Exemplo G — Teste Z para Duas Proporções (Empresa de Transporte)

Enunciado:
A empresa **Logística Bandeirantes** opera no transporte de dois produtos principais: ferro (para a cidade de Tupi) e madeira (para a cidade de Juá. A gerência alega que a proporção de entregas **realizadas no prazo** é a mesma para ambas as rotas. Para verificar essa afirmação, o controle de qualidade coletou dados das últimas entregas:

- **Rota do Ferro (Tupi):** Em uma amostra de 150 entregas, 123 foram realizadas no prazo.
- **Rota da Madeira (Juá):** Em uma amostra de 180 entregas, 135 foram realizadas no prazo.

Teste a hipótese nula de que as proporções de entregas no prazo são iguais ($H_0: p_{Ferro} = p_{Madeira}$) contra a alternativa de que são diferentes ($H_1: p_{Ferro} \neq p_{Madeira}$) usando um nível de significância $\alpha = 0.05$ (teste bicaudal).

Resolução (à mão):

1. **Calcular as Proporções Amostrais:**
   - Proporção na Rota do Ferro: $\hat{p}_1 = \frac{123}{150} = 0.82$
   - Proporção na Rota da Madeira: $\hat{p}_2 = \frac{135}{180} = 0.75$
   - Proporção Combinada (Pooled): $\hat{p} = \frac{123+135}{150+180} = \frac{258}{330} \approx 0.7818$
2. **Estatística de Teste (Z):**
   A fórmula para a estatística Z de duas proporções é:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

Substituindo os valores:

$$Z = \frac{0.82 - 0.75}{\sqrt{0.7818 \times (1 - 0.7818) \times (\frac{1}{150} + \frac{1}{180})}}$$

$$Z = \frac{0.07}{\sqrt{0.7818 \times 0.2182 \times (0.006667 + 0.005556)}}$$

$$Z = \frac{0.07}{\sqrt{0.1706 \times 0.012223}} = \frac{0.07}{\sqrt{0.002085}} \approx \frac{0.07}{0.04566} \approx 1.533$$

3. **Valor Crítico e Decisão:**

- O valor crítico para um teste bicaudal com $\alpha = 0.05$ é $Z_{\alpha/2} = \pm 1.96$.
- Regra de decisão: Rejeita-se H_0 se $|Z| \geq 1.96$.
- Como $|Z| \approx 1.533 < 1.96$, **não rejeitamos a hipótese nula H_0**.

Conclusão:
Ao nível de significância de 5%, não há evidências estatísticas suficientes para contradizer a alegação da gerência. Portanto, conclui-se que a proporção de entregas no prazo para a rota do ferro (Tupi) é estatisticamente igual à proporção para a rota da madeira (Juá).

Exemplo D — Teste Z para Duas Proporções

Enunciado:
Uma empresa de pesquisa quer testar se a proporção de satisfação com um novo produto é a mesma em duas grandes cidades. Em uma amostra aleatória de 400 consumidores da Cidade X, 280 afirmaram estar satisfeitos. Na Cidade Y, em uma amostra de 500 consumidores, 320 afirmaram estar satisfeitos. Teste a hipótese nula de que as proporções são iguais ($H_0: p_1 = p_2$) contra a alternativa de que são diferentes ($H_1: p_1 \neq p_2$) usando um nível de significância $\alpha = 0.05$ (teste bicaudal).

Resolução (à mão):

1. **Calcular as Proporções Amostrais:**
   - $\hat{p}_1 = \frac{280}{400} = 0.70$
   - $\hat{p}_2 = \frac{320}{500} = 0.64$
   - $\hat{p} = \frac{280+320}{400+500} = \frac{600}{900} \approx 0.6667$ (Proporção pooled)
2. **Estatística de Teste (Z):**

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$Z = \frac{0.70 - 0.64}{\sqrt{0.6667 \times (1 - 0.6667) \times (\frac{1}{400} + \frac{1}{500})}}$$

$$Z = \frac{0.06}{\sqrt{0.6667 \times 0.3333 \times (0.0025 + 0.0020)}}$$

$$Z = \frac{0.06}{\sqrt{0.2222 \times 0.0045}} = \frac{0.06}{\sqrt{0.0009999}} \approx \frac{0.06}{0.03162} \approx 1.897$$

3. **Valor Crítico e Decisão:**

- Valor crítico para $\alpha = 0.05$ (bicaudal): $Z_{0.025} = \pm 1.96$.
- Como $| Z | \approx 1.897 < 1.96$, **não rejeitamos** H_0. Não há evidências suficientes para afirmar que as proporções de satisfação são diferentes.

Exemplo E — Teste t Independente (Variâncias Desiguais - Welch)

Enunciado:
Um agrônomo deseja comparar o efeito de dois fertilizantes no crescimento de mudas. Ele suspeita que as variâncias populacionais sejam diferentes. Os dados coletados foram:

- Fertilizante A: $n_A = 15$, $\bar{X}_A = 22.5$ cm, $s_A = 4.1$ cm.
- Fertilizante B: $n_B = 12$, $\bar{X}_B = 19.8$ cm, $s_B = 2.5$ cm.

Teste $H_0: \mu_A = \mu_B$ contra $H_1: \mu_A > \mu_B$ (teste unilateral à direita) com $\alpha = 0.05$. Assuma variâncias desiguais.

Resolução (à mão):

1. **Estatística de Teste (t de Welch):**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$
$$t = \frac{22.5 - 19.8}{\sqrt{\frac{(4.1)^2}{15} + \frac{(2.5)^2}{12}}} = \frac{2.7}{\sqrt{\frac{16.81}{15} + \frac{6.25}{12}}}$$
$$t = \frac{2.7}{\sqrt{1.1207 + 0.5208}} = \frac{2.7}{\sqrt{1.6415}} \approx \frac{2.7}{1.2812} \approx 2.107$$

2. **Graus de Liberdade (Aproximação de Welch-Satterthwaite):**

$$df \approx \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(1.6415)^2}{\frac{(1.1207)^2}{14} + \frac{(0.5208)^2}{11}}$$
$$df \approx \frac{2.6945}{\frac{1.2560}{14} + \frac{0.2712}{11}} \approx \frac{2.6945}{0.0897 + 0.02465} \approx \frac{2.6945}{0.11435} \approx 23.06$$

Usaremos $df = 23$.

3. **Valor Crítico e Decisão:**

- Valor crítico para $\alpha = 0.05$ (unilateral à direita) com $df = 23$: $t_{0.05,23} \approx 1.714$.
- Como $t \approx 2.107 > 1.714$, **rejeitamos** H_0. Há evidências de que o Fertilizante A produz um crescimento médio maior.

Exemplo F — Teste t Pareado (Amostras Dependentes)

Enunciado:
Um nutricionista submeteu 10 pacientes a uma nova dieta por 6 semanas. Os níveis de colesterol (em mg/dL) foram medidos antes e após a dieta. Os dados estão na tabela abaixo. Teste se a dieta reduziu significativamente o nível médio de colesterol ($H_1: \mu_d < 0$), usando $\alpha = 0.01$ (teste unilateral à esquerda). A diferença é calculada como $d =$ Depois – Antes.

Paciente	Antes	Depois	Diferença (d)
1	210	190	-20
2	230	215	-15
3	195	180	-15
4	220	205	-15
5	250	240	-10
6	245	235	-10
7	200	195	-5
8	215	210	-5
9	235	225	-10
10	240	235	-5

Resolução (à mão):

1. **Calcular a Média e o Desvio Padrão das Diferenças:**
    - Lista de d: $\{-20, -15, -15, -15, -10, -10, -5, -5, -10, -5\}$

- Média: $\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-110}{10} = -11$
- Desvio Padrão Amostral (s_d):
$$\sum(d_i - \bar{d})^2 = (-9)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (6)^2 + (6)^2 + (1)^2 + (6)^2$$
$$\sum(d_i - \bar{d})^2 = 81 + 16 + 16 + 16 + 1 + 1 + 36 + 36 + 1 + 36 = 240$$
$$s_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{240}{9}} \approx \sqrt{26.6667} \approx 5.164$$

2. **Estatística de Teste t Pareado:**

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{-11}{5.164/\sqrt{10}} = \frac{-11}{5.164/3.162} \approx \frac{-11}{1.633} \approx -6.735$$

3. **Valor Crítico e Decisão:**
   - Graus de liberdade: $df = n - 1 = 9$.
   - Valor crítico para $\alpha = 0.01$ (unilateral à esquerda): $t_{0.01,9} \approx -2.821$.
   - Como $t \approx -6.735 < -2.821$, **rejeitamos** H_0. A dieta reduziu significativamente o nível médio de colesterol.

Exemplo A — Teste Z (duas amostras independentes; σ populacional conhecido)

Enunciado:
Uma clínica afirma que a média da pressão sistólica de pacientes hipertensos atendidos é igual entre quem faz atividade física regular e quem não faz. Sabendo-se os desvios-padrão populacionais, coletou-se:

- Grupo A (faz atividade): $\bar{X}_1 = 136$mmHg, $\sigma_1 = 12$, $n_1 = 60$.
- Grupo B (não faz): $\bar{X}_2 = 142$mmHg, $\sigma_2 = 15$, $n_2 = 55$.
  Teste $H_0: \mu_1 = \mu_2$contra $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$com $\alpha = 0.05$(bicaudal).

Resolução (à mão):

1. Estatística de teste (fórmula Z para duas médias, σ conhecidos):

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

2. Substituindo os valores:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 136 - 142 = -6.$$
$$\frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{12^2}{60} = \frac{144}{60} = 2.4.$$
$$\frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{15^2}{55} = \frac{225}{55} \approx 4.090909 \ldots$$
$$\text{soma} = 2.4 + 4.090909 \ldots = 6.490909 \ldots$$
$$\sqrt{6.490909 \ldots} \approx 2.547 \text{ (arred.)}$$
$$Z = \frac{-6}{2.547} \approx -2.355.$$

(Valor exato aproximado: $Z \approx -2.3549$.)

3. Valor crítico (α=0.05, bicaudal): $Z_{0.025} = \pm 1.96$.
4. Regra de decisão: como $Z \approx -2.355$e $-2.355 < -1.96$, rejeita-se H_0.

Exemplo B — Teste t Independente (duas amostras independentes; σ desconhecidos; amostras pequenas)

Enunciado:
Duas turmas de um curso online fizeram a mesma prova final. Quer-se testar se as médias de pontuação diferem. Dados:

- Turma 1: $n_1 = 12$, $\bar{X}_1 = 78$, $s_1 = 6$.
- Turma 2: $n_2 = 10$, $\bar{X}_2 = 72$, $s_2 = 5$.
  Teste $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$vs $H_1\colon \mu_1 \neq \mu_2$com $\alpha = 0.05$(bicaudal). Assuma igualdade de variâncias (procedimento com S_p).

Resolução (à mão):

1. Fórmula do $t$com variâncias iguais (pooled):

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{com} S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

2. Calcular S_p:

- $S_1^2 = 6^2 = 36$.
- $S_2^2 = 5^2 = 25$.

Numerador de S_p^2:

$$(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 = (12 - 1) \cdot 36 + (10 - 1) \cdot 25.$$
$$= 11 \cdot 36 + 9 \cdot 25 = 396 + 225 = 621.$$

Denominador:

$$n_1 + n_2 - 2 = 12 + 10 - 2 = 20.$$
$$S_p^2 = \frac{621}{20} = 31.05.$$
$$S_p = \sqrt{31.05} \approx 5.5722527.$$

3. Diferença das médias:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 78 - 72 = 6.$$

4. Termo no denominador do t:

$$S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 5.5722527 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}.$$

Calcule $\frac{1}{12} + \frac{1}{10} = 0.0833333 + 0.1 = 0.1833333.$

$$\sqrt{0.1833333} \approx 0.4282.$$
$$5.5722527 \times 0.4282 \approx 2.387.$$

5. Estatística t:

$$t \approx \frac{6}{2.387} \approx 2.515.$$

(Valor exato aproximado: $t \approx 2.5148.$)

6. Graus de liberdade: $df = n_1 + n_2 - 2 = 20.$
   Valor crítico $t_{0.025,\,20} \approx 2.086.$
7. Regra de decisão: $t \approx 2.515 > 2.086 \Rightarrow$ rejeita-se H_0.

Exemplo C — Teste t Pareado (amostras dependentes: antes e depois)

Enunciado:
Um pequeno grupo de 8 funcionários teve um treinamento em produtividade. Foram anotadas as linhas produzidas por dia antes e depois do treinamento:

Funcionário	Antes	Depois
1	60	70
2	55	65

Funcionário	**Antes**	**Depois**
3	70	75
4	58	68
5	62	70
6	61	69
7	59	66
8	63	72

Teste H_0:média das diferenças $= 0$vs H_1:média das diferenças $\neq 0$, com $\alpha = 0.05$.

Resolução (à mão):

1. Calcular as diferenças $d_i =$ Depois – Antes:

- $d_1 = 70 - 60 = 10$
- $d_2 = 65 - 55 = 10$
- $d_3 = 75 - 70 = 5$
- $d_4 = 68 - 58 = 10$
- $d_5 = 70 - 62 = 8$
- $d_6 = 69 - 61 = 8$
- $d_7 = 66 - 59 = 7$
- $d_8 = 72 - 63 = 9$

2. Lista das diferenças: $\{10,10,5,10,8,8,7,9\}$.
3. Média das diferenças:

$$\bar{d} = \frac{10 + 10 + 5 + 10 + 8 + 8 + 7 + 9}{8} = \frac{67}{8} = 8.375.$$

4. Desvio padrão amostral das diferenças s_d:

Calcular somatório de $(d_i - \bar{d})^2$:

- $(10 - 8.375)^2 = 1.625^2 = 2.640625$
- $(10 - 8.375)^2 = 2.640625$
- $(5 - 8.375)^2 = (-3.375)^2 = 11.390625$
- $(10 - 8.375)^2 = 2.640625$

- $(8 - 8.375)^2 = (-0.375)^2 = 0.140625$
- $(8 - 8.375)^2 = 0.140625$
- $(7 - 8.375)^2 = (-1.375)^2 = 1.890625$
- $(9 - 8.375)^2 = 0.625^2 = 0.390625$

Somatório:

$$\sum(d_i - \bar{d})^2 = 2.640625 + 2.640625 + 11.390625 + 2.640625 + 0.140625 + 0.140625 + 1.890625 + 0.390625.$$

Vamos somar passo a passo:

- $2.640625 + 2.640625 = 5.28125$
- $5.28125 + 11.390625 = 16.671875$
- $16.671875 + 2.640625 = 19.3125$
- $19.3125 + 0.140625 = 19.453125$
- $19.453125 + 0.140625 = 19.59375$
- $19.59375 + 1.890625 = 21.484375$
- $21.484375 + 0.390625 = 21.875.$

Portanto $\sum(d_i - \bar{d})^2 = 21.875.$

Desvio amostral:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{21.875}{7}}.$$
$$\frac{21.875}{7} \approx 3.125.$$
$$s_d = \sqrt{3.125} \approx 1.76776695.$$

5. Estatística t pareado:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{8.375}{1.76776695/\sqrt{8}}.$$

Calcule $\sqrt{8} \approx 2.82842712.$

$$s_d/\sqrt{n} = 1.76776695/2.82842712 \approx 0.625.$$
$$t \approx \frac{8.375}{0.625} = 13.4.$$

(Valor exato aproximado: $t \approx 13.40$.)

6. Graus de liberdade: $df = n - 1 = 7$. Valor crítico $t_{0.025,\,7} \approx 2.365$.
7. Regra de decisão: como $t \approx 13.4$e $|\ 13.4\ | > 2.365$, rejeita-se H_0.