Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области
«Университет «Дубна»

Инженерно-физический институт
Кафедра фундументальных проблем физики микромира

Курсовая работа по
Теме:

«Колебательные процессы»

Выполнил:
студент группы 3161
Баки Даниил Феликсович
Преподаватель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры ядерной физики
Рачков Владимир Александрович

Дубна, 2022

Аннотация

В работе исследуется механическая система состоящая из шарика закрепленного на двух пружинах на поверхности стола. Для исследования данной системы были получены уравнения движения для шарика и проведено математическое моделированное данной системы с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка на языке программирования C++.

Содержание

1 Введение

Мы будем изучать колебательные процессы на следующем примере шарика лежащего на горизонтальном столе, прикрепленом к двум пружинам с жесткостями k_x и k_y и одинаковыми длинами l в нерастянутом состоянии. Пружины взаимно перпендикулярны в положении равновесия. В момент времени $t_0 = 0$ шарик оттягивают из положения равновесия в точку с координатами $(x_0,\ y_0)$ относительно положения равновесия, после чего отпускают. Моделью данной системы служит материальная точка, движущаяся на плоскости $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$

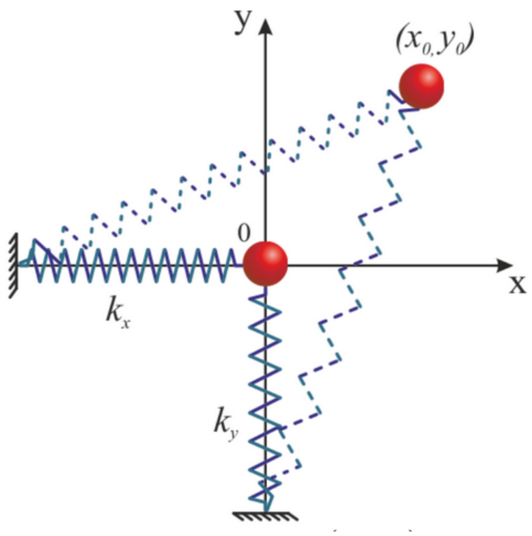


Рис. 1: Схема условия

2 Уравнения движения

Лаграндджиан нашей системы имеет вид:

$$L = m\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - k_x\frac{x^2 + y^2}{2} - k_y\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right). \tag{1}$$

Чтобы уменьшить количество уравнений можно сделать замену $z = x + iy$, $z^* = x - iy$ и переписать:

$$L = m\frac{\dot{z}\dot{z}^*}{2} - (k_x + k_y)\frac{zz^*}{2} - \frac{b}{2}\frac{d}{dt}(zz^*). \tag{2}$$

Из него получаем следующие уравнения движения:

$$m\ddot{z} = -(k_x + k_y)z - b\dot{z}, \tag{3}$$

где b коэфициент силы трения. Введем для удобства обозначения $A = (k_x + k_y)/m$ и $B = b/m$. Так же нам понадобиться разбить уравнения второго порядка на уравнения первого порядка. Для этого обозначим $v_z = \dot{z}$. В итоге система имеет вид:

$$\dot{v_z} = -Az - Bv_z, \tag{4}$$

$$\dot{z} = v_z. \tag{5}$$

Получим точное решение данной системы уравнений. Для этого будет удобно фиксировать начальные условия $z(t = 0) = z_0$, $v_z(0) = v_0$ и использовать матричную запись:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{v_z} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & -A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_z \\ z \end{pmatrix} = MZ. \tag{6}$$

Собственные числа оператора M будут:

$$\lambda_\pm = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2}. \tag{7}$$

Собственный безис будет:

$$\xi_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Тогда решение даеться следующей формулой (См. Гл.3 §17[1]):

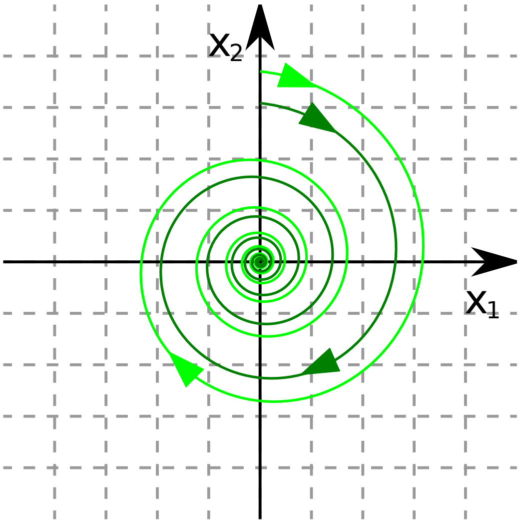
$$Z(t) = e^{Mt}Z_0 = \sum_\pm C_\pm e^{\lambda_\pm t}\xi_\pm, \tag{9}$$

$C_\pm$ определяются из начальных условий.

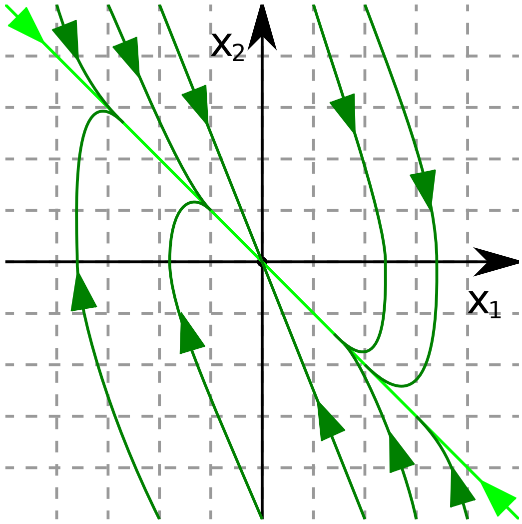
Так как из определения констант следует $A, B > 0$, то из формулы выше следует, что собственные числа будут иметь отрицательную вещественную часть $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) < 0$. Так же они будут иметь ненулевую мнимую часть при выполнении условия

$$B^2 < 4A. \tag{10}$$

Из классификации особых точкек ОДУ следует что при выполнении(или невыполнении) этого условия фазовые кривые будут иметь один из двух типов, представленных на Рис. 2. Если же сила трения отсутствует, то $B = 0$, собственные числа чисто мнимые $\mathrm{Re}(\lambda_{\pm}) = 0$,



Логарифмические спирали



Параболы

Рис. 2: Возможные фазовые партреты вблизи нуля[3, 4]

что соответствует окружностям или гармоническим колебаниям, как на Рис. 3.

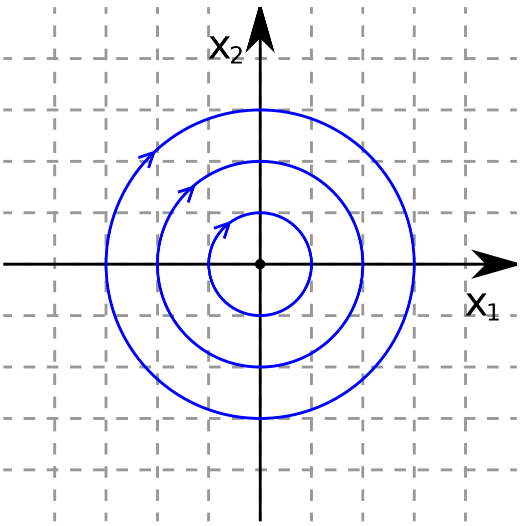


Рис. 3: Окружности на фазовом портрете при нулевой вещественной части собственных чисел [2]

Общая классификация представленна на Рис.4. В наших обозначениях $p = \mathrm{Tr}\ M = -B,\ p = \det M = A,\ \Delta = B^2 - 4A$, где матрица M береться из уравнения (6)

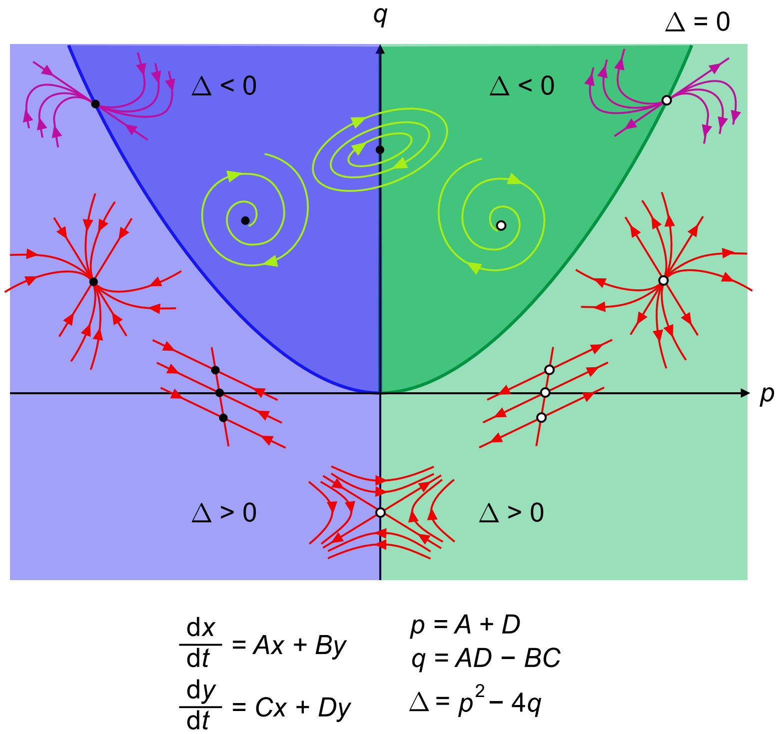


Рис. 4: Все типы особых точек в зависимости от Tr, det и Δ [5]

3 Метод Рунге-Кутты

Пусть дана система из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{11}$$

$X \in \mathbb{R}^n, t, h \in \mathbb{R}$, шаг сетки h и начальное условие $X_0 = X(t = 0)$. Для вычисления приблеженного решения в последующих точках требуется посчитать коэфициенты k_i(их получиться $4n$ штук – на каждое уравнение системы по четыре k_i):

$$k_1 = F(\quad t_n, \quad X_n), \tag{12}$$
$$k_2 = F(\ t_n + h/2, \ X_n + k_1 h/2), \tag{13}$$
$$k_3 = F(\ t_n + h/2, \ X_n + k_2 h/2), \tag{14}$$
$$k_4 = F(\ t_n + h, \ X_n + k_3 h). \tag{15}$$

Тут индекс n обозначает узел сетки. Зная коэфициенты мы можем вычислить приближенное решение в следующей точке по следующей формуле:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{16}$$

Следует обратить внимание на двойки перед k_2 и k_3. Суммарная ошибка на всем отрезке интегрирования будет порядка $O(h^4)$, поэтому метод и имеет четвертый порядок.

4 Результаты

4.1 Траектории

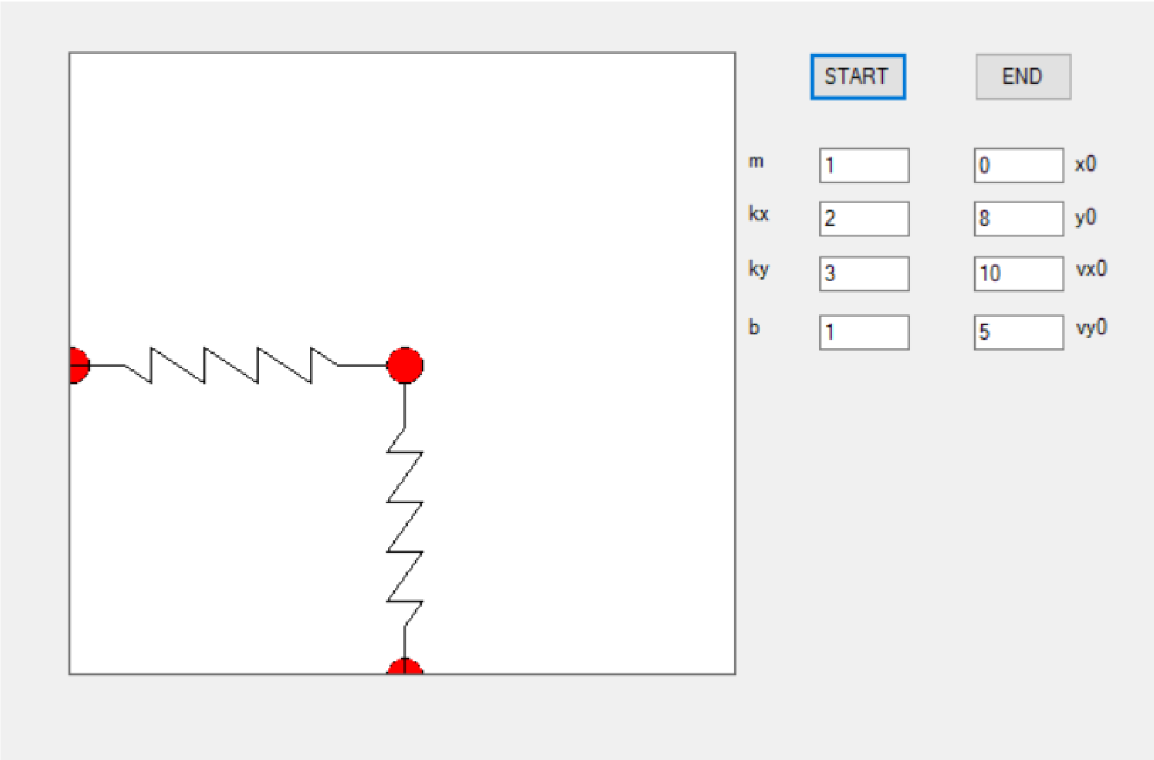


Рис. 5: Окно с анимацией шарика с пружиной. Так же поля для ввода параметров

Далее будем приводить траектории шарика. Рассмотрим случай, когда трение отсутствует, тогда траектория будет иметь вид эллипса как на Рис. 6.

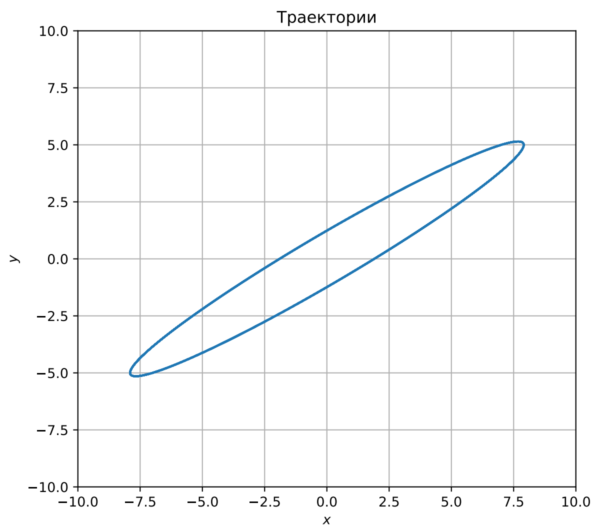


Рис. 6: Траектория шарика, с нулевым трением

Если трение присутствует и выполнено условие уравнения (10), то траектория имеет вид как на Рис. 7

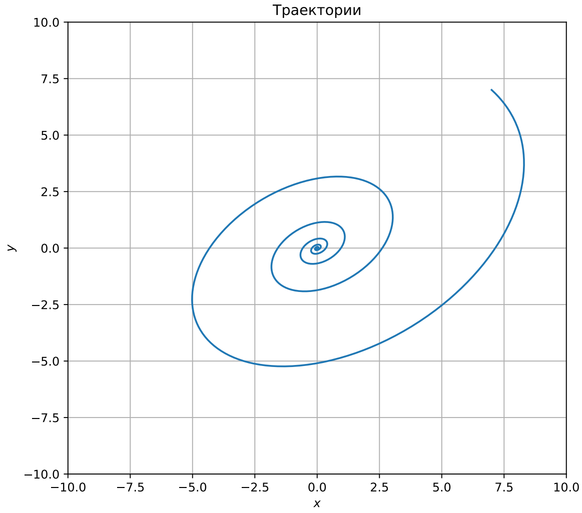


Рис. 7: Угасающие колебания

Иначе, при невыполнении условия (10), как на Рис. 8

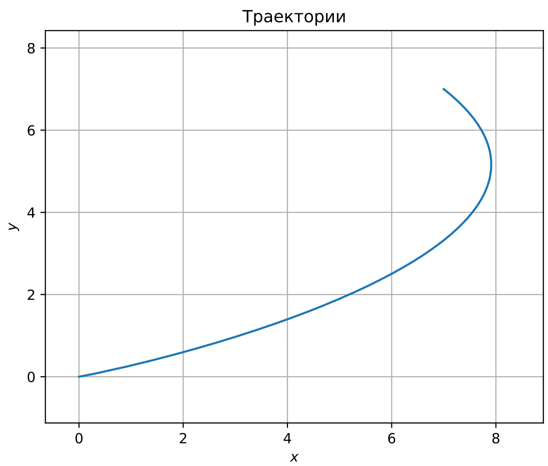
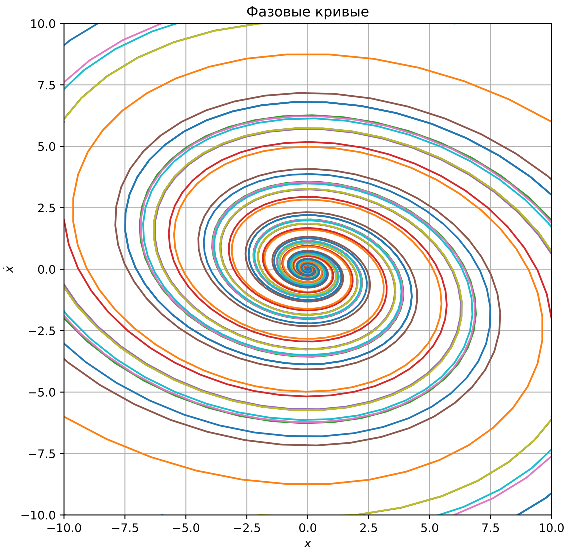


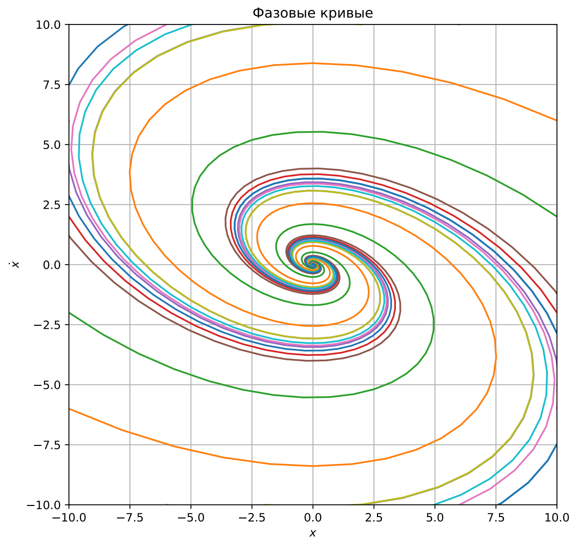
Рис. 8: Падение без колебаний

4.2 Фазовые портреты

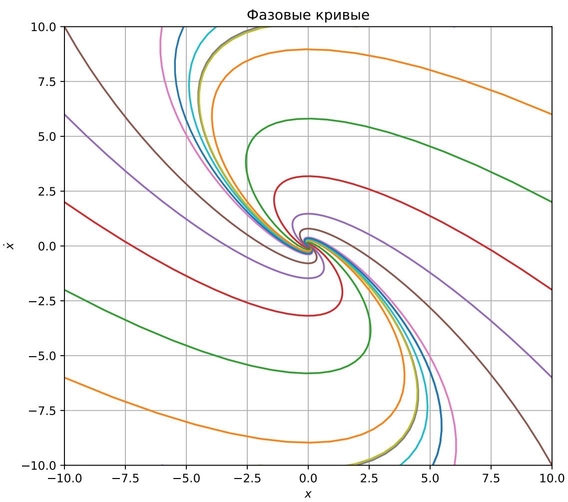
На Рис. 9 представленны характерные фазовые портреты при увеличении трения и уменьшении жесткости пружины. Происходит плавный переход от спиралей к параболам



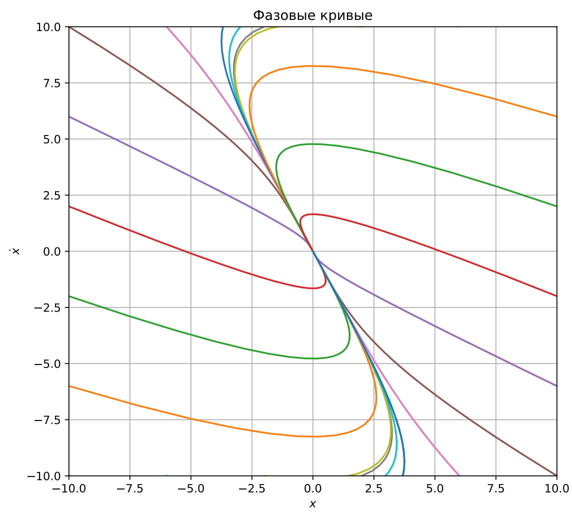
Логарифмические спирали



Логарифмические спирали



Параболы



Параболы

Рис. 9: Фазовые партреты при увеличении трения

5 Заключение

В результате анализа данной нам системы было получено уравнение условия (1) остуствия колебаний в системе. Через параметры системы оно может быть переписано в виде:

$$b^2 > 4m(k_x + k_y). \tag{17}$$

В результате численного моделирования были воспроизведены траектории и фазовые портреты, совпадающие с теоретическими полученными.
Так же на языке программирования C++ были написаны программы для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты

четвертого порядка, отрисовки траекторий и фазовых партретов, и так же анимации движения шарика и пружин с использованием Виндовс форм.

Список литературы

[1] **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Новое издание, испр. – М.: МЦНМО, 2012. - 344 с.: ил.ISBN 978-5-94057-907-6

[2] Автор: Это векторное изображение было создано с помощью Inkscape. - собственная работа, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6947676

[3] Автор: Это векторное изображение было создано с помощью Inkscape. - собственная работа, Общественное достояние, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6990209

[4] Автор: Это векторное изображение было создано с помощью Inkscape. - собственная работа, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6951695

[5] Автор: Maschen - Собственная работа, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21301479