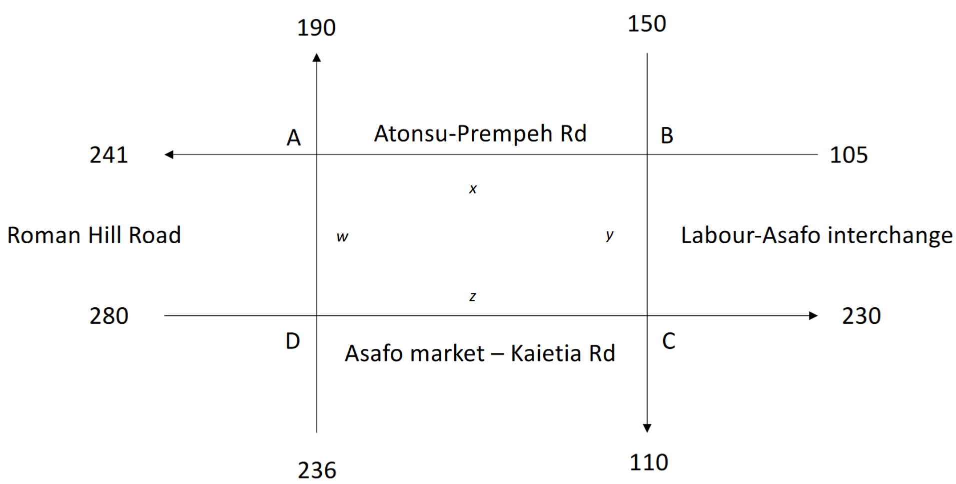
Inlämning 3: Matematisk modellering

Eliaz Biderstrand, TIDAB, eliaz@kth.se
Roberto Fernandez, TIEDB, rafa2@kth.se

1. Trafikflöde

Den här uppgiften går ut på och visa hur man kan använda linjära ekvationssystem för att studera trafikflödet genom ett trafiksystem. Trafiksystemet består av gator och korsningar där gatorna möts. Varje gata har ett visst flöde, som mäts i fordon per tidenhet. Vi ska beräkna trafikflödet för alla gatorna i trafiksystemet, givet flödet in till trafiksystemet. Vi gör ett viktigt antagande: *Trafik-flödet bevaras i varje korsning.* Det betyder att ett fordon som når en korsning måste fortsätta genom trafiksystemet. Ett positivt värde på flödet flyter i pilens riktning och ett negativt flöde flyter i motsatt riktning.



Figur 1.

Uppgift

a) Är vårt antagande om att flödet bevaras giltigt?
b) När kan antagandet vara felaktigt?
c) Vilka andra förenklingar har vi antagit?
Studera vägssystemet i figur 1. Siffrorna anger trafikflödena i fordon per timme. Alla vägar är

enkelriktade och trafiken följer pilarnas riktning.
d) Ställ upp ekvationssystemet
e) Bestäm trafikflödet för vägsystemet.
f) Om trafikflödet för en av vägarna *x, y, z* eller $w \leq 100$ fordon per timme på grund av vägarbete. Vad blir trafikflödet för de andra vägarna?

Resultat

a) Flödet bevaras endast om det antas att det finns lika många fordon som åker in och ut ur vägkorsning, och att alla fordon i vägkorsningen kör i samma konstanta hastighet. Dessutom måste alla fordon köra i samma linje utan att svänga till en annan riktning.

b) Antagandet är felaktigt när allt från uppgift a) inte gäller dvs. det finns ojämna fordon som kör i konstant hastighet, eller det finns jämnt antal fordon men som inte kör i konstant hastighet.

c) Förenklingar som har antagits är att fordonen inte stannar för att parkera eller annat. Att de kör i konstant hastighet, och att varje fordon som börjar i en riktning avslutar i samma riktning.

d) Ekvationssystem:
A: $x + w = 190 + 241 \rightarrow x + w = 431$
B: $x + y = 105+150 \rightarrow x + y = 255$
C: $z + y = 230 + 110 \rightarrow z + y = 340$
D: $z + w = 280 + 236 \rightarrow z + w = 516$

e) Trafikflödet för vägsystem:
$y = 255 - x$
$w = 413 - x$
$z = 85 + x$

f) För att visa vad som skulle hända om väg x hade vägarbete använde vi Manipulate. Antalet på y och w skulle minska medan z skulle öka

In[ ]:=
```
vägarbete
```
Out[ ]=

x

```
{y → 155., z → 185., w → 331.}
```

Kod

In[ ]:=
```
ClearAll
```
Out[ ]=
```
ClearAll
```

In[ ]:=
```
Solve[{x + w == 431, x + y == 255, z + y == 340, z + w == 516}, {x, y, z, w}]
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]=
```
{{y → 255 - x, z → 85 + x, w → 431 - x}}
```

In[ ]:=
```
vägarbete = Manipulate[{y → 255 - x, z → 85 + x, w → 431 - x}, {x, 0, 100}]
```

Out[ ]=
```
x
{y → 155., z → 185., w → 331.}
```

2. Kaniner

Leonardo av Pisa, även känd som Fibonacci (circa 1170-1250) skapade en av de äldsta matematiska modellerna av förökning. Han modellerade förökning av kaniner. Genom att modellera kaninpar kunde han undvika att ta hänsyn till individuella kaniner av olika kön. Modellen beskriver förökningen av kaniner från månad $n = 1$ där p_n är antal kaniner vid månad n. När en kanin föds, så är den en unge under en månad och sedan förökar sig kaninparen varje månad. Antal kaniner kan då beskrivs av en differensekvation:

$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$

där vi antar att vi har bara ett kaninpar vid månad $n = 1$, dvs intialvärdena är $p_1 = 1$ och $p_2 = 1$. Vilket betyder att $p_3 = 2$, $p_4 = 3$ och $p_5 = 5$.

Uppgift

a) Beräkna talföljden och rita en graf över den. Anpassa en lämplig funktion till punkterna och rita den i grafen.

b) Rita kurvan i en graf där y-axeln har logaritmisk skala.

c) Undersök talföljden och diskutera tillväxtakten, det vill säga tidsderivatan.

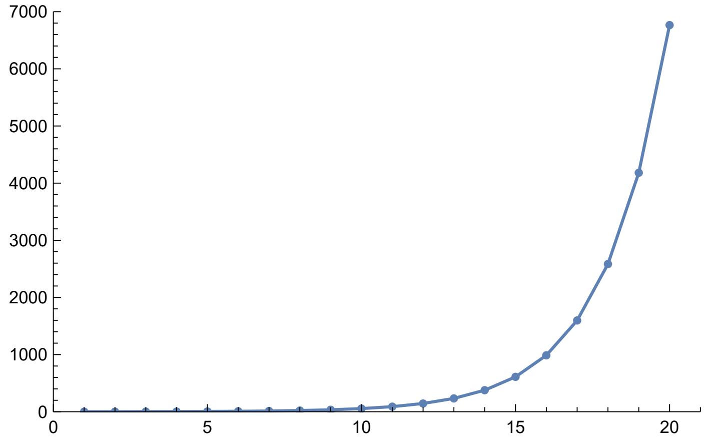
d) Exponentialfunktionen är lösning till differentialekvationen $\frac{dx}{dt} = r\,x$ där r är tillväxt / populationsenhet, där vi antar att x är populationen. För att hantera att en viss plats bara kan ge mat till en viss mängd kaniner så kan man lägga till en korrektionsfaktor. Då får man logistiska tillväxtekvationen: $\frac{dx}{dt} = r\,x\left[\frac{K-x}{K}\right]$. När populationen närmar sig K så minskar populationsökningen till noll.

Resultat

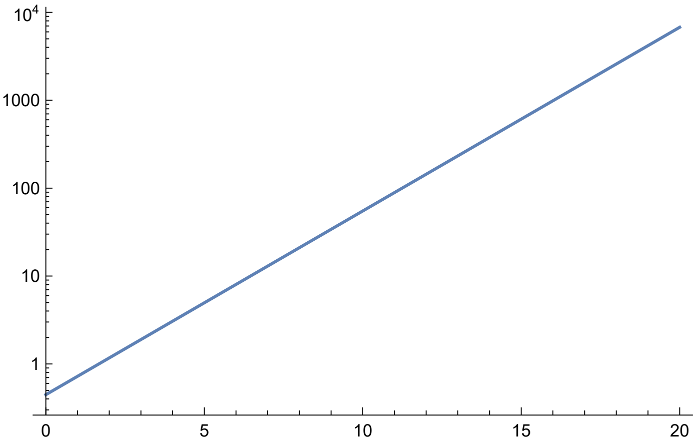
a) Talföljden är väldigt lätt att räkna ut och det finns även en funktion “Fibonacci” i mathematica som kan räkna ut den. Tal 1-20:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

En lämplig funktion kan hittas med hjälp av FindFit



b)



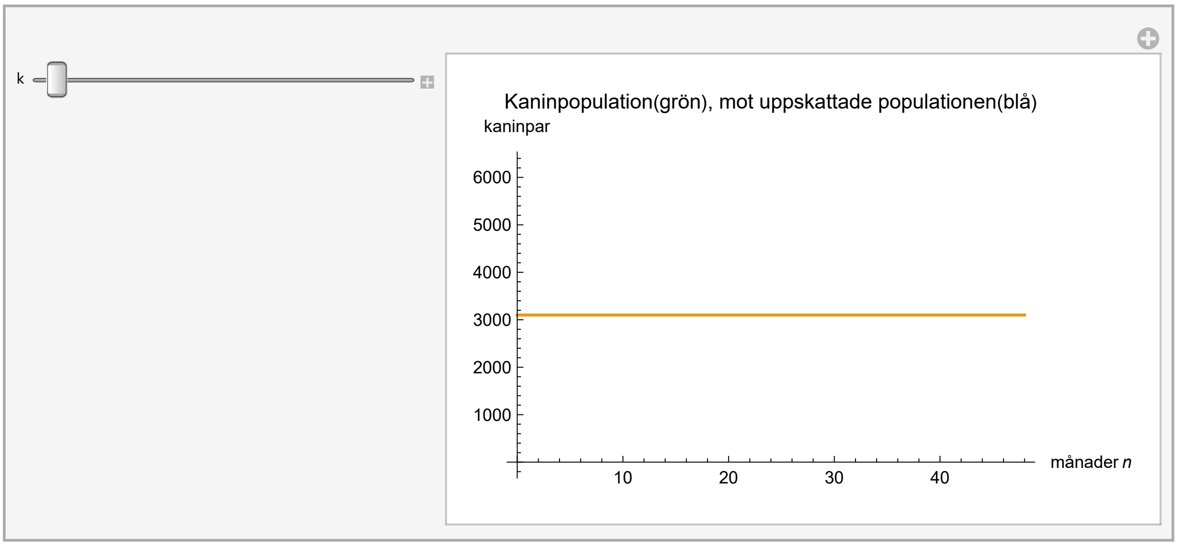
c) Tillväxten är från början väldigt liten men eftersom att talföljden nästan fördubblas för varje steg den växer så ökar talföljden snart väldigt snabbt.

d)

In[ ]:=

```
graf
```

Out[ ]=



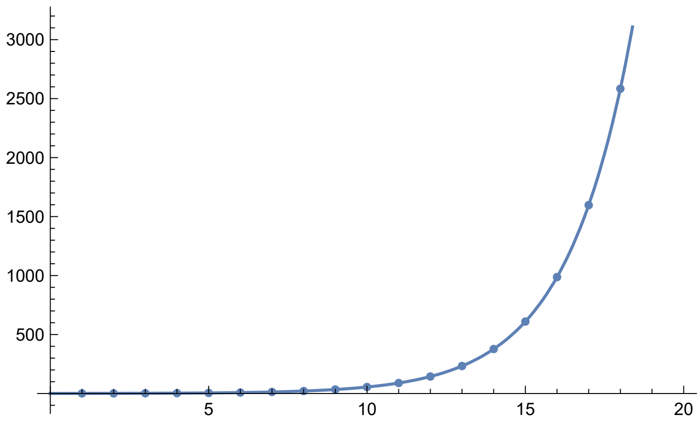
Genom att använda denna grafiska illustration så kan man se att giltighetsområdet för Fibonaccis modell avtar vid ungefär månad 20 som tidigast.

Kod

In[ ]:=
```
ClearAll
```
Out[ ]=
```
ClearAll
```

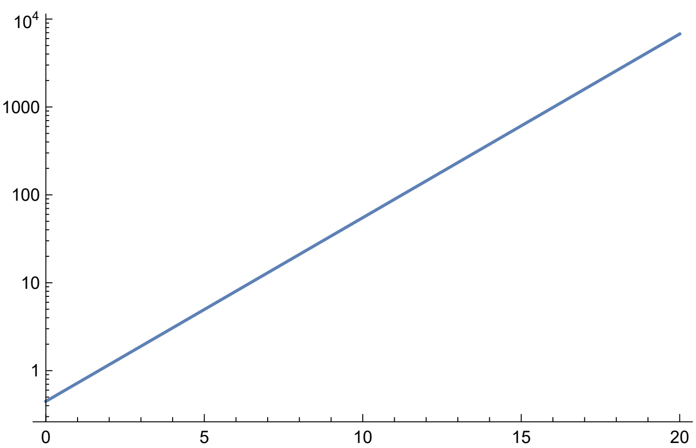
För deluppgift a)

In[ ]:=
```
tablefib = Table[Fibonacci[n], {n, 20}]
{a1, b1} = {a, b} /. FindFit[tablefib, {a * Exp[b * n]}, {a, b}, n]
Show[Plot[a1 * ⅇ^ (b1 x), {x, 0, 20}], ListPlot[tablefib]]
```
Out[ ]=
```
{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765}
```
Out[ ]=
```
{0.447214, 0.481212}
```
Out[ ]=



För deluppgift b)

In[ ]:=
```
LogPlot[a1 * ⅇ^ (b1 x), {x, 0, 20}]
```
Out[ ]=



För deluppgift d)

In[ ]:=
```
DSolve[{x'[t] == r x[t] (k - x[t]) / k, x[0] == x0}, x[t], t]
```

DSolve: Fibonacci is not a valid variable.

$$x[t] \to \frac{e^{r t} k x0}{k - x0 + e^{r t} x0}$$

In[ ]:=
```
function[t_] = a1 * e^(b1 t)
```

Out[ ]=

$$0.447214\, e^{0.481212\, t}$$

x0 blir här a1 och r*t är b1*t. K är enligt uppgiften en korrektionsfaktor.

In[ ]:=
```
graf = Manipulate[Plot[{function[t], k, (e^(b1 t) * k a1)/(k - a1 + e^(b1 t) a1)}, {t, 0, 48},
   PlotLabel → "Kaninpopulation(grön), mot uppskattade populationen(blå)",
   AxesLabel → {månader n, kaninpar}], {k, 1000, 100000}]
```

Out[ ]=