Enunciado

Dois grupos de estudantes fizeram um teste de habilidades:

- Grupo A (n_1 = 10): média $\bar{x}_1 = 85$, desvio padrão amostral $s_1 = 4{,}5$.
- Grupo B (n_2 = 12): média $\bar{x}_2 = 80$, desvio padrão amostral $s_2 = 6{,}2$.

Queremos testar se a média do Grupo A é diferente da média do Grupo B (teste bicaudal), $\alpha = 0{,}05$.

Hipóteses:

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
- $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Calcularemos (1) o t de Student com variância pooled (pressupõe variâncias iguais) e (2) o t de Welch (não pressupõe variâncias iguais). Usaremos os mesmos números em ambos.

Valores iniciais e quadrados

$$\begin{aligned} n_1 &= 10, \bar{x}_1 = 85, s_1 = 4{,}5, s_1^2 = 4{,}5^2 = 20{,}25. \\ n_2 &= 12, \bar{x}_2 = 80, s_2 = 6{,}2, s_2^2 = 6{,}2^2 = 38{,}44. \\ \Delta\bar{x} &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 85 - 80 = 5. \end{aligned}$$

---

1) Teste t de Student (variâncias iguais) — pooled variance

Fórmula do estimador de variância pooled:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Cálculos numéricos:

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)s_1^2 &= 9 \times 20{,}25 = 182{,}25, \\ (n_2 - 1)s_2^2 &= 11 \times 38{,}44 = 422{,}84, \\ \text{soma} &= 182{,}25 + 422{,}84 = 605{,}09, \\ n_1 + n_2 - 2 &= 10 + 12 - 2 = 20, \\ s_p^2 &= \frac{605{,}09}{20} = 30{,}2545. \end{aligned}$$

Desvio pooled:

$$s_p = \sqrt{30{,}2545} \approx 5{,}5004.$$

Erro padrão pooled:

$$SE_{\text{pooled}} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 5{,}5004 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}.$$

Calculemos dentro da raiz:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = 0{,}1 + 0{,}083333\ldots = 0{,}183333\ldots$$
$$\sqrt{0{,}183333\ldots} \approx 0{,}428174\ldots$$
$$SE_{\text{pooled}} \approx 5{,}5004 \times 0{,}428174 \approx 2{,}3551.$$

Estatística t (pooled):

$$t_{\text{pooled}} = \frac{\Delta\bar{x}}{SE_{\text{pooled}}} = \frac{5}{2{,}3551} \approx 2{,}1230.$$

Graus de liberdade (pooled):

$$df = n_1 + n_2 - 2 = 20.$$

P-valor aproximado (bicaudal):
Para $t \approx 2{,}123$com $df = 20$, o p-valor bicaudal **≈ 0{,}047** (aprox.).
→ **Interpretação:** com $\alpha = 0{,}05$, rejeitamos H_0(ligeiramente significativo).

---

2) Teste de Welch (variâncias desiguais — sem pooled)

Fórmula do t de Welch:

$$t_{\text{Welch}} = \frac{\Delta\bar{x}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}.$$

Cálculo do denominador (erro padrão de Welch):

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{20{,}25}{10} = 2{,}025.$$
$$\frac{s_2^2}{n_2} = \frac{38{,}44}{12} \approx 3{,}203333\ldots$$
$$\text{soma} = 2{,}025 + 3{,}203333\ldots = 5{,}228333\ldots$$
$$SE_{\text{Welch}} = \sqrt{5{,}228333\ldots} \approx 2{,}2866.$$

Estatística t (Welch):

$$t_{\text{Welch}} = \frac{5}{2{,}2866} \approx 2{,}1867.$$

Graus de liberdade aproximados (Satterthwaite):

$$\nu \approx \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}.$$

Vamos calcular em partes:

- Numerador:

$$(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2 = (5{,}228333\ ...)^2 \approx 27{,}3356.$$

- Denominador:

$$\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{(2{,}025)^2}{9} = \frac{4{,}100625}{9} \approx 0{,}455625.$$
$$\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{(3{,}203333\ ...)^2}{11} \approx \frac{10{,}261020}{11} \approx 0{,}932820.$$
denominador total $\approx 0{,}455625 + 0{,}932820 = 1{,}388445.$

- Assim:

$$\nu \approx \frac{27{,}3356}{1{,}388445} \approx 19{,}6874 \approx 19{,}69 \text{ (aprox.)}.$$

P-valor aproximado (bicaudal):
Para $t \approx 2{,}1867$com $\nu \approx 19{,}69$, o p-valor bicaudal **≈ 0{,}041** (aprox.).
→ **Interpretação:** com $\alpha = 0{,}05$, rejeitamos H_0(significância um pouco mais forte que no pooled).

Resumo dos resultados numéricos (arredondado)

Método	t	df (aprox.)	p (bicaudal aprox.)
Student (pooled)	2,123	20	0,047
Welch	2,187	19,69	0,041

Ambos os testes indicam diferença estatisticamente significativa ao nível de 5%. O teste de Welch dá um t um pouco maior e p um pouco menor — isso ocorre porque Welch leva em conta a diferença de variâncias (a variância do grupo B é maior) e usa graus de liberdade efetivos (não inteiros).

Observações práticas / interpretação

- Se você **acredita** (ou verificou) que as variâncias amostrais vêm da mesma população com variância igual, o teste pooled (Student) é apropriado.
- Se houver dúvida sobre igualdade das variâncias (ou as amostras têm tamanhos diferentes e variâncias visivelmente distintas), o **teste de Welch é mais seguro**: menos sensível à violação da igualdade de variâncias.
- No exemplo, as conclusões são as mesmas (rejeitar H_0a 5%), mas os p-valores diferem ligeiramente. Em geral, prefira Welch quando não tiver forte razão para assumir variâncias iguais.

---

1. Teste t de Student (Variância Combinada – s_p^2)

O teste t de Student para duas amostras independentes, assumindo variâncias populacionais iguais, utiliza a **variância combinada** s_p^2.

1.1 Variância Combinada (s_p^2)

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{aligned}
n_1 &= 10, s_1^2 = 20{,}25 \\
n_2 &= 12, s_2^2 = 38{,}44 \\
s_p^2 &= \frac{(10 - 1) \cdot 20{,}25 + (12 - 1) \cdot 38{,}44}{10 + 12 - 2} = \frac{9 \cdot 20{,}25 + 11 \cdot 38{,}44}{20} \\
&= \frac{182{,}25 + 422{,}84}{20} \approx 30{,}2545
\end{aligned}$$

1.2 Estatística t (t_{pooled})

$$t_{\text{pooled}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

Substituindo os valores:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5, s_p^2 \approx 30{,}2545$
$n_1 = 10, n_2 = 12$

$$t_{\text{pooled}} = \frac{5}{\sqrt{30{,}2545(\frac{1}{10} + \frac{1}{12})}} = \frac{5}{\sqrt{30{,}2545(0{,}1 + 0{,}08333)}} = \frac{5}{\sqrt{30{,}2545 \cdot 0{,}18333}}$$
$$= \frac{5}{2{,}3551} \approx 2{,}123$$

1.3 Graus de Liberdade (df_{pooled})

$$df_{\text{pooled}} = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$$

---

2. Teste t de Welch (Variâncias Não Iguais)

O teste t de Welch **não assume variâncias iguais**.

2.1 Estatística t (t_{Welch})

$$t_{\text{Welch}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Substituindo os valores:

$$t_{\text{Welch}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{20{,}25}{10} + \frac{38{,}44}{12}}} = \frac{5}{\sqrt{2{,}025 + 3{,}20333}} = \frac{5}{\sqrt{5{,}22833}} = \frac{5}{2{,}28655} \approx 2{,}187$$

2.2 Graus de Liberdade (df_{Welch}) – Aproximação de Satterthwaite

$$df_{\text{Welch}} \approx \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{20{,}25}{10} = 2{,}025, \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{38{,}44}{12} \approx 3{,}20333$$

$$df_{\text{Welch}} \approx \frac{(2{,}025 + 3{,}20333)^2}{\frac{(2{,}025)^2}{10-1} + \frac{(3{,}20333)^2}{12-1}} = \frac{(5{,}22833)^2}{\frac{4{,}100625}{9} + \frac{10{,}2613}{11}} = \frac{27{,}3354}{0{,}4556 + 0{,}93285}$$
$$\approx \frac{27{,}3354}{1{,}38845} \approx 19{,}687$$

Arredondando: $df_{\text{Welch}} \approx 19$.

Comparação

Teste	**Estatística t**	**Graus de Liberdade (df)**
t de Student (pooled)	$t_{\text{pooled}} \approx 2{,}123$	20
t de Welch (não iguais)	$t_{\text{Welch}} \approx 2{,}187$	19

Valores Críticos (bicaudal, $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$)

$$t_{\text{crítico, pooled}}(df = 20, \alpha/2 = 0{,}025) = \pm 2{,}086$$
$$t_{\text{crítico, Welch}}(df \approx 19, \alpha/2 = 0{,}025) = \pm 2{,}093$$

Decisão

$$|\, t_{\text{pooled}} \,| = 2{,}123 > 2{,}086 \Rightarrow \text{Rejeita } H_0$$
$$|\, t_{\text{Welch}} \,| = 2{,}187 > 2{,}093 \Rightarrow \text{Rejeita } H_0$$

Conclusão: Há evidências suficientes para concluir que as médias dos dois grupos são estatisticamente diferentes:

$$\mu_1 \neq \mu_2$$