Inlämningsuppgift 1

Dana Ghafour, TIDAB, danagf@ug.kth.se
Sophie Malmberg, TIDAB, sophiema@ug.kth.se

Uppgift 1: Polynomekvation

Sammanfattning

Uppgift

Följande polynomekvation ska lösas genom att hitta lösningarna :

$$2\,x^4-\frac{74\,x^3}{3}+\frac{253\,x^2}{6}+\frac{111\,x}{2}-105=0$$

Sedan ska en graf plottas för polynomet och nollställen ska markeras med röda punkter.

Resultat

Lösning

Lösningarna för ekvationen kan fås genom att skriva:

In[ ]:=

```
x /. Solve[2 x^4 - 74 x^3/3 + 253 x^2/6 + 111 x/2 - 105 = 0]
```

Out[ ]=

$$\left\{-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{3},\ 10\right\}$$

Lösningen till funktionen är $x=-\frac{3}{2}\lor x=\frac{3}{2}\lor x=\frac{7}{3}\lor x=10$.
Sen kan man testa om polynomekvationen blir lika med noll för dessa x - värden genom att skriva:

In[ ]:=

```
2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105 == 0 /.
  {{x → -3 / 2}, {x → 3 / 2}, {x → 7 / 3}, {x → 10}}
```

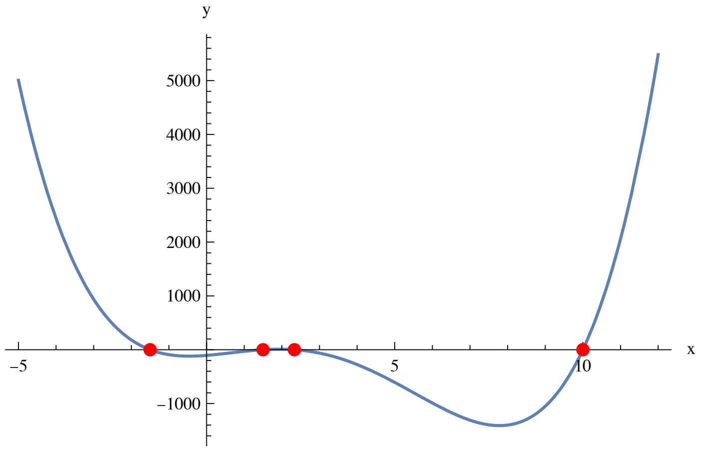
Out[ ]=

```
{True, True, True, True}
```

Graf

Funktionen har nollställen markerat på x-axeln med röda punkter enligt nedanstående graf:

In[ ]:=
```
Plot[2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105,
 {x, -5, 12}, AxesLabel → {"x", "y"},
 Epilog → ({Red, PointSize[0.02], Point[{x1, 0}], Point[{x2, 0}],
      Point[{x3, 0}], Point[{x4, 0}]} /.
    AssociationThread[{x1, x2, x3, x4},
     SolveValues[2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105 == 0, x]])]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = 2x^4 - \frac{74x^3}{3} + \frac{253x^2}{6} + \frac{111x}{2} - 105.$

Kod

```
x /. Solve[2 x^4 - 74 x^3/3 + 253 x^2/6 + 111 x/2 - 105 = 0]
2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105 == 0 /.
 {{x → -3 / 2}, {x → 3 / 2}, {x → 7 / 3}, {x → 10}}
Plot[2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105,
 {x, -5, 12}, AxesLabel → {"x", "y"},
 Epilog → ({Red, PointSize[0.02], Point[{x1, 0}], Point[{x2, 0}],
      Point[{x3, 0}], Point[{x4, 0}]} /.
    AssociationThread[{x1, x2, x3, x4},
     SolveValues[2 x^4 - 74 x^3 / 3 + 253 x^2 / 6 + 111 x / 2 - 105 == 0, x]])]
```

Uppgift 2: Binomisk ekvation

Sammanfattning

Uppgift

Lösningen ska hittas till ekvationen z^5 = -3+3I och sedan grafiskt visa att lösningarna ligger på en cirkel i det komplexa talplanet.

Resultat

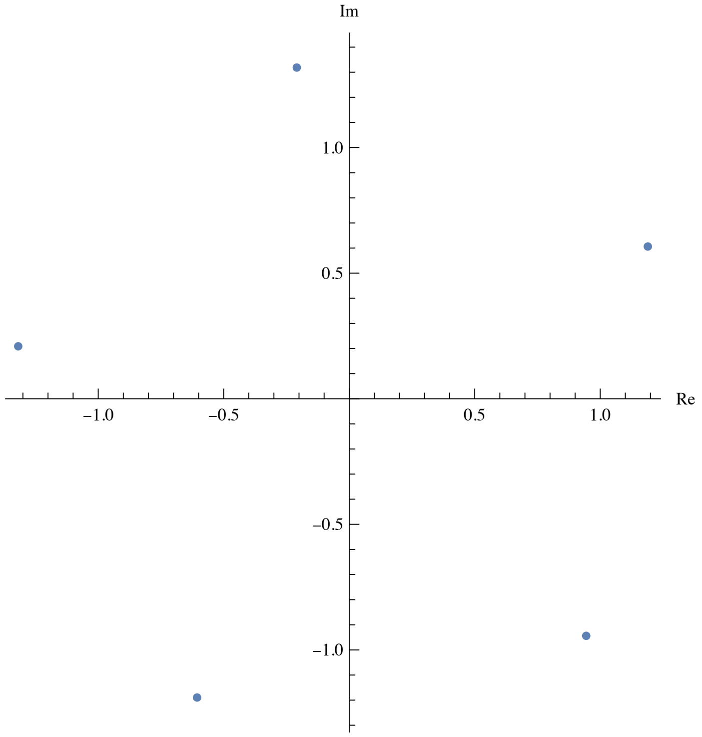
Lösning

In[ ]:=
```
Z = N[SolveValues[z^5 == -3 + 3 i, z, Complexes]]
```
Out[ ]=
```
{1.18962 + 0.606141 i, -0.208862 + 1.3187 i,
 0.944088 - 0.944088 i, -1.3187 + 0.208862 i, -0.606141 - 1.18962 i}
```

Graf

Lokaliserar lösningen till ekvationen z^5 = -3 + 3i på grafen.

In[ ]:=
```
ComplexListPlot[
 Z = SolveValues[z^5 == -3 + 3 i, z, Complexes], AxesLabel → {"Re", "Im"}]
```
Out[ ]=

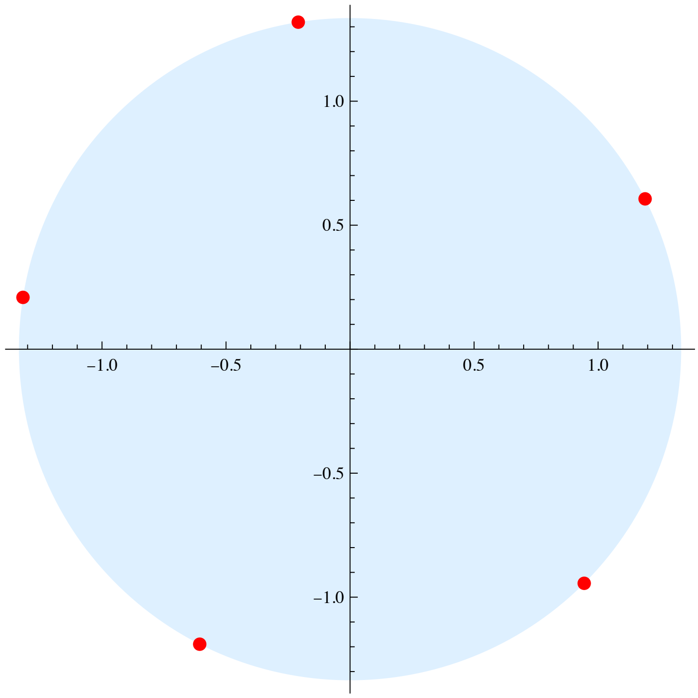


Visar grafiskt att lösningarna ligger på en cirkel i det komplexa talplanet.

In[1]:=
```
Lös = SolveValues[z^5 == -3 + 3 * I, z]
f1 = ComplexListPlot[Lös, PlotStyle → {Red, PointSize[Large]}];
f2 = Graphics[{LightBlue, Disk[{0, 0}, Abs[Lös[[1]]]]}, Axes → True];
Show[f2, f1, PlotRange → Automatic]
```

Out[1]= $\left\{(-3+3\,i)^{1/5}, (-3+3\,i)^{1/5}(-1)^{2/5}, -(-3+3\,i)^{1/5}(-1)^{3/5}, (-3+3\,i)^{1/5}(-1)^{4/5}, -(-3)^{1/5}(-1+i)^{1/5}\right\}$

Out[4]=



Kod

```
ComplexListPlot[Z = SolveValues[z^5 == -3 + 3 i, z, Complexes],
 AxesLabel → {"Re", "Im"}]
Lös = SolveValues[z^5 == -3 + 3 * I, z]
f1 = ComplexListPlot[Lös];
f2 = Graphics[{LightBlue, Disk[{0, 0}, Abs[Lös[[1]]]]}, Axes → True];
Show[f2, f1, PlotRange → Automatic]
```

Uppgift 3 - Olikheter

Sammanfattning

Uppgift

Målet är att lösa uppgifterna 21, 22, 25 och 26 i kapitel 3 i kurslitteraturen Matematisk kommunikation, argumentation och skapande . Uppgifterna består av olikheter som löses med hjälp av Mathematica - funktionen Reduce som resulterar i ett exakt värde eller intervall där olikheten är sann . Graferna skapas sedan med hjälp av funktionen Plot .

Lösning

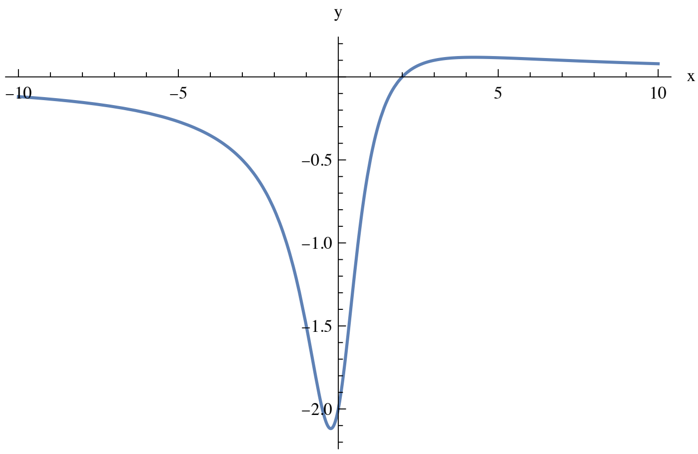
21.a

Olikhet: $\frac{x-2}{x^2+1} \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$
Svar: x ≥ 2

In[ ]:=
```
Reduce[(x - 2) / ((x^2) + 1) ≥ 0, {x}]
```
Out[ ]=

x ≥ 2

In[ ]:=
```
Plot[(x - 2) / ((x^2) + 1), {x, -10, 10}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$

21. b

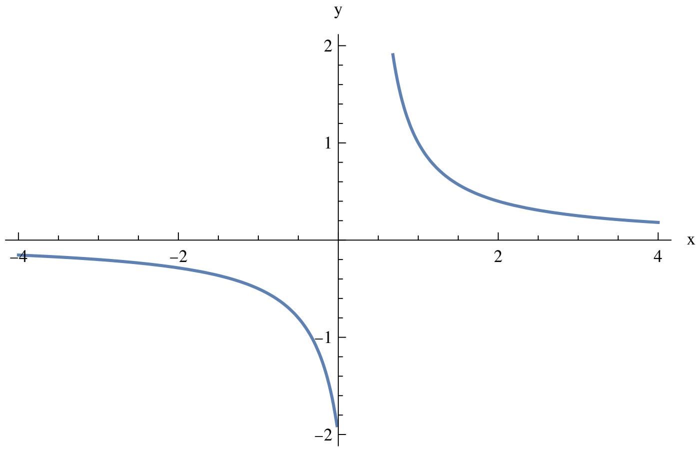
Olikhet: $\frac{2}{3x-1} \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

Svar: $x < \frac{1}{3} \,||\, x \geq 1$

In[ ]:=
```
Reduce[2 / (3 x - 1) ≤ 1, {x}]
```
Out[ ]=

$x < \frac{1}{3} \,||\, x \geq 1$

In[ ]:=
```
Plot[(2 / (3 x - 1)), {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = \frac{2}{3x-1}$

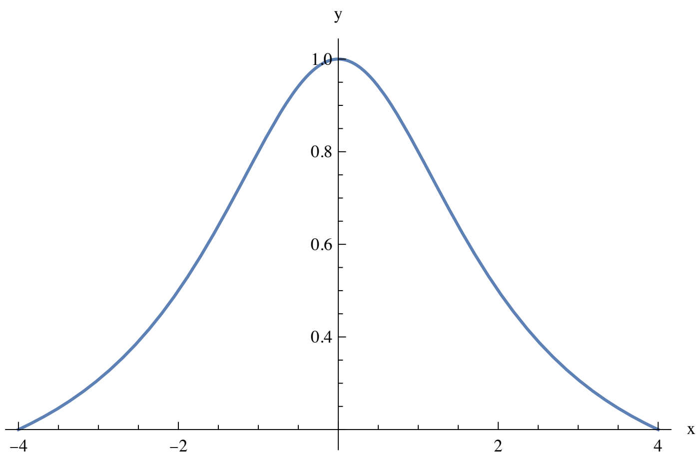
21. c

Olikhet: $\frac{4}{x^2+4} \geq \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
Svar: -2≤ x ≤2

In[ ]:=
```
Reduce[4 / (x^2 + 4) ≥ 1 / 2, {x}]
```
Out[ ]=

$-2 \leq x \leq 2$

In[ ]:=
```
Plot[4 / (x^2 + 4), {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = \frac{4}{x^2+4}$

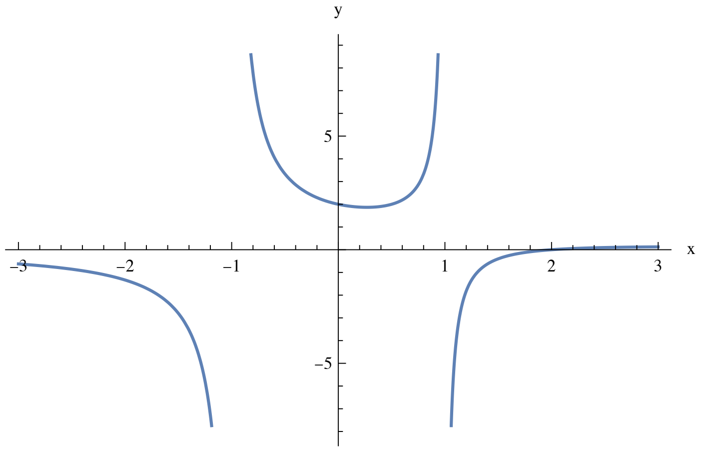
21.d

Olikhet: $\frac{x-2}{x^2-1} \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$
Svar: -1< x <1 || x≥2

In[ ]:=
```
Reduce[(x - 2) / (x^2 - 1) ≥ 0, {x}]
```
Out[ ]=

$-1 < x < 1 \;||\; x \geq 2$

In[∘]:=
```
Plot[(x - 2) / (x^2 - 1), {x, -3, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[∘]=



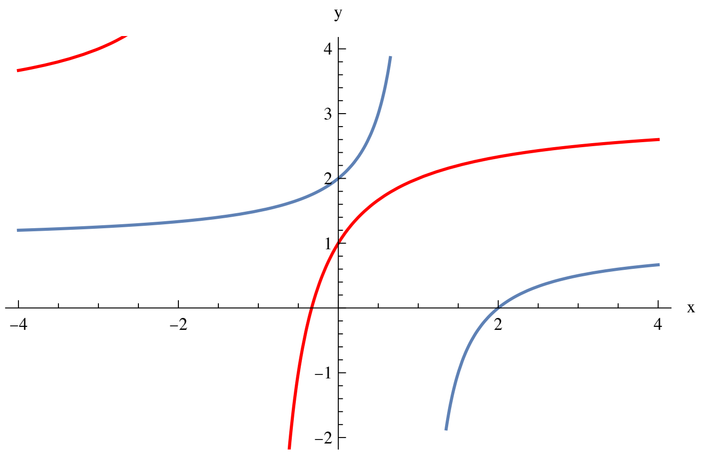
Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

21.e

Olikhet: $\frac{x-2}{x-1} \geq \frac{2x}{x+1} + 1, \; x \in \mathbb{R}$
Svar: -1< x <1

In[∘]:=
```
Reduce[((x - 2) / (x - 1)) ≥ 1 + (2 x / (x + 1)), {x}]
```
```
-1 < x < 1
```

In[∘]:=
```
p1 = Plot[((x - 2) / (x - 1)), {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
In[∘]:=
```
p2 = Plot[1 + (2 x / (x + 1)), {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red]
```
In[∘]:=
```
Show[p1, p2]
```
Out[∘]=



Grafen till funktionen $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ (blå) samt $g(x) = \frac{2x}{x+1} + 1$ (röd)

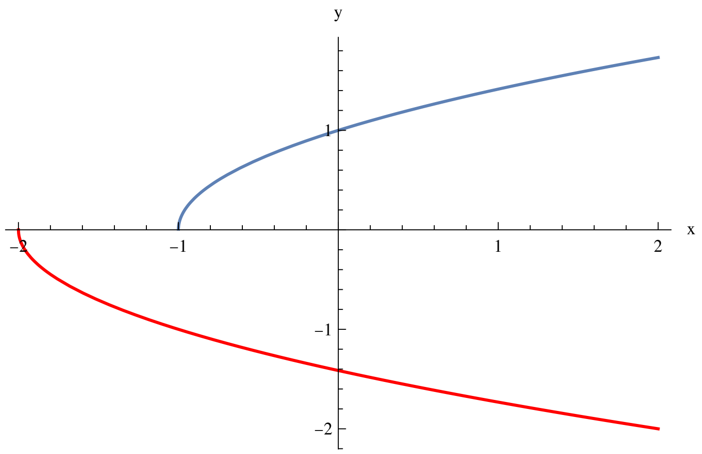
22.a

Olikhet: $\sqrt{x+1} \leq -\sqrt{x+2}\, , \; x \in \mathbb{R}$
Svar: Det finns inget värde på x där olikheten är sann.

In[∘]:=
```
Reduce[Sqrt[x + 1] ≤ -Sqrt[2 + x], {x}]
```

```
In[∘]:= False
p1 = Plot[Sqrt[x + 1], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}]
p2 = Plot[ -Sqrt[2 + x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red]
Show[p1, p2, PlotRange → Automatic]
```

Out[∘]=



Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x+1}$ (blå) samt $g(x) =- \sqrt{x+2}$ (röd)

22.b

Olikhet: $\sqrt{2x-1} > -\sqrt{3-x}$, $x \in \mathbb{R}$

Svar: $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

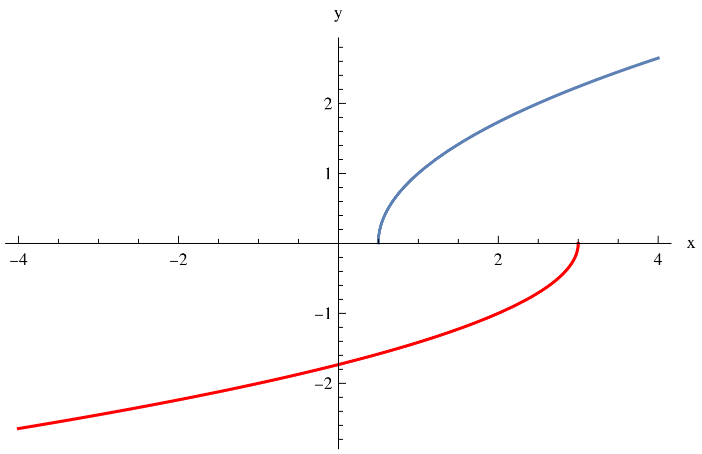
```
In[∘]:= Reduce[Sqrt[2 x - 1] > -Sqrt[3 - x], {x}]
```

Out[∘]=

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

```
In[∘]:= p1 = Plot[Sqrt[2 x - 1], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}]
p2 = Plot[-Sqrt[3 - x], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red]
Show[p1, p2, PlotRange → Automatic]
```

Out[∘]=



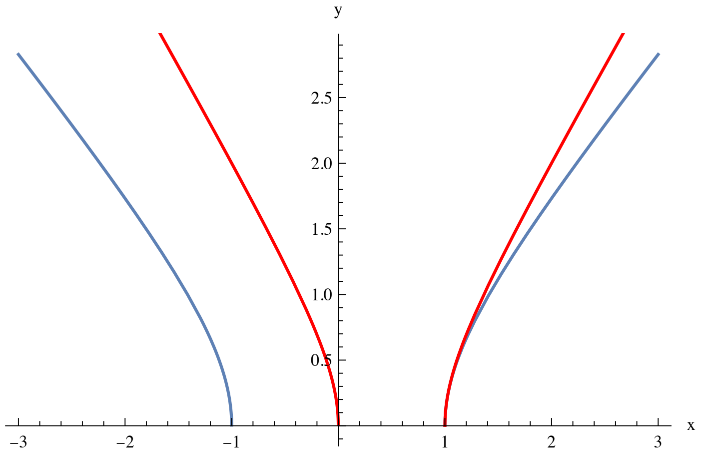
Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (blå) samt $g(x) =- \sqrt{3-x}$ (röd)

22.c

Olikhet: $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{2\,x^2-2\,x}$, x ∈ ℝ
Svar: x = 1

In[ ]:=
```
Reduce[Sqrt[x^2 - 1] ≥ Sqrt[2 x^2 - 2 x], {x}]
```
Out[ ]=
```
x == 1
```

```
p1 = Plot[Sqrt[x^2 - 1], {x, -3, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}]
p2 = Plot[Sqrt[2 x^2 - 2 x], {x, -3, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red]
Show[p1, p2]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ (blå) samt $g(x) = \sqrt{2\,x^2-2\,x}$ (röd)

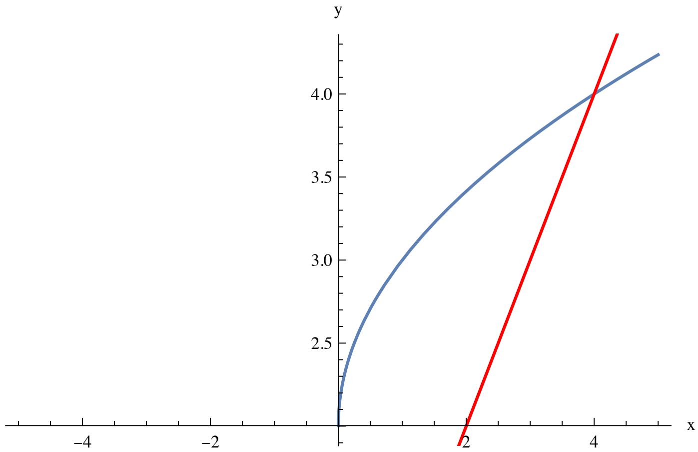
22.d

Olikhet: $\sqrt{x} + 2 \geq x,\ x \in \mathbb{R}$
Svar: 0 ≤ x ≤ 4

In[ ]:=
```
Reduce[2 + Sqrt[x] ≥ x, {x}]
```
Out[ ]=
```
0 ≤ x ≤ 4
```

In[ ]:=
```
p1 = Plot[2 + Sqrt[x], {x, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}]
p2 = Plot[x, {x, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red]
Show[p1, p2]
```

Out[◦]=



Grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x} + 2$ (blå) samt $g(x) = x$(röd)

25

Olikhet: $(x^2 + 1)^2 - 4(x^2 + 1) \geq 5,\ x \in \mathbb{R}$
Svar: x ≤ -2 || x ≥ 2

In[◦]:=

```
Reduce[(x^2 + 1)^2 - 4 (x^2 + 1) ≥ 5, {x}]
```

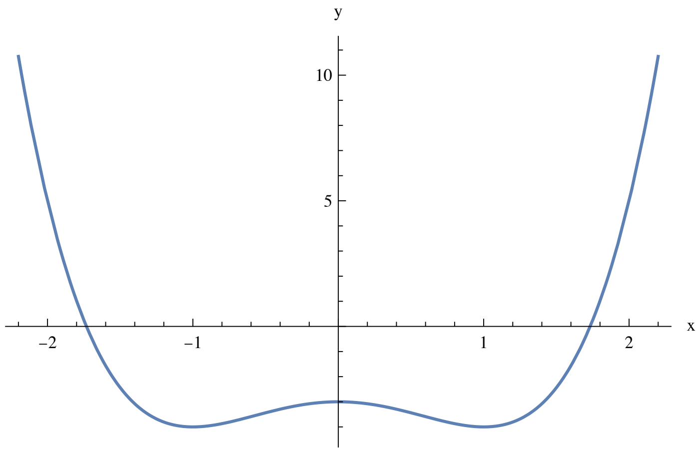
In[◦]:=

```
x ≤ -2 || x ≥ 2
Plot[(x^2 + 1)^2 - 4 (x^2 + 1), {x, -2.2, 2.2}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[◦]=

```
x ≤ -2 || x ≥ 2
```

Out[◦]=



Grafen till funktionen $f(x) = (x^2 + 1)^2 - 4(x^2 + 1)$

26.a

Olikhet: |x-2|+|x-1|=5, x∈ ℝ
Svar: Mathematicas funktion Reduce resulterar i både ett reellt intervall för x och ett imaginärt värde. Eftersom vi i detta fall endast är intresserade av reella värden är svaret x = -1 eller x = 4.

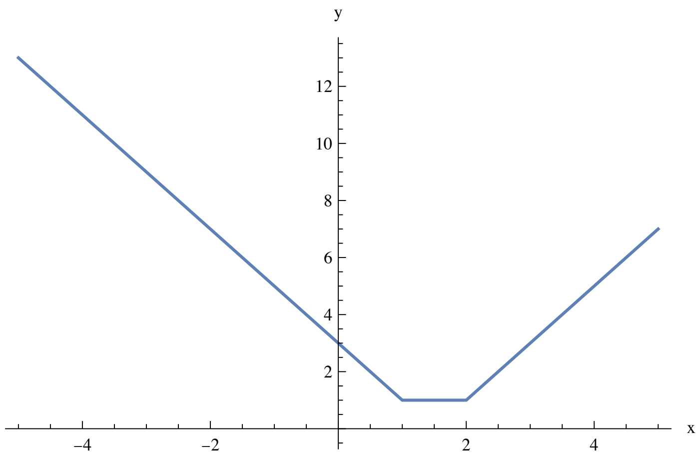
In[ ]:=
```
Reduce[Abs[x - 1] + Abs[x - 2] == 5, {x}]
```
Out[ ]=

$-1 \leq \text{Re}[x] \leq 4 \;\&\&\; \left(\text{Im}[x] == -\frac{1}{5}\sqrt{96 + 72\,\text{Re}[x] - 24\,\text{Re}[x]^2} \;||\; \text{Im}[x] == \frac{1}{5}\sqrt{96 + 72\,\text{Re}[x] - 24\,\text{Re}[x]^2}\right)$

In[ ]:=
```
Reduce[Abs[x - 1] + Abs[x - 2] == 5, {x}, Reals]
```
Out[ ]=

$x == -1 \;||\; x == 4$

In[ ]:=
```
Plot[Abs[x - 1] + Abs[x - 2], {x, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[ ]=



Grafen till funktionen $f(x) = |x - 2| + |x - 1|$

26.b

Olikhet: $\left|x^2 - x - 2\right| = 2,\ x \in \mathbb{R}$
Svar: Mathematicas funktion Reduce resulterar i både ett reellt intervall för x och ett imaginärt värde. Eftersom vi i detta fall endast är intresserade av reella värden är svaret
$x == 0 \,||\, x == 1 \,||\, x == \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{17}\right) \,||\, x == \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{17}\right)$

In[ ]:=
```
Reduce[Abs[x^2 - x - 2] == 2, {x}]
```
Out[ ]=

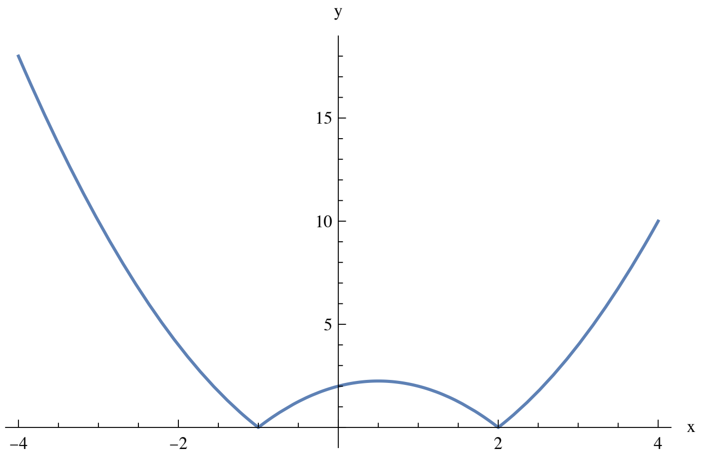
$$\left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{17}\right) \leq \text{Re}[x] \leq 0 \;\&\&\; \left(\text{Im}[x] == -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(-5 + 2\,\text{Re}[x] - 2\,\text{Re}[x]^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 36\,\text{Re}[x] + 36\,\text{Re}[x]^2}\right)} \;||\; \text{Im}[x] == \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(-5 + 2\,\text{Re}[x] - 2\,\text{Re}[x]^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 36\,\text{Re}[x] + 36\,\text{Re}[x]^2}\right)}\right)\right) \;||$$

$$\left(1 \leq \text{Re}[x] \leq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{17}\right) \;\&\&\; \left(\text{Im}[x] == -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(-5 + 2\,\text{Re}[x] - 2\,\text{Re}[x]^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 36\,\text{Re}[x] + 36\,\text{Re}[x]^2}\right)} \;||\; \text{Im}[x] == \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(-5 + 2\,\text{Re}[x] - 2\,\text{Re}[x]^2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{25 - 36\,\text{Re}[x] + 36\,\text{Re}[x]^2}\right)}\right)\right)$$

In[ ]:=
```
Reduce[Abs[x^2 - x - 2] == 2, {x}, Reals]
```
Out[ ]=

$$x == 0 \,||\, x == 1 \,||\, x == \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{17}\right) \,||\, x == \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{17}\right)$$

In[ ]:=
```
Plot[Abs[x^2 - x - 2], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```
Out[ ]=



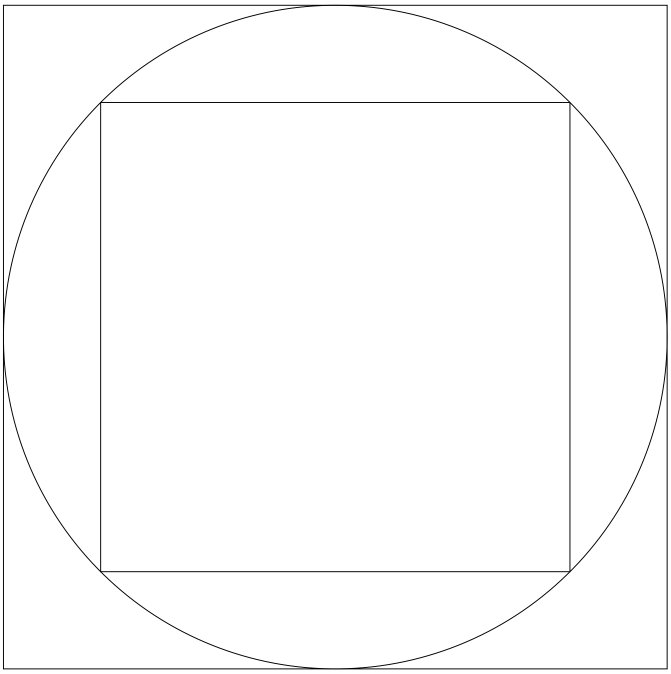
Grafen till funktionen $f(x) = \left|x^2 - x - 2\right|$

Uppgift 4 - Arean av en cirkel och närmevärde till Pi

Sammanfattning

Uppgift

Målet med uppgiften är att approximera π genom att använda polygoner med fler än fyra sidor runt en cirkel och beräkna dess area. Sedan ska vi rita en graf för hur minimum och max-värdet för dessa areor konvergerar mot π areaenheter som en funktion av antalet polygoner.



Resultat

Matematisk modell

Vi utgår från en cirkel med radien $r = 1$längdenhet och arean $a = \pi r^2 = \pi$ areaenheter.

Lösningen för uppgiften får vi först genom att räkna ut arean för polygonen innanför cirkeln. Varje sida av den n-sidiga polygonen går att dela upp i två rätvinkliga trianglar med en vinkel $\alpha_t = \left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Hypotenusan av trianglarna är i detta fall lika med radien som är 1 längdenhet. Triangelns höjd är lika med $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ och dess bredd är $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Arean av en triangel blir då $a_t = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$. För att bestämma arean av en polygon med n antal sidor innanför cirkeln kan vi då använda följande formel, där n är antalet sidor på polygonen:

$$a_i = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

På samma sätt kan vi bestämma arean av en polygon med n antal sidor utanför cirkeln genom att använda följande formel (som vi kom fram till med hjälp av kursens lärare Fadil Galjic):

$$a_u = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

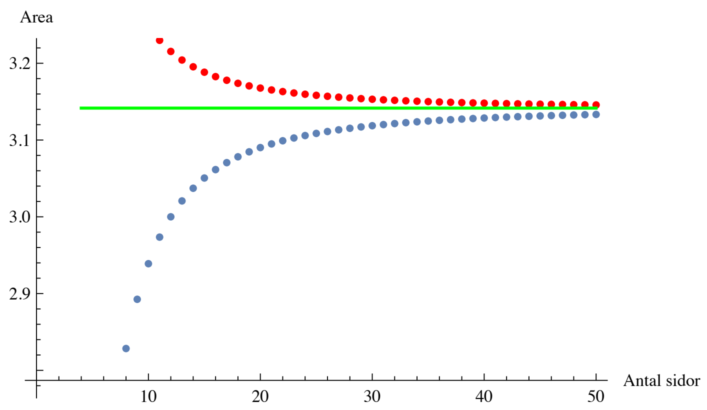
Vi ritar en graf som visar hur värdet på arean går mot π för båda polygonerna när antalet sidor ökar. Den röda punkterna representerar den yttre polygonen, och de blå punkterna representerar den inre polygonen. Det numeriska värdet för π (3.141592654) är markerat med en grön linje.

Om vi väljer n = 50000, där n är antalet sidor, blir arean av den inre polygonen 3.141592645 areaenheter.

Den yttre polygonens area är när n = 50000 blir 3.141592658 areaenheter. Talet pi är lika med 3.141592654. Det syns att polygonernas areor överensstämmer med 7 decimaler när n = 50 000.

Svar: Det går att approximera ett närmevärde för π genom att använda arean av två polygoner runt en cirkel. När antalet sidor ökar konvergerar polygonernas area mot värdet på π.

Graf



Kod

```
In[ ]:= areaInre[n_] := n * Sin[Pi / n] * Cos[Pi / n]

In[ ]:= areaYttre[n_] := n * Tan[Pi / n]

In[ ]:= N[areaInre[50 000], 10]
Out[ ]=
        3.141592645

In[ ]:= N[areaYttre[50 000], 10]
Out[ ]=
        3.141592658

In[ ]:= numPi = N[Pi, 10]
Out[ ]=
        3.141592654

In[ ]:= numPi = N[Pi, 10]
Out[ ]=
        3.141592654

In[ ]:= areaYttre[n_] := n * Tan[Pi / n]

In[ ]:= maxAntalSidor = 50;

In[ ]:= pIn = Table[{x, areaInre[x]}, {x, 4, maxAntalSidor}] // N

In[ ]:= pYt = Table[{x, areaYttre[x]}, {x, 4, maxAntalSidor}] // N

        numPi = N[Pi, 10]


In[ ]:= linePi = Line[{numPi}]
Out[ ]=
        Line[{3.141592654}]

        plotIn = ListPlot[pIn, AxesLabel → {"Antal sidor", "Area"}]

In[ ]:= plotYt = ListPlot[pYt, AxesLabel → {"Antal sidor", "Area"}, PlotStyle → Red]
```

```
plotPi = Plot[Pi, {n, 4, maxAntalSidor}, PlotStyle → Green]
```

In[ ]:=
```
Show[plotIn, plotYt, plotPi, PlotRange → Automatic]
```