

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campus Ponta Porã  
**Inteligência Artificial**

**Trabalho Prático I**

# **Regressão Linear**

Aluno: Daniel de Leon Bailo da Silva  
Professor: Daniel Matte Freitas

Setembro  
2019

# Sumário

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumo</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>1 Introdução</b>                                 | <b>2</b>  |
| <b>2 Métodos</b>                                    | <b>3</b>  |
| 2.1 Notação Algébrica . . . . .                     | 3         |
| 2.2 Notação Matricial . . . . .                     | 3         |
| 2.3 Cálculo da Regressão Linear em Python . . . . . | 4         |
| <b>3 Análise dos Resultados</b>                     | <b>5</b>  |
| 3.1 Treinamento utilizando 1000 iterações . . . . . | 11        |
| <b>4 Interpretação dos Resultados</b>               | <b>13</b> |
| <b>5 Conclusão</b>                                  | <b>14</b> |

## Resumo

Este trabalho consiste em implementar a *Regressão Linear com uma variável* utilizando sua forma matricial. O objetivo do mesmo consiste em plotar os valores de  $J(\theta)$  para diferentes valores de  $\alpha$ , que seria a Taxa de Aprendizagem (Learning Rate) do algoritmo.

Este trabalho está disponibilizado num repositório do *GitHub* para melhor controle do versionamento do programa, e o mesmo se encontra em um *Jupyter Notebook* (*Python*) e em um script escrito em *Python* também.

[https://github.com/danbailo/T1-Inteligencia\\_Artificial](https://github.com/danbailo/T1-Inteligencia_Artificial)

# 1 Introdução

Em estatística ou econometria, regressão linear é uma equação para se estimar a condicional (valor esperado) de uma variável  $y$ , dados os valores de algumas outras variáveis  $x$ .

A regressão, em geral, tem como objetivo tratar de um valor que não se consegue estimar inicialmente.

A regressão linear é chamada "linear" porque se considera que a relação da resposta às variáveis é uma função linear de alguns parâmetros. Os modelos de regressão que não são uma função linear dos parâmetros se chamam modelos de regressão não-linear. Sendo uma das primeiras formas de análise regressiva a ser estudada rigorosamente, e usada extensamente em aplicações práticas. Isso acontece porque modelos que dependem de forma linear dos seus parâmetros desconhecidos, são mais fáceis de ajustar que os modelos não-lineares aos seus parâmetros, e porque as propriedades estatísticas dos estimadores resultantes são fáceis de determinar.

Modelos de regressão linear são frequentemente ajustados usando a abordagem dos mínimos quadrados, mas que também pode ser montada de outras maneiras, tal como minimizando a "falta de ajuste" em alguma outra norma (com menos desvios absolutos de regressão), ou através da minimização de uma penalização da versão dos mínimos quadrados. Por outro lado, a abordagem de mínimos quadrados pode ser utilizado para ajustar a modelos que não são modelos lineares. Assim, embora os termos "mínimos quadrados" e "modelo linear" estejam intimamente ligados, eles não são sinônimos.

## 2 Métodos

### 2.1 Notação Algébrica

Definições:

- $h(x) = \theta_1 x + \theta_0$
- $J(h) = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^m ((h(x_i) - y_i)^2)$

Algoritmo; sendo  $i$  a iteração:

- $\theta_1^i = \theta_1^{i-1} - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1^{i-1}} J \rightarrow \theta_1^{i-1} - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m ((h(x_i) - y_i)x)$
- $\theta_0^i = \theta_0^{i-1} - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0^{i-1}} J \rightarrow \theta_0^{i-1} - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m ((h(x_i) - y_i)1)$

### 2.2 Notação Matricial

Definições:

Considere  $x'$  a entrada, então:

- $X = \begin{bmatrix} 1 & x'_1 \\ 1 & x'_2 \\ 1 & \dots \\ 1 & x'_m \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$
- $H = X \cdot \Theta$
- $E = H - Y$
- $J = \frac{1}{2m} (E^T \cdot E)$

Algoritmo; sendo  $i$  a iteração:

- $\Theta_i = \Theta_{i-1} - \frac{\alpha}{m} (X^T \cdot E)$

Sendo que a cada iteração, o valor de  $H$ ,  $E$  e  $J$  devem ser atualizados.

## 2.3 Cálculo da Regressão Linear em Python

A função abaixo realiza o cálculo da Regressão Linear na sua forma matricial, foi escolhido essa forma para ser programado, pois assim é realizado menos operações e também operações matriciais são paralelizáveis, portanto, para enormes *Datasets*, é inviável realizar o cálculo de forma sequencial(iterativa).

Esta função, recebe como parâmetro o número de iterações que irá treinar o algoritmo, o  $\alpha$ , que é a taxa de aprendizagem, e os valores de  $\theta$  inicial, que são os pesos; é importante observar que, nesse caso, a variável "theta" é um vetor coluna  $2 \times 1$ .

```
def linear_regression(num_it, alpha, theta):
    err = np.zeros(num_it)
    for i in range(num_it):
        h = np.dot(X, theta)
        e = h - y
        J = (np.dot(e.T, e) / (2 * m))
        err[i] = J
        theta = theta - ((alpha / m) * np.dot(X.T, e))
    return err, theta
```

### 3 Análise dos Resultados

Considerando os dados de teste que foram disponibilizados, com a entrada representando o eixo X, e a saída o eixo Y, o algoritmo tem o objetivo de prever a saída, visto que existe uma relação linear entre os dados, e para isso, foi utilizado algumas técnicas dispondo de gráficos para selecionar o melhor valor de  $\alpha$  local dentro o intervalo conhecido para os testes.

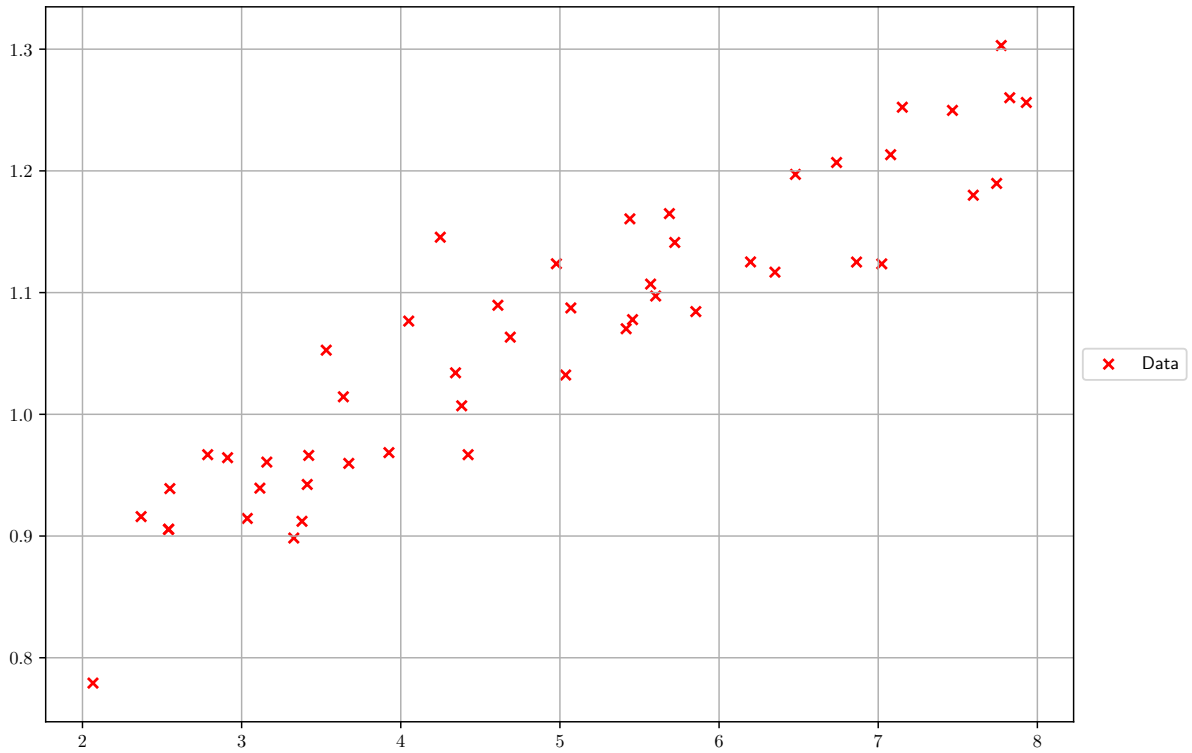
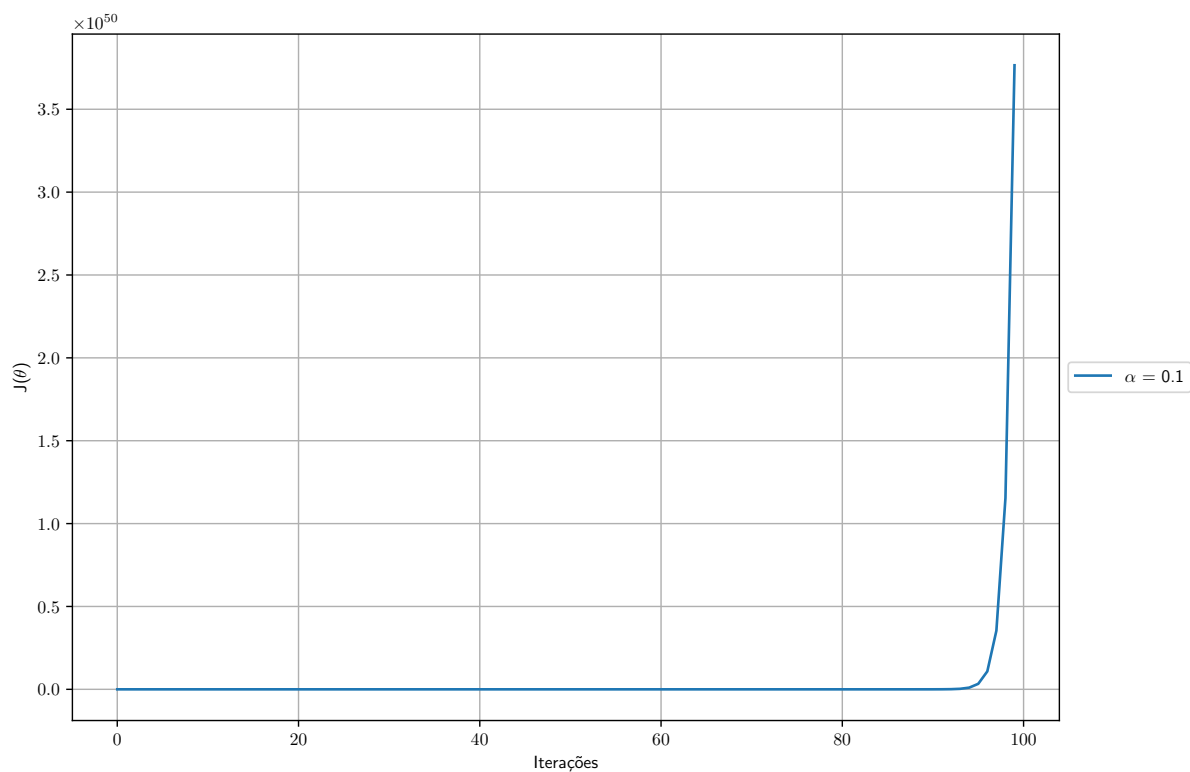


Figura 1: Dados disponibilizados.

Os valores deste intervalo mencionado acima, foram escolhidos partindo de uma hipótese, e a partir desta hipótese, foi possível entender como o *erro* iria se comportar para aumentar ou diminuir o valor deste  $\alpha$ . É importante ressaltar, que quanto menor o erro, ou seja, quanto mais próximo de 0, melhor será a predição do algoritmo. No melhor caso, onde o erro é 0, a predição é perfeita.

**Para todos os testes, os pesos ( $\theta$ ) foram inicializados com  $\theta_0, \theta_1=(0,0)$  e inicialmente foi-se utilizada 100 iterações para observar o comportamento do algoritmo.**

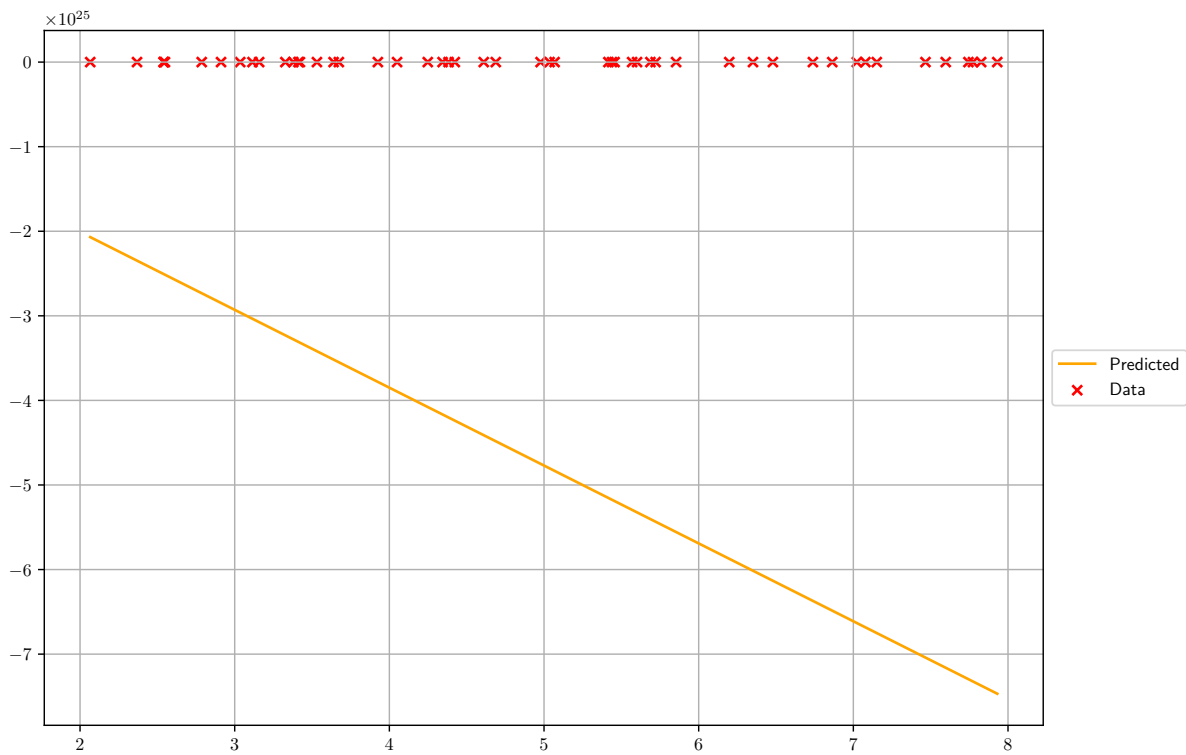
Com isso, o primeiro insight obtido após selecionar um valor para o  $\alpha$ , foi de que era necessário diminuir ainda mais seu valor, pois o mesmo estava estourando exponencialmente, ou seja, estava se divergindo da solução, e o que estamos buscando, é um  $\alpha$  que se convirja a solução ideal.



**Figura 2:** Primeiro insight obtido a partir de um valor de  $\alpha$  inicial.



Com os dados dispostos, se realizarmos a aplicação do algoritmo, utilizando o valor de  $\alpha$  acima, que foi de 0.1, iremos obter a seguinte predição.



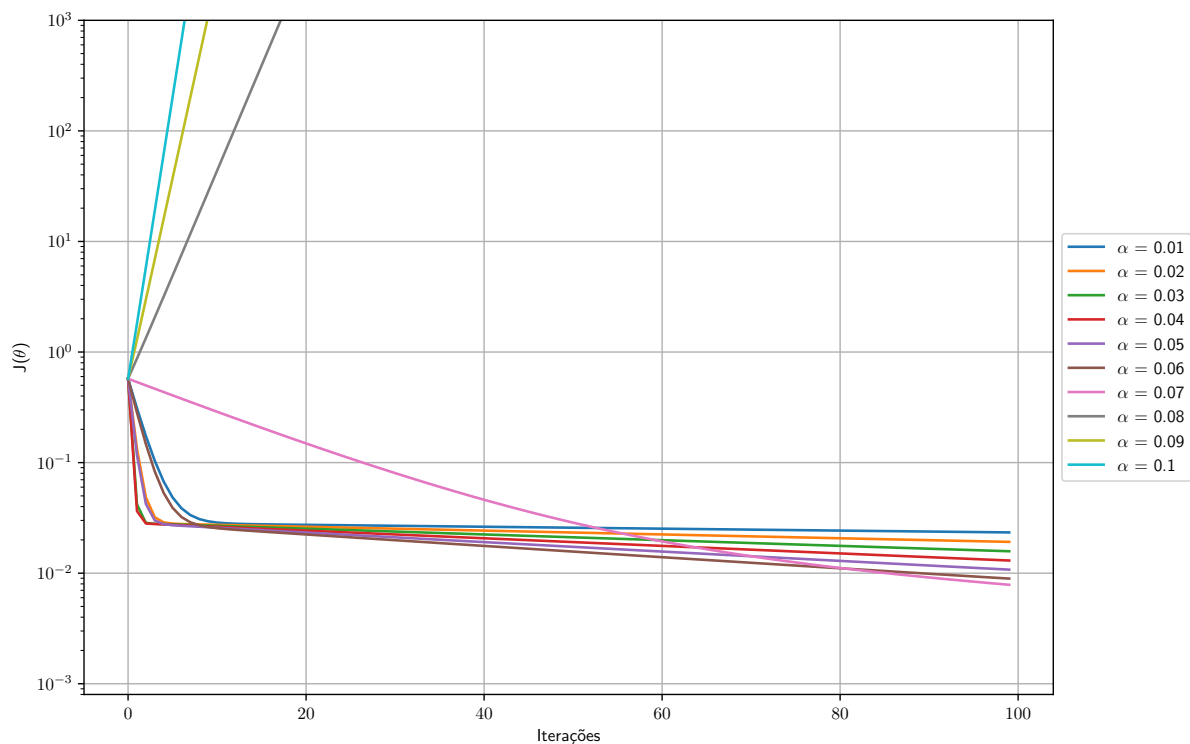
**Figura 3:** Predição com mau treinamento.

Como podemos ver, numa escala logarítmica, a nossa predição está absurdamente longe dos dados que foram dispostos, aproximadamente  $10^{25}$  se comparado no eixo y.

Então, foi realizado alguns testes para tentar selecionar o melhor valor para  $\alpha$ , logo, é importante notar que, quanto mais próximo de 0, melhor será a solução que o algoritmo irá encontrar.

Neste gráfico, é possível observar que, para alguns valores de  $\alpha$ , como o próprio 0.1, que já foi testado anteriormente, e também, 0.08 e 0.09, convergem da solução e "estouram" exponencialmente, portanto esses valores serão descartados para as próximas análises.

É possível notar também que, para alguns valores temos uma convergência mais rápida, ou seja, esses valores se aproximam mais rápido de 0; isso significa que, na *Descida de Gradiente*, o algoritmo irá realizar um salto bem próximo de uma boa solução(valor próximo de 0), e em contrapartida, alguns valores também convergem, mas de forma mais lenta.



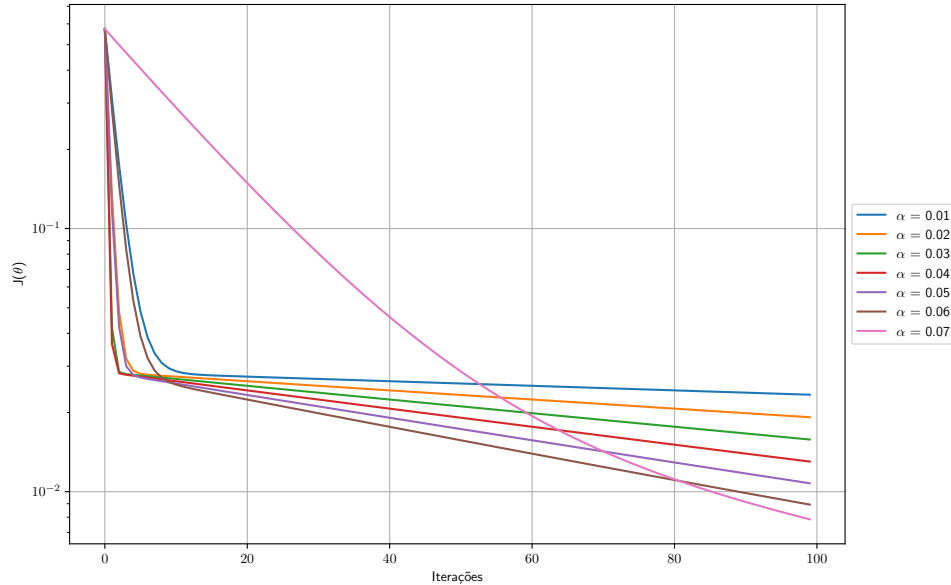
**Figura 4:** Verificando o erro a partir de diferentes valores de  $\alpha$ .

Logo, a seguinte questão é levantada: "Para este modelo, o valor de  $\alpha$  que converge mais rápido, será de fato o melhor valor para utilizar no treinamento do algoritmo?".

Para responder essa questão, foi realizado alguns testes para a quantidade atual de iterações e posteriormente será aumentado este número, para verificar como que o modelo se comporta quando submetido a uma quantidade maior de iterações(treinamento).

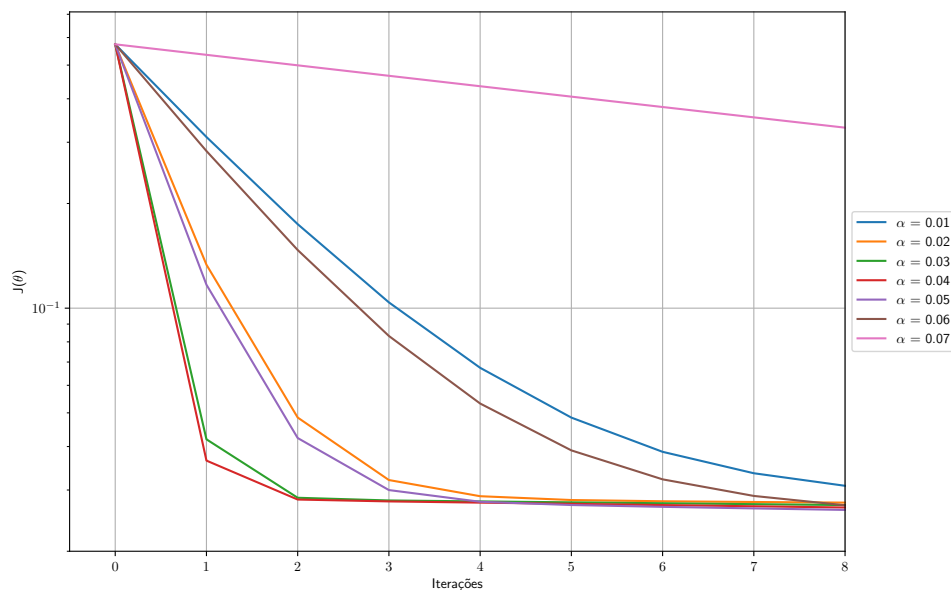
No gráfico abaixo, pode-se observar melhor como está atualmente o comportamento do algoritmo para cada valor de  $\alpha$ . De primeira impressão, é possível ver que o valor que mais demora a convergir é 0.07, porém, o mesmo é o que está mais próximo do eixo, pode-se afirmar que para 100 iterações, este seria um bom valor, mas ainda não sabemos se este será de fato o melhor, visto a sua demora a convergir.

Entretanto, não é possível saber de fato, qual é o valor que converge mais rápido, pois nessa escala, os valores estão muito próximos um do outro.



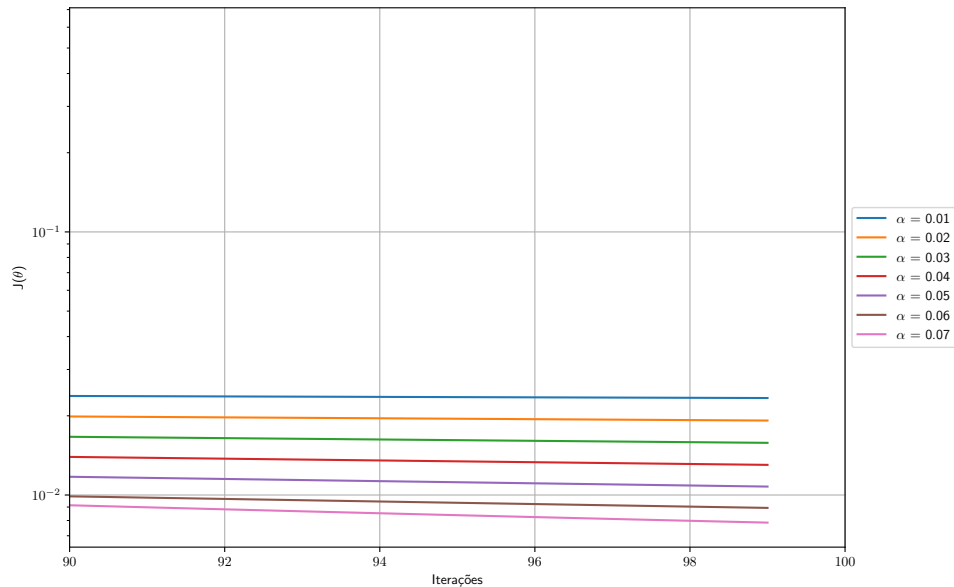
**Figura 5:** Intervalo de 100 iterações.

Com isso, o gráfico abaixo foi estreito num intervalo menor, relacionado a figura 8. Agora é possível ver com mais clareza que o valor 0.04, referente a linha vermelha, é o valor que converge mais rápido. Portanto, este pode também pode ser considerado um bom valor para realizar o treinamento.



**Figura 6:** Intervalo estreito mais a esquerda do eixo.

Continuando a análise para selecionar o valor de  $\alpha$ , agora veremos como está se comportando os valores num intervalo mais restrito ao final do eixo x. Assim como na figura 8, como os valores estão bem diferentes entre si, o comportamento é o mesmo que já foi notado.



**Figura 7:** Intervalo estreito mais a direita do eixo.

Porém, é importante lembrar que, para este treinamento foi utilizando somente **100 iterações**, este é um número pequeno de iterações, mesmo sabendo que os dados dispostos não são tão grandes; porém, para obter uma análise mais concreta para selecionar um bom  $\alpha$  para prever os valores de  $y$ , será realizado outra análise, mas agora utilizando **1000 iterações**, e será observado se o comportamento do modelo continua o mesmo, ou se sofre alguma alteração durante o treinamento.

### 3.1 Treinamento utilizando 1000 iterações

Ao realizar o treinamento utilizando 1000 iterações, pode-se notar que alguns valores de  $\alpha$ , temos alguns valores que convergiram a partir das 500 iterações e outros não, mesmo que com 100 iterações, pareciam ser bons valores, pelo fato de convergir mais rápido que outros valores.

Logo, podemos afirmar que, não é pelo fato de uma solução convergir mais rápido, que esta será melhor que as outras, pois ela pode melhorar depois em outro intervalo de iterações.

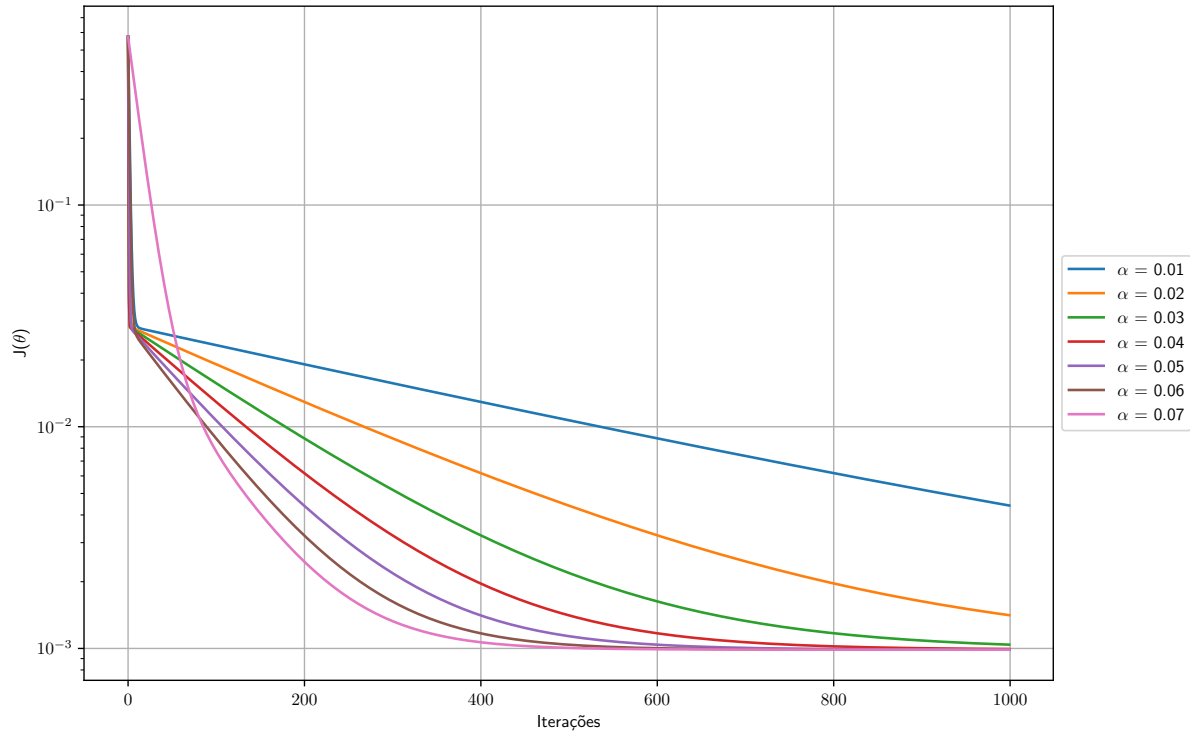
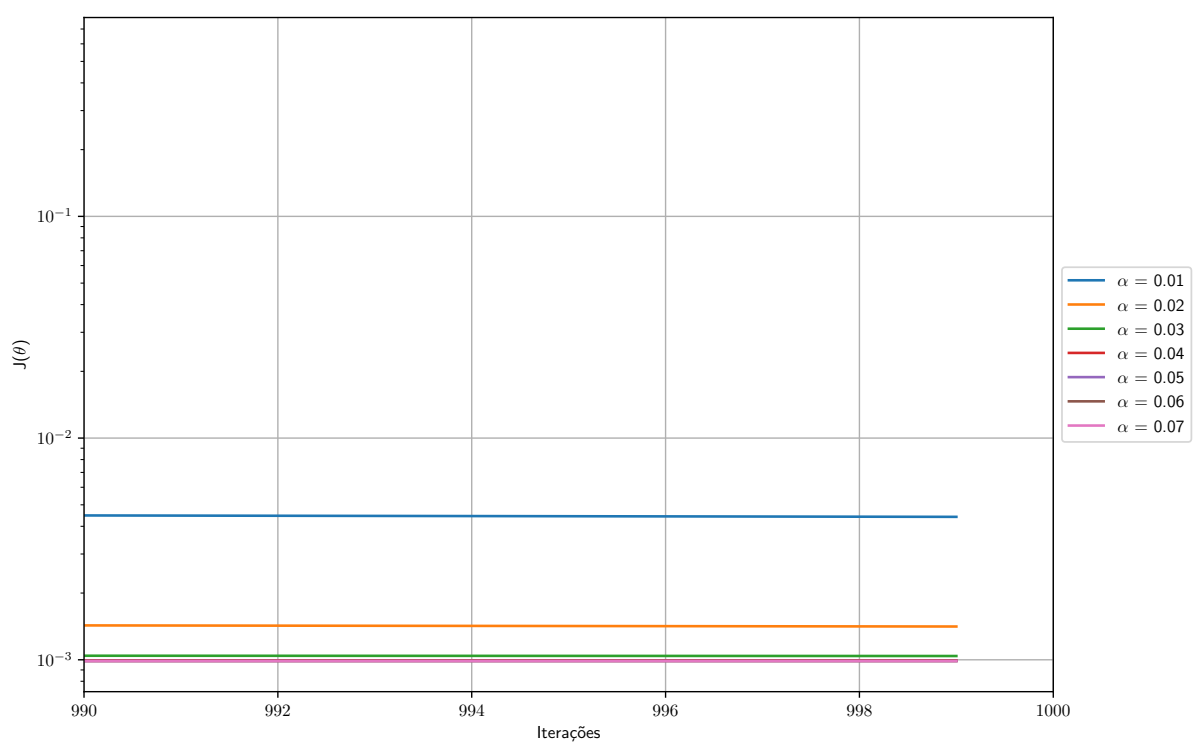


Figura 8: Intervalo de 1000 iterações.

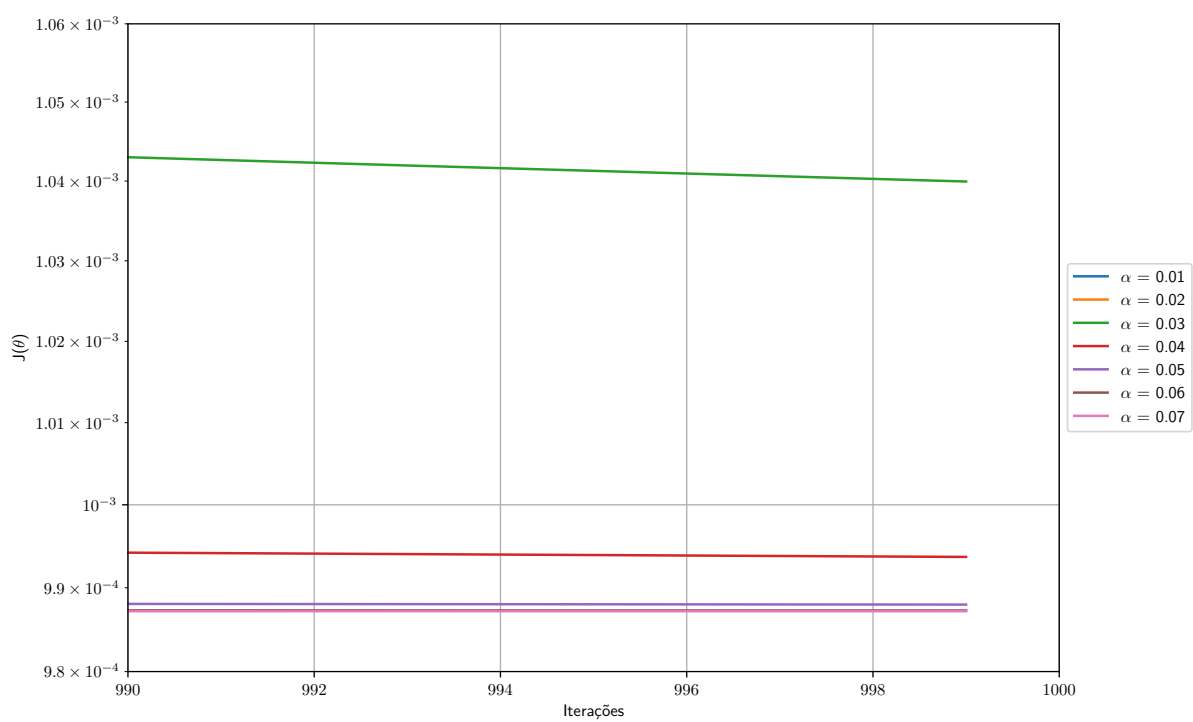
Porém, novamente, como agora os valores estão muito próximos um do outro, é necessário ampliar o intervalo ao final do eixo x para saber de fato qual valor está com a menor amplitude em relação ao eixo y. Para isso, foi gerado dois gráficos, a figura 9 e 10, as duas figuras estão estreitas no intervalo  $[990, 1000]$  para X, e  $[10^{-3}, 10^{-1}]$ ,  $[9.8 \times 10^{-4}, 1.06 \times 10^{-3}]$ , respectivamente.

No gráfico da figura 9, é possível notar a presença de mais de uma linha entre as cores verde e rosa, que representam os valores 0.03 e 0.07, respectivamente, mas não dá para distinguir qual valor de fato é este.

No gráfico da figura 10, é possível observar quais são valores presentes neste intervalo, considerando que este intervalo de y é muito pequeno.



**Figura 9:** Intervalo estrito mais a direita para 1000 iterações.

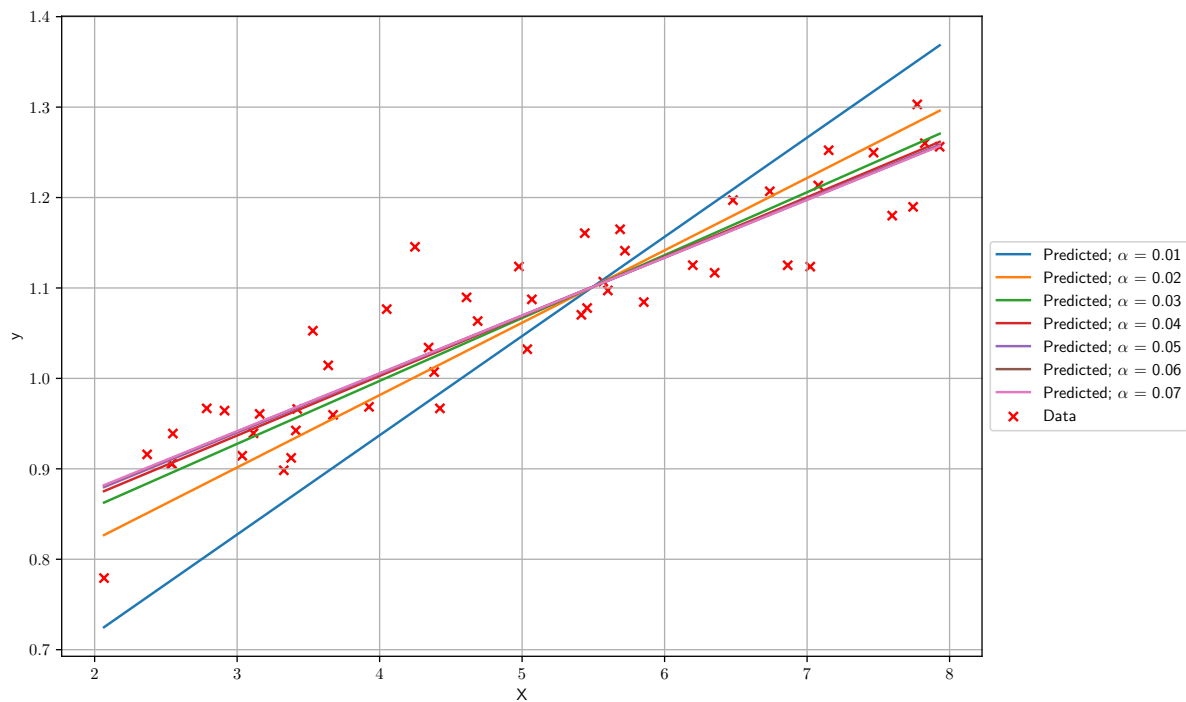


**Figura 10:** Zoom no intervalo.

## 4 Interpretação dos Resultados

Após estudarmos o comportamento do erro( $J(\theta)$ ) deste modelo para os  $\alpha$  selecionados, podemos de fato selecionar um valor de  $\alpha$  global dentre os locais utilizados para estudo. Com o estudo do erro, é possível saber quando teremos um bom e um mau modelo, ou seja, quanto mais divergente do eixo for este erro, pior será o modelo.

O gráfico abaixo, mostra as previsões para todos os valores de  $\alpha$  estudados quando estes convergiam.



**Figura 11:** Todas as previsões para os  $\alpha$ 's convergentes.

## 5 Conclusão

Após as análises, podemos ver que o  $\alpha$  que mais se mostrou próximo de uma solução exata foi o de valor 0.07.

Podemos ver que, dispersos no plano temos alguns *outliers*, mas de forma geral, existe uma relação linear entre os dados.

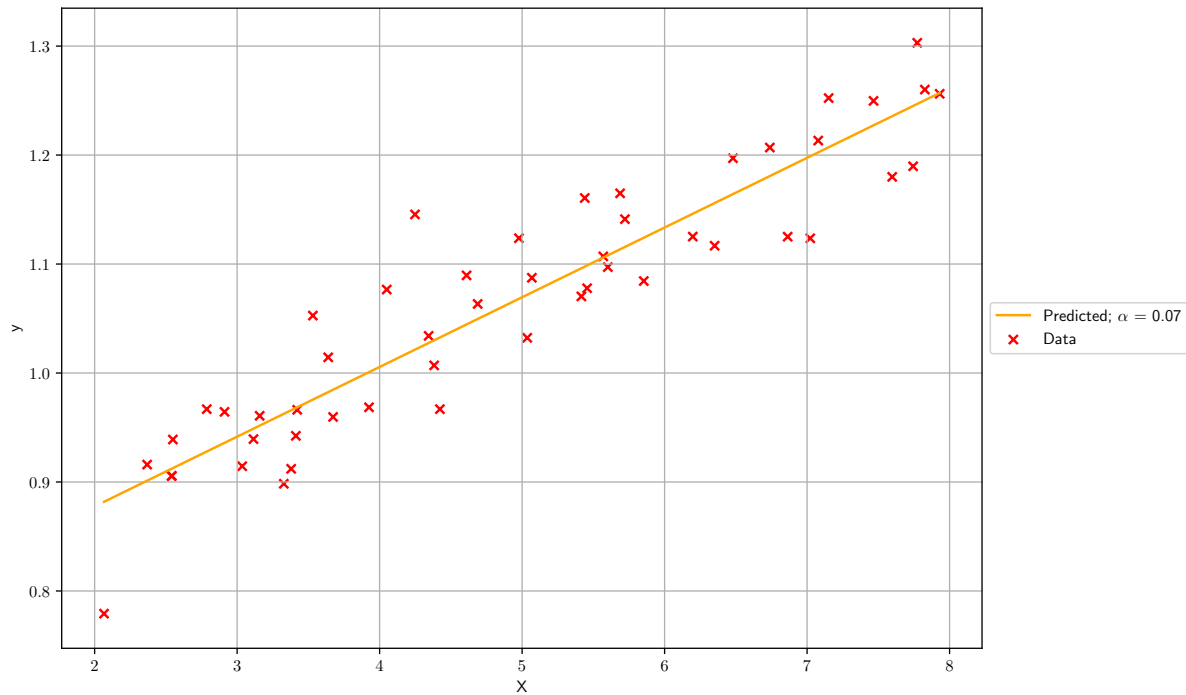


Figura 12: Modelo final.