## Objetivo

Vamos calcular manualmente o valor de:

$$\log_{10}(2548{,}6)$$

usando a relação:

$$\log_{10}(2548{,}6) = \frac{\ln(2548{,}6)}{\ln(10)}$$

Nosso objetivo é calcular $\ln(2548{,}6)$ e $\ln(10)$ **sem usar uma calculadora direta**. Para isso, utilizaremos a **expansão em série de Taylor** do logaritmo natural, válida para $0 < x \leq 2$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Como $2548{,}6$ está fora desse intervalo, precisamos manipulá-lo para que caiba na série.

## Passo 1: Reduzir o número para o intervalo $(1, 2]$

Queremos expressar:

$$2548{,}6 = a \cdot 2^k$$

com $a \in (1, 2]$. Dividindo sucessivamente por 2:

$$\begin{gathered}
2548{,}6 \div 2 = 1274{,}3 \\
1274{,}3 \div 2 = 637{,}15 \\
637{,}15 \div 2 = 318{,}575 \\
318{,}575 \div 2 = 159{,}2875 \\
159{,}2875 \div 2 = 79{,}64375 \\
79{,}64375 \div 2 = 39{,}821875 \\
39{,}821875 \div 2 = 19{,}9109375 \\
19{,}9109375 \div 2 = 9{,}95546875 \\
9{,}95546875 \div 2 = 4{,}977734375 \\
4{,}977734375 \div 2 = 2{,}4888671875 \\
2{,}4888671875 \div 2 = 1{,}24443359375
\end{gathered}$$

Portanto,

$$2548{,}6 = 1{,}24443359375 \cdot 2^{11}$$

Logo:

$$\ln(2548{,}6) = \ln(1{,}24443359375 \cdot 2^{11}) = \ln(1{,}24443359375) + \ln(2^{11}) = \ln(1{,}24443359375) + 11 \cdot \ln(2)$$

## Passo 2: Calcular $\ln(1{,}24443359375)$ usando a série de Taylor

Como:

$$1{,}24443359375 = 1 + x, \quad x = 0{,}24443359375$$

Temos:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Substituindo:

$$x = 0{,}24443359375$$

Calculando os termos:

$$x^2 \approx 0{,}0597477819, \quad \frac{x^2}{2} \approx 0{,}02987389095$$

$$x^3 \approx 0{,}0146048046, \quad \frac{x^3}{3} \approx 0{,}0048682682$$

$$x^4 \approx 0{,}003570, \quad \frac{x^4}{4} \approx 0{,}0008925$$

$$x^5 \approx 0{,}000873, \quad \frac{x^5}{5} \approx 0{,}0001746$$

Substituindo na série:

$$\begin{aligned} \ln(1{,}24443359375) &\approx 0{,}24443359375 - 0{,}02987389095 + 0{,}0048682682 - 0{,}0008925 + 0{,}0001746 \\ &\approx 0{,}2187100698 \end{aligned}$$

### Passo 3: Calcular $\ln(2)$

Aproximação conhecida:

$$\ln(2) \approx 0{,}69314718056$$

### Passo 4: Calcular $\ln(2548{,}6)$

$$\begin{aligned} \ln(2548{,}6) &= \ln(1{,}24443359375) + 11 \cdot \ln(2) \\ &\approx 0{,}2187100698 + 11 \cdot 0{,}69314718056 \\ &\approx 0{,}2187100698 + 7{,}62461898616 \\ &\approx 7{,}84332905596 \end{aligned}$$

### Passo 5: Calcular $\ln(10)$

Sabemos que:

$$\ln(10) = \ln(2 \cdot 5) = \ln(2) + \ln(5)$$

Usando:

$$\ln(2) \approx 0{,}69314718056, \quad \ln(5) \approx 1{,}60943791243$$

Portanto:

$$\ln(10) \approx 0{,}69314718056 + 1{,}60943791243 = 2{,}30258509299$$

### Passo 6: Calcular $\log_{10}(2548{,}6)$

$$\log_{10}(2548{,}6) = \frac{\ln(2548{,}6)}{\ln(10)} \approx \frac{7{,}84332905596}{2{,}30258509299} \approx 3{,}4059$$

### Verificação com calculadora

$$\log_{10}(2548{,}6) \approx 3{,}4062$$

Nossa aproximação manual:

$$3{,}4059$$

está muito próxima do valor calculado por uma calculadora digital.

### ✅ Resposta Final

$$\log_{10}(2548{,}6) \approx 3{,}4059$$