**מודלים חישוביים**

**סמסטר אביב תשע"ח**

**מטלה 4 - פתרון**

**שאלה 1**

בעיית מוגדרת האופן הבא-  
נתון גרף , מספר שלם ומספר שלם .   
הבעיה: האם קיימות בגרף , קליקות זרות שכל אחת מהן בגודל .  
\*קליקות זרות – בכל קליקה קודקודים זרים משאר הקליקות.

הראו כי בעיה זו היא .

**תשובה:**

הוכחה

1. בהינתן קליקות זרות בגודל , נעבור על כל קליקה ונבדוק האם קיימים קודקודים בקליקה וכן קיימת קשת בין כל שני קודקודים, נבדוק שלא קיים קודקוד ביותר מקליקה אחת ושכל קודקוד נמצא באחת הקליקות בדיוק. במקרה הגרוע (כלל קודקודי הגרף)- ולכן פולינומיאלי.

הוכחה

1. נבחר את הבעיה המוכרת
2. טרנספורמציה: בהינתן בעיה כללית : , נעביר לבעיית ה-: כך ש: .
3. צד א': נניח מקרה ב- המחזיר ערך ונראה כי גם  
    ב- יחזור .  
   אם מקרה ב- מחזיר , אז קיימת בגרף קליקה בגודל . בגרף תהיה קיימת לפחות קליקה 1 בגודל מכיוון וזו העתקה של גרף , ולכן גם זו תחזיר .

צד ב': נניח מקרה ב- המחזיר ערך ונראה כי גם   
ב- יחזור .  
אם מקרה ב- מחזיר , אז קיימות בגרף , קליקות בגודל . במקרה של בניית הרדוקציה . בגרף תהיה קיימת קליקה בגודל מכיוון ובזו גרף זהה לזה של , ולכן גם זו תחזיר .

1. העתקה מדוייקת של הגרף המקורי ו- והוספת איבר אחד נוסף (i) לכן ולכן פולינומיאלי.

**שאלה 2**

בעיית "הגרף המדוייק" () מוגדרת באופן הבא-  
נתון גרף ,מספר שלם ומספר שלם .   
הבעיה: האם קיימת בגרף קבוצת קודקודים בגודל (), שבין הקודקודים בקבוצה זו עוברות לפחות צלעות.

הראו כי בעיה זו היא .

**תשובה:**

הוכחה

1. בהינתן קבוצת קודקודים - נבדוק כי הקבוצה בגודל , נעבור על כל זוג קודקודים ב- ונספור את מספר הצלעות שעוברות בינהם ונבדוק כי לפחות צלעות. במקרה הגרוע , לכן מעבר על קודקודים ולכן פולינומיאלי.

הוכחה

1. נבחר את הבעיה המוכרת
2. טרנספורמציה: בהינתן בעיה מסוג – גרף ומספר ,  
   נבצע ונעביר ל- את .
3. צד א': נניח מקרה ב- המחזיר , אז קיים ב- קבוצת קודקודים בגודל ובה לפחות צלעות. מכיוון ש- ו- אז בקבוצה זו עוברות צלעות בין כל זוג קודקודים. בגלל שגרף זהה ל- ובהם קיימת קבוצת קודקודים בגודל שבה קיימת צלע בין כל זוג קודקודים אז גם תחזיר .  
   צד ב': נניח מקרה ב- המחזיר , אז קיימת ב- קבוצת קודקודים בגודל ובה צלע בין כל זוג קודקודים (קליקה). מכיוון ו- זהה ל-, תהיה קיימת בו קבוצת קודקודים בגודל ובה לפחות והיא הקליקה שנמצאה ב- ולכן יחזיר .
4. העתקה של גרף ושני איברים נוספים ולכן פולינומיאלי.

**שאלה 3**

בעיית מוגדרת באופן הבא-

נתונים:

* אוסף של משתנים המסוגלים לקבל כל מספר שלם
* אוסף של משתנים מסוגלים לקבל כל מספר ממשי
* אוסף של משוואות ואי-שיוויונים ליניאריים המכילים את המשתנים שלעיל (או רק חלק מהם).

הבעיה: האם יש הצבה של המשתנים כך שכל המשוואות והאי-שוויונים מתקיימים.

הוכיחו כי בעיה זו היא .

**תשובה:**

הוכחה

1. בהינתן הצבה לכלל המשתנים () נעבור על המשוואות ונציב אותם.  
   במקרה הגרוע ביותר ולכן פולינומאלי.

הוכחה

1. נבחר את הבעיה המוכרת
2. טרנספורמציה: בהינתן בעיה כללית :

בעלת משתנים בוליאנים, נבצע את הטרנספורמציה הבאה:  
לכל משתנה והמשלים שלו נגדיר את הדברים הבאים:

* אי השיוויון הבא:
* השיוויון הבא:
* אלו משתנים המסוגלים לקבל מספרים שלמים בלבד.

בנוסף, לכל פסוקית נגדיר:

1. צד א': נניח מקרה ב- המחזיר ערך ונראה כי גם ב- יחזור . אם מקרה ב- מחזיר , אז בכל פסוקית קיים איבר שקיבל השמה T. נגדיר כי כל איבר שקיבל השמה T יקבל ב- השמה 1 ואם F השמה 0. ניתן לראות כי מתקיימת כל משוואה מהסוג וכן מהסוג , מכיוון שבכל פסוקית קיים איבר שקיבל השמה T אז גם  
    בודאי מתקיים לכל פסוקים. ולכן גם יחזיר .

צד ב': נניח מקרה ב-המחזיר ערך ונראה כי גם ב- יחזור . אם מקרה ב- מחזיר , אז כל משוואה מסוג מתקיימת וכן ו-, כל איבר שקיבל את הערך 1 יקבל השמה T וכל איבר שקיבל 0 יקבל השמה F. ניתן לראות שבכל פסוקית קיים לפחות איבר אחד שיקבל T וכל איבר ומשלימו יקבלו השמות שונות

1. לכל איבר נבנה 3 משוואות ולכל פסוקית נבנה משוואה, סה"כ: ולכן פולינומיאלי.

**שאלה 4**

בעיית "ההשמה הכפולה" () מוגדרת באופן הבא-

נתון פסוק .

הבעיה: האם קיימות לפחות שתי השמות שונות המספקות את הפסוק הנתון.

הוכיחו כי בעיה זו היא .

**תשובה:**

הוכחה

1. בהינתן 2 השמות (לפחות) נעבור על כלל הליטרלים בכל הפסוקיות, נציב את כל אחת משתי ההשמות ונבדוק כי שתיהן מחזירות וגם נעבור ונבדוק כי ההשמות אינן זהות, לכל היותר כמות הפסוקיות x כמות הליטרלים x 2 ולכן פולינומיאלי.

הוכחה

1. נבחר את הבעיה המוכרת
2. טרנספורמציה: בהינתן בעיה כללית :

נגדיר את הפסוק הבא:

ונעביר את ל-

1. צד א': נניח מחזירה ערך ונראה כי גם ב- תחזיר .   
   אם מקרה ב- מחזיר , אז קיימת השמה לכל המשתנים כך שבכל פסוקית קיים איבר T. ב- שתי השמות –  
    ו- יחזירו מכיוון שהפסוקית הנוספת תמיד לשני הערכים של ושאר הפסוק זהה לפסוק המקורי ולכן תחזיר גם כן .  
   צד ב': נניח מחזירה ערך ונראה כי גם ב- תחזיר . אם מקרה ב- מחזירה , אז קיימות שתי השמות ו- המחזירות . ניקח שרירותית את , השמה זו תחזר ב- מכיוון והפסוק המקורי זהה מלבד פסוקית אחת שכעת לא קיימת ועל כן ההשמה והבעיה עצמה יחזירו .
2. מוסיפים לקלט המקורי פסוקית אחת נוספת וכן ליטל אחד נוסף ולכן פולינומיאלי.

* מומלץ לחשוב למה גם הטרנספורמציה - עם **שני** משתנים חדשים הייתה עובדת