

Interpolación

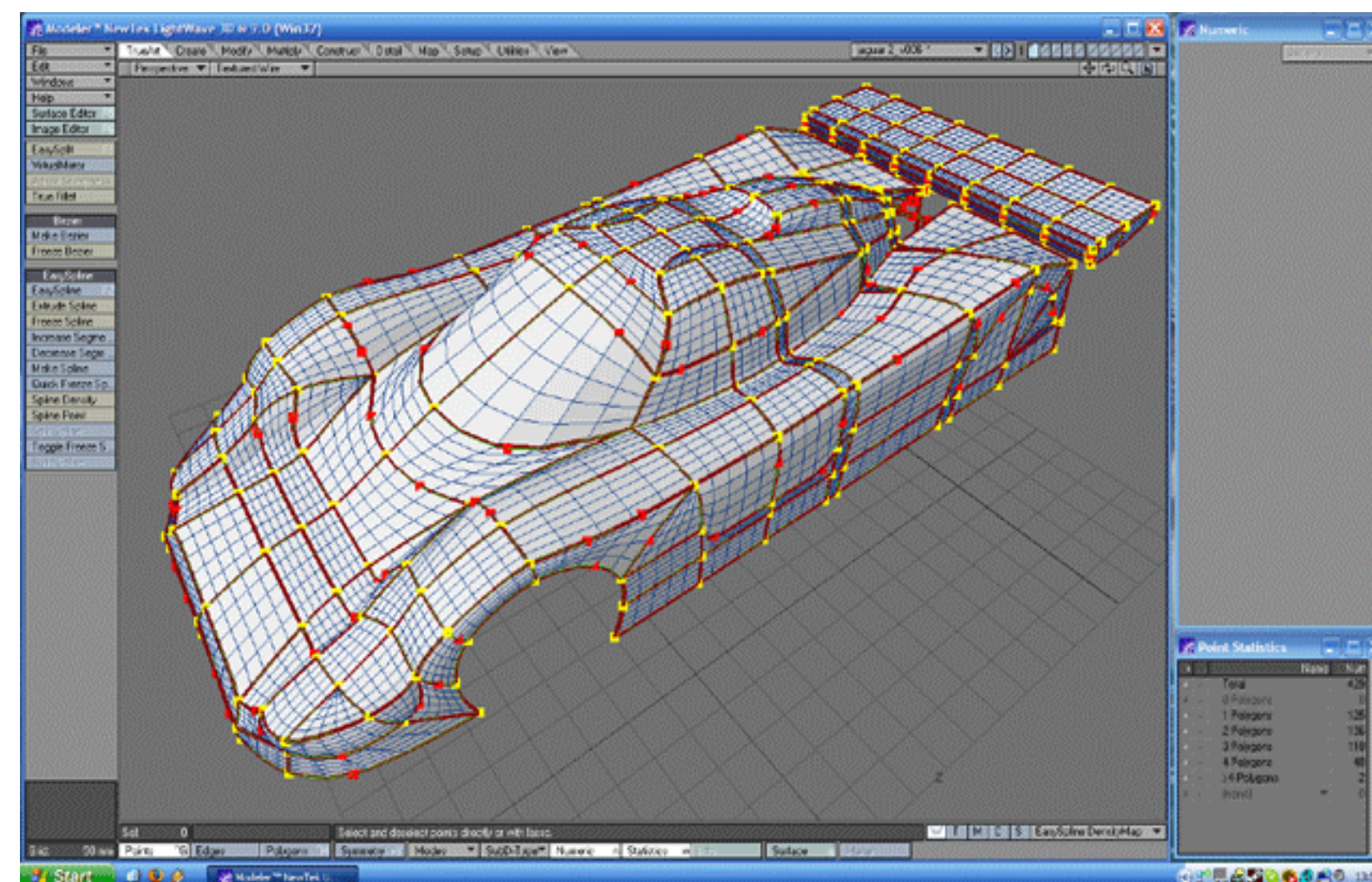
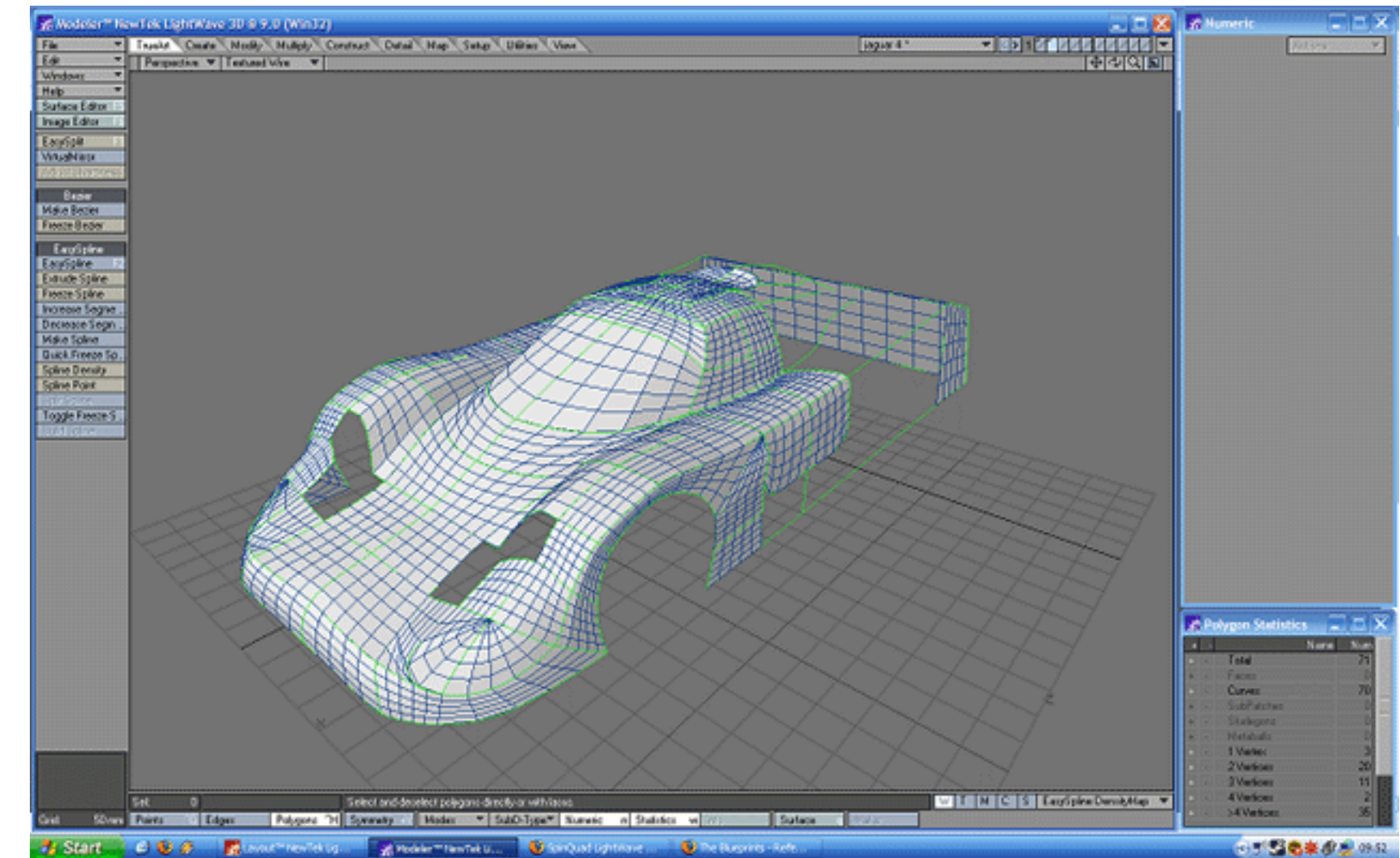
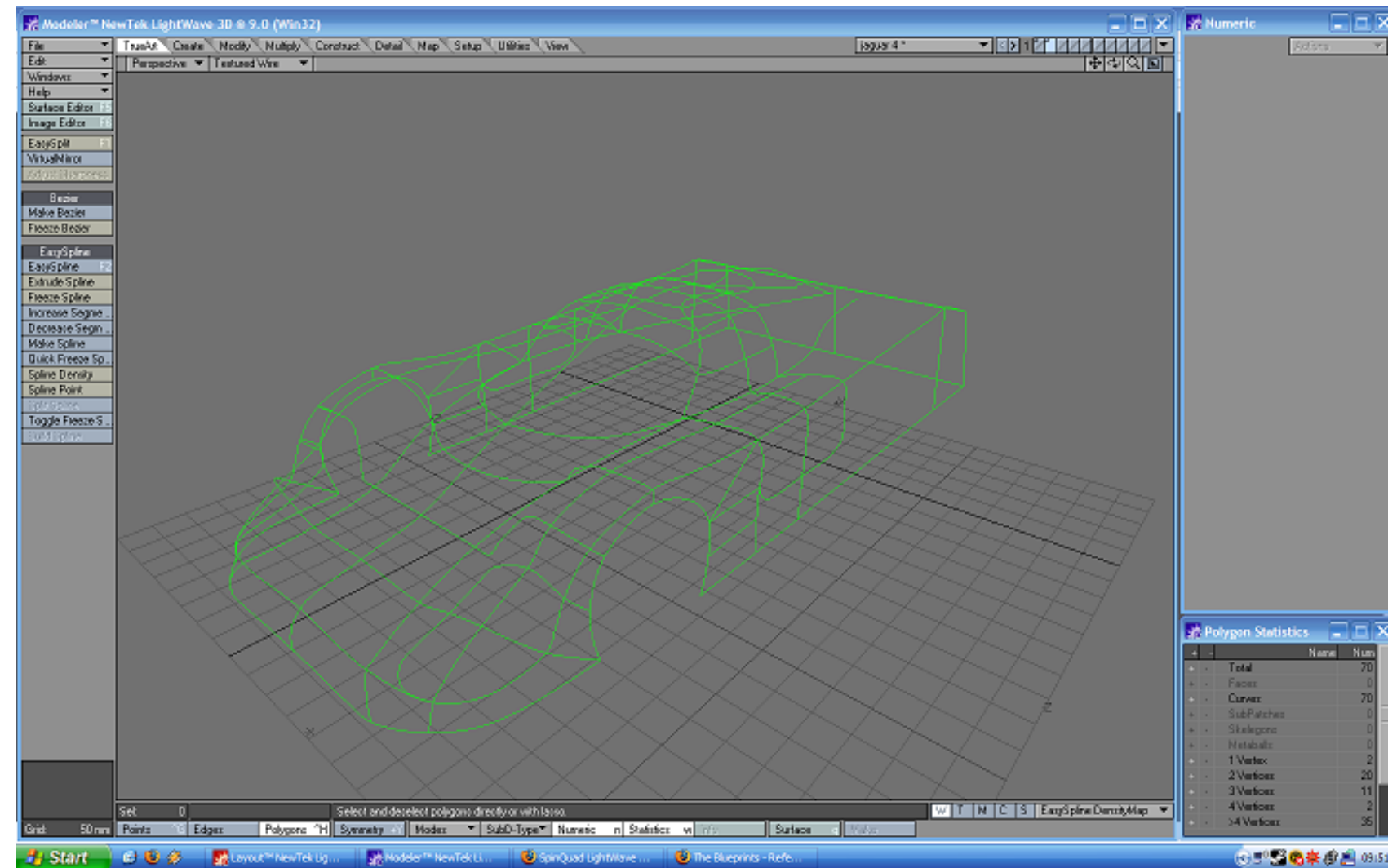
Dan Casas

Motivación

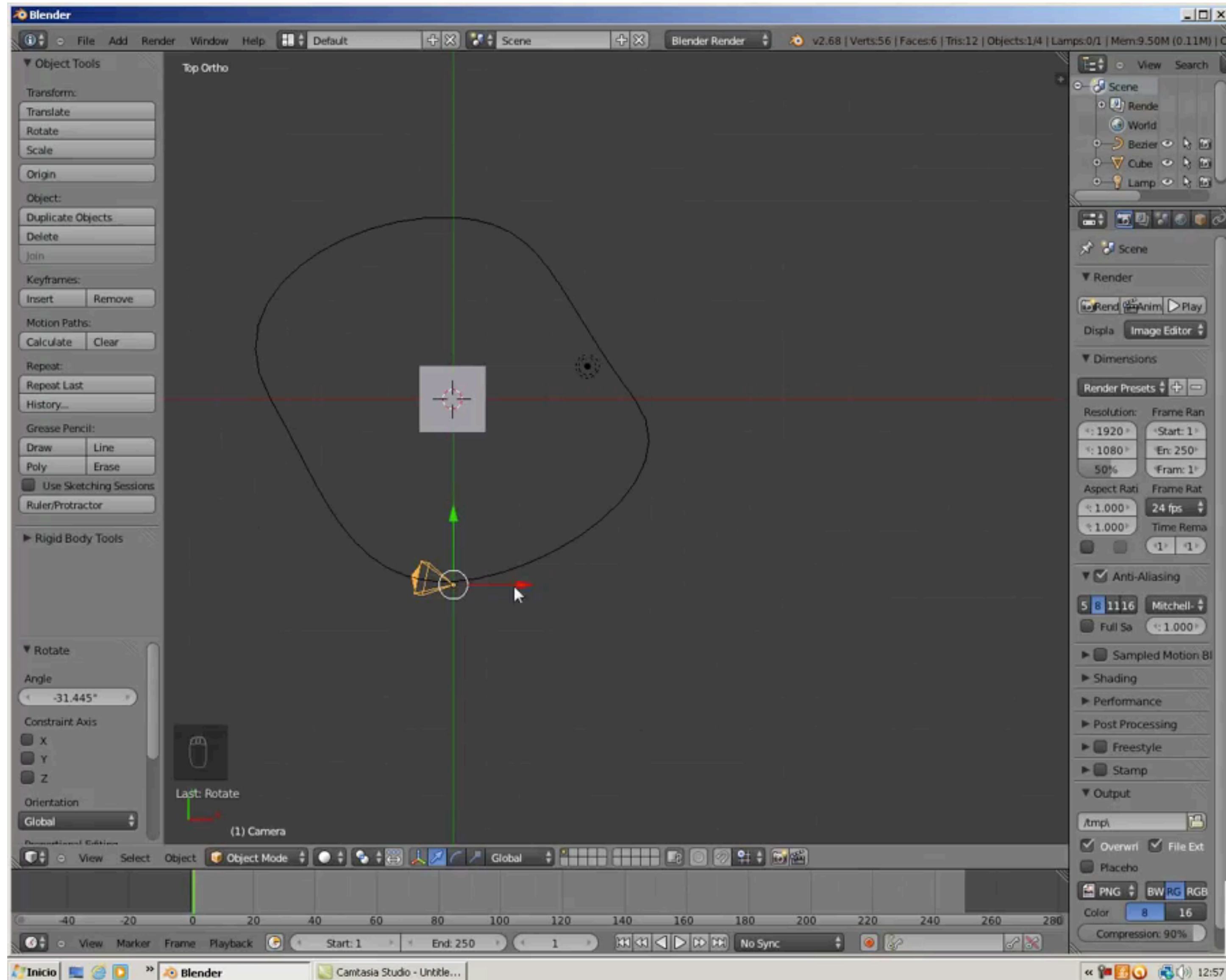
e

e

Motivación



Motivación



Interpolación

1. Introducción

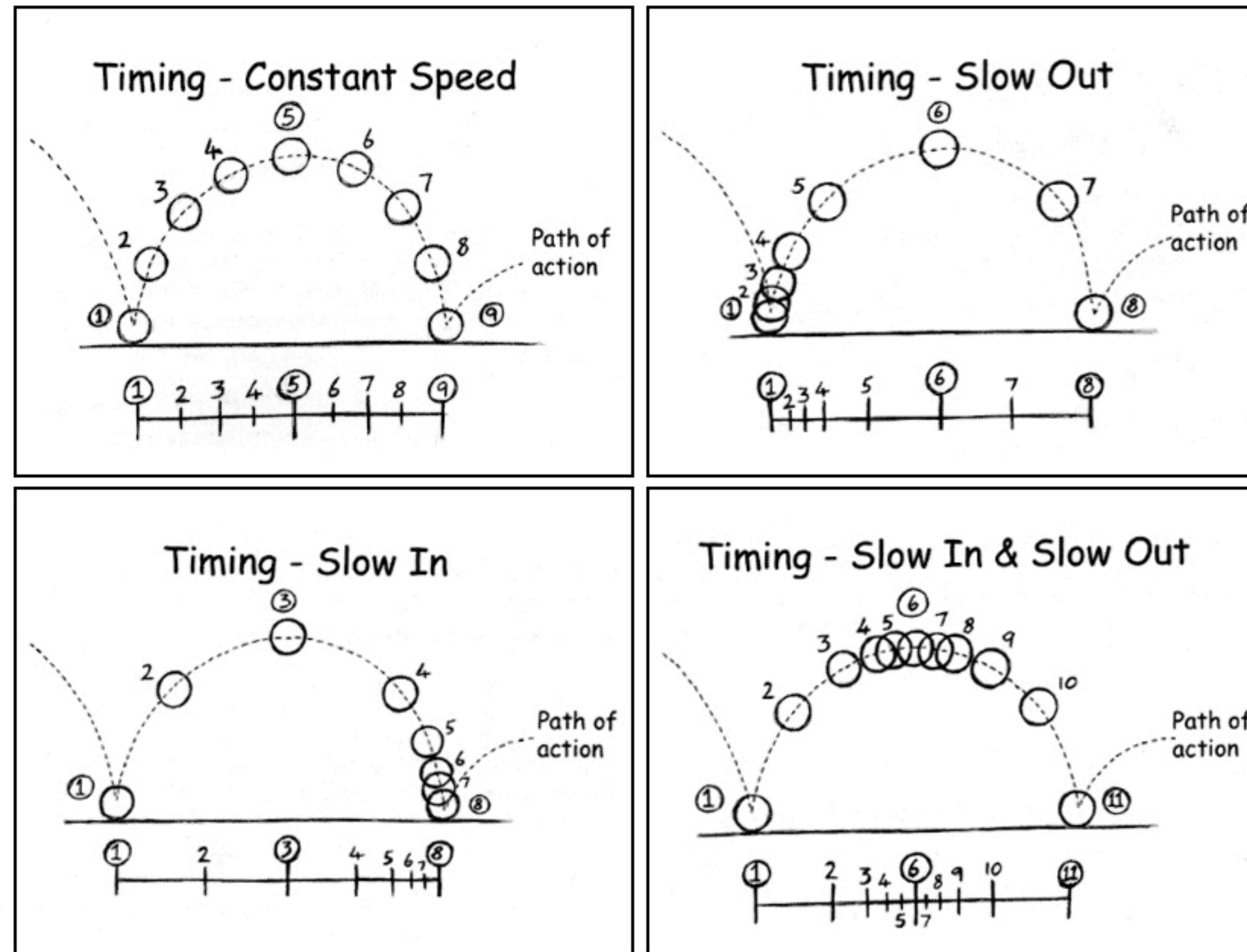
La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.



¿Qué necesitamos?

Una **función** de interpolación

- La parametrización de la función en base a la **distancia** recorrida.
- El mantenimiento del control de la posición interpolada en el **tiempo**.



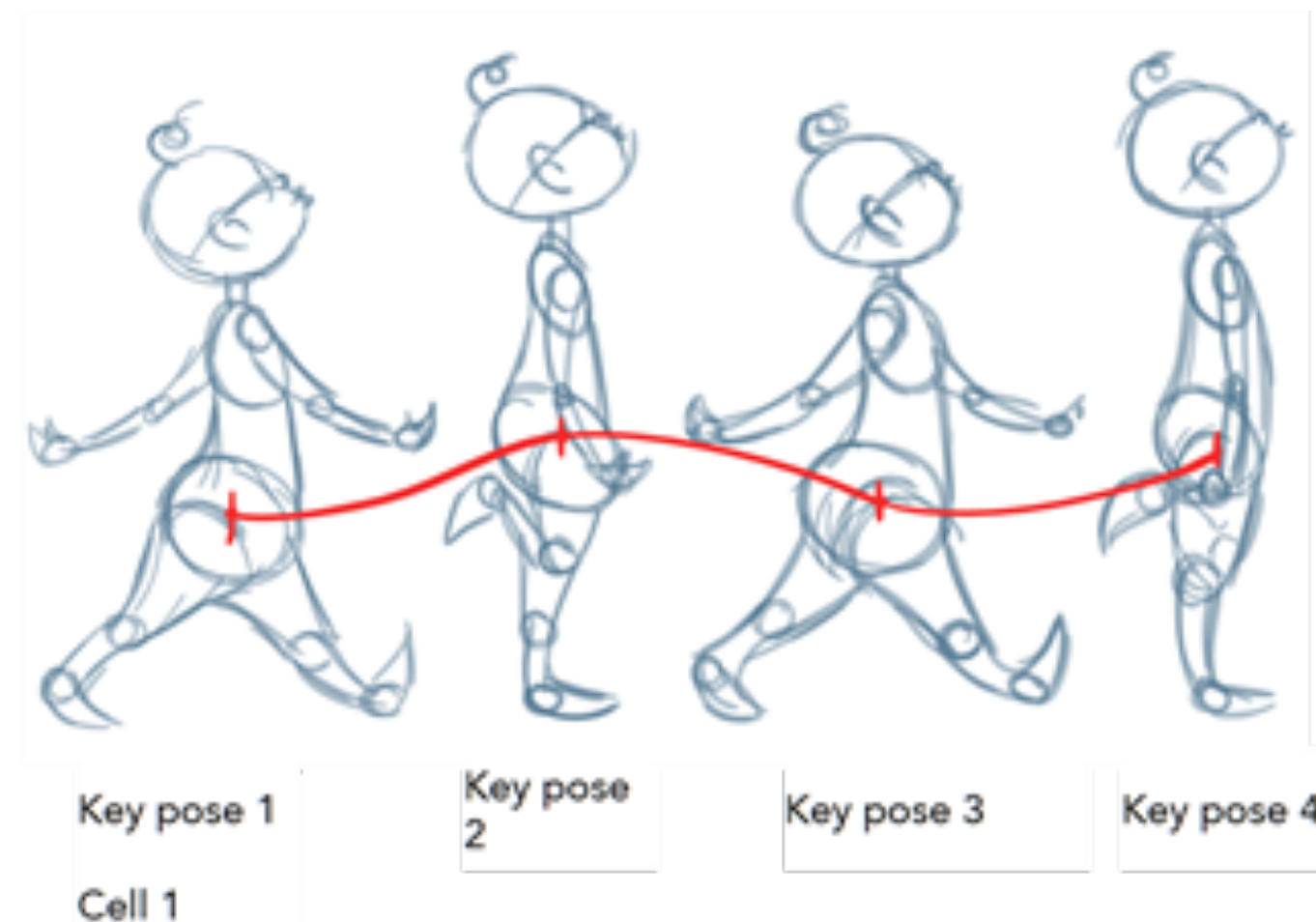
<http://gizma.com/easing/#expo3>

Interpolación

Animador —> valores asociados con un parámetro en unos **keyframes**.

¿Cómo generar el resto de los valores del parámetro entre los keyframes?

Un keyframe en animación es un dibujo que define los puntos de inicio y fin de cualquier **transición**.



Interpolación

Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)



Key



Key

Interpolación

2.- Búsqueda de la función apropiada.

¿Cómo elegir la técnica de interpolación más adecuada?
¿una vez seleccionada, cómo aplicarla a mi caso de animación?

Interpolación vs Aproximación



An interpolating spline in which the spline passes through the interior control points



An approximating spline in which only the endpoints are interpolated; the interior control points are used only to design the curve

Interpolación

En el caso de ser puntos de la curva, forman parte de un spline de interpolación.

Un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios. Veremos que se van a usar normalmente polinomios de orden bajo para no realizar cambios bruscos en la forma a aproximar.

En el caso de ser una aproximación, los puntos dados son un ejemplo de cómo diseñar el spline por aproximación, y en cualquier caso, permite más margen en el diseño de la curva.

Interpolación

Interpolación:

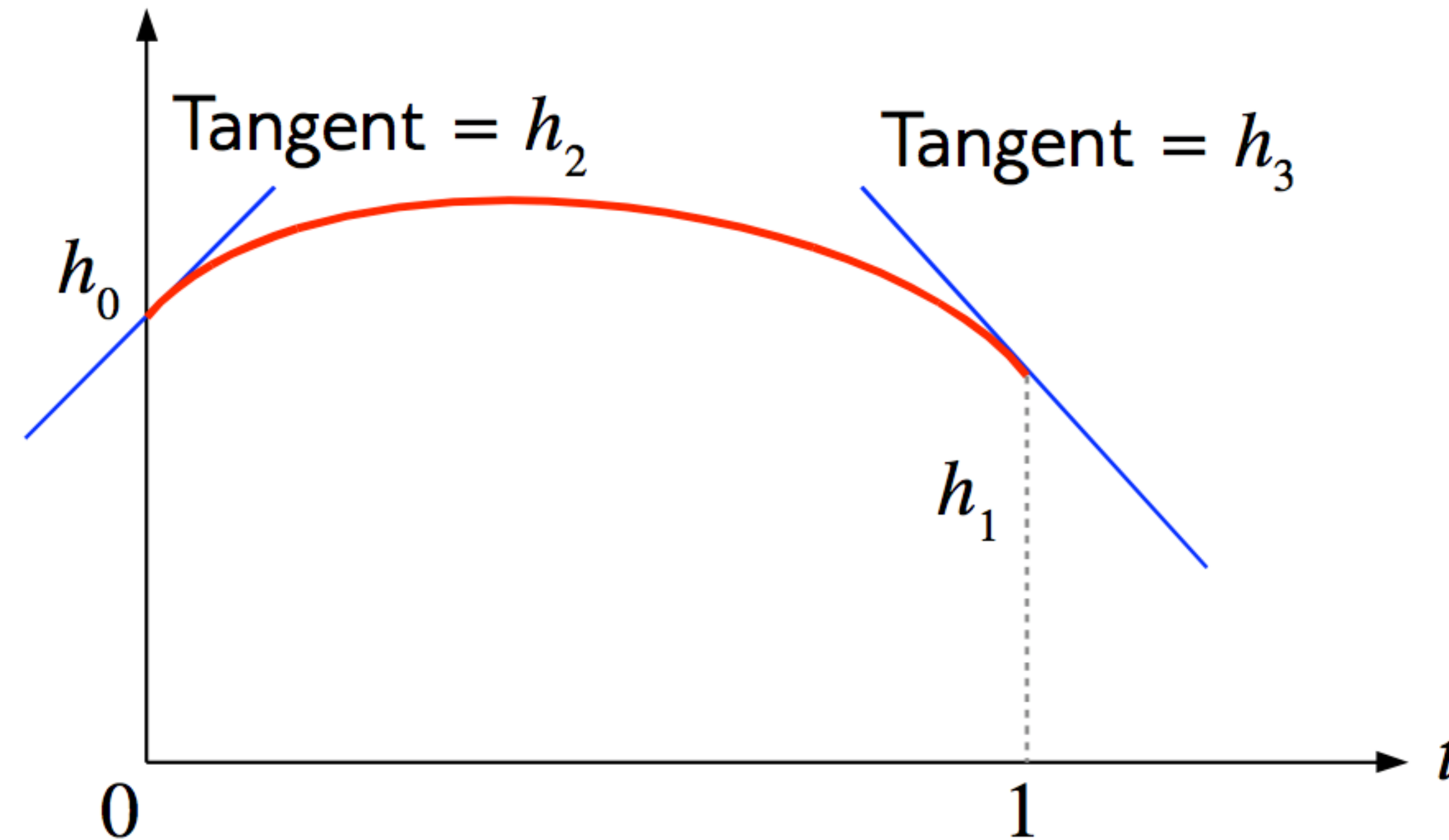
- **Hermite:** Requiere saber tangentes en los puntos finales.
- **Polinomio interpolador de Lagrange**
- **Splines, Catmull-Rom:** Sólo necesita saber los puntos por donde pasaría la curva. Defino por mi mismo las tangentes.

Aproximaciones:

- **Curvas de Bezier.**
- **B-splines.**

Cubic Hermite Interpolation

- Specify positions h_0, h_1 and tangents (slopes, derivatives) h_2, h_3 at two points: $t = 0$ and $t = 1$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

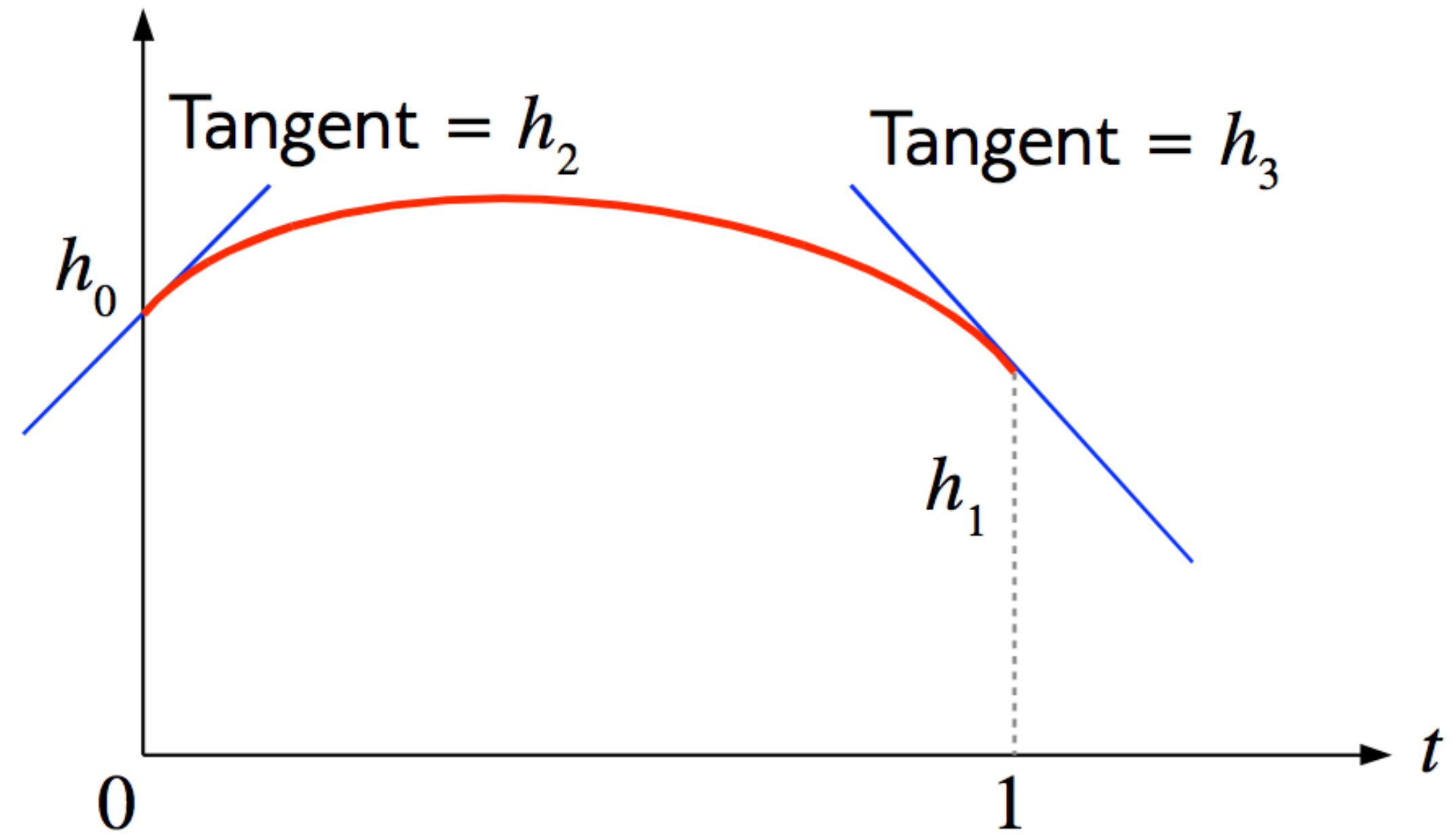
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) = d$$

$$h_1 = P(1) = a + b + c + d$$

$$h_2 = P'(0) = c$$

$$h_3 = P'(1) = 3a + 2b + c$$



Matrix Representation


$$h_0 = d$$

$$h_1 = a + b + c + d$$

$$h_2 = c$$

$$h_3 = 3a + 2b + c$$

Hermite constraint matrix


$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

Matrix Representation

$$\mathbf{h} = \mathbf{C}\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{h}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Hermite basis matrix

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrix Representation of Polynomials

$[t^3]$

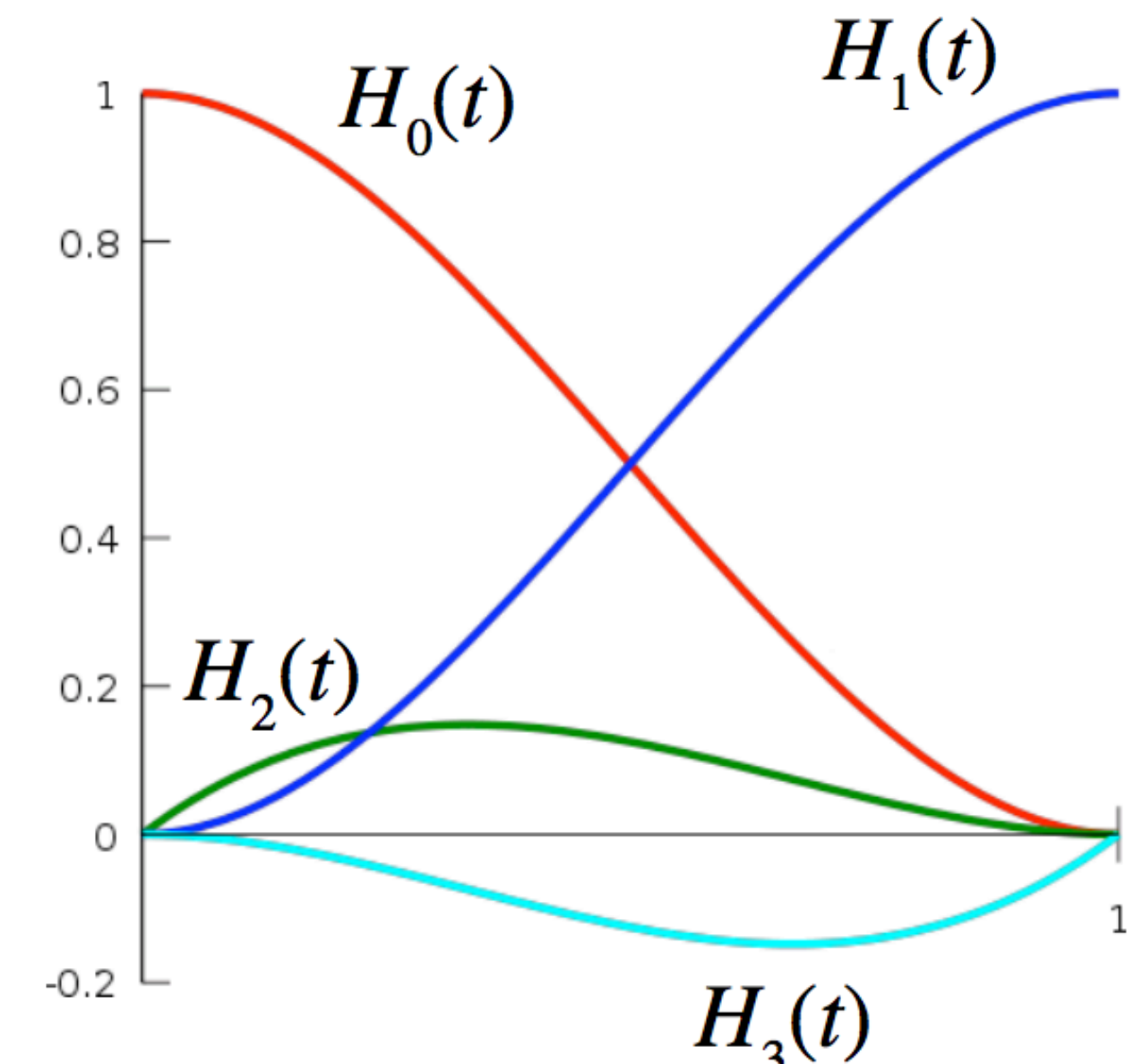
$$P(t) = [a \ t]$$

Hermite Basis Functions

$$P(t) = [h_0 \ h_1 \ h_2 \ h_3]$$

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ H_1(t) &= -2t^3 + 3t^2 \\ H_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ H_3(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned}$$

$$P(t) = [h_0 \ h_1 \ h_2 \ h_3]$$



$$P(t) = \sum_{i=0}^3 h_i H_i(t)$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 h_i H_i(t)$$

Interpolación Hermite

Propiedades importantes

- Requiere de la disponibilidad de las primeras derivadas
- Si hay más de 2 puntos la continuidad se cumple de manera que la tangente a la curva i en el punto final es la tangente a la curva $i+1$ en el punto inicial.

Interpolación

Interpolación Hermite. Ejemplo 1.

Encontrar un polinomio $P(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que:

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 1, \quad P'(0) = 0, \quad P'(1) = 1.$$

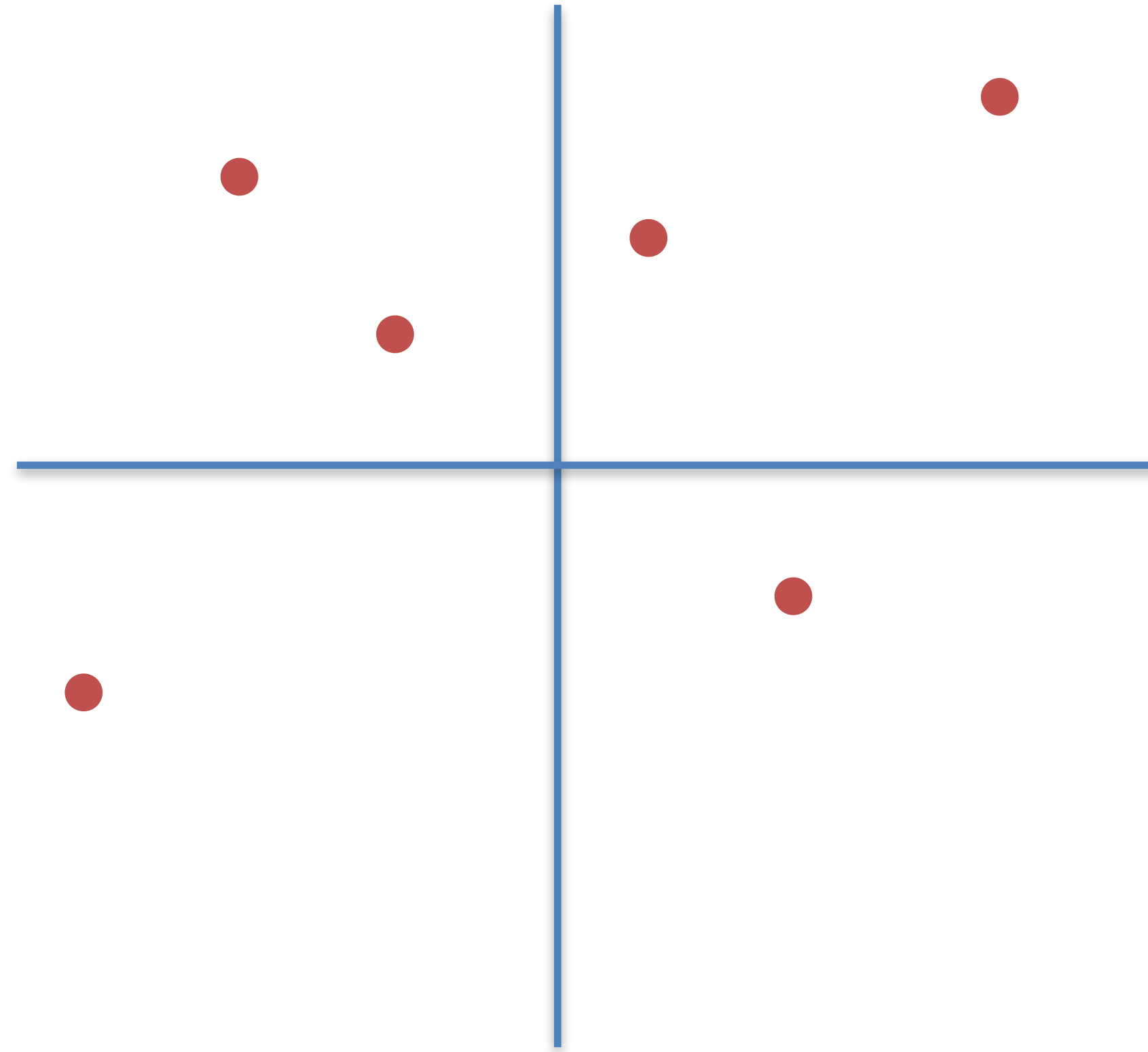
MATLAB demo

or <https://octave-online.net/>

MATLAB ejercicios

<http://dancasas.github.io/teaching/AC-2019/ejercicios.html>

Polinomio interpolado de Lagrange



Polinomio interpolado de Lagrange

Forma de Lagrange

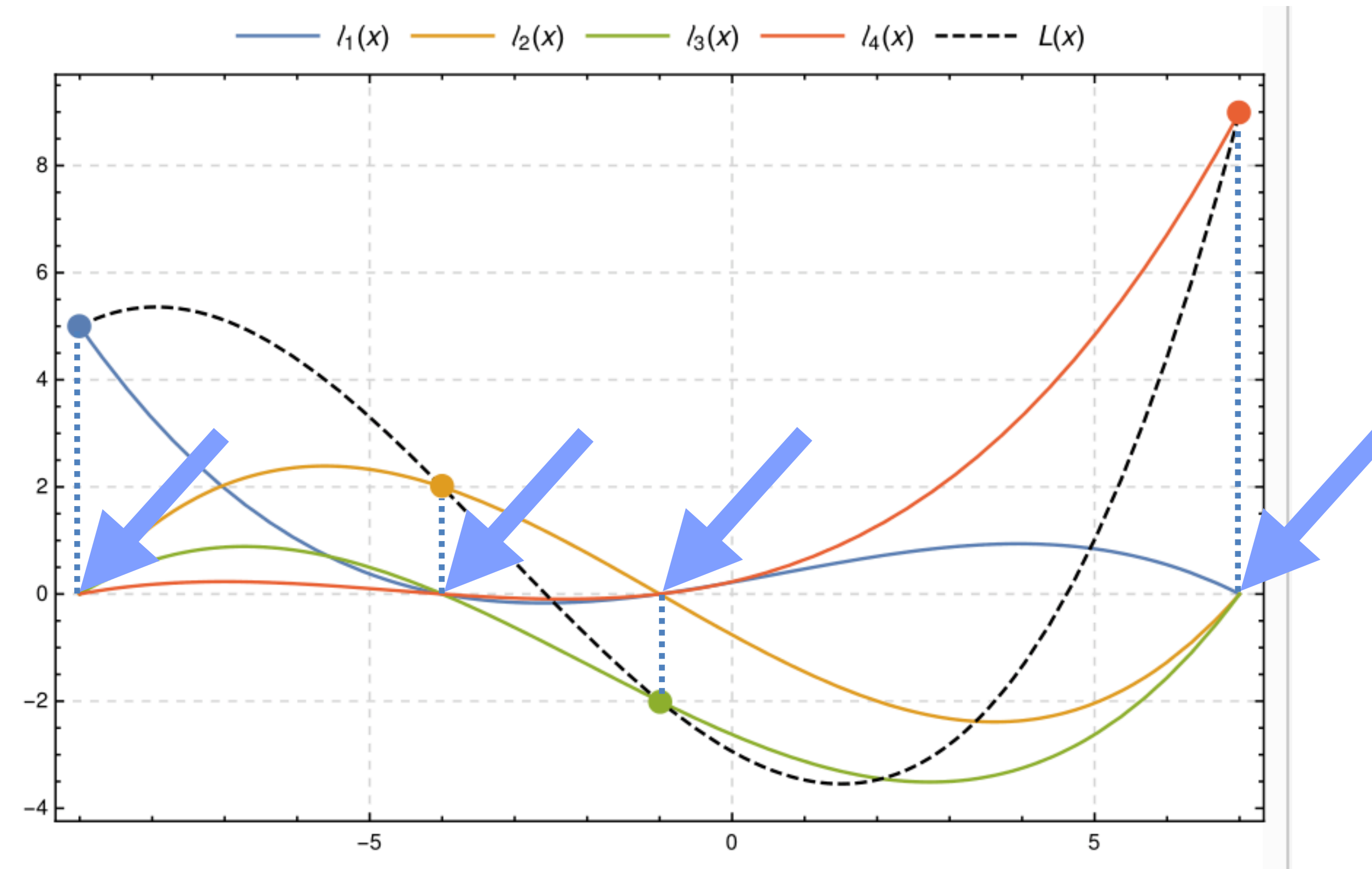
$$P_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n.$$

Los polinomios $l_j(x)$ se denominan *polinomios componentes* y se caracterizan por las propiedades

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Es decir, el polinomio componente $l_j(x)$ vale 1 en su nodo x_j y se anula en los restantes.

Polinomio interpolado de Lagrange



This image shows, for four points $((-9, 5), (-4, 2), (-1, -2), (7, 9))$, the (cubic) interpolation polynomial $L(x)$ (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where x corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \leq m \leq k \\ m \neq j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)},$$



No se anula para x_j

Polinomio interpolado de Lagrange

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \leq m \leq k \\ m \neq j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)},$$

Determina el polinomio interpolador de la tabla

x	1	2	3
y	1	1/2	1/3

Los polinomios componentes son

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & & \\ \hline x_0 = 1 & x_1 = 2 & x_2 = 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow l_0(x) = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 3).$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & * & \\ \hline x_0 = 1 & x_1 = 2 & x_2 = 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow l_1(x) = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} = -(x - 1)(x - 3).$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & * \\ \hline x_0 = 1 & x_1 = 2 & x_2 = 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow l_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2).$$

El polinomio interpolador es

$$P_2(x) = l_0(x) \cdot 1 + l_1(x) \cdot \frac{1}{2} + l_2(x) \cdot \frac{1}{3}.$$

Polinomio interpolado de Lagrange

El polinomio interpolador es

$$P_2(x) = l_0(x) \cdot 1 + l_1(x) \cdot \frac{1}{2} + l_2(x) \frac{1}{3}.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (x - 2) (x - 3) - \frac{1}{2} (x - 1) (x - 3) + \frac{1}{6} (x - 1) (x - 2). \quad (6)$$

La tabla de valores es la misma que la del Ejemplo 6.1, si operamos en (6), resulta

$$P_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6},$$

Polinomio interpolado de Lagrange

El siguiente gráfico muestra la representación conjunta de la función

$$f(x) = 1/x$$

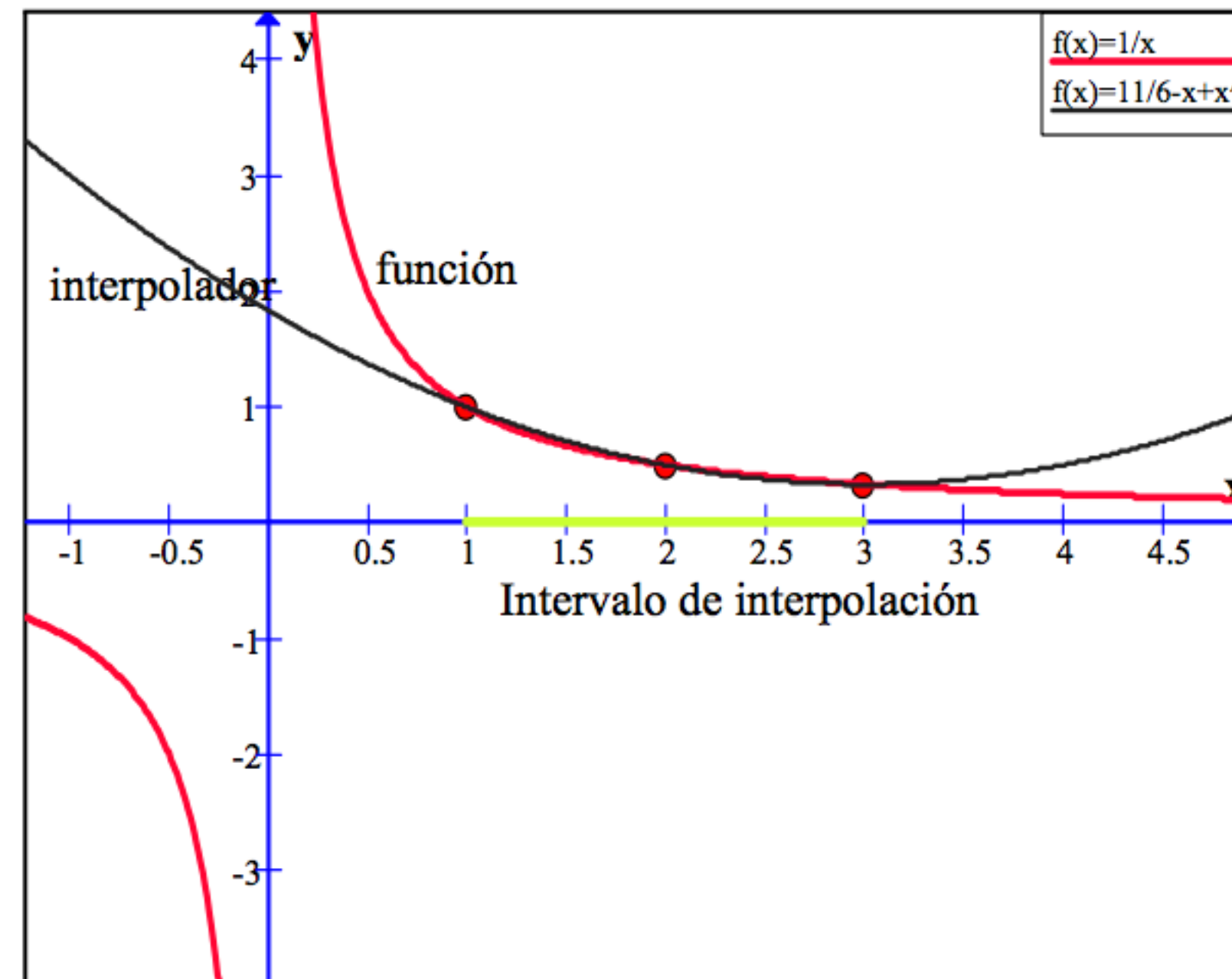


y el polinomio interpolador calculado en el Ejemplo 6.1

$$P_2(x) = \frac{11}{6} - x + \frac{x^2}{6}.$$

x	1	2	3
y	1	$1/2$	$1/3$

La tabla del problema anterior la generamos a partir de la función $f(x) = 1/x$



Polinomio interpolado de Lagrange

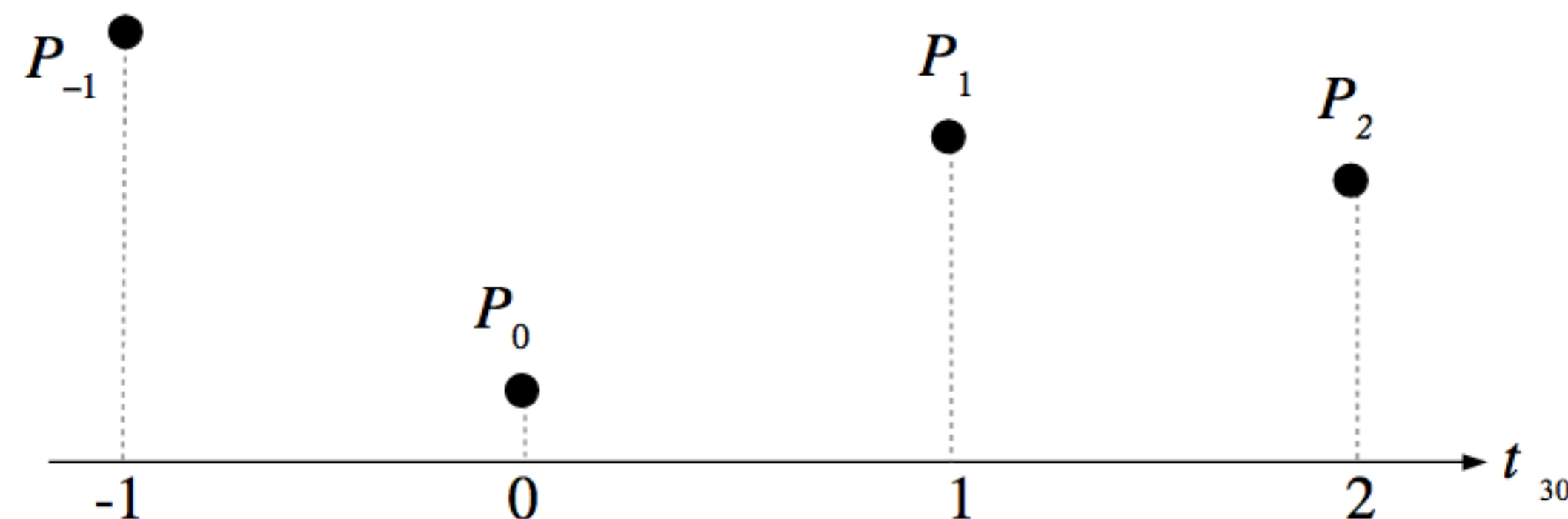
- Desventajas:
 - El grado del polinomio crece con el numero de puntos a interpolar
 - A medida que crece el grado, mayores oscilaciones entre puntos consecutivos. En tal caso, mejor Hermite or splines

MATLAB demo

Interpolación Catmull-Rom

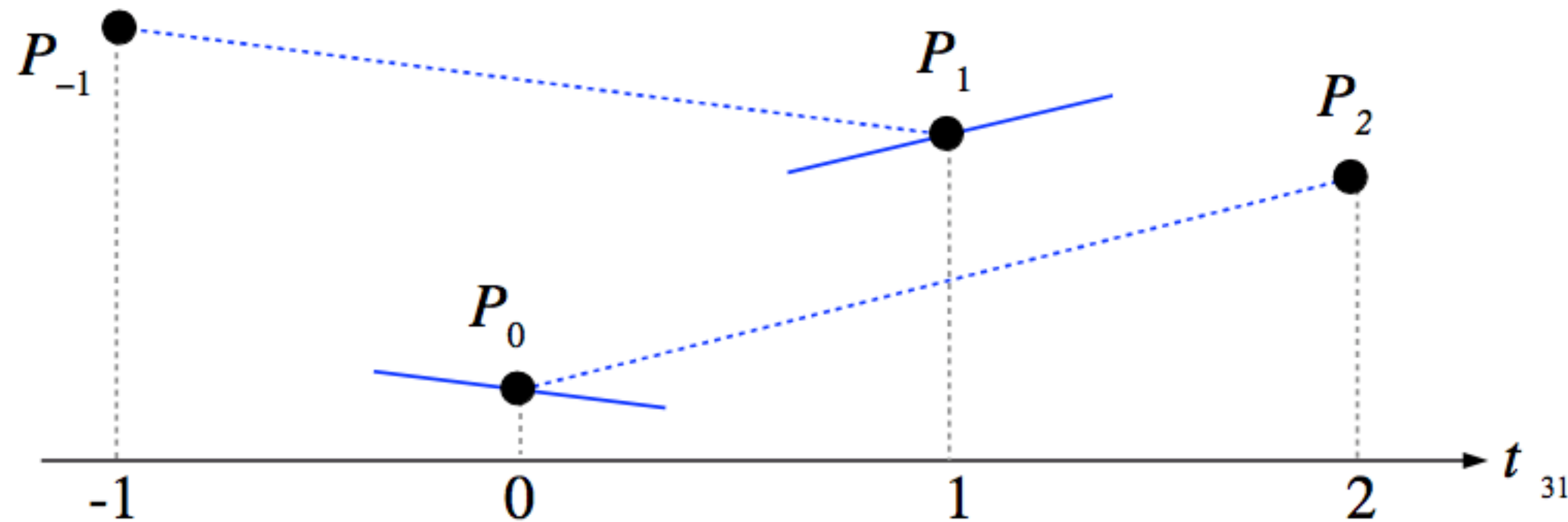
Catmull-Rom.

- Caso particular de Hermite.
- Tangentes desconocida.
- La tangente en cada punto p_i se calcula utilizando el punto anterior y el siguiente en la spline, p_{i-1} y p_{i+1} .
- **Intuition:** A plausible tangent at each point can be inferred directly from the data
 - Now use Hermite interpolation



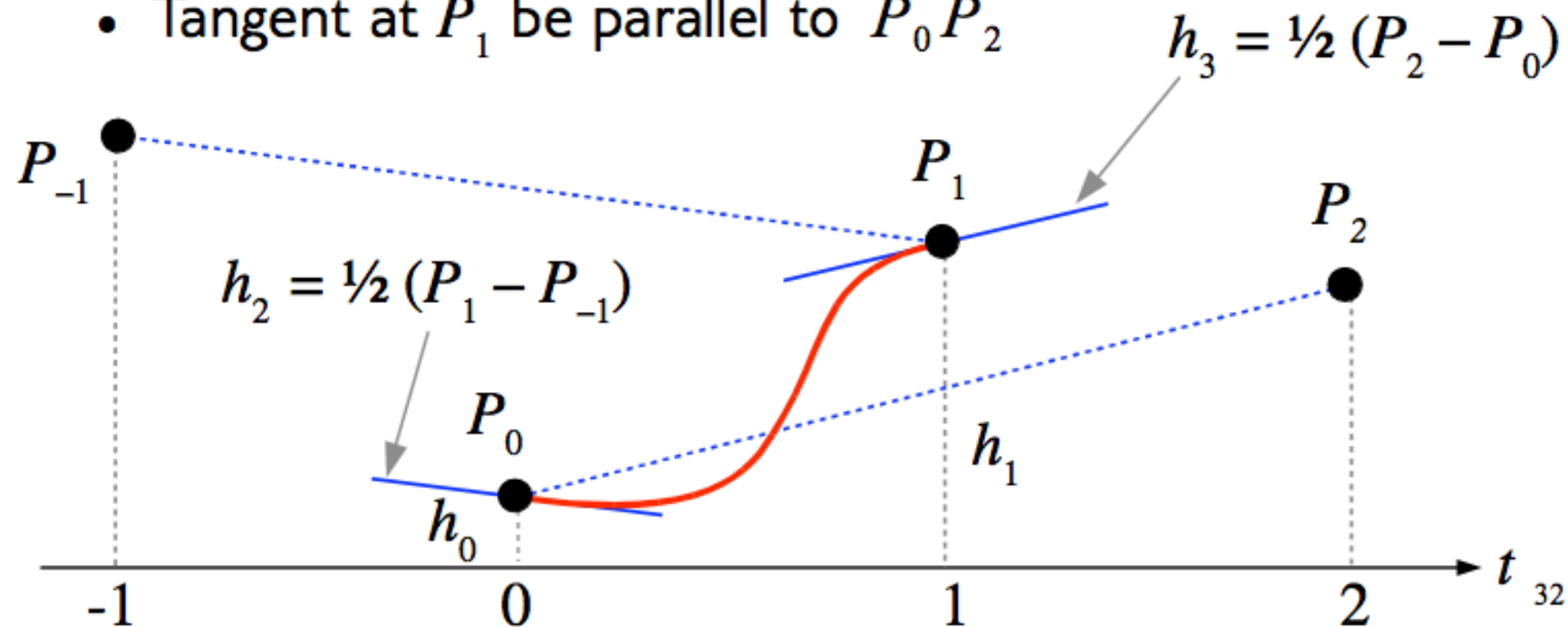
Catmull-Rom Interpolation

- For each segment (P_0, P_1) , use neighboring control points P_{-1}, P_2 and require that:
 - Tangent at P_0 be parallel to $\overline{P_{-1}P_1}$
 - Tangent at P_1 be parallel to $\overline{P_0P_2}$



Catmull-Rom Interpolation

- For each segment (P_0, P_1) , use neighboring control points P_{-1}, P_2 and require that:
 - Tangent at P_0 be parallel to $\overline{P_{-1}P_1}$
 - Tangent at P_1 be parallel to $\overline{P_0P_2}$



Catmull-Rom Interpolation

- In terms of Hermite constraints:

$$h_0 = P_0$$

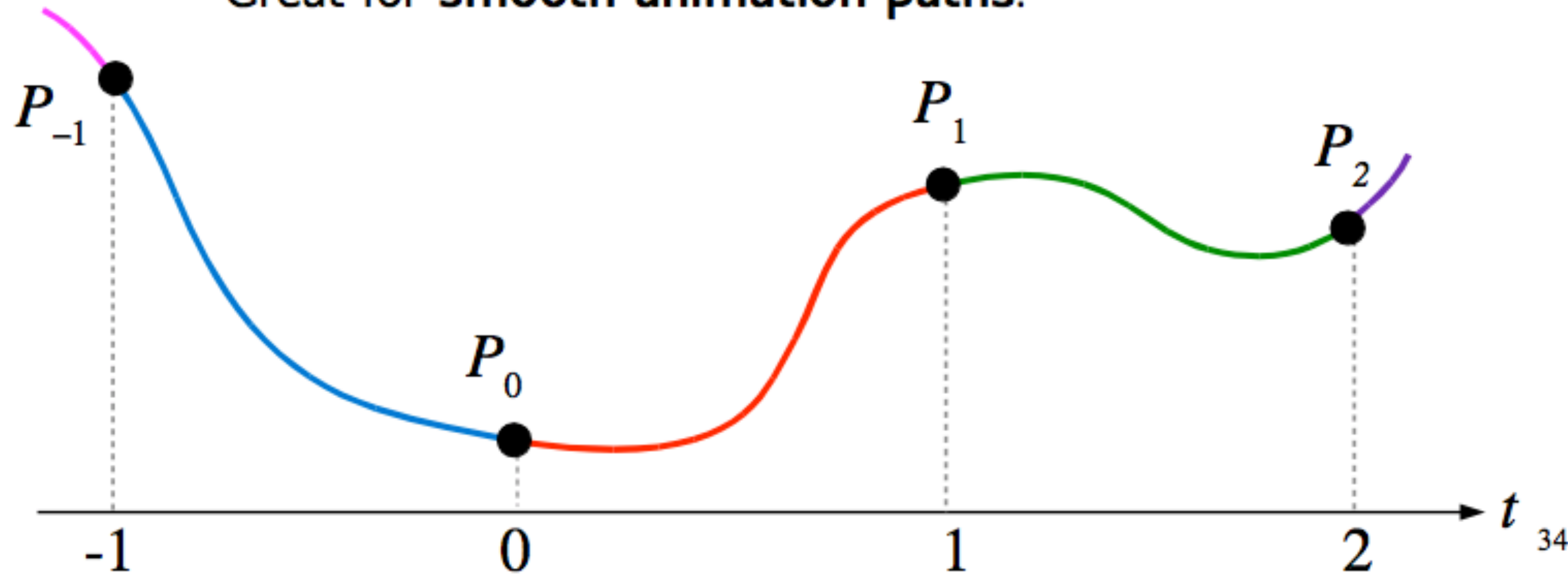
$$h_1 = P_1$$

$$h_2 = \frac{1}{2} (P_1 - P_{-1})$$

$$h_3 = \frac{1}{2} (P_2 - P_0)$$

Catmull-Rom Interpolation

- Repeat for every such interval
- Resulting curve is:
 - C_0 -continuous (segments meet end-to-end)
 - C_1 -continuous (C_0 + derivative is continuous)
 - Great for **smooth animation paths**!



Interpolación Catmull-Rom

Muy utilizadas interpolación suave entre keyframes.

Por ejemplo, trayectorias de la cámara generadas a partir de los keyframes.

Son populares principalmente por ser relativamente fáciles de calcular, principalmente las tangentes en puntos internos, garantizando que cada posición de keyframes se obtiene exactamente, y también garantizando que las tangentes de la curva generada son continuas sobre varios segmentos.

Interpolación Splines

- Un **spline** es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios.
- Requiere solo polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones.

Interpolación Splines

Splines. Ejemplo 1. *Interpolar con splines $f(x) = 1 / x$, en los puntos en los que x vale 1, 2 y 4*

$$f(1) = 1; f(2) = 0.5; f(4) = 0.25$$

El primer segmento: $(1,1) \longrightarrow (2, 0.5)$

Ecuación lineal: $P_1(x) = ax + b$

$$(1) \quad 1 = a+b$$

$$(2) \quad 0.5 = 2a+b$$

De (1) se obtiene: $a=1-b$ (3)

Reemplazando (3) en (2) se obtiene: $0.5=2(1-b)+b$

luego $\longrightarrow b=1.5$

Interpolación

Splines. Ejemplo 1.

Reemplazando el valor de (b) en (1), se obtiene:

$$a = - 0.5$$

Se concluye que: $P1(x) = - 0.5x + 1.5$

El segundo segmento: $(2, 0.5) \longrightarrow (4, 0.25)$

$$P2(x) = ax + b$$

Análogamente a lo hecho para $P1(x)$, en el caso de $P2(x)$ se obtiene:

$$(1) \quad 0.5 = 2a + b$$

$$(2) \quad 0.25 = 4a + b$$

$$a = - 0.125, b = 0.75$$

$$P2(x) = - 0.125x + 0.75$$

MATLAB demo

Interpolación

Splines. Ejemplo 2. *Interpolar con splines de grado 2*

$$f(3) = 2.5; f(4.5) = 1; f(7) = 2.5; f(9)=0.5$$

Primero que nada, vemos que se forman tres intervalos: $[3,4.5], [4.5,7], [7,9]$
En cada uno de estos intervalos, debemos definir una función polinomial de grado 2, como sigue:

Hacemos que la spline pase por los puntos de la tabla de datos, es decir, se debe cumplir que:

$$s(3)=2.5 \quad s(4.5)=1 \quad s(7)=2.5 \quad s(9)=0.5$$

Así, se forman las siguientes ecuaciones

$$s(3) = 2.5 \Rightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5$$

$$s(4.5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (4.5)^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ (4.5)^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$s(7) = 2.5 \Rightarrow \begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{cases}$$

$$s(9) = 0.5 \Rightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Hasta aquí, tenemos un total de 6 ecuaciones con 9 incógnitas.
El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas.
En el caso de las splines de grado 2, necesitamos que la spline tenga derivada continua de orden $k-1=1$, es decir, primera derivada continua.

Calculamos primero la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 2a_2x + b_2 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ 2a_3x + b_3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

Vemos que esta derivada está formada por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades son $x = 4.5$ y $x = 7$.

Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Por lo tanto para que $s'(x)$ sea continua, se debe cumplir que:

$$2a_1(4.5) + b_1 = 2a_2(4.5) + b_2 \Rightarrow 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2$$

También debe cumplirse que:

$$2a_2(7) + b_2 = 2a_3(7) + b_3 \Rightarrow 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3$$

Así, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 9 incógnitas; esto nos da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Elegimos por simple conveniencia $a_1 = 0$.

De esta forma, tenemos un total de 8 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$3b_1 + c_1 = 2.5 \qquad 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5$$

$$4.5b_1 + c_1 = 1 \qquad 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

$$20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \qquad b_1 = 9a_2 + b_2$$

$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \qquad 14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3$$

Y las soluciones serían:

$b_1 = -1$	$a_2 = 0.64$	$a_3 = -1.6$
$c_1 = 5.5$	$b_2 = -6.76$	$b_3 = 24.6$
	$c_2 = 18.46$	$c_3 = -91.3$

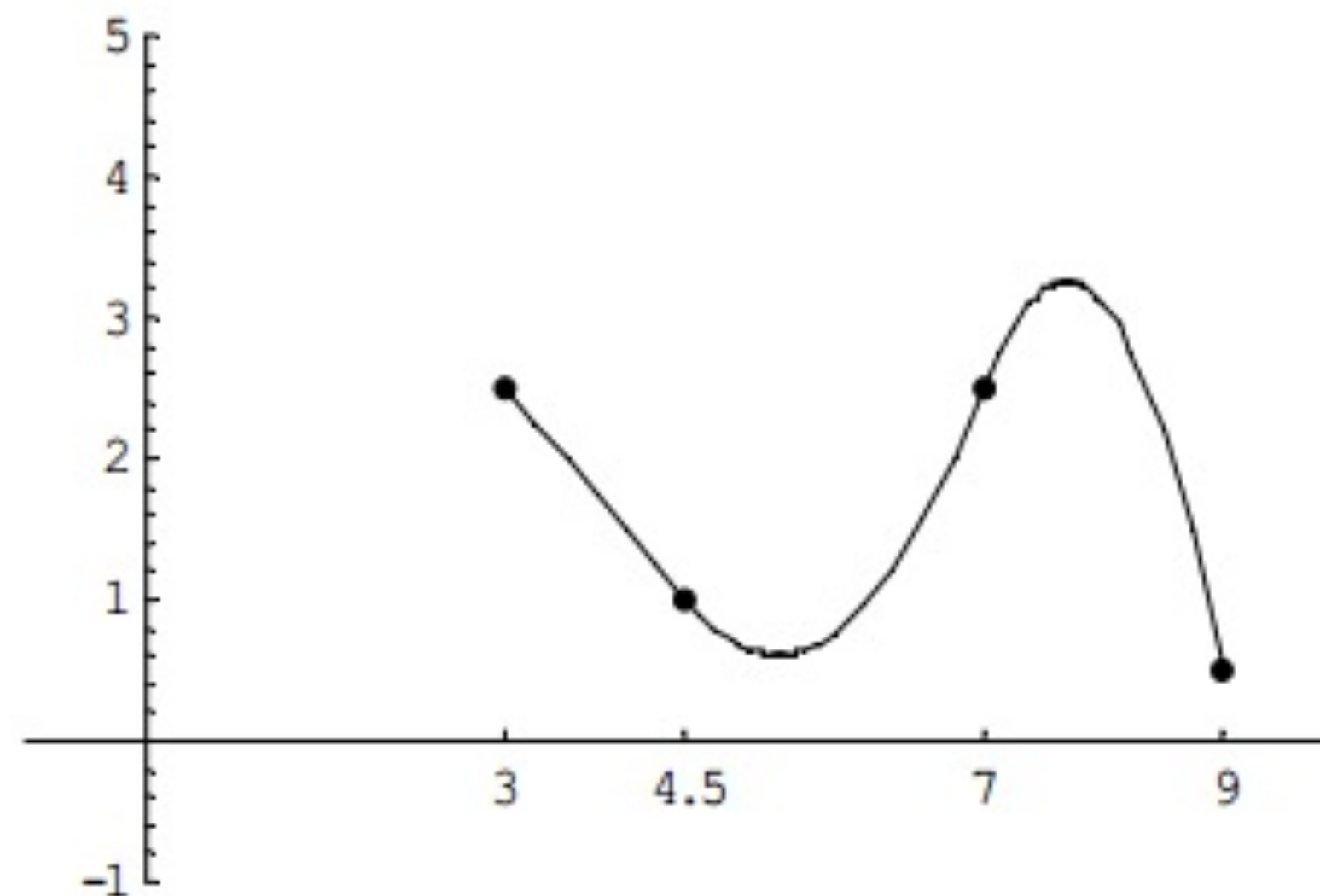
Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Sustituyendo los valores, obtenemos los splines:

$$s(x) = \begin{cases} -x + 5.5 & \text{si } x \in [3, 4.5] \\ 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & \text{si } x \in [4.5, 7] \\ -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & \text{si } x \in [7, 9] \end{cases}$$

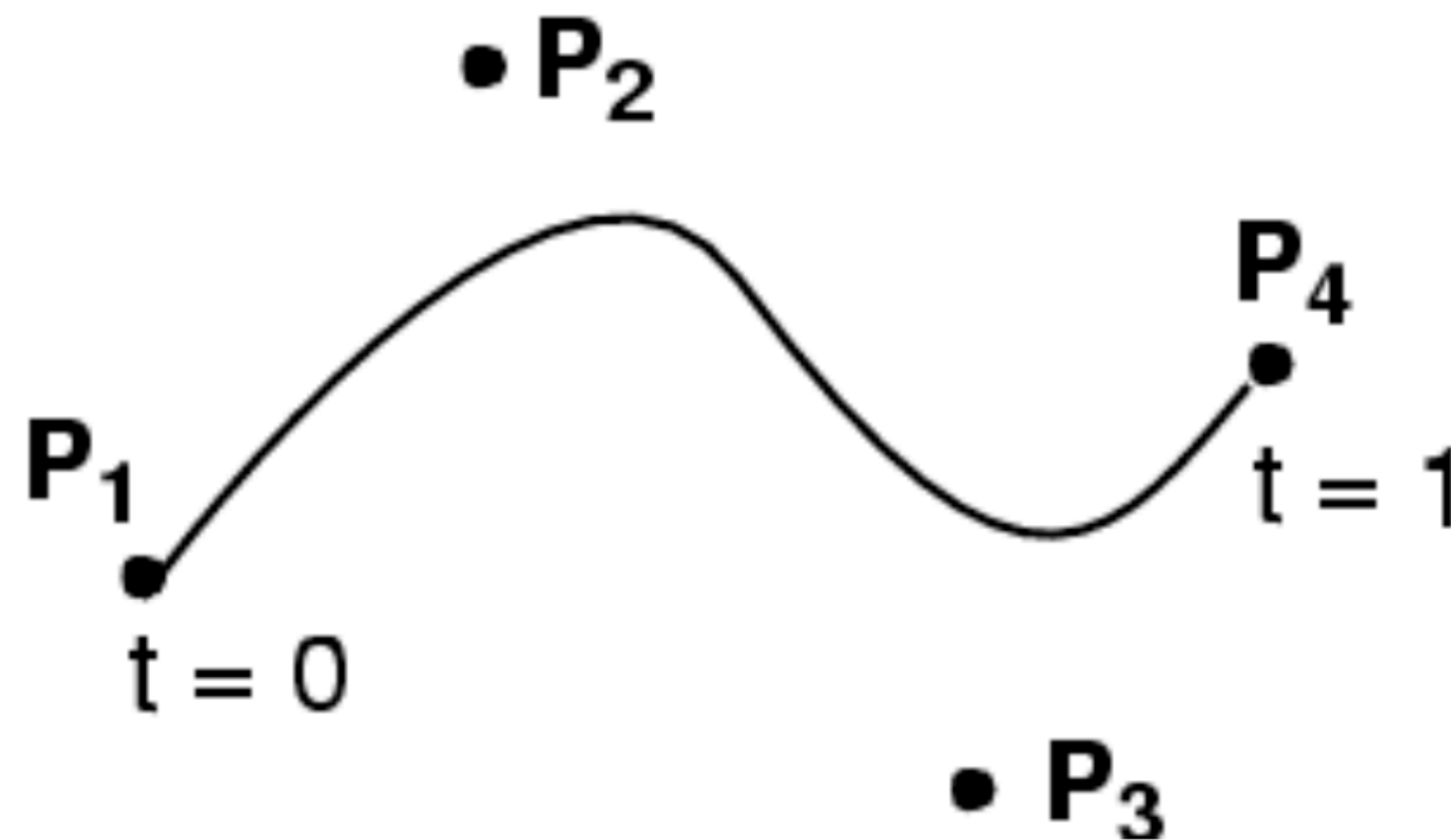
Cuya representación gráfica ser



MATLAB demo

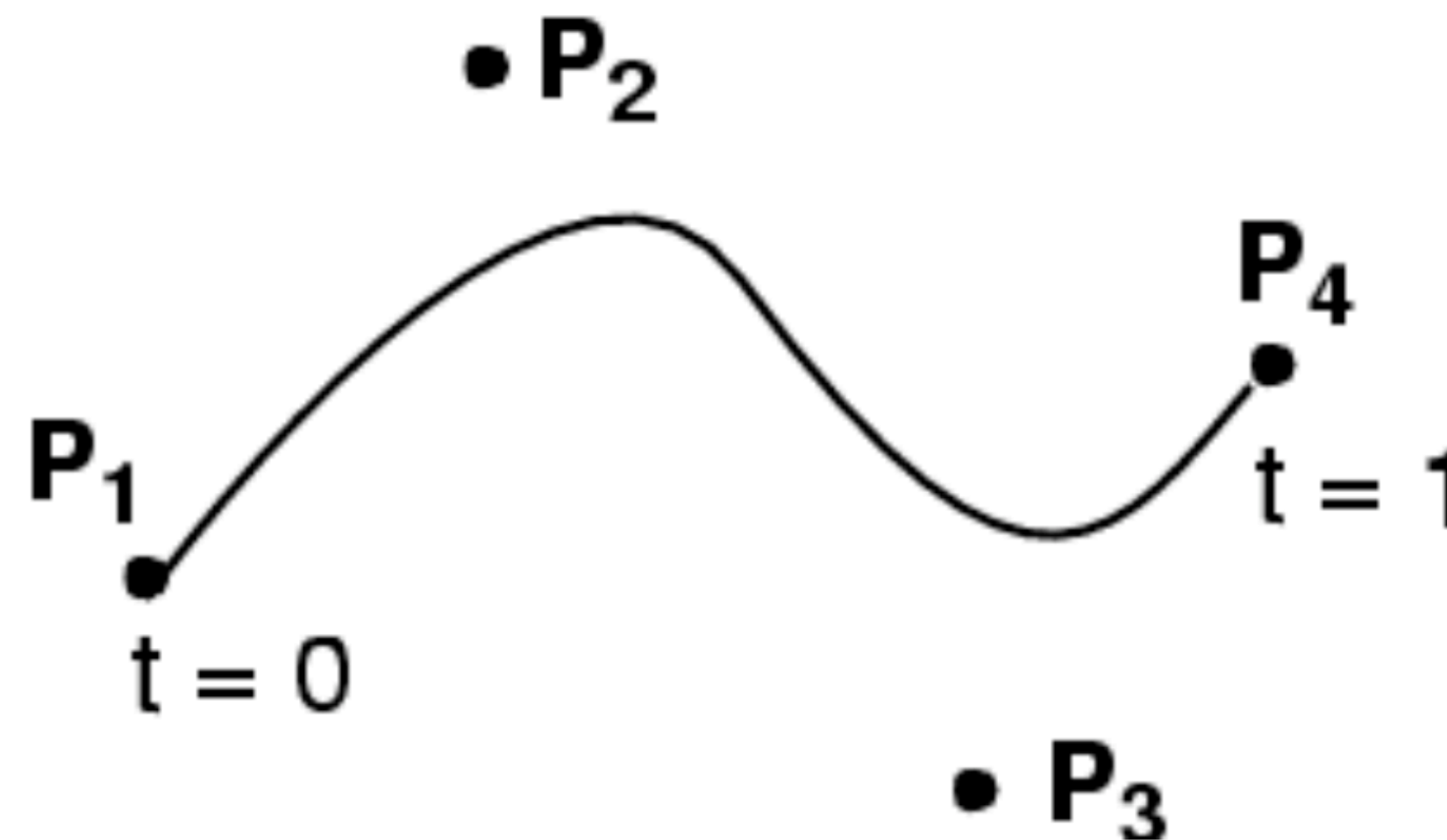
Curvas de Bezier

- User specifies 4 control points $P_1 \dots P_4$
- Curve goes through (interpolates) the ends P_1, P_4
- Approximates the two other ones



Curvas de Bezier

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(t) = & (1-t)^3 \quad \mathbf{P}_1 \\ & + 3t(1-t)^2 \quad \mathbf{P}_2 \\ & + 3t^2(1-t) \quad \mathbf{P}_3 \\ & + t^3 \quad \mathbf{P}_4 \end{aligned}$$



Bezier cúbica

That is,

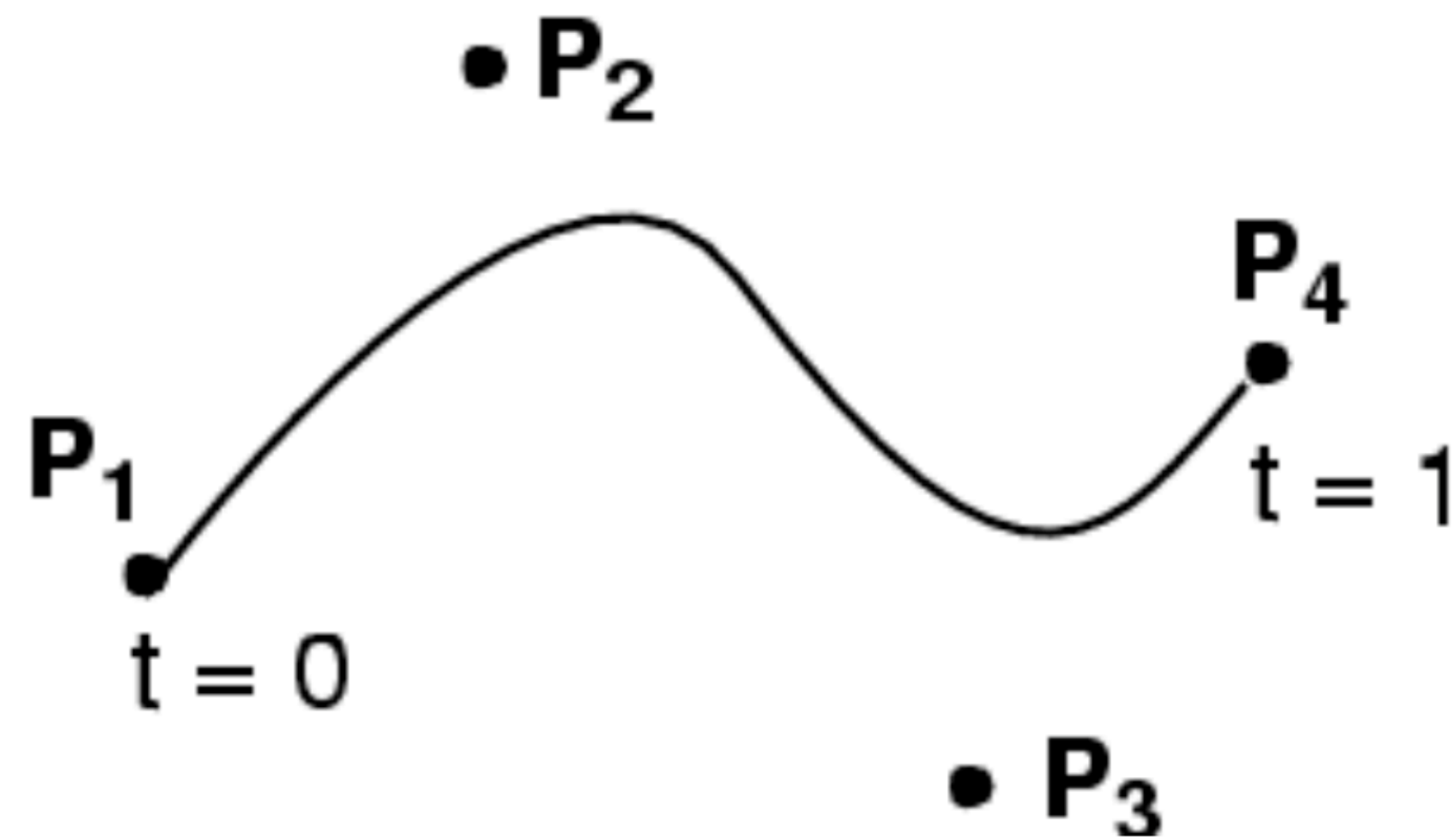
$$\begin{aligned} x(t) = & (1-t)^3 x_1 + \\ & 3t(1-t)^2 x_2 + \\ & 3t^2(1-t) x_3 + \\ & t^3 x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = & (1-t)^3 y_1 + \\ & 3t(1-t)^2 y_2 + \\ & 3t^2(1-t) y_3 + \\ & t^3 y_4 \end{aligned}$$

Curvas de Bezier

- $$\begin{aligned} P(t) = & (1-t)^3 & P_1 \\ & + 3t(1-t)^2 & P_2 \\ & + 3t^2(1-t) & P_3 \\ & + t^3 & P_4 \end{aligned}$$

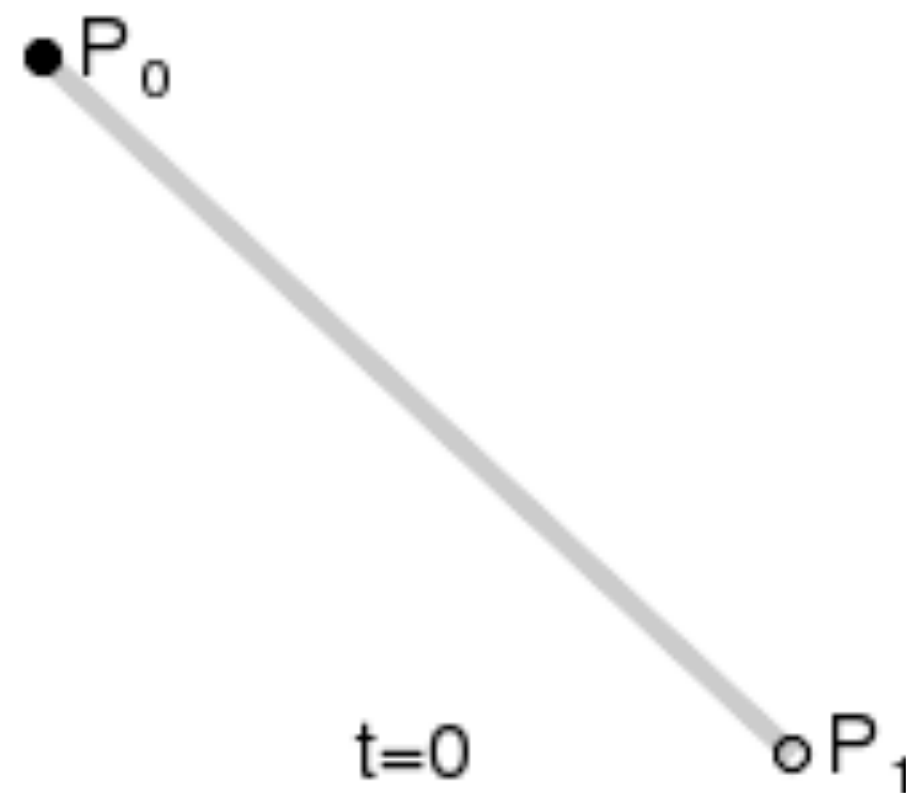
Verify what happens
for $t=0$ and $t=1$



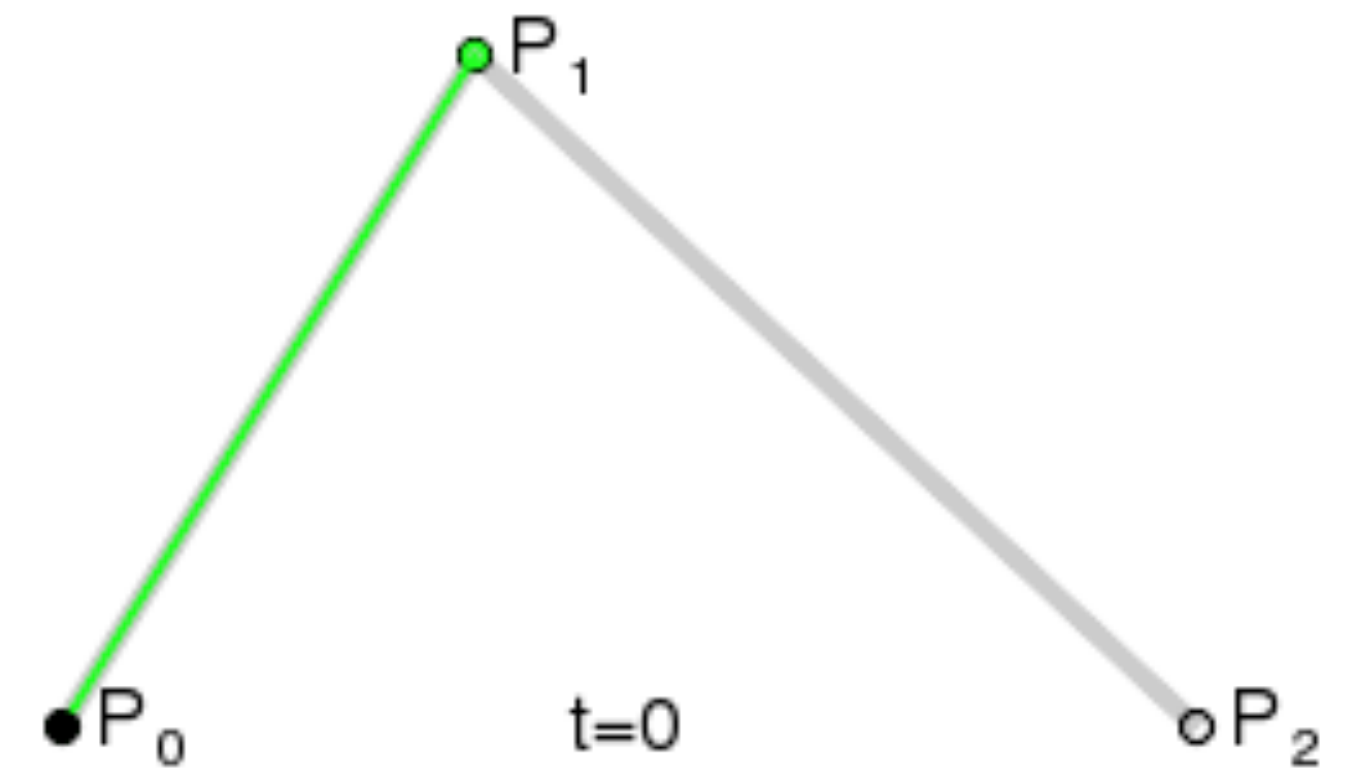
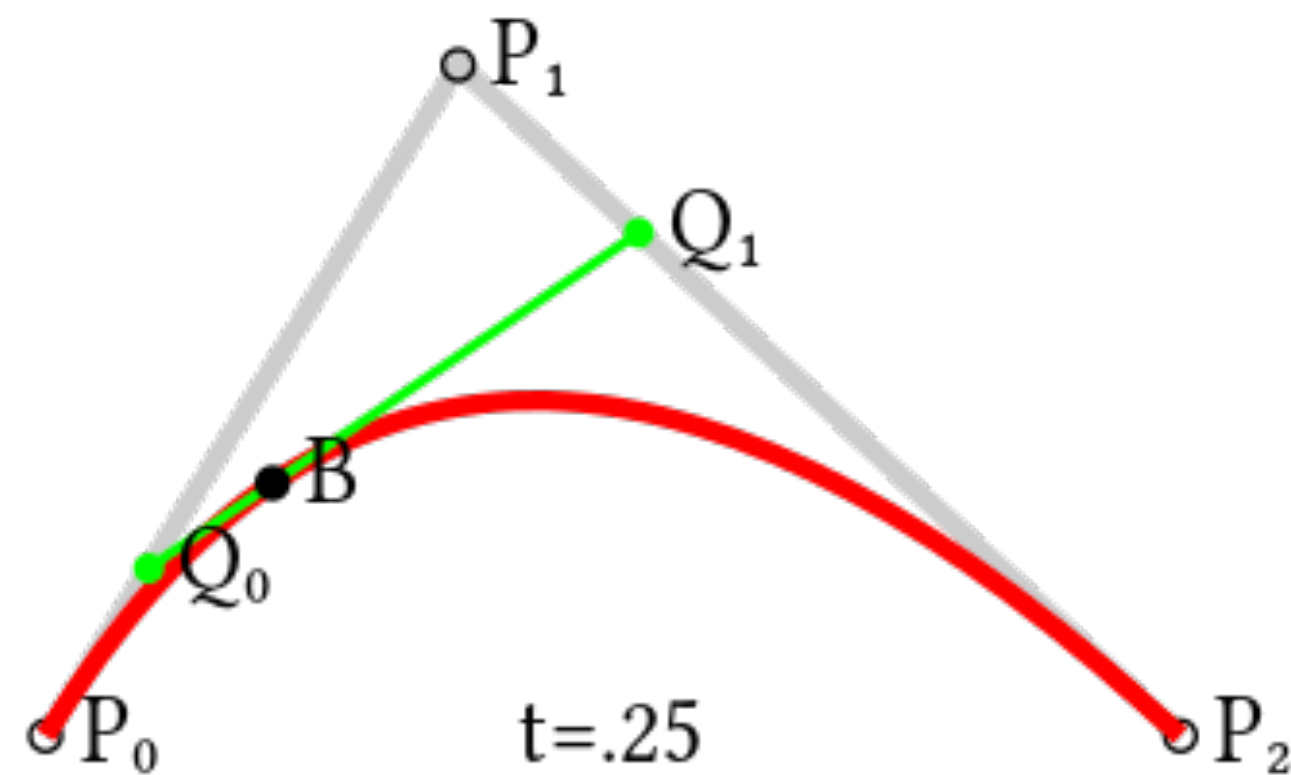
Curvas de Bezier

Lineales

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$$



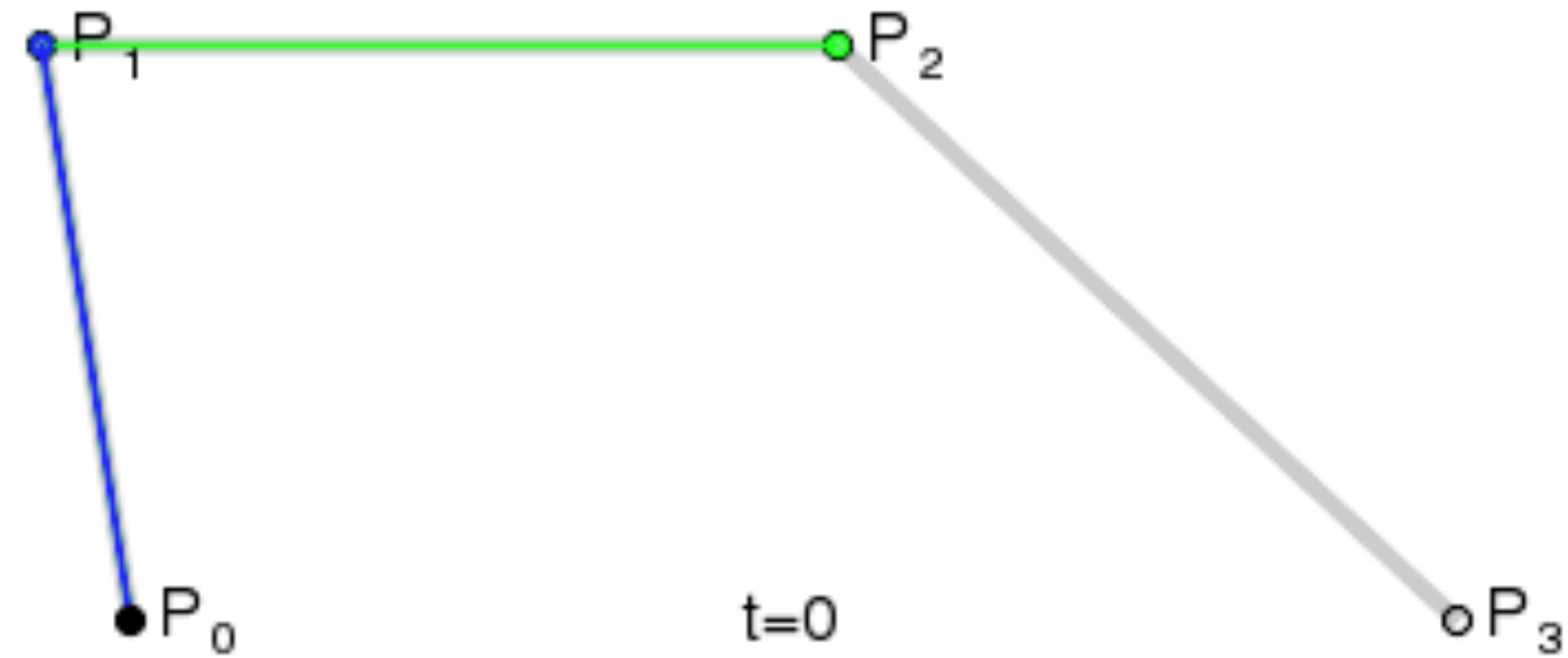
Curvas de Bezier



Cuadrática

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1 - t)t \mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2$$

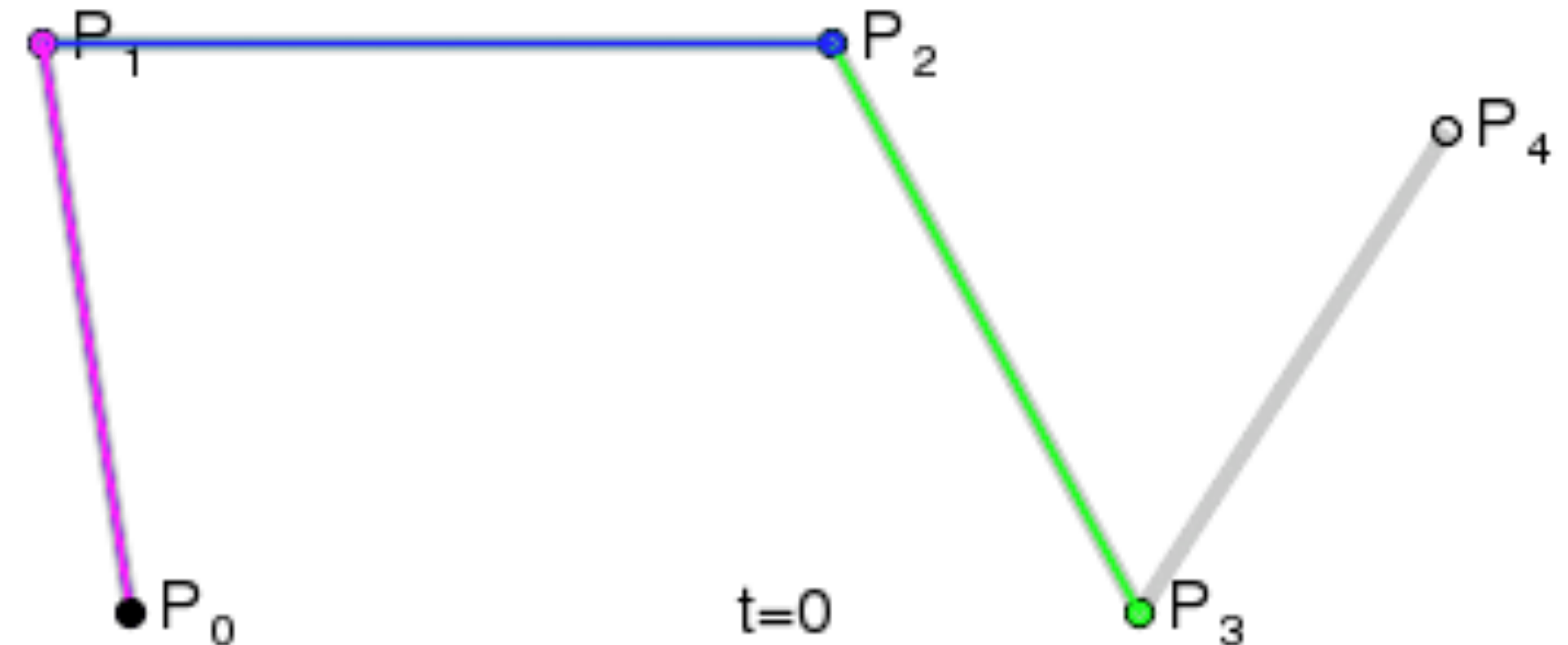
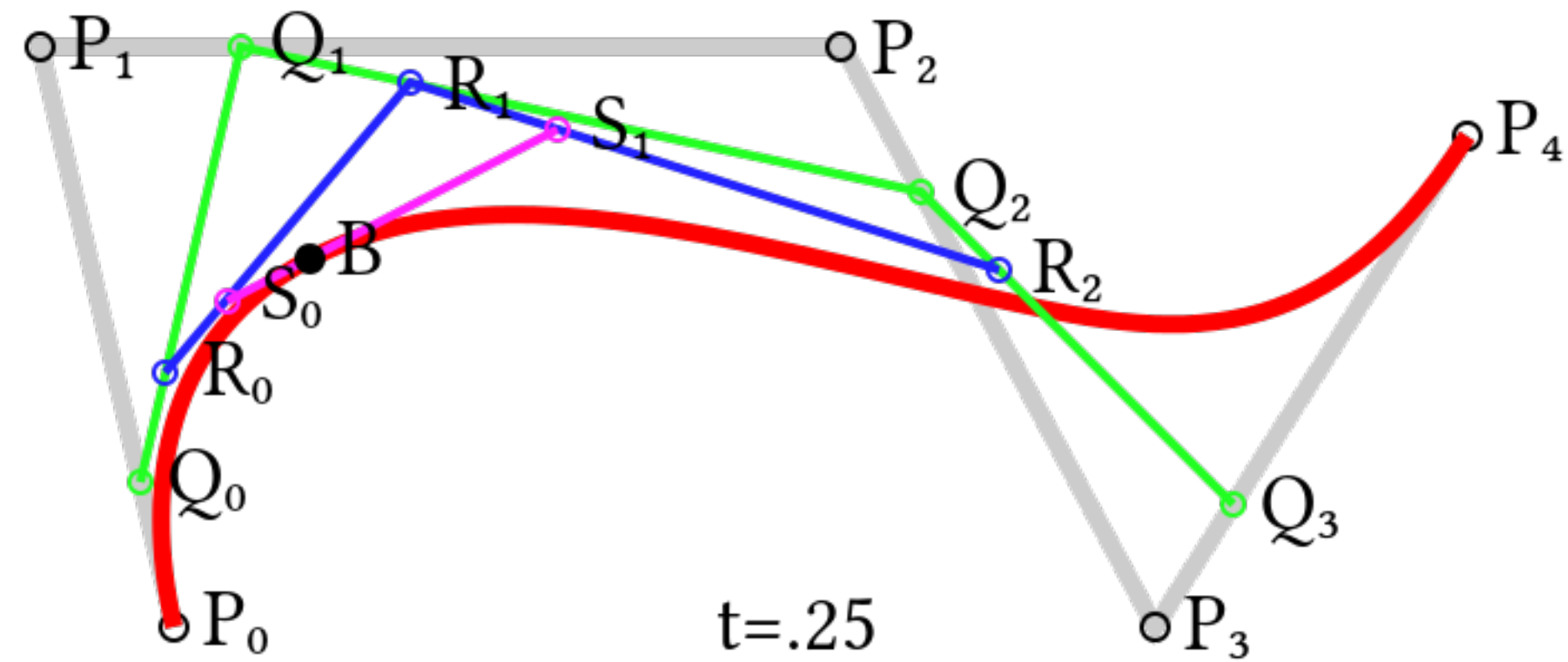
Curvas de Bezier



Cúbica

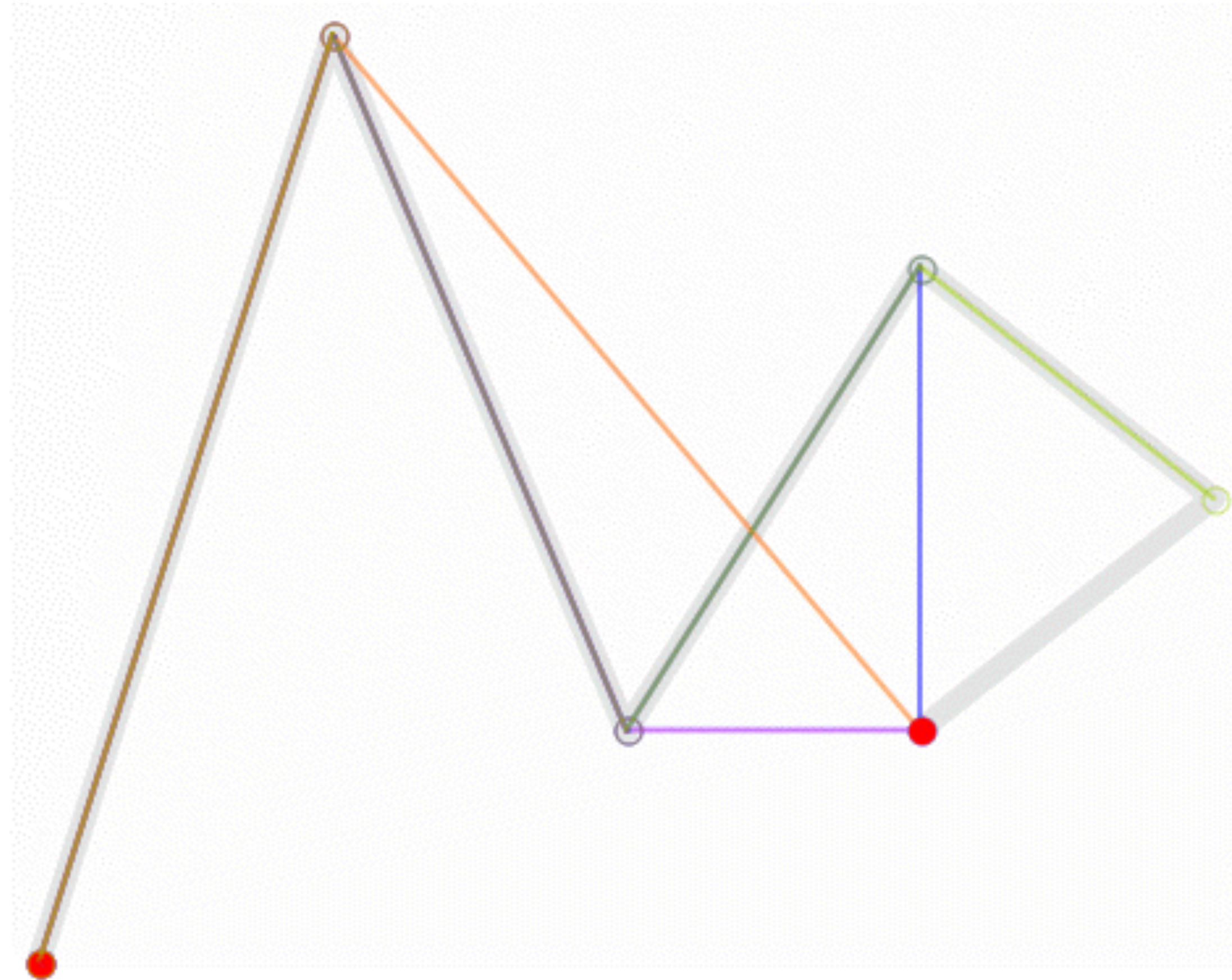
$$\mathbf{P}(t) = (1 - t)^3 \mathbf{P}_0 + 3t(1 - t)^2 \mathbf{P}_1 + 3t^2(1 - t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

Curvas de Bezier



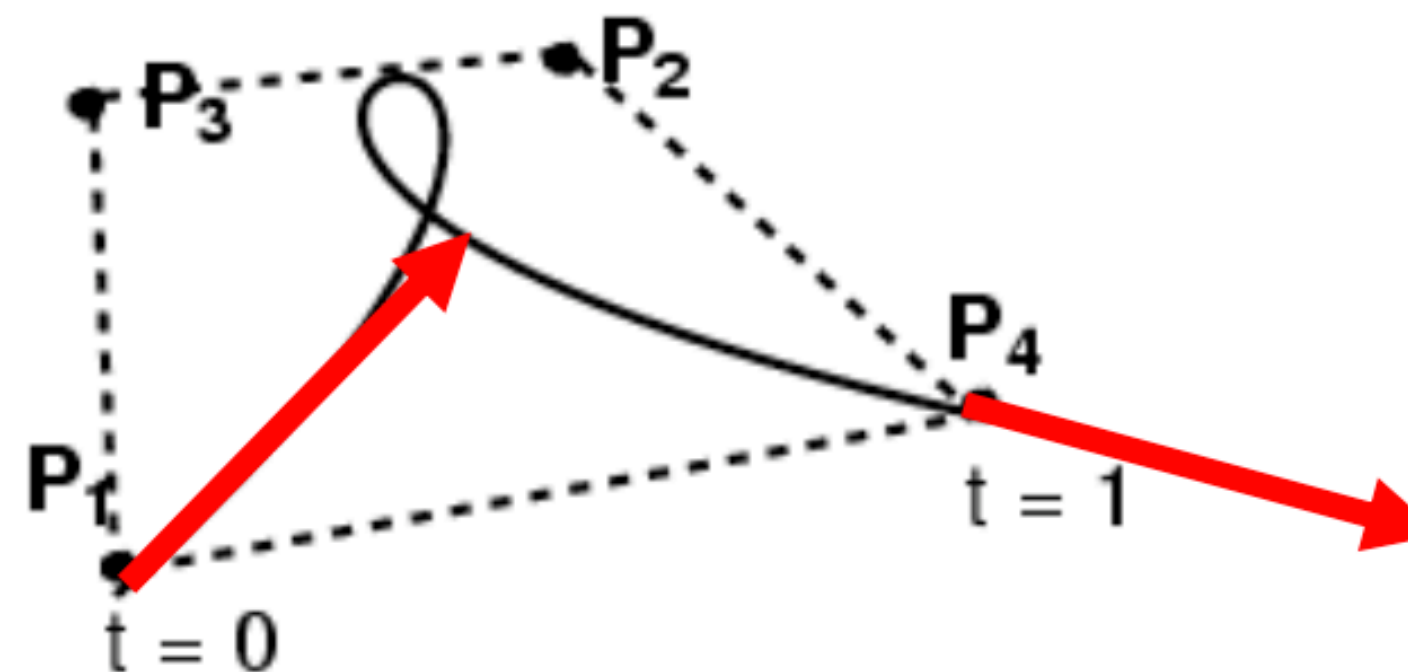
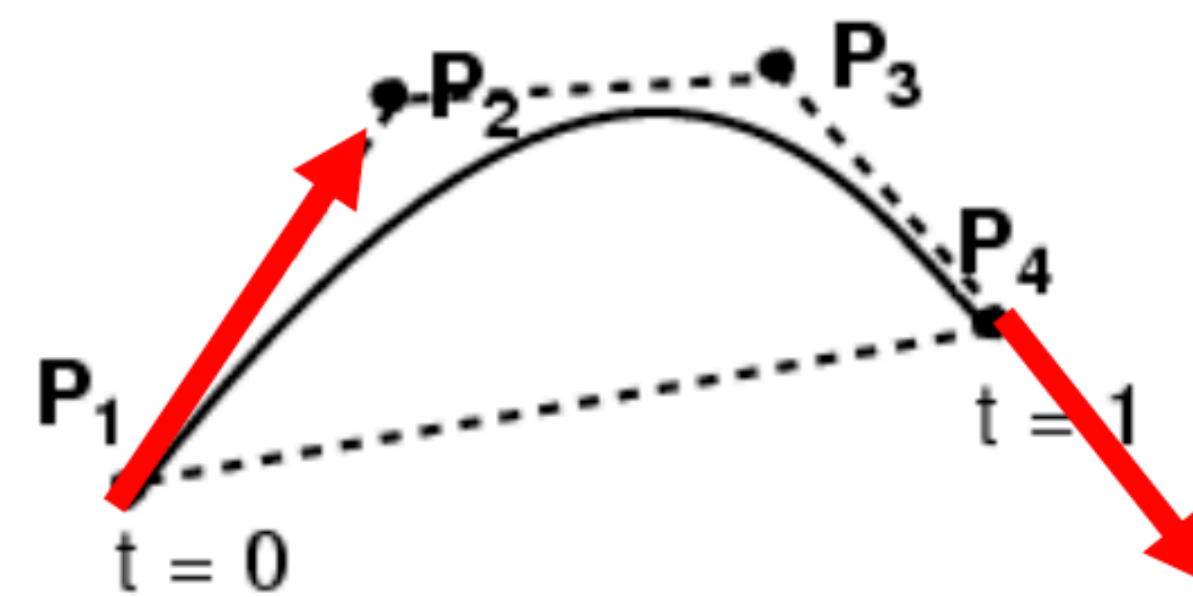
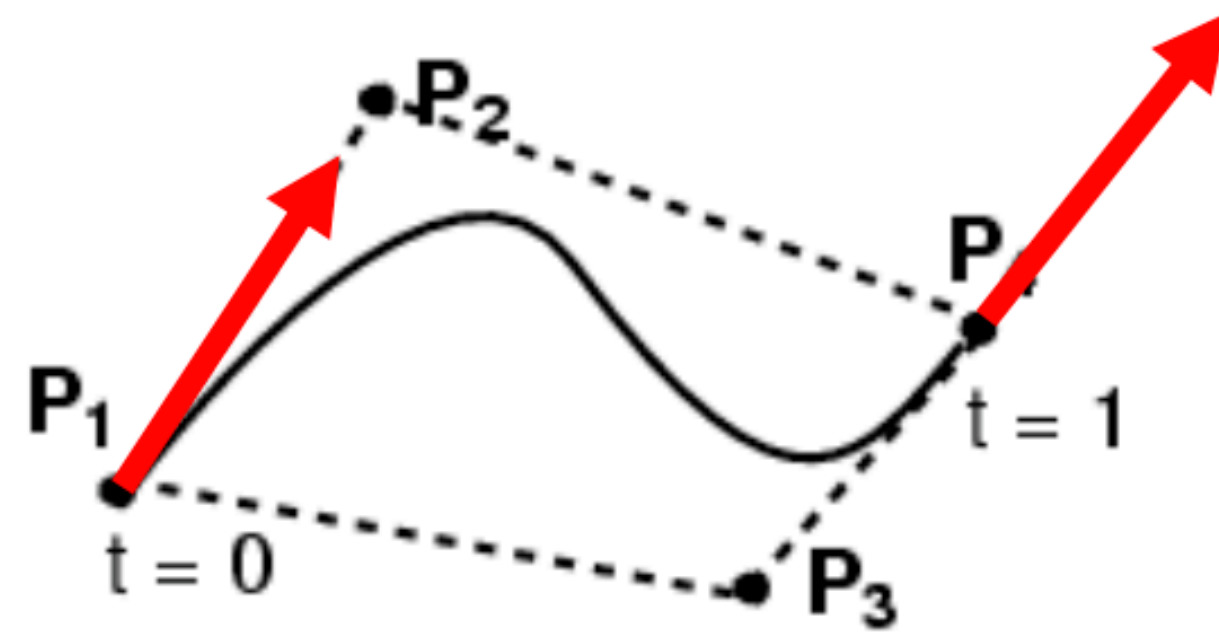
Bezier de grado 4

Curvas de Bezier



Curvas de Bezier

- 4 control points
- Curve passes through first & last control point
- Curve is tangent at **P1** to (**P1-P2**) and at **P4** to (**P4-P3**)



A Bézier curve is bounded by the **convex hull** of its control points.

Curvas de Bezier

•	$P(t) = (1-t)^3$	P1
	$+ 3t(1-t)^2$	P2
	$+ 3t^2(1-t)$	P3
	$+ t^3$	P4

¿Por qué funciona?

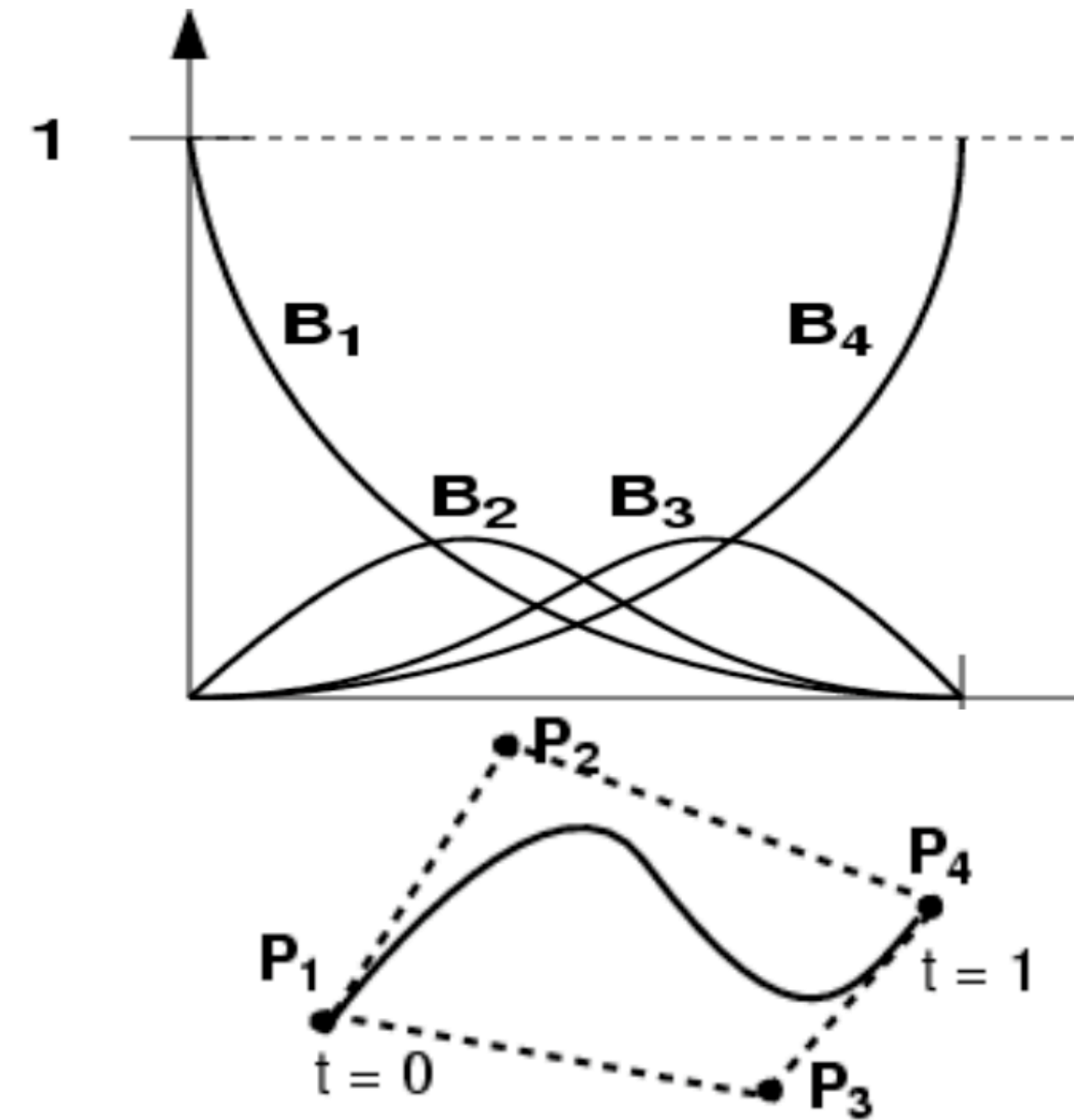


Combinación lineal de
polinomios base

Curvas de Bezier

- $P(t)$ is a weighted combination of the 4 control points with weights:
 - $B_1(t) = (1-t)^3$
 - $B_2(t) = 3t(1-t)^2$
 - $B_3(t) = 3t^2(1-t)$
 - $B_4(t) = t^3$
- First, P_1 is the most influential point, then P_2 , P_3 , and P_4

$$\begin{array}{rcl} P(t) = & (1-t)^3 & P_1 \\ + & 3t(1-t)^2 & P_2 \\ + & 3t^2(1-t) & P_3 \\ + & t^3 & P_4 \end{array}$$



Curvas de Bezier


$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i J_{n,i}(t)$$

Polinomio de Bernstein



$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Grado



$$P(t) = P_0 J_{3,0}(t) + P_1 J_{3,1}(t) + P_2 J_{3,2}(t) + P_3 J_{3,3}(t)$$
$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Demo

<http://blogs.sitepointstatic.com/examples/tech/svg-curves/quadratic-curve.html>

<http://blogs.sitepointstatic.com/examples/tech/canvas-curves/bezier-curve.html>

MATLAB demo

Curvas de Bezier

- ¿Podemos juntamos 2 o más curvas?
- ¿Podemos escalar, rotar o trasladar curvas?