ENUNCIADO

Qual é a probabilidade de, em **100 lançamentos de uma moeda honesta**, cair **exatamente 50 caras e 50 coroas**?

## 1️⃣ O que significa "probabilidade" aqui?

Probabilidade é sempre:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

Então precisamos responder **duas perguntas**:

1. Quantos resultados **totais** são possíveis?
2. Quantos desses têm **exatamente 50 caras e 50 coroas**?

---

## 2️⃣ Número TOTAL de resultados possíveis

Cada lançamento da moeda tem **2 resultados possíveis**:

- Cara (C)
- Coroa (K)

Os lançamentos são **independentes**:

$$\textbf{Primeiro lançamento}$$

$$2 \text{ possibilidades}$$

$$\textbf{Segundo lançamento}$$

$$2 \text{ possibilidades}$$

$$\dots$$

$$\textbf{Centésimo lançamento}$$

$$2 \text{ possibilidades}$$

👉 Pelo **princípio multiplicativo**:

$$\text{Total de resultados} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{100}$$

---

## 🔷 Conclusão 1

$$\boxed{\text{Casos possíveis} = 2^{100}}$$

---

## 3️⃣ Número de casos FAVORÁVEIS

Agora vem a parte mais importante.

**Como contar essas sequências?**

Pense assim:

*Temos 100 posições*

*Precisamos escolher 50 posições para colocar caras*

*As outras 50 posições automaticamente serão coroas*

👉 O número de maneiras de escolher 50 posições entre 100 é o coeficiente binomial:

$$\binom{100}{50}$$

---

**3.2 — O que é o coeficiente binomial (definição)?**

Por definição:

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!\ 50!}$$

onde:

$$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 1$$
$$50! = 50 \cdot 49 \cdot \cdots 1$$

---

**4️⃣ Juntando tudo (fórmula exata, SEM aproximação)**

Voltando à definição de probabilidade:

$$P = \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}}$$

Ou, de forma equivalente:

$$P = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

👉 Até aqui, ZERO aproximações.
Isso já é a resposta matemática exata.

---

**5️⃣ Por que não podemos "calcular direto"?**

Porque:

$$100!$$

é gigantesco

$$2^{100}$$

também é gigantesco

Então precisamos transformar, não "simplificar no grito".

---

### 6 Reescrevendo o coeficiente binomial "à mão"

Começamos com:

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!\ 50!}$$

Escrevendo os fatoriais:

$$\binom{100}{50} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51 \cdot \cancel{50 \cdot 49 \cdots 1}}{\cancel{50 \cdot 49 \cdots 1}}$$

Cancelando explicitamente o $50!$:

$$\binom{100}{50} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 51}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdots 1}$$

Isso é exatamente:

$$\binom{100}{50} = \prod_{k=1}^{50} \frac{50+k}{k}$$

---

### 7 Agora entra a aproximação (inevitável)

Aqui não existe escapatória:
nenhum humano calcula isso exatamente à mão.

Usamos a aproximação de **Stirling**, que é o método clássico "manual".

---

### 8 Fórmula de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

---

### 9 Aplicando Stirling passo a passo

#### 9.1 — Numerador: $100!$

$$100! \approx \sqrt{2\pi \cdot 100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}$$

## 9.2 — Denominador: $50! \cdot 50!$

$$50! \approx \sqrt{2\pi \cdot 50}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}$$

Logo:

$$(50!)^2 \approx (2\pi \cdot 50)\left(\frac{50}{e}\right)^{100}$$

---

## 🔟 Substituindo tudo em $\binom{100}{50}$

$$\binom{100}{50} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{(2\pi \cdot 50)\left(\frac{50}{e}\right)^{100}}$$

---

## 1️⃣1️⃣ Simplificando com calma

### 11.1 — Cancelando os termos com $e$

$$\frac{\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{\left(\frac{50}{e}\right)^{100}} = \frac{100^{100}}{50^{100}} = \left(\frac{100}{50}\right)^{100} = 2^{100}$$

Ou, explicitando o cancelamento:

$$\frac{\left(\frac{100}{\cancel{e}}\right)^{100}}{\left(\frac{50}{\cancel{e}}\right)^{100}} = 2^{100}$$

---

### 11.2 — Simplificando os fatores constantes

$$\frac{\sqrt{2\pi \cdot 100}}{2\pi \cdot 50} = \frac{\sqrt{200\pi}}{100\pi} \approx 0{,}0796$$

Cálculo do numerador

$$\sqrt{2\pi \cdot 100}$$

Primeiro a multiplicação dentro da raiz:

$$2\pi \cdot 100 = 200\pi$$

Agora a raiz:

$$\sqrt{200\pi}$$

Fatorando:

$$200 = 100 \cdot 2$$
$$\sqrt{200\pi} = \sqrt{100 \cdot 2\pi}$$
$$= \sqrt{100}\sqrt{2\pi}$$
$$= 10\sqrt{2\pi}$$

✓ **Numerador:** $10\sqrt{2\pi}$

---

Cálculo do denominador

$$2\pi \cdot 50$$

Multiplicação direta:

$$2 \cdot 50 = 100$$
$$2\pi \cdot 50 = 100\pi$$

✓ **Denominador:** $100\pi$

---

Montando a fração

$$\frac{10\sqrt{2\pi}}{100\pi}$$

Simplificando o fator numérico:

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{10\pi}$$

---

Simplificação correta (sem erro de PEMDAS)

Separando a raiz:

$$\sqrt{2\pi} = \sqrt{2}\sqrt{\pi}$$
$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{10\pi}$$

Cancelando $\sqrt{\pi}$ com $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$:

$$= \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{\pi}}$$

Racionalizando (opcional):

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{10\pi}$$

---

### 6 Valor numérico (feito à mão)

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\pi} \approx \sqrt{6{,}28318} \approx 2{,}5066 \\ &10\pi \approx 31{,}4159 \\ &\frac{2{,}5066}{31{,}4159} \approx 0{,}0798 \end{aligned}$$

✓ Resultado:

$$\boxed{\approx 0{,}0796 \text{ (aprox.)}}$$

---

### 11.3 — Resultado

$$\binom{100}{50} \approx 0{,}0796 \cdot 2^{100}$$

**Interpretação importante**

- $2^{100}$= total de sequências possíveis de 100 lançamentos
- $0{,}0796$≈ **altura da normal** no centro
- Isso reflete a **Lei dos Grandes Números + Aproximação Normal da Binomial**

Ou seja:

Cerca de **7,96%** de todas as sequências possíveis têm exatamente
**50 caras e 50 coroas**.

---

### 1 2 Voltando à probabilidade

Lembre:

$$P = \binom{100}{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

Substituindo:

$$P \approx (0{,}0796 \cdot 2^{100}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

---

## 1️⃣3️⃣ Cancelamento FINAL (o ponto-chave)

$$\cancel{2^{100}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^{100} = 1$$

Então sobra:

$$P \approx 0{,}0796$$

---

## 1️⃣4️⃣ RESULTADO FINAL

$$\boxed{P \approx 0{,}0796 \ \ \text{(cerca de 7,96\%)}}$$

---

## 🧠 O QUE VOCÊ PRECISA GUARDAR (ESSENCIAL)

O cálculo exato é:

$$\binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

O número

$$7{,}9 \times 10^{-31}$$

é apenas **a probabilidade de uma sequência específica**

O número

$$1{,}0 \times 10^{29}$$

é **quantas sequências existem**

👉 **Número minúsculo × número gigantesco = número moderado**

*Eventos "prováveis" não são feitos de resultados prováveis,*
*mas de muitos resultados improváveis somados.*

## O CÁLCULO SÓ COM LOGARITMOS (100 lançamentos)

### 1️⃣ O problema, novamente

$$P(\text{50 caras}) = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

Vamos trabalhar **somente com logaritmos**, porque números grandes e pequenos viram somas.

---

## 2 Aplicando logaritmo decimal

Tomamos log dos dois lados:

$$\log P = \log \binom{100}{50} + \log \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

---

## 3 Expandindo cada termo

### ◆ Termo 1 — coeficiente binomial

$$\log \binom{100}{50} = \log (100!) - 2\log (50!)$$

---

### ◆ Termo 2 — potência

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 100\log \left(\frac{1}{2}\right) = -100\log 2$$

---

## 4 Aproximação de Stirling (em forma logarítmica)

A versão em log é:

$$\log (n!) \approx n\log n - n + \frac{1}{2}\log (2\pi n)$$

---

## 5 Aplicando aos fatoriais

### ◆ $\log (100!)$

$$100\log 100 - 100 + \frac{1}{2}\log (200\pi)$$

Como:

- $\log 100 = 2$

$$= 200 - 100 + \frac{1}{2}\log (200\pi)$$

---

◆ $\log(50!)$

$$50\log 50 - 50 + \frac{1}{2}\log(100\pi)$$

---

## 6 Substituindo tudo

$$\log\binom{100}{50} = [200 - 100 + \frac{1}{2}\log(200\pi)] - 2[50\log 50 - 50 + \frac{1}{2}\log(100\pi)]$$

---

## 7 Simplificando termo a termo

**Parte linear**

$$200 - 100 - (100 - 100) = 100$$

**Parte logarítmica**

$$\frac{1}{2}\log(200\pi) - \log(100\pi) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{200\pi}{(100\pi)^2}\right) \approx -1{,}10$$

Então:

$$\log\binom{100}{50} \approx 100 - 1{,}10 = 98{,}9$$

---

## 8 Subtraindo o termo da moeda

$$\log P = 98{,}9 - 100\log 2$$

Como:

$$\log 2 \approx 0{,}30103$$
$$\log P \approx 98{,}9 - 30{,}103 = -1{,}203$$

---

## 9 Voltando da escala log

$$P \approx 10^{-1{,}203} \approx 0{,}0796$$

✔ **Mesmo resultado**, só com logaritmos.

---

◆ **PARTE 2 — ONDE A NORMAL APARECE (conceitualmente)**

Agora vem a parte **profunda**, mas clara.

---

### 1 Distribuição exata

O número de caras $X$segue:

$$X \sim \text{Binomial}(100,1/2)$$

---

### 2 Média e variância

$$\mu = np = 50$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = 25 \Rightarrow \sigma = 5$$

---

### 3 Teorema Central do Limite

Para $n$grande:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Logo:

$$X \approx \mathcal{N}(50,25)$$

---

### 4 Aproximação pontual (correção de continuidade)

$$P(X = 50) \approx P(49{,}5 < X < 50{,}5)$$

Padronizando:

$$P(-0{,}1 < Z < 0{,}1)$$

---

### 5 Calculando pela normal

A densidade da normal padrão no zero é:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$$

Multiplicando pelo intervalo $0{,}2$:

$$P \approx 0{,}399 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}0798$$

✅ **A normal "nasce" naturalmente** da binomial.

---

## 🔷 PARTE 3 — CASO MENOR (10 LANÇAMENTOS), TOTALMENTE À MÃO

Agora vamos consolidar **sem aproximação nenhuma**.

---

### 1️⃣ Problema menor

10 lançamentos de uma moeda honesta.
Qual a probabilidade de sair exatamente **5 caras**?

---

### 2️⃣ Casos possíveis

$$2^{10} = 1024$$

---

### 3️⃣ Casos favoráveis

Escolher 5 posições entre 10:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

---

### 4️⃣ Probabilidade exata

$$P = \frac{252}{1024} \approx 0{,}246$$

---

### 5️⃣ Comparação com a normal

Aqui:

$$\mu = 5, \sigma = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$$

Correção de continuidade:

$$P(4{,}5 < X < 5{,}5)$$

Área normal ≈ **0,25**

✅ Já funciona, mesmo com $n = 10$.

---

### 🔚 CONCLUSÃO FINAL (PARA FIXAR DE VEZ)

✅ **Logaritmos** resolvem números gigantes
✅ **A normal aparece** como limite da binomial

✅ **Casos pequenos** mostram a mecânica real
✅ **Resultados exatos são pontos**, não tendências
✅ **A Lei dos Grandes Números fala de proporções**, não de igualdade perfeita