**פתרון מבחן ב"מודלים חישוביים " 372.1.2306**

**מועד א' 3/7/17**

מרצה: **פרופ' אריאל פלנר**

מתרגל: **מר דור עצמון**

משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לענות על כל השאלות 1, 2 ו-3

יש לענות על שתי שאלות מתוך 4-6

ניקוד יינתן לכל שאלה כמכלול ולא לפי הסעיפים.

**(שאלה 1, 26 נקודות - חובה)**

תזכורת: גרף דו-צדדי ישר מסדר *q* הוא גרף דו צדדי (לא מכוון) בו יש *q* קודקודים מכל צד וכל קודקוד מחובר בדיוק בצלע אחת לקודקוד אחד בלבד בצד השני. (כלומר: יש לנו *q*זוגות של קודקודים)

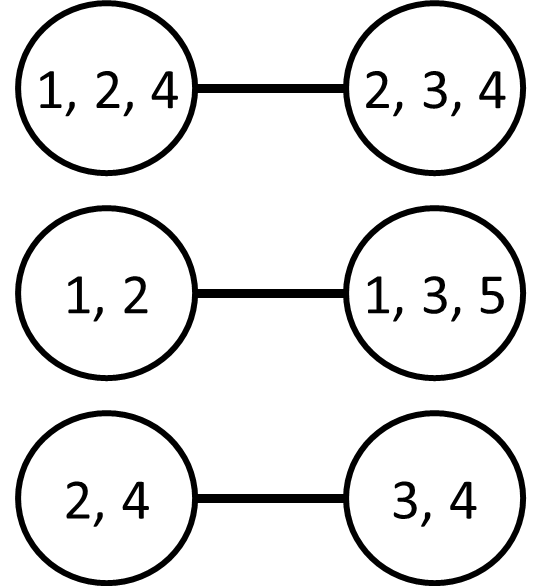
בעיית *Numbers Satisfying (NS)*מוגדרת באופן הבא.

בהינתן:

* גרף דו-צדדי ישר מסדר *q* שבו בכל קודקוד קבוצת מספרים
* מספר

האם קיימת קבוצת קודקודים בלתי תלויה (אין קשת בין 2 קודקודים בקבוצה) בגודל *q* כך שכל מספר בין ל- נמצא בלפחות בקודקוד אחד בקבוצה.

לדוגמא. בהינתן:



הבעיה תחזיר מכיוון שקיימת קבוצה בלתי תלויה, בגודל , המכילה את כל האיברים בין ל- (הקודקוד השמאלי בשורה הראשונה והימני בשורה השנייה).

הוכיחו במדויק כי *NS* היא בעיה ב- *NPC*.

(רמז: *3-CNF-SAT(n,k)* -*n* ליטרלים, *k* שלשות)

**תשובה:**

בהינתן קבוצת קודקודים. נעבור על כל הקודקודים ונבדוק כי הקבוצה בגודל *q,* נעבור על המספרים בכל קודקוד ונבדוק כי קיימים כל המספרים מ-*1* עד *i* בכל הקודקודים ביחד, נעבור על כל זוג קודקודים שכנים ונבדוק כי לא שניהם נמצאים בקבוצה. מעבר על הזוגות של הקודקודים ועל המספרים בכל קודקוד ולכן פולינומיאלי.

1. נבחר לבצע רדוקציה מבעייה מוכרת *3-CNF-SAT*
2. בהינתן פסוק *3-CNF-SAT* (*n* ליטרלים, *k* שלשות) ניצור גרף דו-צדדי ישר *G* מסדר . זוג קודקודים עבור כל ליטרל. באחד מהקודקודים נרשום את מספרי הפסוקיות בהן מופיע הליטרל ובקודקוד השכן לו נרשום את מספרי הפסוקיות בהן מופיע שלילתו. בנוסף, נגדיר .

נעביר לבעיית *את G,i.*

1. כיוון 1: נניח ו-*3-CNF-SAT* החזיר , כלומר: קיימת השמה כך שבכל פסוקית קיים לפחות איבר אחד שמחזיר . בבעיית *NS,* אם נסתכל על קבוצת הקודקודים המקבילה לערכי הליטרלים ב-*3-CNF-SAT,* נקבל קבוצה המכילה קודקודים שאינם שכנים (לא יכול להיות שאיבר ושלילתו יחזירו ערך זהה) וכן קיימים כל המספרים מ-1 עד *i* מכיוון שכל הפסוקיות החזירו וכן .   
   כיוון 2: נניח ו-*NS* החזיר , כלומר: קיימת קבוצת קודקודים בגודל כך שכל מספר מ-1 עד נמצא בקודקודים. אם נסתכל על ההשמה המקבילה לקודקודים שנבחרו, כל הליטרלים מחזירים ביחד ערכי בכל הפסוקיות מכיוון שבקבוצת הקודקודים קיימים כל המספרים 1 עד וכן פסוקיות מפסוק ה-*3-CNF-SAT.*
2. יצירת שני קודקודים וקשת לכל ליטרל וכן בכל קודקוד נרשום כמות מספרים שאינה גדולה מכמות הפסוקיות – פולינומיאלי.

**טעויות נפוצות:**

* טרנספורמציה לא חוקית
* רדוקציה הפוכה
* הוכחת NP שגויה
* חסרה הוכחת שהטרנספורמציה פולינומיאלית
* טרנספורמציה חוקית שאינה רדוקציה לבעיה

**(שאלה 2, 5 נקודות - חובה)**

סימון – קבוצה כל הבעיות שניתן לפתור בזמן לינארי

קיימות ארבע בעיות .

עבור כל אחת מהמסקנות הבאות יש לציין **במחברת** האם היא נכונה או לא. תשובה נכונה מזכה בנקודה (1+), תשובה לא נכונה מורידה נקודה (1-).

|  |
| --- |
| 1. אם קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- ל- ומ- ל- אז 2. אם קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- ל- אז 3. אם קיימת רדוקציה פולינומיאלית מ- ל- אז 4. אם אז 5. אם ל- חסם תחתון אקספוננציאלי אז ל- חסם תחתון אקספוננציאלי   **תשובה:**  ד' ו-ה' נכונים |

**(שאלה 3, 23 נקודות - חובה)**

*L* היא שפה מעל הא"ב

אם רגולרית הראו ביטוי רגולרי או אוטומט סופי מתאים. אם היא לא הוכיחו שלא.

- מספר הפעמים ש- מופיע במילה

**תשובה:**

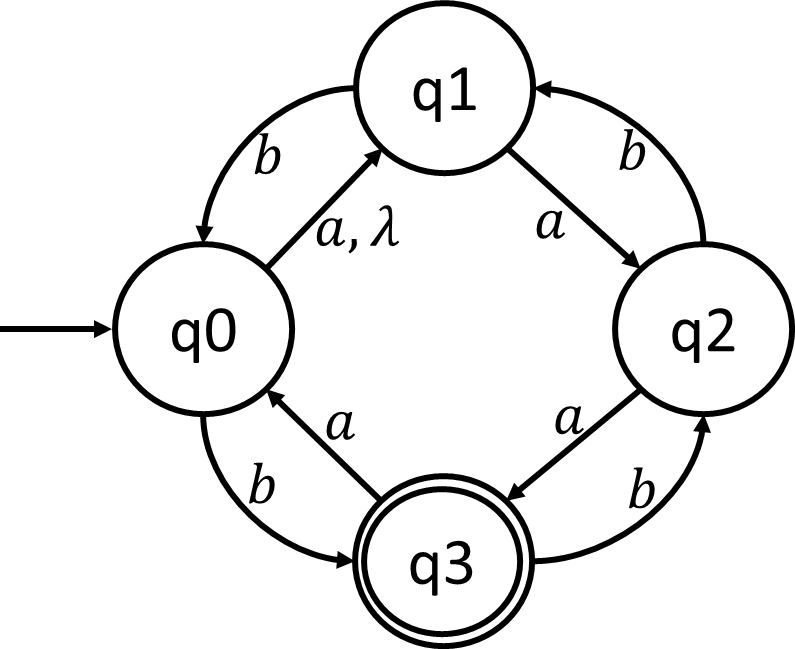
* נניח שהשפה רגולרית ולכן קיים אוטומט סופי בעל מצבים שמקבל אותה
* נבחר את המילה ()
* נפרק את המילה כך ש:  
   ()
* מלמת הניפוח נובע כי וגם ולכן וגם
* על פי למת הניפוח, מתקיים עבור כל :  
  + עבור : *אך*   
    *לכל* *מכיוון ש-*
* ומכאן שלמת הניפוח לא מתקיימת ולכן סתירה להנחה כי L רגולרית.

**טעויות נפוצות:**

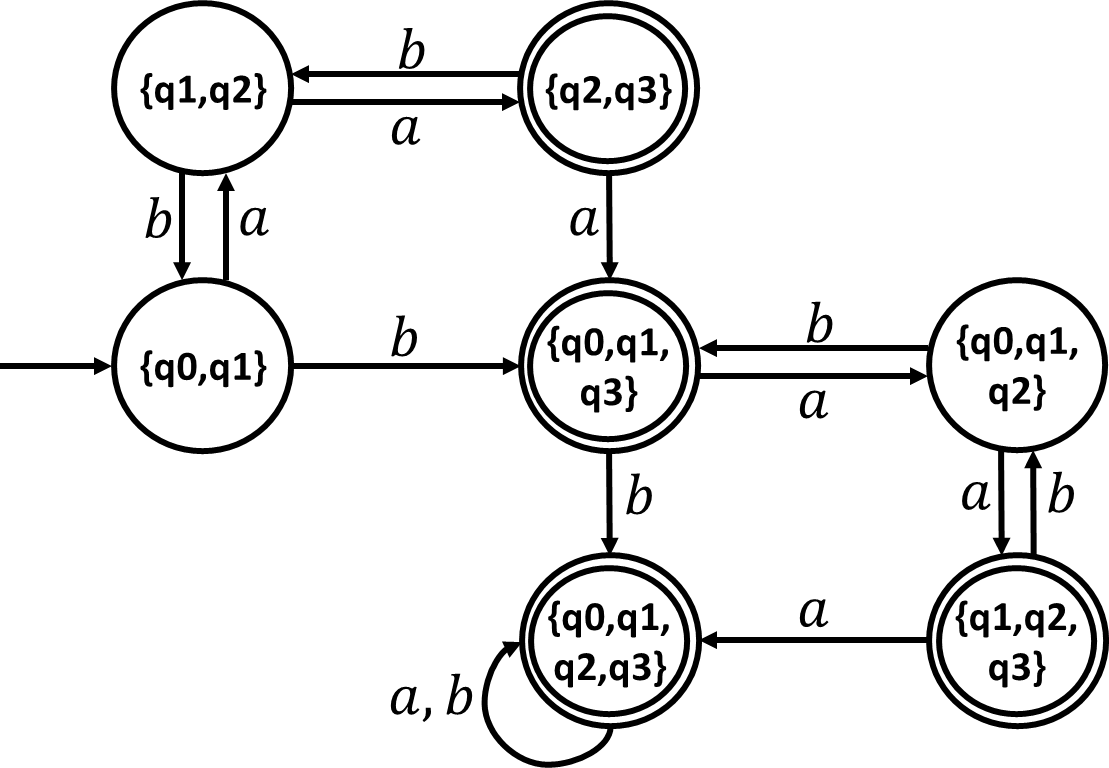
* בחירת מילה שלא בשפה
* הסבר חסר ללמה המילה לא בשפה לאחר הניפוח
* ניפוח שמשאיר את המילה בשפה

**(שאלה 4, 23 נקודות - בחירה)**

נתון ה-NFA שבציור. הראו כיצד הופכים אוטומט זה ל-DFA. יש להראות רק את הDFA שמתקבל.



**תשובה:**



**טעויות נפוצות:**

* השארת האוטומט כפי שהוא כפתרון
* חוסר דיוק במעברים בין המצבים האוטומט החדש
* אי-סימון מצבים מקבלים
* פתרון המכיל טעויות רבות
* מתקבל לאחר השינוי אוטומט שאינו דטרמיניסטי

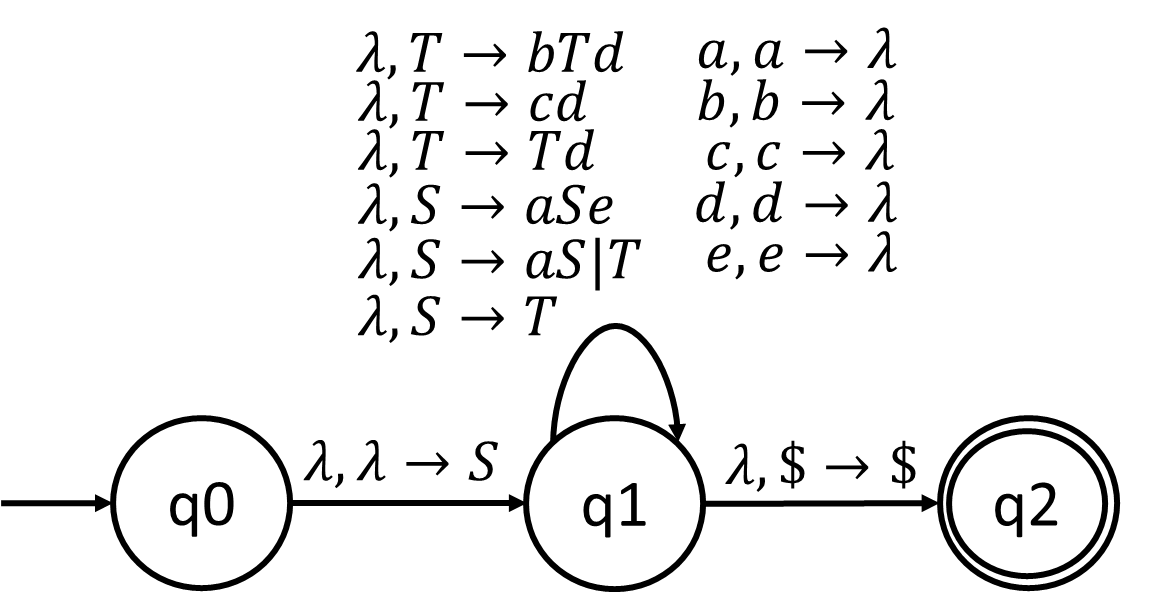
**(שאלה 5, 23 נקודות - בחירה)**

נתון דקדוק חסר ההקשר הבא:

𝐴𝑆

1. מהי השפה המיוצגת על ידי דקדוק חסר ההקשר הנ"ל? רצוי לתת ביטוי מתמטי או להסביר במילים (אבל להיות מדויקים).
2. בנו אוטומט מחסנית שמגדיר את השפה.

**תשובה:**

2. 

**טעויות נפוצות:**

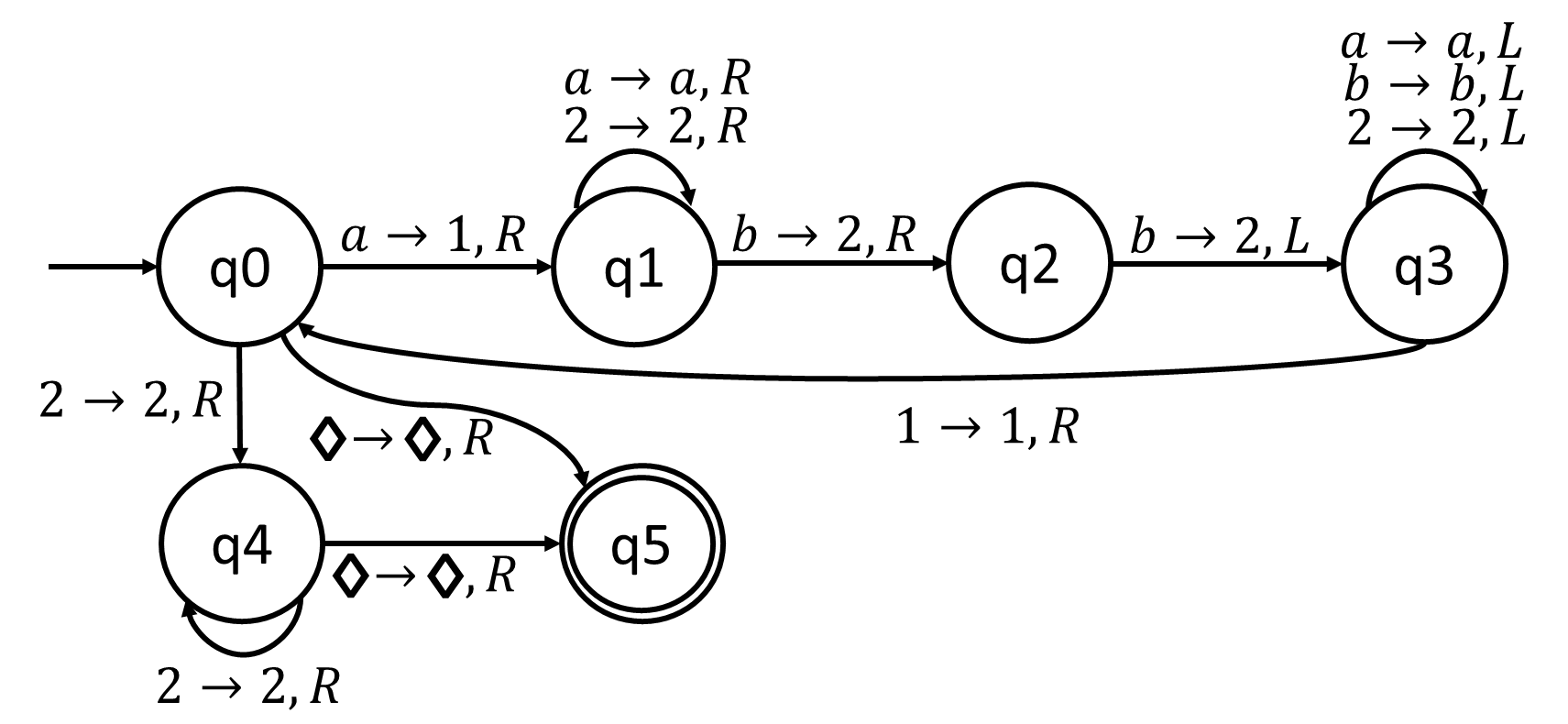
* חוסר דיוק בהגדרת השפה
* מתן אוטומט שאינו תואם לשפה

**(שאלה 6 , 23 נקודות - בחירה)**

נתונה השפה:

בנו מכונת טיורינג המגדירה את השפה .

**תשובה:**



**טעויות נפוצות:**

* אוטומט שאינו מקבל את השפה בצורה מדוייקת
* מתן מכונת טיורינג שאינה דטרמיניסטית
* מצב התחלתי – מצב מקבל (המכונה עוצרת במצב מקבל)
* הגדרת מעברים שאינם תואמים למכונת טיורינג