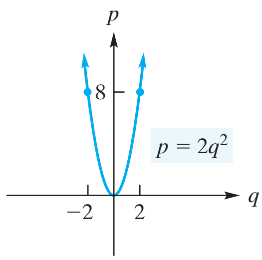


FIGURA 3.21 Gráfica de la parábola $p = 2q^2$.

El ejemplo 3 ilustra que la determinación de las intersecciones puede requerir el uso de la fórmula cuadrática.

nada q del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0$$

y la coordenada p es $2(0)^2 = 0$. En consecuencia, el valor *mínimo* de p es 0 y el vértice es $(0, 0)$. En este caso, el eje p es el eje de simetría. Una parábola que abre hacia arriba con vértice en $(0, 0)$ no puede tener ninguna otra intersección. De ahí que para hacer un buen bosquejo de esta parábola, se grafica un punto a cada lado del vértice. Si $q = 2$, entonces $p = 8$. Esto da el punto $(2, 8)$ y, por simetría, el punto $(-2, 8)$. (Vea la figura 3.21.)

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Un hombre que está parado sobre el montículo del lanzador lanza una bola recta a una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura h de la bola, en pies, t segundos después de que fue lanzada se describe mediante la función $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$, para $t \geq 0$. Encuentre el vértice, las intersecciones con los ejes, y trace su gráfica.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función cuadrática

Grafique $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

Solución: Aquí g es una función cuadrática, donde $a = 1$, $b = -6$ y $c = 7$. La parábola abre hacia arriba, porque $a > 0$. La coordenada x del vértice (el punto más bajo) es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$$

y $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$, que es el valor mínimo de $g(x)$. Por lo tanto, el vértice es $(3, -2)$. Ya que $c = 7$, la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intersecciones x, se establece que $g(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 6x + 7$$

El lado derecho no puede factorizarse con facilidad, de modo que se usará la fórmula cuadrática para encontrar los valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

Por lo tanto, las intersecciones x son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$. Después de graficar el vértice, las intersecciones y (por simetría) el punto $(6, 7)$, se dibuja una parábola que se abre hacia arriba en la figura 3.22.

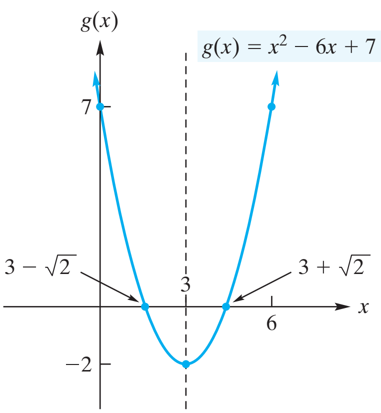


FIGURA 3.22 Gráfica de la parábola $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

x	y
-2	7
1	7

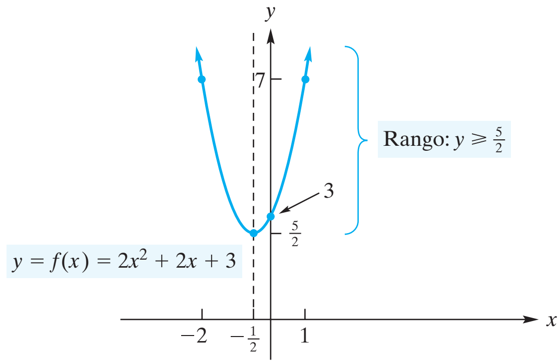


FIGURA 3.23 Gráfica de $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función cuadrática

Grafique $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ y determine el rango de f.

Solución: Esta función es cuadrática, donde $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$. Como $a > 0$ la gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2}$$

y la coordenada y es $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$. Por ende, el vértice es $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Como $c = 3$, la intersección y es 3. Una parábola que abre hacia arriba y que tiene vértice por encima del eje x no tiene intersecciones x. En la figura 3.23 se grafica la intersección y, el vértice y un punto adicional $(-2, 7)$ a la izquierda del vértice. Por simetría, también se obtiene el punto $(1, 7)$. Al trazar una parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Con base en la figura, se ve que el rango de f es toda $y \geq \frac{5}{2}$, esto es, el intervalo $[\frac{5}{2}, \infty)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

EJEMPLO 5 Determinación y gráfica de una inversa

Para la parábola dada por la función

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

determine la inversa de la función restringida dada por $g(x) = ax^2 + bx + c$, para $x \geq -\frac{b}{2a}$. Grafique g y g^{-1} en el mismo plano, en el caso donde $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$.

Solución: A fin de seguir el procedimiento descrito en el ejemplo 5 de la sección 2.4, se comienza por resolver $y = ax^2 + bx + c$, donde $x \geq -\frac{b}{2a}$, para x en términos de y. Esto se hace por medio de la aplicación de la fórmula cuadrática $ax^2 + bx + c - y = 0$, de donde se obtiene $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}$. Siempre que $\sqrt{b^2 - 4a(c-y)}$ está definido (como un número real) su valor es no negativo. Por lo tanto, el signo de $\frac{\sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a}$ depende de a. Es no negativo cuando a es positiva, es decir, cuando la parábola abre hacia arriba; y es no positiva cuando a es negativa, es decir, cuando la parábola abre hacia abajo. Así, para satisfacer $x \geq -\frac{b}{2a}$ debe tomarse el + de ± cuando $a > 0$ y la parábola abre hacia arriba y el – de ± cuando $a < 0$ y la parábola abre hacia abajo. Para mayor claridad, se optará ahora por el caso de $a > 0$. Una vez más, se recurre al procedimiento del ejemplo 5 de 2.4, de donde se sigue que $g^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$. El vértice de cualquier parábola tiene coordenada y dada por $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Por definición, el dominio de g es $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Ahora es evidente que en el caso de la apertura hacia arriba, el

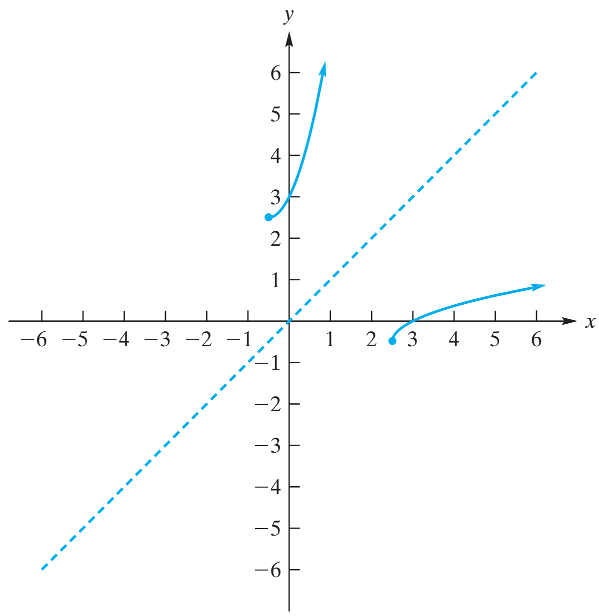


FIGURA 3.24 Gráfica de g y g^{-1}.

rango de g es $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, \infty\right)$. Como se estableció en la sección 2.4, es un hecho generalmente aceptado que el dominio de g^{-1} es el rango de g. Ahora se verificará esta aseveración al considerar directamente el dominio de $\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c-x)}}{2a}$. El dominio consiste en el conjunto de todas las x para las cuales $b^2-4a(c-x) \geq 0$. Evidentemente, esta desigualdad es equivalente a $b^2-4ac+4ax \geq 0$, que a su vez es equivalente a $4ax \geq -(b^2-4ac)$. En otras palabras, $x \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}$ tal como se requirió.

Para completar el ejercicio, observe que en la figura 3.23 se proporciona la gráfica de $y = 2x^2 + 2x + 3$. Para la tarea que nos ocupa, se traza de nuevo la parte de la curva que cae a la derecha del eje de simetría. Esto da la gráfica de g. Después se presenta una copia punteada de la recta $y = x$. Finalmente, se dibuja la imagen de espejo de g en la recta $y = x$ para obtener la gráfica de g^{-1} como en la figura 3.24.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

INGRESO MÁXIMO

La función de demanda para la colección de libros de cocina de un editor es $p = 6 - 0.003q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por día). Encuentre el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

Debe agregar la relación para el ingreso total a su repertorio de fórmulas de negocios y economía.

EJEMPLO 6 Ingreso máximo

La función de demanda para un producto es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del productor, y determine este ingreso.

Solución:

Estrategia Para maximizar el ingreso, debe determinarse la función de ingreso, $r = f(q)$. Si se utiliza la relación

$$\textbf{ingreso total} = \textbf{(precio)(cantidad)}$$

se tiene

$$r = pq$$

Si se usa la ecuación de demanda, p puede expresarse en términos de q, de modo que r será una función de q.

Se tiene

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q \\ r &= 1000q - 2q^2 \end{aligned}$$

Observe que r es una función cuadrática de q, donde $a = -2$, $b = 1000$ y $c = 0$. Como $a < 0$ (la parábola abre hacia abajo), r es máximo en el vértice (q, r), donde

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250$$

El valor máximo de r está dado por

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250\,000 - 125\,000 = 125\,000 \end{aligned}$$

Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de \$125 000, que ocurre en un nivel de producción de 250 unidades. En la figura 3.25(a) se muestra la gráfica de la función de ingreso. Sólo se dibuja la parte en la que $q \geq 0$ y $r \geq 0$, puesto que la cantidad y el ingreso no pueden ser negativos.

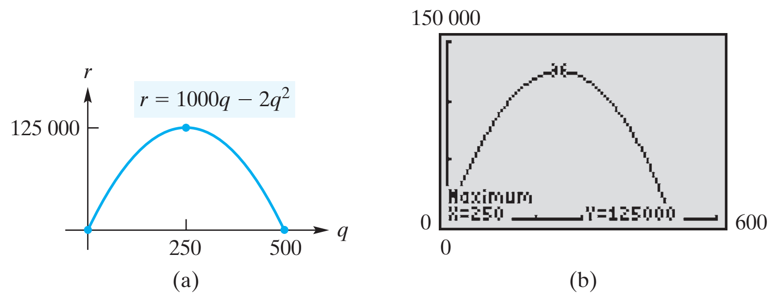


FIGURA 3.25 Gráfica de la función de ingreso.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 29

TECNOLOGÍA

El valor máximo (o mínimo) de una función puede encontrarse de manera conveniente con una calculadora graficadora, mediante Trace y Zoom, o bien con la operación de "maximum" (o "minimum"). En la figura 3.25(b) se muestra la pantalla para la función de ingreso del ejemplo 6, a saber, la gráfica de $y = 1000x - 2x^2$. Observe que se reemplazó r por y y q por x.

Problemas 3.3

Establezca si la función de los problemas 1 a 8 es cuadrática o no.

1. $f(x) = 5x^2$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$

3. $g(x) = 7 - 6x$

4. $k(v) = 3v^2(v^2 + 2)$

5. $h(q) = (3 - q)^2$

6. $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$

7. $f(s) = \dfrac{s^2 - 9}{2}$

8. $g(t) = (t^2 - 1)^2$

No incluya una gráfica en los problemas 9 a 12.

9. (a) Encuentre el vértice de la parábola $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$. (b) ¿Corresponde al punto más bajo o al más alto de la gráfica?

10. Repita el problema 9, si $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$.

11. Para la parábola $y = f(x) = x^2 + x - 6$, encuentre (a) la intersección y, (b) las intersecciones x, y (c) el vértice.

12. Repita el problema 11, si $y = f(x) = 5 - x - 3x^2$.

Grafique cada función de los problemas 13 a 22. Obtenga el vértice y las intersecciones, y determine el rango.

***13.** $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$

14. $y = f(x) = -4x^2$

***15.** $y = g(x) = -2x^2 - 6x$

16. $y = f(x) = x^2 - 4$

***17.** $s = h(t) = t^2 + 6t + 9$

18. $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2$

19. $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2$

20. $y = H(x) = 1 - x - x^2$

***21.** $t = f(s) = s^2 - 8s + 14$

22. $t = f(s) = s^2 + 6s + 11$

En los problemas 23 a 26, establezca si $f(x)$ tiene un valor máximo o mínimo y encuentre dicho valor.

23. $f(x) = 49x^2 - 10x + 17$ **24.** $f(x) = -3x^2 - 18x + 7$

25. $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2$ **26.** $f(x) = x(x + 3) - 12$

En los problemas 27 y 28, restrinja la función cuadrática a aquellas x que satisfagan $x \geq v$, donde v es la coordenada x del vértice de la parábola. Determine la inversa de la función restringida. Grafique la función restringida y su inversa en el mismo plano.

***27.** $f(x) = x^2 - 2x + 4$ **28.** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

***29. Ingreso** La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 200 - 5q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

30. Ingreso La función de demanda para la línea de reglas de plástico de una compañía de artículos de oficina es $p = 0.85 - 0.00045q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

31. Ingreso La función de demanda para la línea de lap-tops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Encuentre el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

32. Marketing Una compañía de marketing estima que n meses después de la introducción del nuevo producto de un cliente, $f(n)$ miles de familias lo usarán, donde

$$f(n) = \frac{10}{9}n(12 - n), \quad 0 \leq n \leq 12$$

Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

33. Utilidad La utilidad diaria proveniente de la venta de árboles en el departamento de jardinería de una tienda está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones de la función y grafique la función.

34. Psicología Uno de los pronósticos de los precursores de la psicología relaciona la magnitud de un estímulo, x, con la magnitud de una respuesta, y, lo cual se expresa mediante la ecuación $y = kx^2$, donde k es una constante del experimento. En un experimento sobre reconocimiento de patrones, $k = 2$. Determine el vértice de la función y haga la gráfica de su ecuación (suponga que no hay restricción sobre x).

35. Biología Ciertos biólogos estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteína,[5] la cual consistía en levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de levadura en la mezcla, el grupo de científicos estimó que el peso promedio (en gramos) que una rata había aumentado durante un periodo fue

$$f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100$$

Encuentre el peso máximo aumentado.

36. Altura de una pelota Suponga que la altura, s, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$s = -4.9t^2 + 62.3t + 1.8$$

donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos (vea la figura 3.26). ¿Después de cuántos segundos alcanza la pelota su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

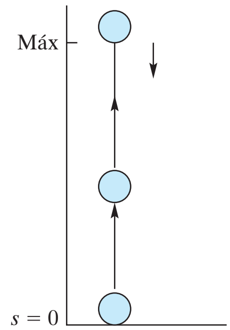


FIGURA 3.26 Pelota lanzada verticalmente hacia arriba (problema 36).

37. Tiro con arco Un muchacho que está parado en una colina, tira una flecha directamente hacia arriba a una velocidad inicial de 85 pies por segundo. La altura, h, de la flecha en pies, t segundos después de que se lanzó, se describe mediante la función $h(t) = -16t^2 + 85t + 22$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la flecha? ¿Después de cuántos segundos de ser disparada alcanza esta altura?

38. Lanzamiento de muñeca Una niña de 6 años de edad que está parada sobre una caja de juguetes lanza una muñeca directamente hacia arriba, a una velocidad inicial de 16 pies por segundo. La altura h de la muñeca en pies, t segundos después de que se lanzó se describe mediante la función $h(t) = -16t^2 + 16t + 4$. ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

39. Lanzamiento de un cohete Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una cochera a una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, del cohete en pies, t segundos después de haber sido lanzado, se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 16$. Encuentre el vértice y las intersecciones, y grafique la función.

40. Área Exprese el área del rectángulo que se muestra en la figura 3.27 como una función cuadrática de x. ¿Para qué valor de x el área será máxima?

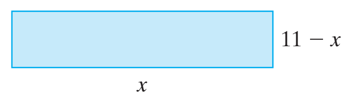


FIGURA 3.27 Diagrama para el problema 40.

41. Terreno cercado Un contratista quiere cercar un terreno rectangular adyacente a una carretera recta, y desea utilizar la orilla de la carretera como uno de los lados del área cercada (vea la figura 3.28). Si el constructor cuenta con 500 pies de cerca, encuentre las dimensiones del área máxima que se puede delimitar.

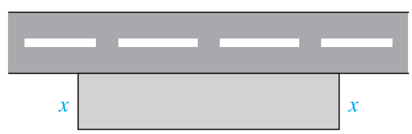


FIGURA 3.28 Diagrama para el problema 41.

[5]Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein,* ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

42. Encuentre dos números cuya suma es 78 y su producto es un máximo.

43. A partir de la gráfica de $y = 1.4x^2 - 3.1x + 4.6$, determine las coordenadas del vértice. Redondee los valores a dos decimales. Verifique su respuesta con el uso de la fórmula para el vértice.

44. Encuentre los ceros de $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 8.5$ al examinar la gráfica de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Determine el número de ceros reales de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

(a) $f(x) = 4.2x^2 - 8.1x + 10.4$
(b) $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{35}x + 7$
(c) $f(x) = \dfrac{5.1 - 7.2x - x^2}{4.8}$

46. Encuentre el valor máximo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 5.4 + 12x - 4.1x^2$ a partir de su gráfica.

47. Encuentre el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 20x^2 - 13x + 7$ a partir de su gráfica.

OBJETIVO

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución. (En el capítulo 6 se presentan otros métodos.)

3.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el gerente de una fábrica establece un programa de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 resistores y 9 transistores. El modelo B requiere de 5 resistores y 14 transistores. La fábrica obtiene de sus proveedores 335 resistores y 850 transistores diarios. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir diariamente, de modo que se utilicen todos los transistores y resistores?

Es buena idea elaborar una tabla que resuma la información importante. En la tabla 3.2 se muestra el número de resistores y transistores requeridos para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 3.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Resistores	4	5	335
Transistores	9	14	850

Suponga que x es el número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y es el número del modelo B. Entonces se requieren de $4x + 5y$ resistores, y de $9x + 14y$ transistores. Como hay 335 resistores y 850 transistores disponibles, se tiene

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335 & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Este conjunto de ecuaciones se llama **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea.* Estas parejas de valores (x, y) se llaman *soluciones* del sistema.

ADVERTENCIA

Observe que *cada una* de las soluciones está dada por un *par* de valores.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; pueden llamarse L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; es decir, hacen a la ecuación verdadera. Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección proporciona una solución del sistema.

Si se dibujan L_1 y L_2 en el mismo plano, podrían ocurrir tres situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en un punto único, por ejemplo (a, b). (Vea la figura 3.29.) Así, el sistema tiene la solución $x = a$ y $y = b$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común. (Vea la figura 3.30.) En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta. (Vea la figura 3.31.) Aquí, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta constituyen una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

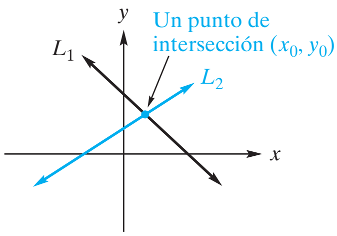


FIGURA 3.29 Sistema lineal (una solución).

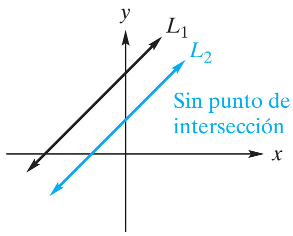


FIGURA 3.30 Sistema lineal (sin solución).

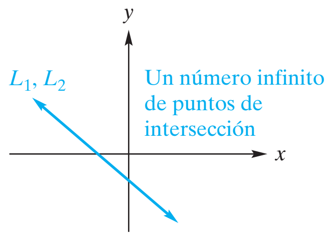


FIGURA 3.31 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

El objetivo principal de esta sección es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Se reemplazará de manera sucesiva el sistema por otros que tengan las mismas soluciones. Para generalizar, la terminología de la sección 0.7, subsección titulada "Ecuaciones equivalentes" se dice que dos sistemas son *equivalentes* si sus conjuntos de soluciones son iguales. Los sistemas de reemplazo tienen formas progresivamente más deseables para determinar la solución. En términos más precisos, se busca un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca. (En este caso se dice que la variable ha sido *eliminada*.) Al tratar con sistemas de ecuaciones *lineales*, el paso de un sistema a otro equivalente siempre se logra mediante uno de los siguientes procedimientos:

1. Intercambio de dos ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero.
3. Reemplazo de una ecuación por sí misma más un múltiplo de otra ecuación.

Estos procedimientos se abordarán con más detalle en el capítulo 6. Por el momento, puesto que en este capítulo también se considerarán sistemas no lineales, es conveniente expresar las soluciones en términos de los principios generales de la sección 0.7, que garantizan la equivalencia de las ecuaciones.

Este procedimiento se ilustrará para el sistema del problema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335 & \textbf{(3)} \\ 9x + 14y = 850 & \textbf{(4)} \end{cases}$$

Para empezar, se obtendrá un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero se encuentra un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x de cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Después de multiplicar la ecuación (3) por 9 [es decir, multiplicar ambos lados de la ecuación (3) por 9] y multiplicar la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015 & \textbf{(5)} \\ -36x - 56y = -3400 & \textbf{(6)} \end{cases}$$

Los lados izquierdo y derecho de la ecuación (5) son iguales, de modo que cada lado puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (6). Esto resulta en

$$-11y = -385$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Al resolverla:

$$y = 35$$

así se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} -36x - 56y = -3400 & \textbf{(7)} \\ y = 35 & \textbf{(8)} \end{cases}$$

Al reemplazar y en la ecuación (7) por 35, se llega a

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400 \\ -36x - 1960 &= -3400 \\ -36x &= -1440 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Así, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 40 \\ y = 35 \end{cases}$$

Esta respuesta puede verificarse al sustituir $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) se obtiene $4(40) + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) se obtiene $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por lo tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35$$

El administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B diarios. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición**. Aunque se eligió eliminar primero x, pudo haberse hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR ADICIÓN

Un consultor en computadoras tiene invertidos \$200 000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de \$17 200, ¿cuánto está invertido a cada tasa?

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilice eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 3y + 2x = 3 \end{cases}$$

Solución: Por conveniencia se alinean los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 & \textbf{(9)} \\ 2x + 3y = 3 & \textbf{(10)} \end{cases}$$

Para eliminar y, se multiplica la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39 & \textbf{(11)} \\ 8x + 12y = 12 & \textbf{(12)} \end{cases}$$

Al sumar la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Se tiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39 & \textbf{(13)} \\ x = 3 & \textbf{(14)} \end{cases}$$

Al reemplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$\begin{aligned} 9(3) - 12y &= 39 \\ -12y &= 12 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

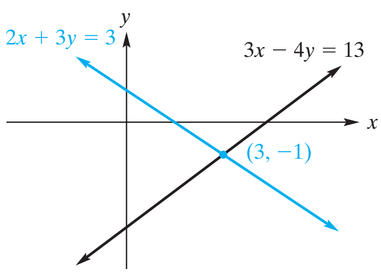


FIGURA 3.32 Sistema lineal del ejemplo 1: una solución.

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. En la figura 3.32 se muestra una gráfica del sistema.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13 & \textbf{(15)} \\ 2x + 3y = 3 & \textbf{(16)} \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero se elige una de las ecuaciones —por ejemplo, la ecuación (15)— y se despeja una de las incógnitas en términos de la otra, por ejemplo x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$ que a su vez equivalente a

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}$$

y se obtiene

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y + \dfrac{13}{3} & \textbf{(17)} \\ 2x + 3y = 3 & \textbf{(18)} \end{cases}$$

Tras *sustituir* el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18), se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3 \qquad \textbf{(19)}$$

De este modo ya se eliminó x. Al resolver la ecuación (19), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y &= 3 \\ 8y + 26 + 9y &= 9 \qquad \text{(al eliminar fracciones)} \\ 17y &= -17 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Al reemplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

como antes. Este método se llama **eliminación por sustitución**.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Dos especies de ciervos, A y B que viven en un refugio de vida salvaje comen alimento adicional en el invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere de 4 libras de croquetas y 5 de heno. Cada ciervo de la especie B requiere de 2 libras de croquetas y 7 de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sostener con el alimento, de modo que cada semana se consuma toda la comida?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilice la eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Solución: Es fácil resolver la primera ecuación para x. Al hacerlo se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8 & \textbf{(20)} \\ 2x + 4y + 4 = 0 & \textbf{(21)} \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21), se obtiene

$$\begin{aligned} 2(-2y + 8) + 4y + 4 &= 0 \\ -4y + 16 + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por lo tanto, se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8 & \textbf{(22)} \\ 20 = 0 & \textbf{(23)} \end{cases}$$

Como la ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si se observa que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-intersección como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

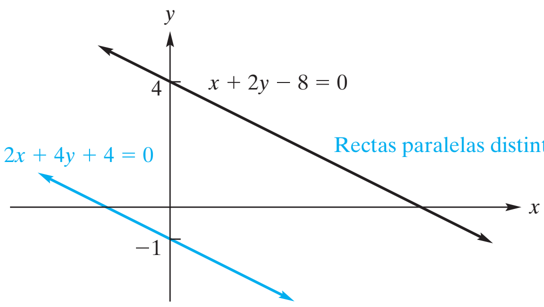


FIGURA 3.33 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, determinan rectas paralelas diferentes (vea la figura 3.33).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3

UN SISTEMA LINEAL CON UN NÚMERO INFINITO DE SOLUCIONES

Una granja piscícola está criando dos especies de peces A y B, a las cuales se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. La granja recibe cada día 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo. Cada pez de la especie A requiere de 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo. Cada pez de la especie B requiere de 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo. ¿Cuántos peces de cada especie se pueden mantener de modo que diariamente se consuman todos los suplementos?

EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resuelva

$$\begin{cases} x + 5y = 2 & (24) \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}y = 1 & (25) \end{cases}$$

Solución: Se comienza por eliminar x de la segunda ecuación. Al multiplicar la ecuación (25) por -2, se tiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2 & (26) \\ -x - 5y = -2 & (27) \end{cases}$$

Al sumar la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2 & (28) \\ 0 = 0 & (29) \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora se verá cómo puede expresarse esta respuesta. De la ecuación (28) se tiene $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por lo tanto, puede escribirse $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r$$
$$y = r$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro**, y se dice que hay una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendiente-intersección, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

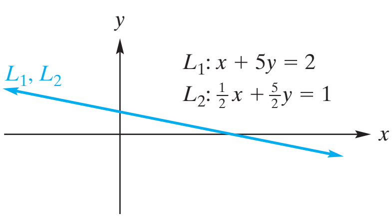


FIGURA 3.34 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

en el que ambas ecuaciones representan la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (vea la figura 3.34) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por la solución paramétrica.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

TECNOLOGÍA

Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7 \\ 2.6x - 3y = 18 \end{cases}$$

Solución: Primero se resuelve cada ecuación para y, de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$:

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x)$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x)$$

Ahora se introducen estas funciones como Y_1 y Y_2 y se despliegan sobre el mismo rectángulo de visualización (vea la figura 3.35). Por último, con los comandos trace y zoom, o bien con el de intersección, se estima la solución como $x = 2.52$, $y = -3.82$.

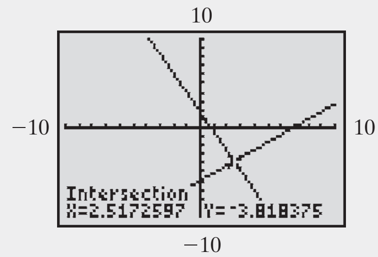


FIGURA 3.35 Solución gráfica del sistema.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 *litros de solución de ácido al* 25% *(veinticinco por ciento del volumen es ácido). Si hay disponibles en existencia soluciones al* 30% *y al* 18%, *¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?*

Solución: Sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500$$

Para ayudar a visualizar la situación, se dibuja el diagrama en la figura 3.36. En 500 litros de una solución al 25%, habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. Entonces,

$$0.30x + 0.18y = 125$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Al resolver la primera para x se obtiene $x = 500 - y$. Después de sustituir en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125$$

Al resolver ésta para y, se encuentra que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (vea la figura 3.37).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

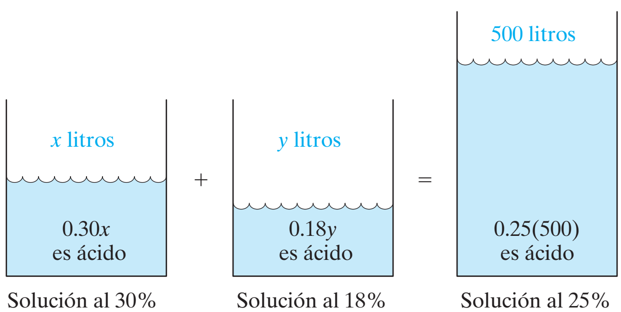


FIGURA 3.36 Problema de la mezcla.

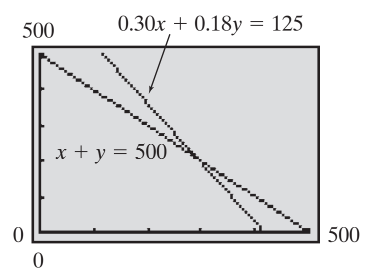


FIGURA 3.37 Gráfica para el ejemplo 4.

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables** x, y **y** z es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C al menos una de ellas es diferente de cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de esas ecuaciones. Desde un punto de vista geométrico, una ecuación lineal general con tres variables representa un *plano* en el espacio, y una solución a un sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. En el ejemplo 5 se muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL DE TRES VARIABLES

Una cafetería se especializa en mezclas de café de calidad superior para conocedores. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por bolsa de una libra. El costo por libra de estos granos es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo contendrá la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resuelva

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (30) \\ -x + 2y + 2z = 1 & (31) \\ x - y - 3z = -6 & (32) \end{cases}$$

Solución: Este sistema consiste en tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Al sustituir este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), se obtiene

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3 \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1 \\ x = y + 3z - 6 \end{cases}$$

Si se simplifica, resulta

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15 & (33) \\ y - z = -5 & (34) \\ x = y + 3z - 6 & (35) \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Como cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debe considerarse su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15 & (33) \\ y - z = -5 & (34) \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que puede reemplazarse la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{esto es,} \quad z = 3$$

Como z es 3, puede reemplazarse la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = -2 \\ x = y + 3z - 6 \end{cases}$$

de donde $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$ y $z = 3$, que usted ha de verificar.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros. Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resuelva

$$\begin{cases} x - 2y = 4 & (35) \\ 2x - 3y + 2z = -2 & (36) \\ 4x - 7y + 2z = 6 & (37) \end{cases}$$

Solución: Observe que, como la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, pueden considerarse las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) se tiene $x = 2y + 4$. Con el empleo de esta ecuación y el método de sustitución puede eliminarse x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2 \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6 \end{cases}$$

que se simplifica hasta obtener,

$$\begin{cases} x = 2y + 4 & (38) \\ y + 2z = -10 & (39) \\ y + 2z = -10 & (40) \end{cases}$$

Al multiplicando la ecuación (40) por -1 se tiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ -y - 2z = 10 \end{cases}$$

Al sumar la segunda ecuación a la tercera resulta

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y + 2z = -10 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x = 2y + 4 & (41) \\ y + 2z = -10 & (42) \end{cases}$$

Tras resolver la ecuación (42) para y, se tiene

$$y = -10 - 2z$$

que expresa a y en términos de z. También puede expresarse a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{cases} x = -16 - 4z \\ y = -10 - 2z \end{cases}$$

El hecho de que no haya restricciones sobre z, indica una familia de soluciones paramétricas. Si se establece $z = r$, se tiene la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r \\ y &= -10 - 2r \\ z &= r \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, se ve que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, si se establece $r = 1$, se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$. No hay nada especial acerca del nombre del parámetro. De hecho, como $z = r$, podría considerarse a z como el parámetro.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$$

Solución: Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Se eliminará x de la segunda ecuación al multiplicarla primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ -x - 2y - z = -4 \end{cases}$$

Al sumar la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, resulta

$$x = 4 - 2y - z$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que proporciona una familia de soluciones con dos parámetros. Si se establece $y = r$ y $z = s$, se encuentra que la solución del sistema es

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2r - s \\ y &= r \\ z &= s \end{aligned}$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, al hacer $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$. Como en el último ejemplo, no hay nada especial acerca de los nombres de los parámetros. En particular, como $y = r$ y $z = s$, podría considerarse a y y z como los dos parámetros.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

Problemas 3.4

Resuelva algebraicamente los sistemas de los problemas 1 a 24.

*1. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9 \\ 5y - 4x = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2p + q = 16 \\ 3p + 3q = 33 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 5x + 3y = -9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 5x + 9y = 7 \end{cases}$

*9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y \\ x + 5y - 2 = y + 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6 \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w = \frac{1}{6} \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5p + 11q = 7 \\ 10p + 22q = 33 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ -10x + 6y = 4 \end{cases}$

*15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3 \\ x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 4x + 2y - 2z = -2 \\ 3x - y + z = 11 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y - z = 12 \\ 3x + y + 4z = 4 \end{cases}$

*19. $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ 3x - 4z = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$

*23. $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3 \\ 4x + 4y - 2z = 6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5x + y + z = 17 \\ 4x + y + z = 14 \end{cases}$

*25. **Mezcla** Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 800 galones de una solución de ácido al 25%. En existencia tiene soluciones al 20% y 35%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. **Mezcla** Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% y el otro tiene 11%. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. **Telas** Una fábrica textil produce telas elaboradas a partir de diferentes fibras. El propietario necesita producir una tela que cueste $3.25 por libra con algodón, poliéster y nylon. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el producto final?

28. **Impuesto** Una compañía tiene ingresos gravables por $312 000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. **Velocidad de un avión** Un avión recorre 900 millas en 2 horas y 55 minutos con viento a favor. El viaje de regreso le toma 3 horas 26 minutos volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del avión sin viento, calcule también la velocidad del viento.

30. **Velocidad de una balsa** Una balsa recorrió 10 millas aguas abajo durante media hora. El viaje de regreso tomó $\frac{3}{4}$ de hora. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. **Venta de muebles** Un fabricante de comedores produce dos estilos: americano antiguo y contemporáneo. Por su experiencia, la gerencia ha determinado que pueden venderse 20% más comedores del estilo americano antiguo que del contemporáneo. Cada venta de un americano antiguo reporta una utilidad de $250, mientras que se gana $350 en cada contemporáneo. Si para el año próximo la gerencia desea una ganancia total de $130 000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. **Encuesta** A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. La empresa contratada informó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crackers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el informe no indicó que el 16% de los entrevistados no había contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. **Costo de igualación** United Products Co. fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En de Exton, los costos fijos son de $7000 al mes, y el costo de producir cada calculadora es de $7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos ascienden a $8800 al mes y la producción de cada artículo cuesta $6.00. Para el mes que viene United Products necesita 1500 calculadoras. ¿Cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?

34. **Mezcla de café** Un comerciante de café mezcla tres tipos de granos que cuestan $2.20, $2.30 y $2.60 por libra, para obtener 100 libras de café que vende a $2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. **Comisiones** Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros $100 000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad por encima de los $100 000. Si un agente recibió $8500 por ventas de $175 000, y otro recibió $14 800 por ventas de $280 000, encuentre los dos porcentajes.

36. **Utilidades anuales** En los informes financieros, es frecuente comparar las utilidades de una compañía en el año actual (T) con las del año anterior (L), pero no siempre se dan los valores reales de T y L. Este año una compañía tuvo una utilidad de $25 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 30% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. **Empaque de frutas** La compañía de productos orgánicos `Ilovetiny.com` tiene 3600 libras de duraznos que debe empacar en cajas. La mitad de ellas se llenará con duraznos sueltos, cada una con 20 libras de fruta; las otras cajas se empacarán con ocho contenedores plásticos de apertura rápida, cada uno de los cuales contendrá 2.2 libras de durazno. Determine el número de cajas y el número de contenedores que se requerirán.

38. **Inversiones** Una persona tiene dos inversiones, y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida, $\frac{3}{10}$ más $600, se invirtieron en una empresa de riesgo. Al final de un año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

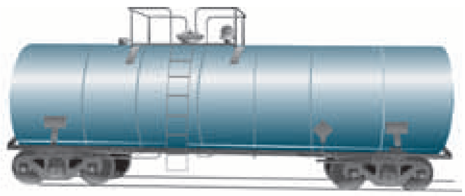
39. **Corrida de producción** Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, en cantidades que se indican en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, se quiere utilizar todo el inventario. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones deben fabricarse?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de $35 000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de $2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad invertida originalmente al 9% ganó 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de $2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados $16 por hora en su departamento de ensamblado. Los operadores semicalificados de ese departamento ganan $9.50 por hora. Los empleados de envíos reciben $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblaje y envíos. Pagará un total de $725 por hora a estos nuevos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos operadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un solvente Un tanque de ferrocarril de 10 000 galones se llenará con solvente proveniente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El solvente de A se bombea a una tasa de 25 gal/min. El solvente B se bombea a una velocidad de 35 gal/min. Por lo general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido, la bomba en A dejó de funcionar durante 5 minutos. Las dos bombas terminaron de operar al mismo tiempo. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?



43. Verifique su respuesta al problema 1 con el uso de su calculadora graficadora.

44. Verifique su respuesta al problema 11 con el uso de su calculadora graficadora.

45. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04 \\ 0.11x + 0.21y = 0.75 \end{cases}$$

46. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} x + \quad y = 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0 \\ 0.8192x + 0.9397y = 20 \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO

Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

3.5 Sistemas no lineales

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal**. Con frecuencia, un sistema no lineal puede resolverse por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Resolución de un sistema no lineal

Resuelva

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0 & (1) \\ 3x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Solución:

Estrategia Si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, por lo general, se despeja una de las variables de la ecuación lineal y se sustituye esa variable en la otra ecuación.

Si se despeja y de la ecuación (2), se obtiene

$$y = 3x + 1 \quad (3)$$

Al sustituir en la ecuación (1) y simplificar, se obtiene

$$x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0$$
$$x = -3 \text{ o } x = 2$$

Si $x = -3$, entonces la ecuación (3) implica que $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean $x = -3$, $y = -8$ y $x = 2$, $y = 7$. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 3.38. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la

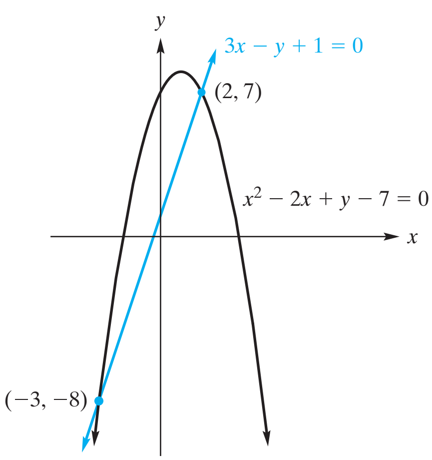


FIGURA 3.38 Sistema de ecuaciones no lineales.

de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

ADVERTENCIA

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las "soluciones".

Resuelva

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Solución: Al despejar y de la segunda ecuación, que es lineal, se obtiene

$$y = 4 - x \tag{4}$$

Después de sustituir en la primera ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 4 - x &= \sqrt{x+2} \\ 16 - 8x + x^2 &= x + 2 \qquad \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x-2)(x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 2$ o $x = 7$. De la ecuación (4), si $x = 2$, entonces $y = 2$; si $x = 7$, entonces $y = -3$. Como se realizó la operación de elevar al cuadrado en ambos lados, es necesario verificar los resultados. Aunque el par $x = 2$, $y = 2$ satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para $x = 7$, $y = -3$. Por lo tanto, la solución es $x = 2$, $y = 2$ (véase la figura 3.39).

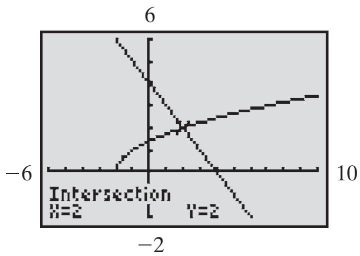


FIGURA 3.39 Sistema no lineal del ejemplo 2.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

TECNOLOGÍA

Resuelva gráficamente la ecuación $0.5x^2 + x = 3$, *donde* $x \geq 0$.

Solución: Para resolver la ecuación, podrían encontrarse los ceros de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$. De manera alterna, puede pensarse en este problema como la solución del sistema no lineal

$$\begin{aligned} y &= 0.5x^2 + x \\ y &= 3 \end{aligned}$$

En la figura 3.40, se estima que el punto de intersección es $x = 1.65$, $y = 3$. Observe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es $x = 1.65$.

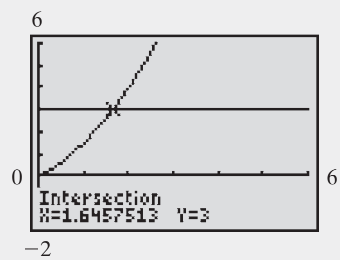


FIGURA 3.40 Solución de $0.5x^2 + x = 3$.

Problemas 3.5

En los problemas 1 a 14, resuelva el sistema no lineal dado.

*1. $\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q \\ p = q + 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28 \\ x - y = 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q + 1 = 0 \\ 5q - 3p - 2 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + 4x - y = -4 \\ y - x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q} \\ p = q^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w \\ 3z = 2w + 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13 \\ y = x^2 - 15 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

*13. $\begin{cases} x = y + 1 \\ y = 2\sqrt{x+2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x-1} + 1 \\ y = \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$

15. **Decoraciones** La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$, donde y es la altura a la que se encuentra la serpentina (en pies) por encima del piso, y x es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función $y = 0.01x + 8.0$, y que

sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

16. Marquesina La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$, donde y es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y x es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina y le hace dos perforaciones. La posición del palo puede describirse por medio de la función $y = 0.912x + 5$. ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

17. Determine gráficamente cuántas soluciones tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

18. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} 2y = x^3 \\ \ \ y = 8 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

19. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

20. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas 21 a 23, resuelva gráficamente la ecuación como si fuera un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

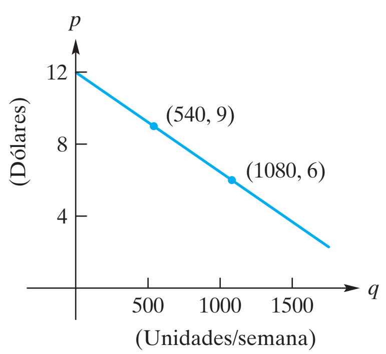
21. $0.8x^2 + 2x = 6$ cuando $x \geq 0$

22. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$

23. $x^3 - 3x^2 = x - 8$

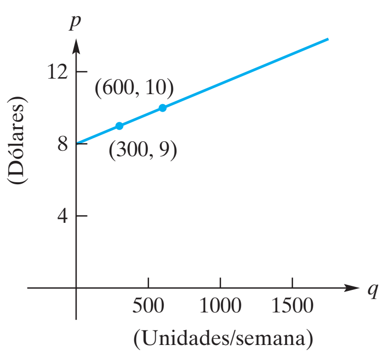
OBJETIVO

Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.



Ecuación de demanda: $p = -\frac{1}{180}q + 12$

FIGURA 3.41 Curva de demanda.



Ecuación de oferta: $p = \frac{1}{300}q + 8$

FIGURA 3.42 Curva de oferta.

3.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

Equilibrio

Recuerde que en la sección 3.2 se expuso que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda* (*ecuación de oferta*). Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \qquad (1)$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8 \qquad (2)$$

donde $q, p \geq 0$. Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 3.41 y 3.42, respectivamente. Al analizar la figura 3.41, se observa que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6, y así sucesivamente. En la figura 3.42 se muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto (m, n) donde las curvas se intersecan se llama **punto de equilibrio** (vea la figura 3.43). El precio, n, llamado **precio de equilibrio**, es aquél al que los consumidores comprarán la misma cantidad que los productores ofrezcan a ese precio. En pocas palabras, n es el precio en el que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad m se llama **cantidad de equilibrio**.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, se resolverá el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Esto se hará para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda)} \\[2ex] p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta)} \end{cases}$$

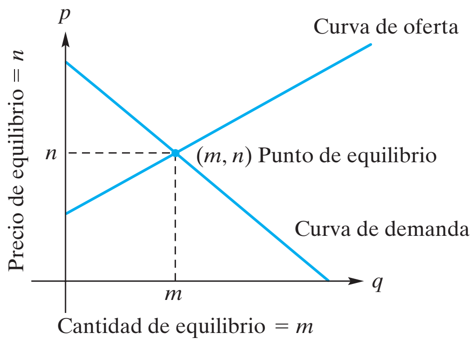


FIGURA 3.43 Equilibrio.

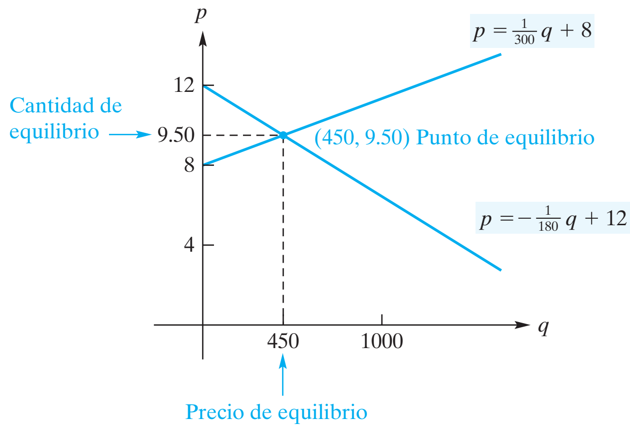


FIGURA 3.44 Equilibrio.

Al sustituir p por $\frac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda, se obtiene

$$\frac{1}{300}q + 8 = -\frac{1}{180}q + 12$$

$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q = 4$$

$$q = 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio)}$$

Por lo tanto,

$$p = \frac{1}{300}(450) + 8$$

$$= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio)}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por lo tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (vea la figura 3.44).

EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ *la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es* $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se cobra al fabricante un impuesto de* \$1.50 por *unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?*

Solución: Antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{8}{100}q + 50 \\ p = -\frac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

Por sustitución,

$$-\frac{7}{100}q + 65 = \frac{8}{100}q + 50$$

$$15 = \frac{15}{100}q$$

$$100 = q$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58$$

Por lo tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía q unidades a un precio de $p = \frac{8}{100}q + 50$ por unidad. Después del impuesto venderá las mismas q unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será $\left(\frac{8}{100}q + 50\right) + 1.50$, de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50$$

La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 51.50 \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{8}{100}q + 51.50 &= -\frac{7}{100}q + 65 \\ \frac{15}{100}q &= 13.50 \\ q &= 90 \\ p &= \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70 \end{aligned}$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (vea la figura 3.45). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de $q = 100$ a $q = 90$, a causa del cambio en el precio de equilibrio. (En los problemas se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto.)

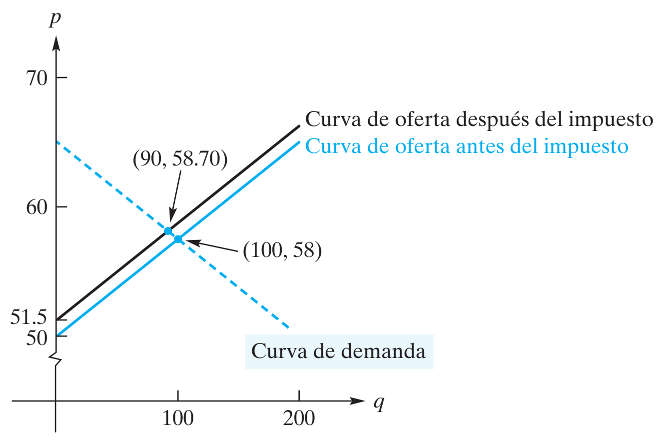


FIGURA 3.45 Equilibrio antes y después del impuesto.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

b. *Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.*

Solución: Si se venden q unidades de un producto a un precio de p dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{TR} = pq$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{TR} = (58)(100) = 5800$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283$$

que es una disminución.

EJEMPLO 2 Equilibrio con demanda no lineal

Encuentre el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ *y* $p = \frac{8000}{q}$, *respectivamente.*

Solución: Aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{q}{40} + 10 \\ p = \dfrac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\frac{8000}{q} = \frac{q}{40} + 10$$

$$320\,000 = q^2 + 400q \qquad \text{(al multiplicar ambos lados por } 40q\text{)}$$

$$q^2 + 400q - 320\,000 = 0$$

$$(q + 800)(q - 400) = 0$$

$$q = -800 \quad \text{o} \quad q = 400$$

Se descarta $q = -800$, puesto que q representa una cantidad. Al elegir $q = 400$, se tiene $p = (8000/400) = 20$, de modo que el punto de equilibrio es (400, 20). (Vea la figura 3.46.)

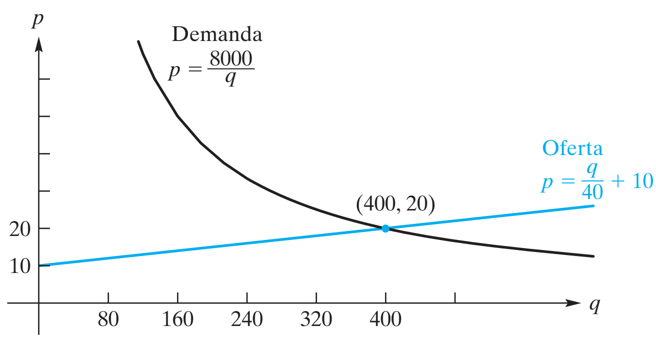


FIGURA 3.46 Equilibrio con demanda no lineal.

Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a \$8 por unidad. Entonces, el ingreso total y_{TR} recibido (en dólares) de la venta de q unidades es

$$y_{TR} = 8q \qquad \text{(ingreso total)}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por q unidades y el costo total de q unidades, es la utilidad del fabricante (o su pérdida, si es negativa):

$$\textbf{utilidad (o pérdida)} = \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total}$$

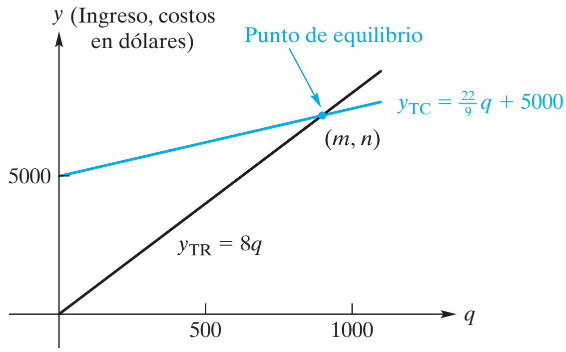


FIGURA 3.47 Gráfica de equilibrio.

El **costo total**, y_{TC}, es la suma de los costos totales variables y_{VC}, y los costos totales fijos y_{FC}:

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}$$

Los **costos fijos** son aquellos que, bajo condiciones normales, no dependen del nivel de producción; es decir, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son la renta, el salario de los oficinistas y el mantenimiento). Los **costos variables** son los que cambian con el nivel de producción (como el costo de materiales, mano de obra, mantenimiento debido al uso y desgaste, etcétera). Suponga que, para q unidades de producto A,

$$y_{FC} = 5000 \qquad \text{(costo fijo)}$$

$$\text{y} \quad y_{VC} = \frac{22}{9}q \qquad \text{(costo variable)}$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \qquad \text{(costo total)}$$

En la figura 3.47 se presentan las gráficas del costo total y del ingreso total. El eje horizontal representa el nivel de producción, q, y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es donde el ingreso total es igual al costo total (TR = TC). Ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama llamado *gráfica del punto de equilibrio* se localiza el punto (m, n), en el que las gráficas de $y_{TR} = 8q$ y $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$ se intersecan. Se llama a m la **cantidad de equilibrio** y a n el **ingreso de equilibrio**. Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es este caso, para cualquier nivel de producción mayor que m, el ingreso total es mayor que el costo total, lo que resulta en una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de m unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que resulta en una pérdida. Para una producción de m unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente se examinarán los datos con mayor detalle.

EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida

Un fabricante vende un producto a \$8 por *unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de* \$5000 *y el variable es de* $\frac{22}{9}$ *(dólares) por unidad.*

a. *Encuentre la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.*

Solución: A un nivel de producción de q unidades, el costo variable es $y_{VC} = \frac{22}{9}q$ y el ingreso total es $y_{TR} = 8q$. Por lo tanto,

$$y_{TR} = 8q$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora se resuelve el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC}$$

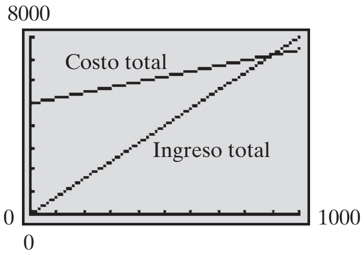


FIGURA 3.48 Punto de equilibrio (900, 7200).

Se tiene

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000$$
$$\frac{50}{9}q = 5000$$
$$q = 900$$

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200$$

(Vea la figura 3.48.)

b. *Encuentre la utilidad cuando se producen* 1800 *unidades.*

Solución: Como utilidad = ingreso total − costo total, cuando $q = 1800$, se tiene

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$
$$= 5000$$

La utilidad cuando se producen y se venden 1800 unidades es de \$5000.

c. *Encuentre la pérdida cuando se producen* 450 *unidades.*

Solución: Cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500$$

Cuando el nivel de producción es de 450 unidades, ocurre una pérdida de \$2500.

d. *Encuentre la producción requerida para obtener una utilidad de* \$10 000.

Solución: Para obtener una utilidad de \$10 000, se tiene

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}$$
$$10\,000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right)$$
$$15\,000 = \frac{50}{9}q$$
$$q = 2700$$

Por lo tanto, deben producirse 2700 unidades.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determine la cantidad de equilibrio de XYZ Manufacturing Co. dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200; *costo variable unitario,* \$2; *ingreso total por vender q unidades,* $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Solución: Para q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q}$$
$$y_{TC} = 2q + 1200$$

Después de igualar el ingreso total al costo total, se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200$$
$$50\sqrt{q} = q + 600 \qquad \text{(al dividir ambos lados entre 2)}$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados, resulta

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2$$
$$0 = q^2 - 1300q + 360\,000$$

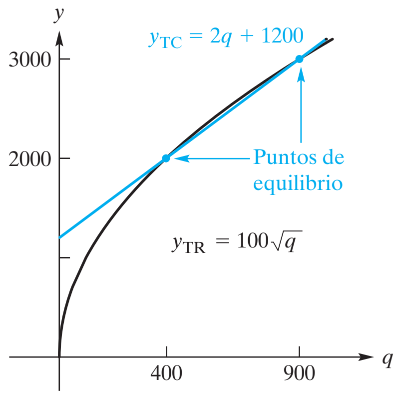


FIGURA 3.49 Dos puntos de equilibrio.

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250\,000}}{2}$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2}$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900$$

Aunque tanto $q = 400$, como $q = 900$ son cantidades de equilibrio, observe en la figura 3.49 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por lo tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

Problemas 3.6

En los problemas 1 a 8 se proporciona una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, bosqueje el sistema.

1. Oferta: $p = \frac{4}{100}q + 3$, Demanda: $p = -\frac{6}{100}q + 13$
2. Oferta: $p = \frac{1}{1500}q + 4$, Demanda: $p = -\frac{1}{2000}q + 9$
3. Oferta: $35q - 2p + 250 = 0$, Demanda: $65q + p - 537.5 = 0$
4. Oferta: $246p - 3.25q - 2460 = 0$, Demanda: $410p + 3q - 14\,452.5 = 0$
5. Oferta: $p = 2q + 20$, Demanda: $p = 200 - 2q^2$
6. Oferta: $p = (q + 10)^2$, Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$
7. Oferta: $p = \sqrt{q + 10}$, Demanda: $p = 20 - q$
8. Oferta: $p = \frac{1}{4}q + 6$, Demanda: $p = \dfrac{2240}{q + 12}$

En los problemas 9 a 14 y_{TR} representa el ingreso total en dólares y y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. En los problemas 9 y 10 bosqueje un diagrama de equilibrio.

*9. $y_{TR} = 4q$, $y_{TC} = 2q + 5000$

10. $y_{TR} = 14q$, $y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$

11. $y_{TR} = 0.05q$, $y_{TC} = 0.85q + 600$

12. $y_{TR} = 0.25q$, $y_{TC} = 0.16q + 360$

*13. $y_{TR} = 90 - \dfrac{900}{q + 3}$, $y_{TC} = 1.1q + 37.3$

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 9q$, $y_{TC} = 3q + 400$

*15. **Negocios** Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

(a) Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo mediante una gráfica.

(b) Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. **Negocios** Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por $y_{TR} = 7q$ y el costo total por $y_{TC} = 6q + 800$, donde q representa el número de unidades producidas y vendidas.

(a) Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje la gráfica de equilibrio.

(b) Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. **Negocios** Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel se alcanza el punto de equilibrio?

18. **Negocios** Se logra el punto de equilibrio de mercado para un producto cuando se producen 13 500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. **Negocios** Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200 000. Los costos fijos son de \$40 000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. **Negocios** La Bigfoot Sandals Co. fabrica sandalias cuyo material cuesta \$0.85 por par; el costo de mano de obra es de \$0.96 por par. Hay costos variables adicionales de \$0.32 por par. Los costos fijos son de \$70 500. Si cada par se vende a \$2.63, ¿cuántos pares deben venderse para que la compañía llegue al equilibrio?

21. **Negocios** Encuentre el punto de equilibrio para la compañía X, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de \$3, los costos fijos de \$1250 y $y_{TR} = 60\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades producidas.

22. Negocios Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, donde p es el precio por unidad para q unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a) \$4, (b) \$2 y (c) \$0.50. Calcule el ingreso total que la compañía recibirá para cada uno de estos precios. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Una pista*: Encuentre el ingreso cuando el precio es p dólares.)

23. Negocios Utilice los datos del ejemplo 1, para determinar cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de \$1.50 por unidad.

24. Negocios La compañía Monroe Forging vende un producto de acero corrugado a Standard Manufacturing, y compite con otros proveedores por estas ventas. El vicepresidente de ventas de Monroe cree que reduciendo el precio del producto se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Standard Manufacturing. Como gerente del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente y la recomiende en caso de ser benéfica desde un punto de vista financiero. Se le pide que determine específicamente lo siguiente:

(a) Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
(b) Volumen de ventas de unidades que se requieren, bajo el precio propuesto, para obtener las mismas utilidades de \$40 000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vice-presidente de ventas**
Precio unitario	\$2.5	\$2.00
Volumen de ventas	200 000 unidades	280 000 unidades
Costo variable		
Total	\$350 000	\$490 000
Por unidad	\$1.75	\$1.75
Costo fijo	\$110 000	\$110 000
Ganancia	\$40 000	?

25. Negocios Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas entre sí. Si q_A y q_B son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y p_A y p_B sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 7 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 24 + p_A - p_B$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -3 + 4p_A - 2p_B$$

y

$$q_B = -5 - 2p_A + 4p_B$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

26. Negocios La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.4q^2 + 15.2$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{36.1}{1 + 0.4q}$$

Aquí p representa el precio por unidad en dólares, y q el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y, a partir de su gráfica, determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

27. Negocios Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q+4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4$$

donde q representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Trace una gráfica de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

3.7 Repaso

Términos y símbolos importantes — Ejemplos

Sección 3.1	**Rectas**	
	pendiente de una recta forma punto-pendiente forma pendiente-intersección	Ej. 1, p. 118
	ecuación lineal general en x y y relación lineal	Ej. 7, p. 121
Sección 3.2	**Aplicaciones y funciones lineales**	
	ecuación de demanda curva de demanda ecuación de oferta curva de oferta	Ej. 2, p. 126
	función lineal	Ej. 3, p. 127
Sección 3.3	**Funciones cuadráticas**	
	función cuadrática parábola eje de simetría vértice	Ej. 1, p. 132
Sección 3.4	**Sistemas de ecuaciones lineales**	
	sistema de ecuaciones sistemas equivalentes eliminación por adición	Ej. 1, p. 140
	eliminación por sustitución parámetro	Ej. 3, p. 142
	ecuación lineal general en x, y y z	Ej. 5, p. 144
Sección 3.5	**Sistemas no lineales**	
	sistema no lineal	Ej. 1, p. 148

Sección 3.6	**Aplicaciones de sistemas de ecuaciones**			
	punto de equilibrio	precio de equilibrio	cantidad de equilibrio	Ej. 1, p. 151
	punto de equilibrio	cantidad de equilibrio	ingreso de equilibrio	Ej. 3, p. 154

Resumen

La orientación de una recta no vertical está caracterizada por su pendiente, la cual está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida, y la pendiente de una recta horizontal es cero. Las rectas que ascienden tienen pendiente positiva; las rectas que descienden tienen pendiente negativa. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Las formas básicas de las ecuaciones de rectas son las siguientes:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-intersección)
$x = a$	(recta vertical)
$y = b$	(recta horizontal)
$Ax + By + C = 0$	(general)

La función lineal

$$f(x) = ax + b(a \neq 0)$$

tiene como gráfica una línea recta.

En economía, las funciones de oferta y demanda tienen la forma $p = f(q)$ y juegan un papel importante. Cada una proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto, y el número de unidades q del producto que los fabricantes (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio durante algún periodo.

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El vértice es

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

y c es la intersección y. El eje de simetría, así como las intersecciones x y y son útiles para hacer el bosquejo de la gráfica.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse con los métodos de eliminación por adición y eliminación por sustitución. Una solución puede incluir uno o más parámetros. La sustitución también es útil en la solución de sistemas no lineales.

La resolución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda para un producto proporciona el punto de equilibrio, que indica el precio al que los clientes comprarán la misma cantidad de un producto que los productores desean vender a ese precio.

Las utilidades son el ingreso total menos el costo total, donde el costo total es la suma de los costos fijos y los costos variables. El punto de equilibrio es el punto donde el ingreso total iguala al costo total.

Problemas de repaso

Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.

1. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(3, k)$ es 4. Encuentre k.
2. La pendiente de la recta que pasa por $(5, 4)$ y $(k, 4)$ es 0. Encuentre k.

En los problemas 3 a 9, determine la forma pendiente-intersección y una forma general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades indicadas.

3. Pasa por $(-2, 3)$ y tiene intersección y igual a -1
4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $y = 3x - 4$
5. Pasa por $(10, 4)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$
6. Pasa por $(3, 5)$ y es vertical
7. Pasa por $(-2, 4)$ y es horizontal
8. Pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a la recta $-3y + 5x = 7$
9. Tiene intersección y igual a -3 y es perpendicular a $2y + 5x = 2$.
10. Determine si el punto $(3, 13)$ pertenece a la recta que pasa por $(1, 8)$ y $(-1, 2)$.

Determine si las rectas de los problemas 11 a 16 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

11. $x + 4y + 2 = 0, \quad 8x - 2y - 2 = 0$
12. $y - 2 = 2(x - 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0$
13. $x - 3 = 2(y + 4), \quad y = 4x + 2$
14. $2x + 7y - 4 = 0, \quad 6x + 21y = 90$
15. $y = 3x + 5, \quad 6x - 2y = 7$
16. $y = 7x, \quad y = 7$

Escriba cada recta de los problemas 17 a 20 en la forma pendiente-intersección y haga un bosquejo de su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

17. $3x - 2y = 4$
18. $x = -3y + 4$
19. $4 - 3y = 0$
20. $y = 2x$

En los problemas 21 a 30, grafique cada función. Para las funciones que sean lineales, también obtenga la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las cuadráticas proporcione todas las intersecciones y el vértice.

21. $y = f(x) = 17 - 5x$
22. $s = g(t) = 5 - 3t + t^2$
23. $y = f(x) = 9 - x^2$
24. $y = f(x) = 3x - 7$
25. $y = h(t) = t^2 - 4t - 5$
26. $y = k(t) = -3 - 3t$
27. $p = g(t) = -7t$
28. $y = F(x) = (2x - 1)^2$
29. $y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3)$
30. $y = f(x) = \frac{x}{3} - 2$

Resuelva el sistema dado en los problemas 31 a 44.

31. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$
32. $\begin{cases} 8x - 4y = 7 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$
33. $\begin{cases} 7x + 5y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$
34. $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3} \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x + \frac{3y + x}{3} = 9 \\ y + \frac{5x + 2y}{4} = 7 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 - y + 5x = 2 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = \frac{18}{x + 4} \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2z = -2 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 1 \\ 4x - 10y + 12z = 2 \end{cases}$

45. Suponga que a y b están relacionadas linealmente, de modo que $a = 1$ cuando $b = 2$, y $a = 5$ cuando $b = 3$. Encuentre una forma lineal general de una ecuación que relacione a y b. También encuentre a cuando $b = 5$.

46. Temperatura y frecuencia cardiaca Cuando disminuye la temperatura T (en grados Celsius) de un gato, su frecuencia cardiaca r (en latidos por minuto) se reduce. Bajo condiciones de laboratorio, un gato que presenta una temperatura de 36°C tuvo una frecuencia cardiaca de 206, y a una temperatura de 30°C su frecuencia cardiaca fue de 122. Si r se relaciona linealmente con T, donde T está entre 26 y 38, (a) determine una ecuación para r en términos de T, y (b) determine la frecuencia cardiaca del gato a una temperatura de 27°C.

47. Suponga que f es una función lineal tal que $f(1) = 5$, y $f(x)$ disminuye 4 unidades por cada incremento de 3 unidades en x. Encuentre $f(x)$.

48. Si f es una función lineal tal que $f(-1) = 8$ y $f(2) = 5$, encuentre $f(x)$.

49. Ingreso máximo La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 200 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades. Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

50. Impuesto sobre ventas La diferencia en el precio de dos artículos antes de pagar un impuesto sobre la venta de 5% es de \$3.50. La diferencia en el precio después del impuesto es de \$4.10. Demuestre que no es posible que exista la situación que se acaba de describir.

51. Precio de equilibrio Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son $120p - q - 240 = 0$ y $100p + q - 1200 = 0$, respectivamente, encuentre el precio de equilibrio.

52. Psicología En psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento del significado y de la relación entre las palabras, así como a los medios a través de los cuales se almacena y se recupera tal información.[6] En un modelo que representa la red de memoria semántica, existe una jerarquización de los niveles en los que se almacena la información. En un experimento de Collins y Quillian, basado en un modelo de red, se obtuvieron datos sobre el tiempo de reacción para responder a preguntas sencillas acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que en promedio, el tiempo de reacción R (en milisegundos) es una función lineal del nivel, L, en el que una propiedad característica del sustantivo es almacenada. En el nivel 0, el tiempo de reacción es de 1310; en el nivel 2 el tiempo de reacción es de 1460. (a) Encuentre la función lineal. (b) Encuentre el tiempo de reacción en el nivel 1. (c) Encuentre la pendiente y determine su significado.

53. Punto de equilibrio Un fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio, si el producto se vende a \$16 por unidad, el costo fijo es \$10 000 y el costo variable está dado por $y_{VC} = 8q$, donde q es el número de unidades producidas (y_{VC} se expresa en dólares).

54. Conversión de temperatura La temperatura Celsius, C, es una función lineal de la temperatura Fahrenheit, F. Use el hecho de que 32°F es igual a 0°C y que 212°F es igual a 100°C para encontrar esta función. También encuentre C cuando $F = 50$.

55. Contaminación En una provincia de una nación en vías de desarrollo, la contaminación del agua se analiza con el empleo de un modelo de oferta-demanda. La *ecuación de oferta ambiental* $L = 0.0183 - \frac{0.0042}{p}$ describe el gravamen por tonelada, L (en dólares), como una función de la contaminación total, p (en toneladas por kilómetro cuadrado), para $p \geq 0.2295$. La *ecuación de demanda ambiental*, $L = 0.0005 + \frac{0.0378}{p}$ describe el costo por tonelada de disminución, como una función de la contaminación total para $p > 0$. Encuentre el nivel de equilibrio de la contaminación total a dos decimales.[7]

56. Resuelva gráficamente el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ 7x + 5y = 64 \end{cases}$$

57. Resuelva gráficamente el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.3x - 0.4y = 2.5 \\ 0.5x + 0.7y = 3.1 \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

58. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = \frac{3}{7x} \quad \text{donde } x > 0 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

59. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

60. Resuelva gráficamente la ecuación

$$x^2 + 4 = x^3 - 3x$$

como si fuera un sistema. Redondee x a dos decimales.

[6] G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Laurence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

[7] Vea Hua Wang y David Wheeler, "Pricing Industrial Pollution in China: An Economic Analysis of the Levy System", World Bank Policy Research Working Paper #1644, septiembre de 1996.

Aplicación práctica

Planes de cobro en telefonía celular

La selección de un plan de telefonía celular puede ser bastante difícil. En la mayoría de las áreas urbanas existen muchos proveedores del servicio, cada uno de los cuales ofrece varios planes. Sus ofertas incluyen tarifas de accesos mensuales, minutos gratis, cobros por tiempo aire adicional, tarifas por *roaming* regional, por *roaming* nacional, por horas pico y horas no pico, y tarifas por larga distancia (sin mencionar costos por activación, gastos por cancelación y cargos de este tipo). Incluso si un consumidor tiene un muy buen conocimiento del uso típico que hace de su teléfono celular, debe realizar docenas de cálculos para estar absolutamente seguro de haber hecho el mejor trato.

Con frecuencia, el modelado matemático implica tomar decisiones, sustentadas en información, que aclaren cuáles factores de un problema son los menos importantes. Más tarde podrán ser pasados por alto para obtener una solución aproximada razonablemente buena —en un tiempo sensato. Quizá haya escuchado la expresión “simplificación de supuestos”. Existen muchas bromas acerca de este proceso. Por ejemplo, un apostador con mente matemática que está tratando de calcular las ventajas de los caballos de cierta carrera tal vez no debería asumir que todos los caballos son perfectamente esféricos. Aquí se simplificará la comparación entre los planes de telefonía celular al considerar sólo el número de “minutos tiempo aire locales por mes” disponible para la “cuenta de acceso mensual” y el precio por minuto de “minutos adicionales”. Muchos proveedores ofrecen planes en términos de estos parámetros básicos.

Al examinar las ofertas de Verizon para el área de Saddle River, Nueva Jersey, en la primavera de 2006, se encontraron los siguientes planes mensuales.

P_1: 450 minutos por \$39.99 más \$0.45 por minuto adicional

P_2: 900 minutos por \$59.99 más \$0.40 por minuto adicional

P_3: 1350 minutos por \$79.99 más \$0.35 por minuto adicional

P_4: 2000 minutos por \$99.99 más \$0.25 por minuto adicional

P_5: 4000 minutos por \$149.99 más \$0.25 por minuto adicional

P_6: 6000 minutos por \$199.99 más \$0.20 por minuto adicional

donde se han agregado las etiquetas P_i, para $i = 1, 2, \ldots, 6$, para conveniencia posterior. Así, cada entrada anterior toma la forma:

P_i: M_i minutos por $\$C_i$ más $\$c_i$ por minuto adicional

donde, para el plan P_i, M_i es el número de minutos tiempo aire disponible para la cuenta de acceso mensual de C_i, y cada minuto adicional cuesta c_i.

Para representar matemáticamente estos planes, se escribirá el costo mensual total como una función del tiempo, para cada uno. De hecho, se escribirá $P_i(t)$ para el costo mensual

de t minutos con el plan P_i. Para cada plan, la función resultante es una función definida por partes, con sólo dos casos a considerar. Para cada plan deben considerarse $t \leq M_i$ y $t > M_i$. Si $t \leq M_i$, entonces el costo es simplemente C_i pero si $t > M_i$, entonces el número de minutos adicionales es $t - M_i$ y, como cada uno de éstos cuesta c_i, los minutos adicionales cuestan $c_i(t - M_i)$, lo que en este caso produce un costo total de $C_i + c_i(t - M_i)$.

Al incorporar estos valores numéricos, se tienen las siguientes seis funciones:

$$P_1(t) = \begin{cases} 39.99 & \text{si } t \leq 450 \\ 39.99 + 0.45(t - 450) & \text{si } t > 450 \end{cases}$$

$$P_2(t) = \begin{cases} 59.99 & \text{si } t \leq 900 \\ 59.99 + 0.40(t - 900) & \text{si } t > 900 \end{cases}$$

$$P_3(t) = \begin{cases} 79.99 & \text{si } t \leq 1350 \\ 79.99 + 0.35(t - 1350) & \text{si } t > 1350 \end{cases}$$

$$P_4(t) = \begin{cases} 99.99 & \text{si } t \leq 2000 \\ 99.99 + 0.25(t - 2000) & \text{si } t > 2000 \end{cases}$$

$$P_5(t) = \begin{cases} 149.99 & \text{si } t \leq 4000 \\ 149.99 + 0.25(t - 4000) & \text{si } t > 4000 \end{cases}$$

$$P_6(t) = \begin{cases} 199.99 & \text{si } t \leq 6000 \\ 199.99 + 0.20(t - 6000) & \text{si } t > 6000 \end{cases}$$

Es fácil describir la gráfica de cada función. De hecho, para la $P_i(t)$ genérica se tiene, en el primer cuadrante, un segmento de recta horizontal que inicia en $(0, C_i)$ y termina en (M_i, C_i). La gráfica continúa, a la derecha de (M_i, C_i) como un segmento de recta infinito que inicia en (M_i, C_i) con pendiente c_i. Sin embargo, para ver cómo se comparan realmente las funciones P_i, es necesario graficarlas todas. Esto podría realizarse en forma manual, pero aquí se presenta una buena oportunidad para aprovechar la capacidad de una calculadora graficadora. Se introduce la función $P_1(t)$ como

$$Y1 = 39.99 + 0.42(X - 450)(X > 450)$$

El símbolo $>$ viene en el menú test y la expresión $(X > 450)$ es igual a 1 o 0, dependiendo si x es, o no, mayor que 450. Al introducir las otras cinco funciones de manera similar, y graficándolas juntas, se obtiene la pantalla que se muestra en la figura 3.50.

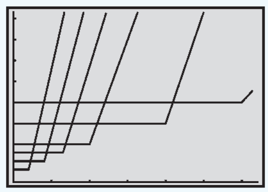


FIGURA 3.50 Costos de los diferentes planes.

Cuál es el mejor plan depende de la cantidad de tiempo de llamadas: para cualquier tiempo aire mensual dado, el mejor plan es aquél en que la gráfica es la más baja en ese punto.

Para un tiempo muy breve de llamadas, el plan P_1 es mejor, pero incluso en 495 minutos mensuales de uso resulta más caro que el plan P_2 y permanece así para cualquier uso mensual mayor. Para encontrar exactamente el uso al cual los planes P_1 y P_2 cuestan lo mismo, por supuesto se resuelve

$$P_1(t) = P_2(t)$$

pero debido a que cada una es una función definida por partes, en realidad se necesitan las gráficas para saber *dónde buscar la solución*. De éstas resulta claro que la intersección de las curvas P_1 y P_2 ocurre P_1 se define mediante su primera rama. Así, debe despejarse t de

$$39.99 + 0.45(t - 450) = 59.99$$

Con dos decimales se obtiene $t = 494.44$.

De hecho, la gráfica indica que sería útil calcular $P_1(900)$ porque $P_2(900)$ aún es \$59.99 aunque, por supuesto, el costo de P_2 se incrementa para toda $t > 900$. Se encuentra

$$\begin{aligned} P_1(900) &= 39.99 + 0.45(900 - 450) = 39.99 + 0.45(450) \\ &= 39.99 + 202.50 = 242.49 \end{aligned}$$

Para buscar planes de servicio de teléfonos celulares en diferentes áreas, visite `www.point.com`.

Problemas

1. Si una persona que realmente usa muchos minutos de tiempo aire al mes, por ejemplo 6000, se siente atraído por las tarifas de acceso mensual bajo, calcule cuánto perderá usando el plan P_1 en lugar del plan P_6.
2. Se ha visto que para usos mensuales menores a 494.44 minutos, el plan P_1 es mejor. Determine el intervalo de uso para el cual P_2 es mejor encontrando el valor de t para el cual $P_2(t) = P_3(t)$.
3. Repita el problema 2 para el plan P_3.
4. Repita el problema 2 para el plan P_4.
5. Repita el problema 2 para el plan P_5.
6. Repita el problema 2 para el plan P_6.
7. ¿Cómo se puede estar seguro de que para *todo* valor de t mayor que el encontrado en el problema 6, el plan P_6 sigue siendo el mejor? Para ponerlo de otro modo, ¿P_5 y P_6 tienen algún punto de intersección en las *segundas* ramas de *ambas* curvas?