

David Campos Anchieta

Restauração de Imagens de Placas de Veículos Usando Super-resolução

Belém - PA

2018

David Campos Anchieta

Restauração de Imagens de Placas de Veículos Usando Super-resolução

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia da Computação e Telecomunicações da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção de grau de Bacharel em Engenharia da Computação.

Universidade Federal do Pará

Instituto de Tecnologia

Faculdade de Engenharia da computação e Telecomunicações

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo de Freitas Zampolo

Belém - PA

2018

David Campos Anchieta

Restauração de Imagens de Placas de Veículos Usando Super-resolução

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Engenharia da Computação e Telecomunicações da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção de grau de Bacharel em Engenharia da Computação.

Trabalho aprovado. Belém - PA, 09 de fevereiro de 2018:

Prof. Dr. Ronaldo de Freitas Zampolo
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Belém - PA
2018

*Além disso, filho meu, sê avisado.
De fazer muitos livros não há fim;
e o muito estudar é enfado da carne.
Eclesiastes 12:12*

Resumo

Abstract

This is the english abstract.

Keywords: latex. abntex. text editoration.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração demonstrado as transformações sofrida por uma imagem durante o processo de aquisição.	13
Figura 2 – Visualização das transformações de subamostragem, deslocamento linear e rotação.	14
Figura 3 – Exemplo de gráfico de uma função de espalhamento de ponto com $\gamma = 2$ centrada em $[0, 0]$	15
Figura 4 – Exemplo de convolução de uma imagem com uma função de espalhamento de ponto. Neste caso, a imagem da direita é resultado da convolução da imagem da esquerda com uma função de espalhamento de ponto gaussiana com $\gamma = 10$	15
Figura 5 – Imagens de alta resolução utilizadas nos testes.	24
Figura 6 – Conjunto das imagens geradas a partir do Exemplar 1: " <i>Virginia</i> ". A diferença sutil entre as imagens é causada pelas transformações de deslocamento e rotação. As dimensões de cada imagem são de 38×26	25
Figura 7 – Conjunto das imagens geradas a partir da do Exemplar 2: " <i>Ohio</i> ". As dimensões de cada imagem são de 38×23	25
Figura 8 – Progressão dos valores da avaliação da função de verossimilhança e do erro dos parâmetros estimados a cada iteração do algoritmo de otimização.	28
Figura 9 – Comparação dos resultados obtidos ao final da execução do algoritmo de otimização com os parâmetros verdadeiros.	29
Figura 10 – Resultados obtidos com a otimização do Exemplar 1: " <i>Virginia</i> "	31
Figura 11 – Resultados obtidos com a otimização do Exemplar 2: " <i>Ohio</i> "	32
Figura 12 – Comparação do resultado obtido através do método de super-resolução Bayesiana com a simples interpolação da imagem.	32

Lista de abreviaturas e siglas

SR	Super-resolução
HR	<i>High resolution</i>
LR	<i>Low resolution</i>
PDF	<i>Probability density function</i>
IBP	<i>Iterative Back Projections</i>

Lista de símbolos

\mathbf{x}	Vetor com os dados da imagem de alta resolução.
\mathbf{y}_k	Vetor da imagem de alta resolução de número k.
K	Número de imagens de baixa resolução.
N	Número de pontos na imagem de alta resolução.
M	Número de pontos na imagem de baixa resolução.
$\mathbf{W}^{(k)}$	Matriz de degradação da imagem de número k.
γ	Largura da função de espalhamento de ponto.
θ_k	Ângulo de rotação da imagem de número k.
\mathbf{s}_k	Vetor com deslocamento bidimensional da imagem de baixa resolução de número k.
\mathbf{Z}_x	Matriz de covariância da distribuição a priori de \mathbf{x} .
Σ	Matriz de covariância da distribuição a posteriori de \mathbf{x} condicionada aos parâmetros de degradação e conjunto de todos os $\mathbf{y}^{(k)}$.
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor média da distribuição a posteriori de \mathbf{x} condicionada aos parâmetros de degradação e conjunto de todos os $\mathbf{y}^{(k)}$.
β	Inverso da variância do ruído.
$ \cdot $	Determinante de matriz.
$\ \cdot\ $	Norma de um vetor.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
	Introdução	10
2	RESTAURAÇÃO DE IMAGENS USANDO SUPER-RESOLUÇÃO	12
2.1	Introdução	12
2.2	Modelo de Observação	12
2.3	Apreciação dos Métodos de Super-resolução	15
2.3.1	Métodos no domínio da frequência	16
2.3.2	<i>Iterative Back Projections</i>	17
2.3.3	<i>Projection Onto Convex Sets</i>	17
2.3.4	Métodos de Aprendizado	18
2.3.5	Máxima Verossimilhança	18
2.3.6	Máximo a posteriori	19
3	SUPER RESOLUÇÃO BAYESIANA	20
3.1	Introdução	20
3.2	Máximo a posteriori	20
3.3	Equacionamento do Método de Super-resolução Bayesiana	20
4	RESULTADOS	24
4.1	Introdução	24
4.2	Geração do conjunto de imagens de teste	24
4.3	Estimação dos parâmetros de degradação	26
4.4	Estimação da imagem de alta resolução	30
5	CONCLUSÃO	33
	REFERÊNCIAS	34

1 Introdução

A disponibilidade de imagens de alta resolução é uma vantagem para a execução de qualquer trabalho que envolva a captação e interpretação de informações através de imagens digitais. Como exemplo disso podemos citar as imagens médicas, nas quais quanto melhor a qualidade da imagem, mais fácil é diferenciar as estruturas retratadas com o objetivo de diagnosticar doenças. Também há o caso dos sistemas de vigilância, nos quais quanto melhor a resolução espacial da imagem, mais viável se torna a identificação de veículos e criminosos.

Hoje em dia, com as frequentes ameaças à segurança das pessoas em diversos lugares do mundo, os cidadãos sentem a necessidade de investir na própria segurança privada para proteger a si mesmos e seus patrimônios. Por causa dessa necessidade, houve uma popularização de sistemas de vigilância monitoramento. As câmeras de segurança já são tão onipresentes em grandes cidades que é praticamente impossível que um cidadão comum saia à rua e não tenha a sua imagem gravada por pelo menos uma delas.

No entanto, apesar da presença geral dos sistemas de vigilância, a maioria dos equipamentos utilizados é de baixa qualidade, o que se reflete nas imagens captadas por eles. A consequência disso é que muitas vezes as câmeras de monitoramento registram cenas de crimes, mas as imagens deterioradas nem sempre ajudam a trazer à luz informações importantes, como o rosto de um criminoso ou a placa de um carro, por exemplo.

Não obstante, mesmo com necessidade evidente de se melhorar a qualidade das imagens geradas por sistemas de vigilância, também há o dilema constante entre aumentar a qualidade das imagens registradas e o custo de implementar manter o sistema de monitoramento funcionando. Quanto melhor a qualidade da imagem, maior é o custo do equipamento e mais capacidade de armazenamento será necessária para guardar uma quantidade útil de todas as imagens gravadas.

Face ao dilema das imagens geradas por sistemas de vigilância, a melhor solução a curto prazo seria aprimorar as imagens que estão sendo geradas pelas câmeras de vigilância que já temos hoje. Esse aprimoramento seria feito através de restauração de imagens digitais.

A demanda pelo desenvolvimento de técnicas de restauração de imagens ganhou força no fim da década de 1950, quando a sua principal aplicação era na área de imagens astronômicas. Naquele contexto, era necessário restaurar as primeiras imagens recebidas de sondas e satélites artificiais que sofriam degradações próprias do ambiente onde esses objetos trabalhavam.

Após tantos anos, a restauração de imagens digitais continua tendo sua importância

na astronomia, mas também é uma ferramenta para outras áreas como medicina, mídia e ciências forenses [1].

Este trabalho descreve a implementação e teste de um método de restauração de imagens de placas de veículos usando super-resolução bayesiana. O método utilizado foi apresentado por Michael Tipping em [14]. Em resumo, o algoritmo apresentado define um modelo de observação no qual as degradações sofridas pela imagem durante o processo de aquisição são parametrizadas. Então são usadas inferências bayesianas para estimar os parâmetros de degradação a partir das imagens de baixa resolução, para então estimar a imagem de alta resolução a partir destes parâmetros.

Esta solução foi escolhida devido à adequação do algoritmo à aplicação desejada, que é a restauração de uma imagem de placa de veículo a partir de várias imagens degradadas, como os quadros de um vídeo de câmera de vigilância. Também vale destacar a relativa simplicidade de implementação do método escolhido, o qual também possibilita ajustes afim de reduzir seu custo computacional.

2 Restauração de Imagens Usando Super-resolução

2.1 Introdução

Entende-se por Super-resolução o processo de obtenção de uma ou mais imagens de alta resolução a partir de uma ou mais imagens de baixa resolução. Técnicas de super-resolução são pesquisadas desde os anos 1970 e têm despertado um grande interesse de estudo nas últimas décadas. As aplicações de técnicas de SR são diversas e incluem aprimoramentos de imagens médicas, de imagens de rosto, de texto e impressões digitais [6].

Vale esclarecer que, neste trabalho, sempre que a palavra *resolução* é usada, ela se refere à resolução espacial de uma imagem, a qual mede a densidade de pontos por unidade de área em uma imagem [15].

Este capítulo fará uma breve síntese do histórico das técnicas de super-resolução e seus principais exemplares. A seção 2.2 descreve o modelo de observação usado pelos principais trabalhos no tema. A seção 2.3 cita e descreve resumidamente as principais técnicas e grupos de métodos de restauração de imagens via super-resolução.

2.2 Modelo de Observação

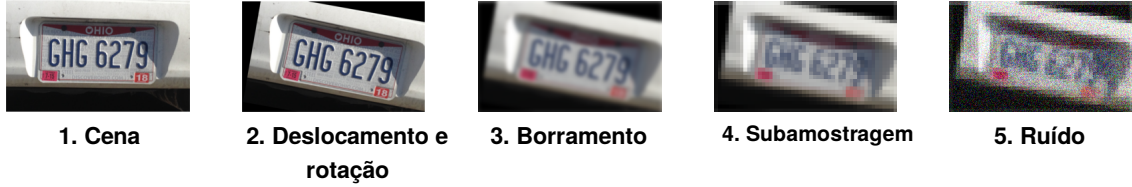
Definir um modelo de observação que relacione a imagem de alta resolução às imagens de baixa resolução observadas é fundamental para o desenvolvimento de qualquer técnica de super-resolução. Um modelo de observação permite parametrizar e quantificar as transformações às quais a imagem é submetida durante o processo de aquisição e é através dele que os principais métodos de super-resolução inferem as características da imagem de alta resolução.

O modelo de observação deste trabalho simula cinco tipos de alteração aplicadas por sistemas de aquisição de imagens, a saber: rotação, deslocamento, espalhamento de ponto, subamostragem e ruído. Este modelo de observação é descrito tanto no artigo de Tipping [14] quanto em outros trabalhos relacionados [9, 2].

As alterações de deslocamento linear e rotação tentam simular um possível movimento aleatório da câmera em relação ao objeto ou vice-versa. A transformação de espalhamento de ponto simula um efeito de desfoque causado por um desajuste na definição de foco da câmera. A subamostragem representa a perda de resolução espacial

aplicada à imagem captada por um sensor CMOS ou CCD de densidade menor do que a necessária para registrar os dados da imagem sem que ocorra *aliasing*. A figura 1 ilustra o efeito destas cinco transformações em uma imagem.

Figura 1 – Ilustração demonstrado as transformações sofrida por uma imagem durante o processo de aquisição.



Fonte: O autor.

Pela conveniência do modelo de observação, a imagem de alta resolução de dimensões $m \times n$ é representada por um vetor coluna $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N]^T$ onde $N = m \times n$. Ou seja, os valores dos pixels da imagem são rearranjados em um vetor de comprimento N .

Sabendo disso, a relação entre uma imagem de alta resolução \mathbf{x} e uma imagem degradada $\mathbf{y}^{(k)}$ é resumida em (2.1). Onde $k = 1, 2, \dots, K$; sendo K o número total de quadros obtidos a partir da cena de alta resolução \mathbf{x} .

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k)}\mathbf{x} + \mathbf{n}^{(k)} \quad (2.1)$$

O ruído, representado por \mathbf{n} é um vetor de variáveis aleatórias Gaussianas independentes de média zero e variância $1/\beta$.

A matriz de sistema \mathbf{W} aplica as transformações de rotação, deslocamento, subamostragem e espalhamento de ponto ao ser multiplicada pela imagem de alta resolução \mathbf{x} . Pelas propriedades da multiplicação de matrizes, é natural que as dimensões da matriz de sistema sejam $M \times N$; onde M é o número de pixels da imagem resultante. Também se espera que $N \gg M$.

A matriz \mathbf{W} depende de três parâmetros de transformação: a largura da função de espalhamento de ponto γ , um ângulo de rotação θ e um vetor de deslocamento linear \mathbf{s} . Os elementos da matriz são dados por (2.2) com a função de espalhamento de ponto descrita em (2.3) enquanto os parágrafos seguintes demonstram como as demais transformações são incorporadas à matriz de sistema.

$$W_{ji}^{(k)} = \widetilde{W}_{ji}^{(k)} / \sum_{i'} \widetilde{W}_{ji}^{(k)} \quad (2.2)$$

$$\widetilde{W}_{ji}^{(k)} = \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_j^{(k)}\|^2}{\gamma^2} \right\} \quad (2.3)$$

Os vetores $\mathbf{u}_j^{(k)}$ representam o centro da função de espalhamento de ponto e é descrito em (2.4). Caso não houvesse espalhamento de ponto, as coordenadas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_M\}$ seriam os pontos de amostragem da imagem de baixa resolução na imagem de alta resolução. A Figura 2 mostra como se dá o processo de subamostragem e outras transformações bidimensionais.

$$\mathbf{u}_j^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)}(\mathbf{v}_j - \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{s}_k \quad (2.4)$$

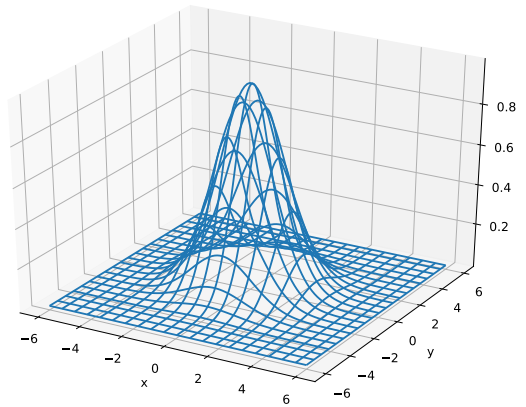
$$\mathbf{R}^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Figura 2 – Visualização das transformações de subamostragem, deslocamento linear e rotação.



Fonte: O autor.

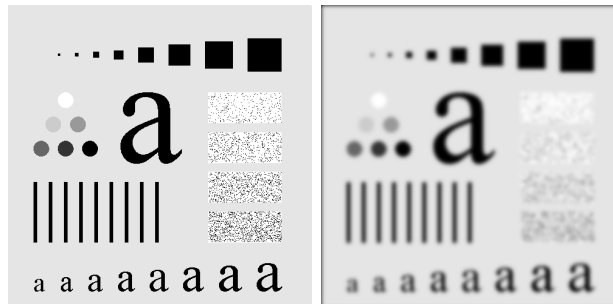
Figura 3 – Exemplo de gráfico de uma função de espalhamento de ponto com $\gamma = 2$ centrada em $[0, 0]$.



Fonte: O autor.

A transformação de espalhamento de ponto ou borramento consiste em realizar uma convolução da imagem com uma função gaussiana bidimensional como a mostrada na figura 3. Visualmente, o efeito dessa convolução é equivalente ao de um desfoque de lente, como demonstrado na figura 4

Figura 4 – Exemplo de convolução de uma imagem com uma função de espalhamento de ponto. Neste caso, a imagem da direita é resultado da convolução da imagem da esquerda com uma função de espalhamento de ponto gaussiana com $\gamma = 10$.



Fonte: O autor.

2.3 Apreciação dos Métodos de Super-resolução

Esta seção descreve resumidamente alguns dos métodos de super-resolução mais importantes

A maioria dos algoritmos de super-resolução desenvolvidos faz o processamento de imagem no domínio espacial. Os tipos de abordagens usadas são bastante diversos, sendo que a mais frequente é a probabilística, na qual o método usado neste trabalho está incluído [6].

2.3.1 Métodos no domínio da frequência.

Os primeiros métodos de super-resolução desenvolvidos faziam o processamento das imagens no domínio da frequência. Sendo que os primeiros trabalhos com essa abordagem foram os de Gerchberg [4] e Santis e Gori [3].

O primeiro método de super-resolução no domínio da frequência a ter múltiplas imagens como entrada foi desenvolvido por Tsai e Huang em 1994 [6]. Este algoritmo foi desenvolvido para processar as imagens geradas pelo satélite Landsat 4. Este aparelho gerava várias imagens semelhantes, porém deslocadas, da mesma área na terra.

Podemos considerar que cada imagem g_k gerada pelo satélite seja uma versão deslocada de uma cena contínua f , podemos considerar que

$$g_k(m, n) = f(m + \Delta_{m_k}, n + \Delta_{n_k}). \quad (2.6)$$

Pela propriedade de deslocamento da transformada de Fourier, a transformada de Fourier contínua das imagens geradas pelo satélite, em relação à pode ser dada por

$$F_{g_k}(m, n) = \exp[i2\pi(\Delta_{m_k}m + \Delta_{n_k}n)]F_f(m, n). \quad (2.7)$$

Tendo isso, a transformada discreta de Fourier de g_k é dada por

$$G_k(m, n) = \frac{1}{T_m T_n} \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} F_{g_k} \left(\frac{m}{MT_m} + p_1 \frac{1}{T_m}, \frac{n}{NT_n} + p_2 \frac{1}{T_n} \right). \quad (2.8)$$

Segundo Nasrollahi e Moeslund [6] o problema de super-resolução se resolve encontrando a transformada contínua de Fourier (\mathbf{F}_f) que soluciona (2.9). Isso pode ser resolvido usando o Método dos Mínimos Quadrados.

$$\mathbf{G} = \Phi \mathbf{F}_f \quad (2.9)$$

A abordagem dos algoritmos de super-resolução deste tipo tinha a vantagem da simplicidade em sua teoria. No entanto, as técnicas de super-resolução no domínio da frequência tinham limitações com respeito ao tipo de degradação sofrida pela imagem além da dificuldade de aplicar o conhecimento a priori da imagem de alta resolução no domínio espacial para regularização. Estes são os principais motivos pelos quais a maioria dos algoritmos de super-resolução desenvolvidos até hoje faz o processamento das imagens no domínio espacial [8].

2.3.2 Iterative Back Projections

O método *Iterative Back Projection* (IBP) foi proposto pela primeira vez por Irani e Peleg [5]. O método IBP se caracteriza por ser um método iterativo de super-resolução para restaurar uma imagem de alta resolução a partir de várias imagens de baixa resolução. Por ser iterativo, o método executa uma rotina por diversas iterações com o objetivo de se aproximar mais da solução correta a cada execução.

O método parte de um modelo de observação como o apresentado na seção 2.2 no qual uma imagem de baixa resolução $\mathbf{y}^{(k)}$ é dada por

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{x}. \quad (2.10)$$

Onde \mathbf{x} é a imagem de alta resolução a ser encontrada e $\mathbf{W}^{(k)}$ é a matriz que aplica as transformações do modelo de observação.

Se for feito um palpite tanto para a matriz de sistema quanto para a imagem a ser estimada, podemos dizer que o erro do palpite é dado por 2.11. Feito isso, a melhor estimativa para a imagem de alta resolução \mathbf{x} seria a que minimiza o erro na equação 2.12. Essa estimativa é alcançada através de métodos iterativos como o de mínimos quadrados.

$$\epsilon_j^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}_j^{(k)} \mathbf{x}_j \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^N \sqrt{\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}_j^{(k)} \mathbf{x}_j\|_2^2} \quad (2.12)$$

O método *Iterative Back Projections* tem a vantagem de ser intuitivo e de fácil compreensão. No entanto, ele tem problemas por não ter uma solução única, além de não permitir que se use com facilidade o conhecimento *a priori* acerca da imagem de alta resolução [6, 8].

2.3.3 Projection Onto Convex Sets

Este método de super-resolução apareceu primeiro no trabalho de Stark e Oskoui [12]. O método POCS, assim como o IBP, também é um método iterativo, mas que se diferencia por incorporar um conhecimento *a priori* sobre a imagem. Assume-se que esse conhecimento *a priori* é um conjunto convexo fechado, definido como:

$$S_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} : \delta_i < |\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}_j^{(k)} \mathbf{x}_j| < \delta_s\} \quad (2.13)$$

onde δ_i e δ_s são os limites superiores e inferiores da incerteza do modelo, respectivamente [6].

A solução do problema $\hat{\mathbf{x}}$ está na intersecção dos conjuntos convexos. A busca pela imagem de alta resolução é feita através do método iterativo abaixo[11].

$$\hat{\mathbf{x}}^{n+1} = P_m P_{m-1} \dots P_1 P_0 \hat{\mathbf{x}}^n \quad (2.14)$$

onde P são operadores de projeção para cada conjunto convexo.

2.3.4 Métodos de Aprendizado

Os métodos de super-resolução baseados em aprendizado usam redes neurais para restaurar imagens estáticas. Para que isso seja possível, deve haver uma etapa de aprendizado onde exemplos de imagens de uma classe específica (impressões digitais, rostos, texto) são usados junto com seus equivalentes de baixa resolução para que o algoritmo reconheça o relacionamento entre elas. Esse conhecimento forma a componente a priori na reconstrução das imagens.

2.3.5 Máxima Verossimilhança

Consideremos o modelo de observação em (2.1), onde o vetor \mathbf{n} representa o ruído adicionado às imagens de baixa resolução. Sabendo que cada elemento \mathbf{n}_i é aleatório seguindo uma distribuição gaussiana de média 0 e variância $1/\beta$, podemos estabelecer que a função densidade de probabilidade de \mathbf{n} é representada em (2.15).

$$p(\mathbf{n}^{(k)}) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{M/2} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{n}^{(k)}\|^2 \right\} \quad (2.15)$$

Ainda baseado em (2.1), a relação entre uma estimativa da imagem de alta resolução $\hat{\mathbf{x}}$ e a imagem de baixa resolução observada é:

$$\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n}^{(k)} \quad (2.16)$$

Então é possível dizer que a probabilidade de $\mathbf{y}^{(k)}$ ocorrer baseado em uma estimativa da imagem de alta resolução $\hat{\mathbf{x}}$ é dada pela distribuição em (2.17).

$$p(\mathbf{y}^{(k)} | \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{W}^{(k)}) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{M/2} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right\} \quad (2.17)$$

O logaritmo da função de verossimilhança de $\mathbf{y}^{(k)}$ é expresso em

$$L\{\mathbf{y}^{(k)}\} = -\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \hat{\mathbf{x}}\|^2. \quad (2.18)$$

Teoricamente, a melhor estimativa ($\hat{\mathbf{x}}$) da imagem de alta resolução é a que maximiza a função de verossimilhança acima, como é demonstrado em (2.19).

$$\mathbf{y}_{ML}^{(k)} = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}}} \left[-\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \right] \quad (2.19)$$

Para obter o ponto de máximo da função, podemos calcular seu diferencial, igualá-lo a zero, e isolar o $\hat{\mathbf{x}}$ na equação como é feito abaixo.

$$\frac{d}{d\hat{\mathbf{x}}} L\{\mathbf{y}^{(k)}\} = -2(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{W}^{(k)T} \quad (2.20)$$

$$(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{W}^{(k)T} = 0 \quad (2.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{y}^{(k)} \quad (2.22)$$

O método de máxima verossimilhança é sensível a distúrbios causados por ruídos ou imprecisões na estimação dos parâmetros de aquisição. Além disso, se o número de imagens não for suficiente, pode haver mais de uma solução possível. Esse problema deve ser contornado adicionando conhecimento *a priori* da imagem. Esse conhecimento ajuda a restringir o número de respostas possíveis [6].

Uma das formas de adicionar conhecimento *a priori* ao método é transformá-lo em uma abordagem de máximo *a posteriori*. O método de Super-resolução Bayesiana estudado neste trabalho é um exemplo de método probabilístico que usa inferência Bayesiana para incorporar conhecimento *a priori* acerca da imagem ao modelo.

2.3.6 Máximo a posteriori

$$p(\mathbf{x}|\{\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{W}^{(k)}\}) = \frac{p(\{\mathbf{y}^{(k)}\}|\mathbf{x}, \{\mathbf{W}^{(k)}\})p(\mathbf{x})}{p(\{\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{W}^{(k)}\})} \quad (2.23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \log \left[p(\mathbf{x}) \prod_k p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}, \mathbf{W}^{(k)}) \right] \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \left[\log p(\mathbf{x}) + \sum_k \log p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}, \mathbf{W}^{(k)}) \right] \quad (2.25)$$

3 Super Resolução Bayesiana

3.1 Introdução

O método de super resolução desenvolvido no trabalho de Tipping e Bishop [14] é um método probabilístico para a obtenção de uma imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução de uma mesma cena. Esse conjunto de imagens de baixa resolução poderiam ser retirados de quadros de um vídeo produzido por uma câmera de segurança que fica parada em relação ao objeto observado, por exemplo.

Pode-se dizer que a abordagem usada neste método é uma expansão do método de máxima verossimilhança descrito na seção 2.3.5. O método de super-resolução Bayesiana adiciona uma densidade de probabilidade como conhecimento *a priori* da imagem para restringir a quantidade de soluções possíveis do problema, contornando assim uma das inconveniências da abordagem de máxima verossimilhança. A adição de uma densidade de probabilidade *a priori*, converte a abordagem de máxima verossimilhança em uma abordagem de máximo *a posteriori* (MAP).

se vale do método de inferência Bayesiana para obter uma imagem de alta resolução a partir de várias imagens de baixa resolução. Através de um método de inferência Bayesiana, é possível obter uma estimativa de valores desconhecidos (como a imagem de alta resolução) usando um conhecimento *a priori* que se tem desses dados e informações que já estão disponíveis (no caso, as imagens de baixa resolução) [13].

Sabendo disso, há a necessidade de formular uma distribuição *a priori* que represente as características estatísticas da imagem que pretendemos estimar a partir dos dados. A distribuição de probabilidade *a priori* escolhida para a imagem é uma gaussiana como descrita a seguir:

3.2 Máximo a posteriori

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{W}^{(k)}) = \frac{p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}, \mathbf{W}^{(k)})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{W}^{(k)})} \quad (3.1)$$

3.3 Equacionamento do Método de Super-resolução Bayesiana

A distribuição de probabilidade *a priori* $p(\mathbf{x})$ é uma Gaussiana de média $\mathbf{0}$ e matriz de covariância \mathbf{Z}_x . A função que gera a matriz de covariância da distribuição *a priori* da imagem é descrita em (3.3).

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Z}_x) \quad (3.2)$$

$$Z_x(i, j) = A \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2}{r^2} \right\} \quad (3.3)$$

Onde A é uma constante escalar que indica a *força* da distribuição e r determina o quanto cada ponto da imagem de alta resolução depende dos pontos vizinhos. Expandindo a função densidade de probabilidade $p(\mathbf{x})$ temos:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{Z}_x|}} \exp -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_x^{-1} \mathbf{x} \quad (3.4)$$

Este tipo de distribuição não é o ideal, visto que se definirmos $r = 1$, estaríamos dizendo que a maioria dos valores dos pontos da imagem de alta resolução estão contidos no intervalo $[-1, 1]$, o que não condiz com a realidade do que se espera de uma imagem digital. No entanto, o uso desta distribuição a priori será mantido no desenvolvimento deste trabalho pela conveniência proporcionada pela função de probabilidade Gaussiana, que facilita algumas manipulações – como aplicação de logaritmos naturais e as marginalizações – utilizadas a seguir.

Com base no modelo de observação em 2.1 e no que foi descrito na Seção 2.3.5, a distribuição de probabilidade de $\mathbf{y}^{(k)}$ condicionada uma estimativa dos parâmetros e da imagem de alta resolução é dada por:

$$p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}, \mathbf{s}_k, \theta_k, \gamma) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{M/2} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{x}\|^2 \right\}. \quad (3.5)$$

A proposta de Super-resolução Bayesiana é usar o teorema de Bayes para obter uma função de probabilidade *a posteriori* da imagem \mathbf{x} ; ou seja, uma função de probabilidade que resulte da aplicação de um conhecimento *a priori* da imagem à abordagem de máxima verossimilhança. A Equação 3.6 mostra como foi aplicado o Teorema de Bayes para obter uma função de probabilidade *a posteriori* da imagem.

$$p(\mathbf{x} | \{\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{s}_k, \theta_k\}, \gamma) = \frac{p(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^K p(\mathbf{y}^{(k)} | \mathbf{x}, \mathbf{s}_k, \theta_k, \gamma)}{p(\{\mathbf{y}^{(k)}\} | \{\mathbf{s}_k, \theta_k\}, \gamma)} \quad (3.6)$$

Esclarecendo que $\{\mathbf{y}^{(k)}\}$ é o conjunto de todos $\mathbf{y}^{(k)}$ para $k = 1, 2, \dots, K$. Esta lógica também se aplica aos conjuntos $\{\mathbf{s}_k, \theta_k\}$.

Esta função de probabilidade já poderia ser utilizada para inferir a imagem de alta resolução. Para isso, bastaria encontrar o valor de \mathbf{x} que maximiza o numerador em (3.6). entretanto, isso exigiria saber os valores dos parâmetros de degradação ($\gamma, \theta_k, \theta_k$). Como esses parâmetros não estão disponíveis, eles também terão de ser estimados

a partir das imagens de baixa resolução \mathbf{y}_k . Algumas abordagens procuram otimizar os parâmetros de degradação concomitantemente com a imagem usando a distribuição em (3.6) (ao que o trabalho de Tipping [14] se refere como "abordagem MAP"). No entanto, esta abordagem não leva em consideração a incerteza ao determinar a imagem de alta resolução e as consequências disso na estimação dos parâmetros.

Os parâmetros de degradação \mathbf{s}_k , θ_k e γ devem ser estimados a partir de uma distribuição marginal que, segundo Pickup [10], é dada por:

$$p(\{\mathbf{y}^{(k)}\}|\{\mathbf{s}_k, \theta_k\}, \gamma) = \int p(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^K p(\mathbf{y}^{(k)}|\mathbf{x}, \mathbf{s}_k, \theta_k, \gamma) d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Fazendo as devidas aplicações de (3.5) e (3.4), a expressão em (3.7) se avalia como uma distribuição Gaussiana de $\{\mathbf{y}^{(k)}\}$ na forma

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Z}_y) \quad (3.8)$$

onde \mathbf{y} é um vetor empilhado de todas as imagens de baixa resolução e

$$\mathbf{Z}_y = \beta^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{W} \mathbf{Z}_x \mathbf{W}^T. \quad (3.9)$$

Condensando tudo e fazendo as devidas manipulações de matrizes, obtemos a função de verossimilhança em (3.10), onde foi aplicado o logaritmo e descartados os termos que não dependem dos parâmetros de degradação.

$$\log p(\mathbf{y}|\{\mathbf{s}_k, \theta_k\}, \gamma) = -\frac{1}{2} \left[\beta \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \boldsymbol{\mu}\|^2 + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Z}_x \boldsymbol{\mu} + \log |\mathbf{Z}_x| - \log |\Sigma| \right] \quad (3.10)$$

$$\Sigma = \left[\mathbf{Z}_x^{-1} + \beta \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{W}^{(k)T} \mathbf{W}^{(k)} \right) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \beta \Sigma \left(\sum_{k=1}^K \mathbf{W}^{(k)T} \mathbf{y}^{(k)} \right). \quad (3.12)$$

Em uma situação ideal, a melhor estimativa dos valores dos parâmetros de degradação é a que maximiza a função de verossimilhança em (3.10). Tendo a estimativa desses valores, podemos então usá-los em (3.6) para procurar pela imagem de alta resolução \mathbf{x} que maximiza aquela distribuição de probabilidade.

Um fato que se constatou empiricamente na tentativa de calcular os valores da função de verossimilhança é que as probabilidades são muito pequenas ao ponto de estarem fora do intervalo de precisão de uma variável do tipo ponto flutuante. Os valores também variam muito pouco ao longo do espaço vetorial de \mathbf{x} o que dificultaria o uso de métodos iterativos para encontrar o ponto de máximo da função.

Para resolver isso, aplicou-se o logaritmo natural à função. Isso resolveu o problema da escala e da variação. Além disso eliminou os exponenciais e os produtos, facilitando o cálculo do gradiente, necessário na aplicação dos algoritmos de otimização.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{x}\|^2 + \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_x^{-1} \mathbf{x} - KM \log(\beta) - \log |\mathbf{Z}_x| \right\} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}'(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K (\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{x})(\mathbf{W}^{(k)})^T - \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_x^{-1} + (\mathbf{Z}_x^{-1})^T) \mathbf{x} \quad (3.14)$$

Com tudo isso, já temos todas as ferramentas necessárias para estimar os parâmetros de degradação e usá-los para inferir a imagem de alta resolução. Tanto a função em (3.13) quanto a função de probabilidade *a posteriori* podem ser otimizadas usando métodos iterativos. Isso será melhor discutido no Capítulo 4.

4 Resultados

4.1 Introdução

Para avaliar a eficácia do método de super-resolução bayesiana, foi elaborado um teste que simula um sistema de aquisição de imagem, gerando as imagens de baixa resolução a serem restauradas. Na sequência, as imagens de baixa resolução foram submetidas ao método de super-resolução como descrito capítulo 3.

Este capítulo descreve o processo de implementação e teste do método de super-resolução bayesiana. A seção 4.2 apresenta o processo que gerou as imagens de teste simulando as transformações aplicadas pelo sistema de aquisição. A seção 4.3 relata como se deu o processo de restauração da imagem de alta resolução a partir do conjunto de imagens de baixa resolução. Por fim, a seção 4.4 relata o processo de estimação da imagem de alta resolução.

4.2 Geração do conjunto de imagens de teste

O método de super-resolução Bayesiana foi testado com dois conjuntos de imagens de baixa resolução geradas artificialmente a partir de duas imagens de alta resolução distintas. O modelo de observação exposto na seção 2.2 foi usado para gerar dois conjuntos de 20 imagens de baixa resolução a partir das imagens na Figura 5.

Figura 5 – Imagens de alta resolução utilizadas nos testes.



(a) Exemplar 1: “Virginia”.



(b) Exemplar 2: “Ohio”.

Fonte: O autor.

Para os testes feitos neste trabalho, ambas as imagens de alta resolução foram redimensionadas de forma que as dimensões das imagens de baixa resolução são iguais a $1/4$ das dimensões da imagem HR. Na prática, há 16 pontos nas imagens de alta resolução para cada ponto nas imagens de baixa resolução.

Sobre os parâmetros de degradação escolhidos. A largura da função de espalhamento de ponto (γ) escolhida foi 2. Para cada imagem, o ângulo de rotação foi escolhido aleatoriamente de uma distribuição uniforme entre -4 e 4 graus. A mesma seleção aleatória foi feita para o deslocamento linear da imagem; a quantidade de pontos de deslocamento foi retirada de uma distribuição uniforme e contínua entre -2 e 2 em cada um dos eixos. A Tabela 1 resume os parâmetros utilizados na degradação das imagens.

Figura 6 – Conjunto das imagens geradas a partir do Exemplar 1: "*Virginia*". A diferença sutil entre as imagens é causada pelas transformações de deslocamento e rotação. As dimensões de cada imagem são de 38×26 .



Fonte: O autor.

Figura 7 – Conjunto das imagens geradas a partir da do Exemplar 2: "*Ohio*". As dimensões de cada imagem são de 38×23 .



Fonte: O autor.

Tabela 1 – Parâmetros de degradação usados para gerar o conjunto de imagens de teste.

Ângulos de rotação (θ_k)	$\sim \mathcal{U}(-4, 4)$
Deslocamento (\mathbf{s}_k)	$\sim \mathcal{U}(-2, 2)$
Largura da PSF (γ)	2

Fonte: O autor.

O processo de geração das imagens de baixa resolução foi todo desenvolvido usando a linguagem Python, beneficiando-se dos módulos Numpy e Pillow. Os parâmetros de degradação bem como as dimensões da imagem original foram salvas em arquivos de valores separados por vírgula (csv) junto com as imagens geradas. Esses valores foram usados para avaliar quantitativamente a efetividade do algoritmo de otimização em inferir os valores corretos dos parâmetros.

4.3 Estimação dos parâmetros de degradação

A primeira etapa no processo de restauração da imagem é estimar os parâmetros que definiram as transformações que degradaram a imagem durante o processo simulado de captura. Como já elucidado no Capítulo 3, encontrar os valores dos parâmetros de degradação é um problema de otimização. Teoricamente, os valores verdadeiros de \mathbf{s}_k , θ_k e γ são os que maximizam a função de verossimilhança em (3.10).

O artigo no qual este trabalho se baseia relata que o método de otimização usado para estimar tanto os parâmetros de degradação quanto da imagem foi o de gradientes conjugados [14]. Como o método de super-resolução deste trabalho foi todo escrito em Python, não foi possível utilizar o mesmo método de implementação empregado no artigo. Em vez disso, foi usado um Método de Newton Truncado [7] presente no módulo *Scipy*.

O processo de otimização dos parâmetros se deu da seguinte forma: Os parâmetros de rotação e deslocamento foram definidos como zero; a largura da função de espalhamento de ponto inicial foi 4. Então, a otimização dos parâmetros se deu em três partes:

1. Na primeira, somente os valores de deslocamento são otimizados enquanto os valores dos ângulos de rotação permanecem fixos.
2. Na segunda, é realizada a otimização dos ângulos de rotação junto com os deslocamentos lineares.
3. Em uma terceira parte, a largura da função de espalhamento de ponto (γ) é otimizada concomitantemente com os demais parâmetros.

Essa abordagem é usada no artigo original e os testes realizados para este trabalho constatarem que a otimização dos parâmetros de deslocamento se aproxima mais rápido da solução correta quando esses valores são estimados isoladamente. A estimação dos ângulos também funciona melhor quando os valores de deslocamento já estão otimizados.

Um fato que merece destaque é o de que, como a função em (3.10) não é uma função vetorial do tipo $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, não foi possível passá-la diretamente ao método de otimização. Por isso, foi necessário empacotar a função de forma que ela recebesse os parâmetros de entrada (\mathbf{s}_k , θ_k e γ) reorganizados na forma de um único vetor e retornasse somente um escalar na saída. Isso também implicou na exigência de calcular numericamente o gradiente da função, necessário na execução do método de otimização.

O método de super resolução Bayesiana faz uso de matrizes esparsas como \mathbf{Z}_x e Σ no seu modelo matemático que representam uma grande custo computacional em memória e tempo de processamento. Para reduzir esse custo, foi usada somente uma janela de 7×7 pontos do centro de cada imagem de baixa resolução para estimar os parâmetros de

degradação. Neste caso, a janela de cada imagem foi empregada como se fosse a própria imagem de baixa resolução.

A função de otimização com algoritmo de Newton truncado presente na biblioteca *Scipy* permite que sejam definidos limites para restringir o intervalo de busca no espaço vetorial onde a estimação é feita. Isso é especialmente útil, pois permite usarmos um conhecimento a priori acerca dos parâmetros para impedir que a otimização retorne resultados inviáveis que, por ventura, tenham um alto valor de verossimilhança. Os limites definidos para os parâmetros foram de -4 a 4 no caso dos ângulos de rotação, -2 a 2 para ambas as direções dos deslocamentos e 1 a 7 para a largura da função de espalhamento de ponto.

Para reduzir o tempo gasto na execução da otimização dos parâmetros, o número máximo de avaliações da função de verossimilhança por etapa foi restringido. Na primeira etapa, o número máximo de avaliações da função de verossimilhança foi de 70. Em ambas as etapas subsequentes este limite foi de 50 avaliações. Esses limites não interferem na qualidade do resultado pois, mesmo que eles sejam bem maiores, o valor das avaliações da função estabiliza após poucas iterações.

Durante a execução do Método de Newton Truncado, foram registrados o valor da função de verossimilhança e o erro da solução atual ao fim de cada iteração. O erro calculado é igual $\|\mathbf{c}_{atual} - \mathbf{c}_{real}\|$ onde \mathbf{c}_{atual} é o vetor com os parâmetros obtidos ao fim da iteração e \mathbf{c}_{real} é o vetor com os parâmetros verdadeiros usado para a comparação. Os resultados desta análise são ilustrados na Figura 8.

Ao final da execução do algoritmo de otimização, os valores obtidos foram colhidos e comparados com os parâmetros de transformação reais. O resultado dessa comparação está retratado na Figura 9.

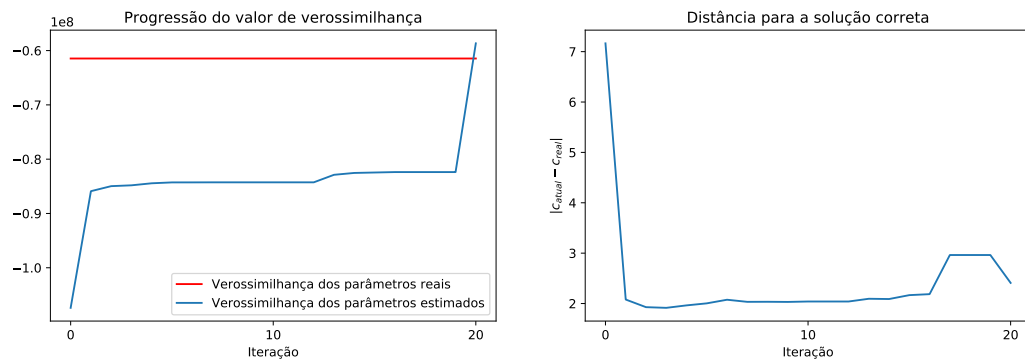
A estimativa da largura da função de espalhamento de ponto foi de 1 para ambas as imagens testadas; o que indica que o método não foi eficaz para estimar com precisão o valor de γ .

Tabela 2 – Tempos de execução e número de iterações no algoritmo de Newton truncado para cada um dos exemplares.

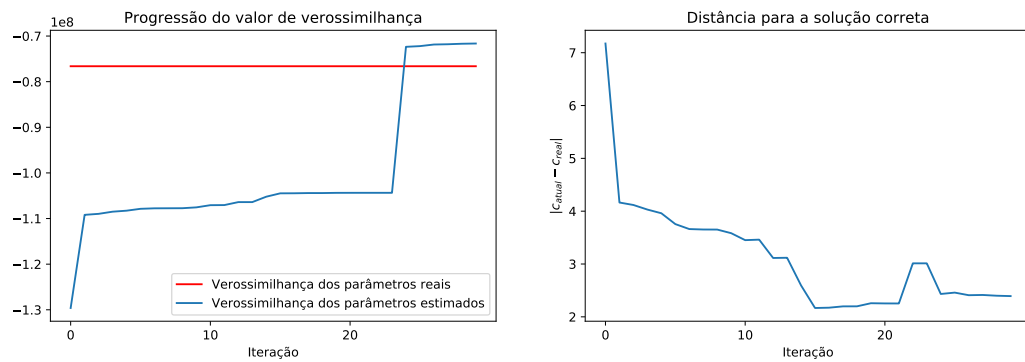
	Exemplar 1: "Virginia"	Exemplar 2: "Ohio"
Tempo de execução	31 minutos e 39 segundos	37 minutos e 23 segundos
Número de iterações	18	27

Fonte: O autor

Figura 8 – Progressão dos valores da avaliação da função de verossimilhança e do erro dos parâmetros estimados a cada iteração do algoritmo de otimização.



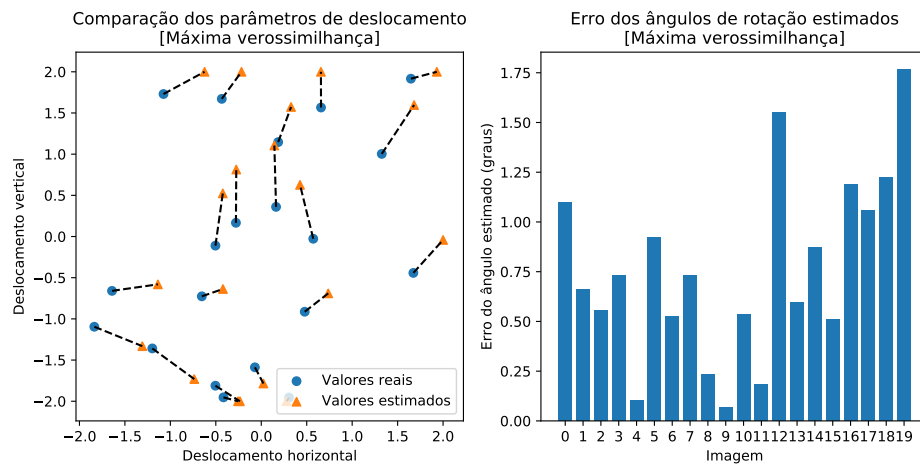
(a) Resultados obtidos com a estimação do Exemplar 1: “*Virginia*”



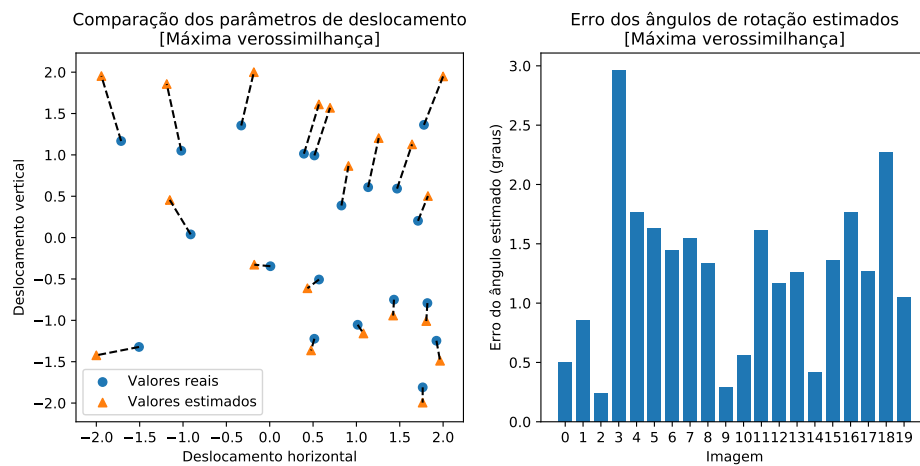
(b) Resultados obtidos com a estimação do Exemplar 2: “*Ohio*”

Fonte: O autor

Figura 9 – Comparação dos resultados obtidos ao final da execução do algoritmo de otimização com os parâmetros verdadeiros.



(a) Resultados obtidos com a estimação do Exemplar 1: “*Virginia*”



(b) Resultados obtidos com a estimação do Exemplar 2: “*Ohio*”

Fonte: O autor

Tabela 3 – Tempos de execução e número de iterações no algoritmo de Newton truncado para cada um dos exemplares.

	Exemplar 1: "Virginia"	Exemplar 2: "Ohio"
Tempo de execução	4 minutos e 24 segundos	7 minutos e 24 segundos
Número de iterações	2	2
Número de avaliações da função	90	89

Fonte: O autor

4.4 Estimação da imagem de alta resolução

Após a estimação dos parâmetros de degradação, os valores otimizados deve ser passados para a função de verossimilhança da imagem em (3.13) para que seja estimada a imagem de alta resolução em si.

O algoritmo de Newton truncado também foi usado para estimar a imagem de acordo com as imagens observadas e os parâmetros de degradação. Ao contrário do que aconteceu na etapa anterior, não foi necessário calcular o gradiente da função numericamente para esta etapa. Como a função de verossimilhança em (3.13) é uma função vetorial do tipo $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, então foi relativamente simples calcular seu gradiente mostrado na equação (3.14).

A possibilidade de se calcular o gradiente da função analiticamente em vez de numericamente teve como consequência um ganho considerável de desempenho com redução no tempo de execução do algoritmo. Esse ganho de desempenho foi bastante importante devido à quantidade de dados a serem estimados. Para uma imagem com dimensões de 150×104 , o vetor \mathbf{x} chega a ter 15600 elementos.

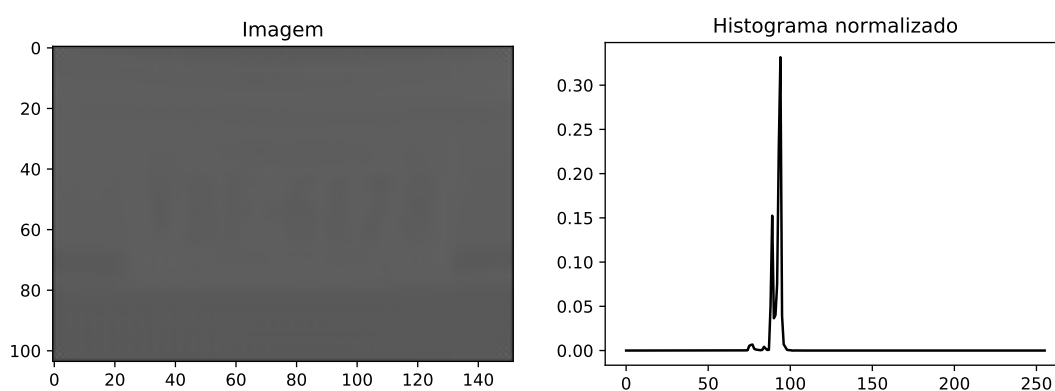
A função de verossimilhança da imagem depende da inversa da matriz de covariância \mathbf{Z}_x^{-1} e de $\log |\mathbf{Z}_x|$. Como a matriz de covariância tem muitos elementos e é sempre a mesma para imagens de dimensões iguais, esse valores foram salvos em disco para economizar tempo em vários testes sucessivos com a mesma imagem.

Ao final da execução do algoritmo de otimização, as imagens obtidas foram as imagens de baixo contraste retratadas nas Figuras 10a e 11a. Para revelar os resultados foi necessário equalizar os histogramas das imagens obtidas, o que resultou nas imagens retratadas nas Figuras 10b e 11b.

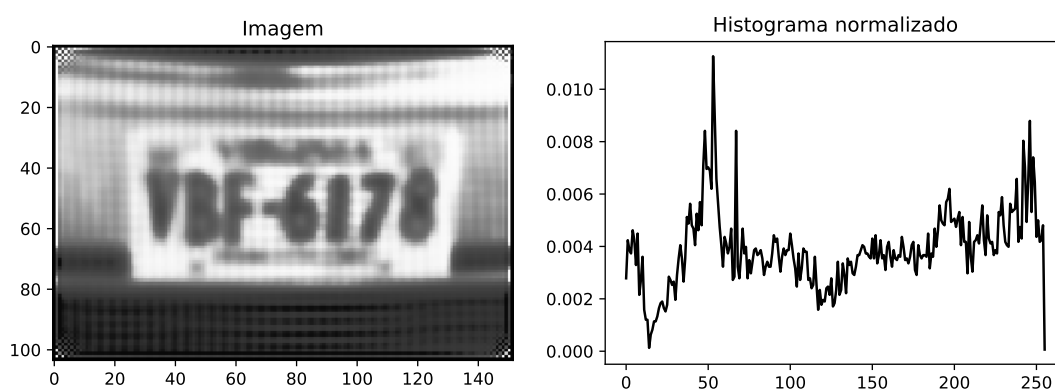
A Figura 12 compara as imagens de baixa resolução, redimensionada usando usando interpolação bicúbica (um método presente nos principais softwares de edição de imagens), restaurada usando o método de Super-resolução bayesiana e a imagem de alta resolução original.

A Tabela 3 mostra os tempos de execução, número de iterações e de avaliações da função da execução do Método de Newton Truncado para cada exemplar.

Figura 10 – Resultados obtidos com a otimização do Exemplar 1: "Virginia"



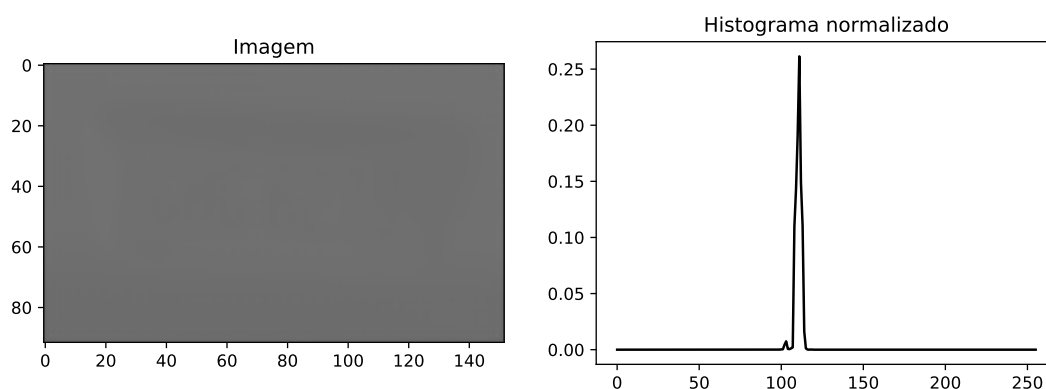
(a) Imagem resultante do processo de otimização juto com seu histograma.



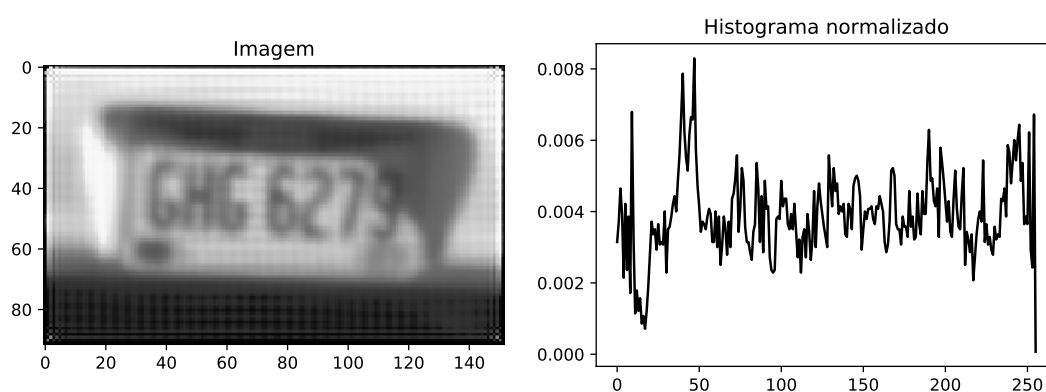
(b) Imagem resultante após equalização de histograma.

Fonte: O autor.

Figura 11 – Resultados obtidos com a otimização do Exemplo 2: "Ohio"



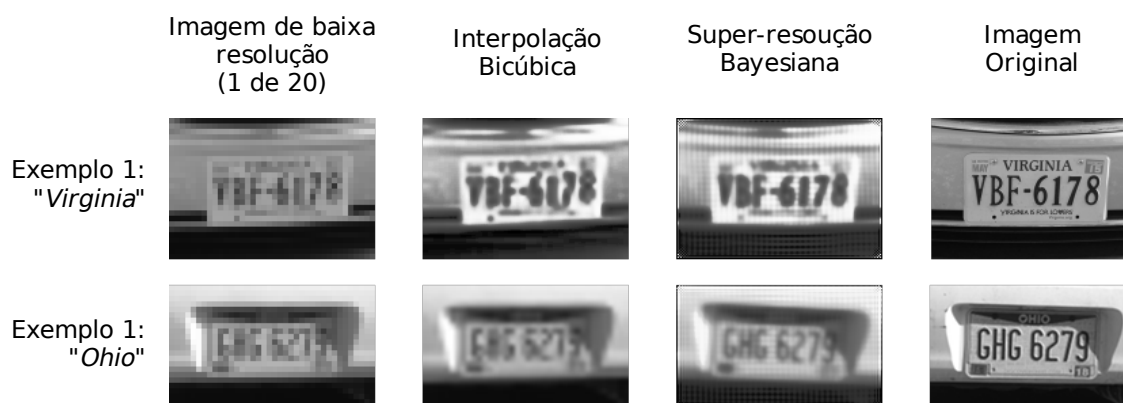
(a) Imagem resultante do processo de otimização juto com seu histograma.



(b) Imagem resultante após equalização de histograma.

Fonte: O autor.

Figura 12 – Comparação do resultado obtido através do método de super-resolução Bayesiana com a simples interpolação da imagem.



Fonte: O autor.

5 Conclusão

Este trabalho apresentou a teoria e relatou a implementação e os resultados do desenvolvimento de um método de Super-Resolução Bayesiana aplicado na restauração de imagens de placas de veículos.

As principais características do método proposto são:

- Obtêm uma imagem de alta resolução a partir de um conjunto de imagens de baixa resolução.
- Incorpora uma distribuição de probabilidade como conhecimento *a priori* acerca da imagem de alta resolução.
- Usa um método de inferência Bayesiana para estimar os parâmetros de degradação e a imagem de alta resolução em si.
- O uso de um método iterativo de otimização baseado em gradiente para estimar tanto os parâmetros de degradação quanto a própria imagem.

A etapa de estimação dos parâmetros de degradação obteve resultados com precisão adequada considerando o custo em tempo computacional. A estimação dos ângulos e dos deslocamentos foi capaz de diminuir o erro em relação aos parâmetros verdadeiros. No entanto, o modelo proposto não foi eficaz em estimar a largura da função de espalhamento de ponto com a mesma precisão.

Em uma análise subjetiva, a aplicação do método de Super-Resolução Bayesiana obteve resultados satisfatórios. Como é possível observar na Figura 12, o método de super-resolução obteve resultados qualitativamente melhores do que um método mais simples como uma interpolação. Isso se deve ao fato de que o método de super resolução é capaz de recuperar as componentes de alta resolução da imagem que se perdem durante o processo de captura.

Como propostas para trabalhos futuros podemos citar: a aplicação do método à imagens coloridas, visto que a única mudança seria na etapa de estimação da imagem, quando o algoritmo de otimização deve ser aplicado aos três canais da imagem; a redução do custo computacional do algoritmo, sobretudo a etapa de estimação da imagem que depende de matrizes com mais de 15000 elementos.

Referências

- [1] Mark R Banham and Aggelos K Katsaggelos. Digital image restoration. *IEEE signal processing magazine*, 14(2):24–41, 1997.
- [2] D. P. Capel. *Image Mosaicing and Super-resolution*. PhD thesis, University of Oxford, 2001.
- [3] P De Santis and F Gori. On an iterative method for super-resolution. *Journal of Modern Optics*, 22(8):691–695, 1975.
- [4] R.W. Gerchberg. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 21(9):709–720, 1974.
- [5] Michal Irani and Shmuel Peleg. Improving resolution by image registration. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 53(3):231 – 239, 1991.
- [6] Kamal Nasrollahi and Thomas B Moeslund. Super-resolution: a comprehensive survey. *Machine vision and applications*, 25(6):1423–1468, 2014.
- [7] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag New York, first edition, 1999.
- [8] Sung Cheol Park, Min Kyu Park, and Moon Gi Kang. Super-resolution image reconstruction: a technical overview. *IEEE signal processing magazine*, 20(3):21–36, 2003.
- [9] Lyndsey C Pickup, David P Capel, Stephen J Roberts, and Andrew Zisserman. Bayesian image super-resolution, continued. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 1089–1096, 2007.
- [10] Lyndsey C Pickup, David P Capel, Stephen J Roberts, and Andrew Zisserman. Bayesian methods for image super-resolution. *The Computer Journal*, 52(1):101–113, 2007.
- [11] Saulo Roberto Sodré dos Reis. *Um método iterativo e escalonável para super-resolução de imagens usando a interpolação DCT e representação esparsa*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2014.
- [12] Henry Stark and Peyma Oskoui. High-resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections. *JOSA A*, 6(11):1715–1726, 1989.
- [13] C. Therrien and M. Tummala. *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers, Second Edition*. Taylor & Francis, 2011.

-
- [14] Michael E Tipping and Christopher M Bishop. Bayesian image super-resolution. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1303–1310, 2003.
 - [15] Marcelo Victor Wüst Zibetti. *Super-resolucao simultânea para sequência de imagens*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.