Prova de Geometria Analítica
Nível: Bacharelado em Estatística
Duração: 90 minutos
Instruções:

- Resolva todas as questões, justificando seus cálculos quando necessário.
- Utilize notação vetorial e matricial adequada.

Questão 1

Dados os pontos $A(1, 2, -1)$ e $B(3, 0, 4)$, determine:

a) O vetor $\overline{AB}$.
b) A distância entre A e B.

Questão 2

Verifique se os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{v} = (4, -2, 6)$ são paralelos, ortogonais ou nenhum dos casos.

Questão 3

Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto $P(1, -2, 3)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (2, 1, -4)$.

Questão 4

Calcule o ângulo entre os vetores $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

Questão 5

Determine a interseção entre a reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ e o plano $\pi : x - y + 2z = 7$.

Questão 6

Classifique o sistema de equações lineares abaixo (sistema possível determinado, indeterminado ou impossível) e encontre sua solução, se existir:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Questão 7

Dadas as retas $r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, verifique se elas são paralelas, concorrentes ou reversas.

Questão 8

Encontre a distância do ponto $Q(2, -1, 3)$ ao plano $\pi : 3x - 4y + z = 5$.

Questão 9

Calcule a área do triângulo formado pelos pontos $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, -1)$ e $C(0, 2, 4)$.

Questão 10

Determine a equação da esfera com centro em $C(2, -3, 1)$ e que passa pelo ponto $P(4, 1, -2)$.

Gabarito Sugerido

1. a) $\overline{AB} = (2, -2, 5)$; b) $\sqrt{33}$.
2. Paralelos (são múltiplos escalares).
3. $2x + y - 4z + 12 = 0$.
4. $\theta = 45^\circ$ ou $\pi/4$ rad.
5. Interseção em $(5, -1, 1)$.
6. SPD; solução $(1, 0, 1)$.
7. Reversas (não se intersectam e não são paralelas).
8. $\frac{6}{\sqrt{26}}$.
9. Área $\frac{\sqrt{194}}{2}$.
10. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 29$.

Boa prova!

responda, passo a passo, cada questão

Vou resolver cada questão passo a passo, seguindo a ordem apresentada.

Questão 1

Dados os pontos $A(1, 2, -1)$ e $B(3, 0, 4)$, determine:

a) O vetor $\overline{AB}$.

O vetor $\overline{AB}$ é dado por:

$$\overline{AB} = B - A = (3-1, 0-2, 4-(-1)) = (2, -2, 5).$$

Resposta: $\overline{AB} = (2, -2, 5)$.

b) A distância entre A e B.

A distância entre dois pontos é o módulo do vetor $\overline{AB}$:

$$d(A, B) = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}.$$

Resposta: $\sqrt{33}$.

Questão 2

Verifique se os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ e $\mathbf{v} = (4, -2, 6)$ são paralelos, ortogonais ou nenhum dos casos.

Passo 1: Verificar paralelismo

Dois vetores são paralelos se um é múltiplo escalar do outro.

$$\mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{u} \quad (\text{pois } (4, -2, 6) = 2 \cdot (2, -1, 3)).$$

Logo, são **paralelos**.

Passo 2: Verificar ortogonalidade (opcional, já que são paralelos)

O produto escalar é:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = 8 + 2 + 18 = 28 \neq 0.$$

Como não é zero, não são ortogonais.

Resposta: São **paralelos**.

Questão 3

Encontre a equação geral do plano que passa pelo ponto $P(1, -2, 3)$ e tem vetor normal $\mathbf{n} = (2, 1, -4)$.

A equação geral do plano é:

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0,$$

onde $(x_0, y_0, z_0) = P(1, -2, 3)$.

Substituindo:

$$2(x-1) + 1(y+2) - 4(z-3) = 0.$$

Simplificando:

$$2x - 2 + y + 2 - 4z + 12 = 0 \implies 2x + y - 4z + 12 = 0.$$

Resposta: $2x + y - 4z + 12 = 0$.

Questão 4

Calcule o ângulo entre os vetores $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

O ângulo θ é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}.$$

Passo 1: Produto escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Passo 2: Módulos

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1.$$

Passo 3: Cálculo do ângulo

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot 1} = 0 \implies \theta = 90^\circ.$$

Resposta: 90° (vetores ortogonais).

Questão 5

Determine a interseção entre a reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ e o plano $\pi : x - y + 2z = 7$.

Substitua as equações paramétricas de r no plano π:

$$(1 + 2t) - (-3 + t) + 2(4 - t) = 7.$$

Simplificando:

$$1 + 2t + 3 - t + 8 - 2t = 7 \implies (12) + (-t) = 7 \implies t = 5.$$

Substituindo $t = 5$ nas equações de r:

$$x = 1 + 2 \cdot 5 = 11, \quad y = -3 + 5 = 2, \quad z = 4 - 5 = -1.$$

Resposta: Interseção em $(11, 2, -1)$. *(Correção: O gabarito original estava errado.)*

Questão 6

Classifique o sistema de equações lineares abaixo e encontre sua solução, se existir:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Passo 1: Matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 1 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Eliminação de Gauss

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:
$$(2, -1, 3, 5) - 2(1, 2, -1, 1) = (0, -5, 5, 3).$$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:
$$(3, 1, 2, 6) - 3(1, 2, -1, 1) = (0, -5, 5, 3).$$
- $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:
$$(0, -5, 5, 3) - (0, -5, 5, 3) = (0, 0, 0, 0).$$

Passo 3: Sistema escalonado

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -5y + 5z = 3 \end{cases}$$

Como L_3 é nula, o sistema é **possível indeterminado** (infinitas soluções).

(Observação: O gabarito original indicava SPD com solução única, mas o sistema é, na verdade, indeterminado.)

Resposta: Sistema possível indeterminado (depende de um parâmetro).

Questão 7

Dadas as retas $r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, verifique se elas são paralelas, concorrentes ou reversas.

Passo 1: Vetores diretores

- r_1: $\mathbf{d}_1 = (2, -1, 3)$.
- r_2: $\mathbf{d}_2 = (-1, 1, 2)$.

Passo 2: Verificar paralelismo

Não são múltiplos escalares, então não são paralelas.

Passo 3: Verificar interseção

Iguale as equações paramétricas (usando parâmetros distintos t e s):

$$\begin{cases} 1+2s = 3-t \\ -1-s = t \\ 3s = 1+2t \end{cases}$$

Resolvendo:
Da segunda equação, $t = -1 - s$. Substitua na primeira:

$$1+2s = 3-(-1-s) \implies 1+2s = 4+s \implies s = 3.$$

Então $t = -1 - 3 = -4$.
Verifique na terceira equação:

$$3 \cdot 3 = 1 + 2 \cdot (-4) \implies 9 = -7 \quad \text{(Falso)}.$$

Logo, não há interseção.

Resposta: Retas **reversas** (não paralelas e não se intersectam).

Questão 8

Encontre a distância do ponto $Q(2, -1, 3)$ ao plano $\pi : 3x - 4y + z = 5$.

A distância d é dada por:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|6 + 4 + 3 - 5|}{\sqrt{9 + 16 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{26}}.$$

Resposta: $\frac{8}{\sqrt{26}}$. *(Correção: O gabarito original estava errado.)*

Questão 9

Calcule a área do triângulo formado pelos pontos $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, -1)$ e $C(0, 2, 4)$.

Passo 1: Vetores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$

$$\overline{AB} = (2, 1, -3), \quad \overline{AC} = (-1, 2, 2).$$

Passo 2: Produto vetorial

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2) - \mathbf{j}(2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)) + \mathbf{k}(2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = (8, -$$

Passo 3: Área

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \| \overline{AB} \times \overline{AC} \| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Resposta: $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. *(Correção: O gabarito original estava errado.)*

Questão 10

Determine a equação da esfera com centro em $C(2,-3,1)$ e que passa pelo ponto $P(4,1,-2)$.

O raio r é a distância entre C e P:

$$r = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-3))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}.$$

A equação da esfera é:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 29.$$

Resposta: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 29.$

Observações sobre o Gabarito Original

- **Questão 5:** A interseção correta é $(11, 2, -1)$, não $(5, -1, 1)$.
- **Questão 6:** O sistema é possível indeterminado, não determinado.
- **Questão 8:** A distância correta é $\frac{8}{\sqrt{26}}$, não $\frac{6}{\sqrt{26}}$.
- **Questão 9:** A área correta é $\frac{3\sqrt{10}}{2}$, não $\frac{\sqrt{194}}{2}$.

Correções foram aplicadas nas resoluções acima.