Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет № 8 «Прикладная математика и информатика»

Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине «Вычислительные системы»

1 семестр

на тему “Процедуры и функции в качестве параметров”

Студент:	Соколов Д. В.
Группа:	М8О-107Б-20
Преподаватель:	Найдёнов И. Е.
Подпись:	
Оценка:	

Москва, 2020

Постановка задачи

Составить программы на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона и половинного деления — дихотомия). Нелинейные уравнения оформить как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применить каждую процедуру к решению двух уравнений, заданных двумя строками таблицы, начиная с варианта с заданным номером. Если метод неприменим, дать математическое обоснование и графическую иллюстрацию, например, с использованием *gnuplot*.

Вариант 14

Уравнение $tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{2}+x=0$

Отрезок [1, 2]
Приближённое значение корня 1.0769

Вариант 15

Уравнение $0{,}4+arctg\sqrt{x}-x=0$

Отрезок [1, 2]
Приближённое значение корня 1.2388

Теоретическая часть

<u>Метод дихотомии (половинного деления)</u> — простейший численный метод для решения нелинейных уравнений вида f(x)=0. Он подразумевает только непрерывности функции на данном отрезке. На концах этого отрезка функция должна быть разных знаков: $f(x_L)*f(x_R)<0$Из непрерывности следует, что на отрезке существует хотя бы один корень уравнения. Нужно найти значение x_M середины отрезка $x_M=\frac{x_L+x_R}{2}$Вычислим значение функции $f(x_M)$ в середине отрезка. Если значения функции в середине отрезка и на левой границе разные $f(x_M)*f(x_L)<0$, то нужно переместить правую границу в середину отрезка, иначе левую границу в середину отрезка. Затем нужно повторить алгоритм начиная с вычисления значения x_M Алгоритм заканчивается тогда, когда $f(x_M)=0$ либо $x_L=x_R$.

<u>Метод итераций</u> —ещё один простой численный метод решения уравнений. Метод основан на принципе сжимающего отображения, который применительно к численным методам в общем виде так же может называться методом простой итерации. Идея состоит в замене исходного уравнения f(x)=0 на эквивалентное ему x=φ(x). При чём должно выполнятся условие сходимости |φ’(x)|<1 на всём отрезке [a, b]. Итерации начинаются со значения x_M середины отрезка. Однако φ(x) может выбрано неоднозначно. Сохраняет корни уравнения такое преобразование: $\varphi(x)=x-\lambda_0 * f(x)$Здесь λ_0 – постоянная, которая не зависит от количества шагов. В данном случае мы возьмём $\lambda_0=\frac{1}{f'(x_M)}$, что приводит к простому методу одной касательной и имеет условие сходимости $\lambda_0 * f'(x)>0$. Тогда итерационный процесс выглядит так: $x_{k+1}=x_k-\lambda_0 * f(x_k)$.

Метод Ньютона — итерационный численный метод нахождения корня заданной функции, который является частным случаем метода простых итераций. А именно за λ_0 берётся значение производной в каждой новой точке. Тогда итерационный процесс имеет вид $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$Условие окончания итераций и начальное значение абсолютно такие же, как и в методе итерации. Условие сходимости: $|f(x) * f''(x)|<(f'(x))^2$

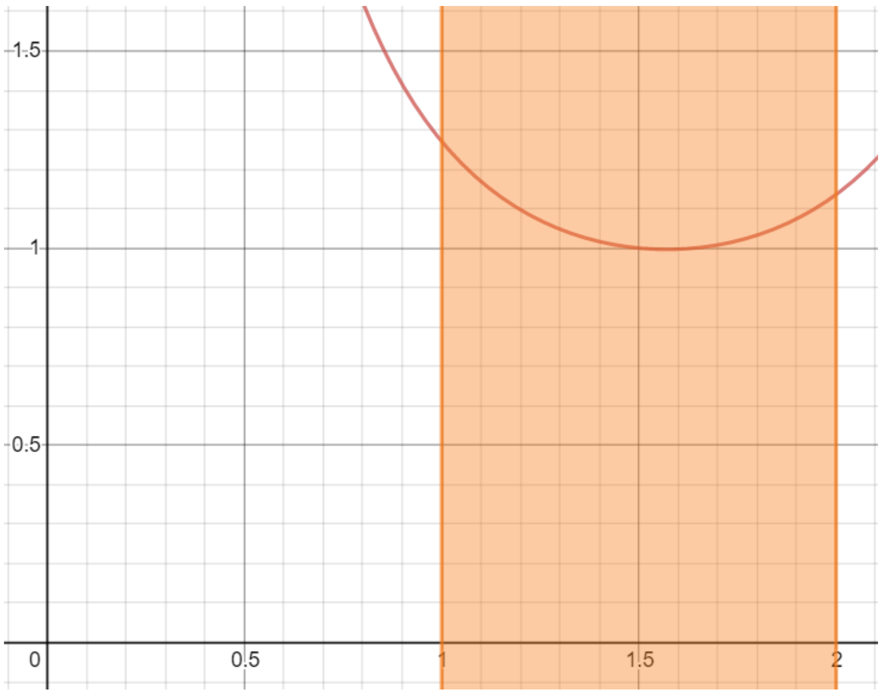
ПРОВЕРКА НА УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ:

Функции непрерывны на данном отрезке [1;2], следовательно, метод дихотомии подходит для решения двух уравнений.

1) Возьмем производную от функции $f'(x)=\frac{1}{2 * \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2 * \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+1$.

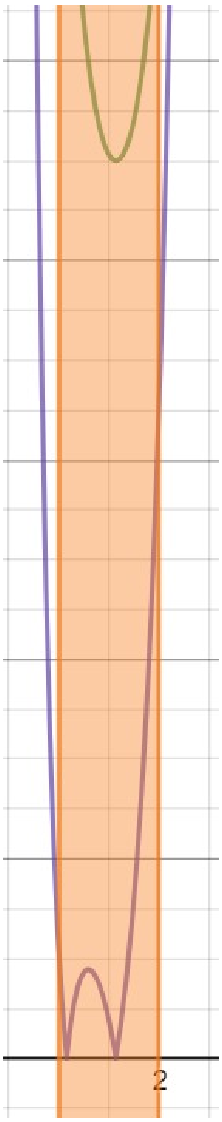
$\lambda=f'(x_M)=3.010057$

Проверим условия сходимости для метода итераций, построив графики производных сжимающих отображений:



На графике видно , что условие сходимости функция удовлетворяет методу итераций, потому что на интервале [1;2] функция $\lambda_0 * f'(x) > 0$.

Проверим условия сходимости для метода Ньютона, построив графики левых и правых частей неравенства $|f(x) * f''(x)| < (f'(x))^2$.



$y_1 = |f(x) * f''(x)|$ - синий цвет

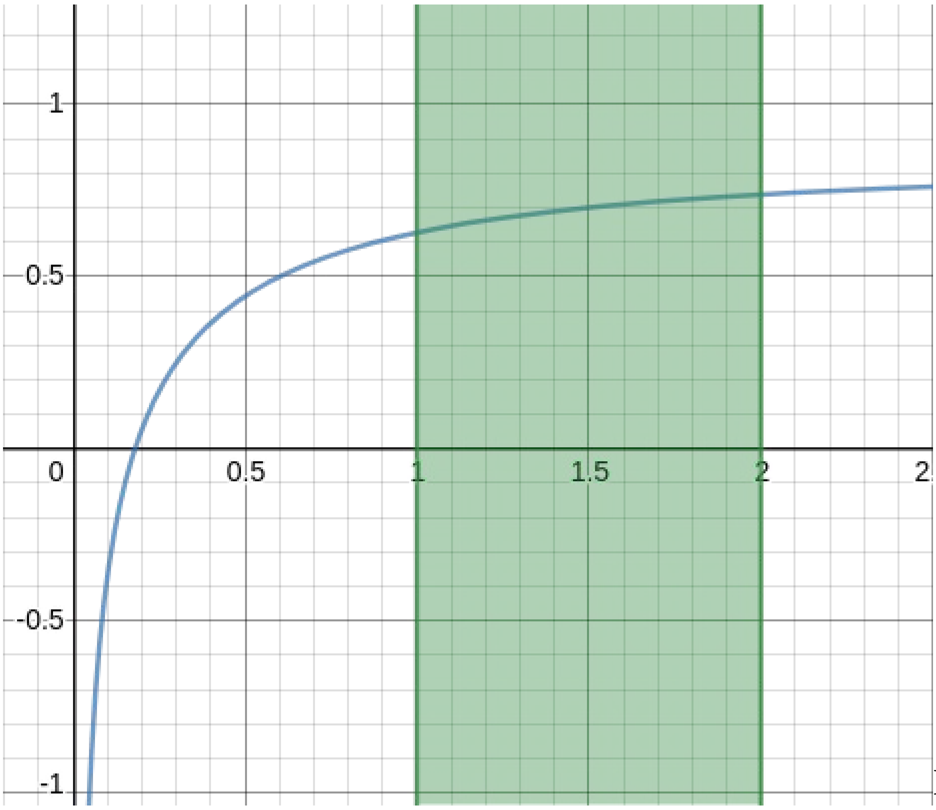
$y_2 = (f'(x))^2$ - зелёный цвет

Уравнение удовлетворяет условию сходимости метода Ньютона.

2) Возьмём производную от второй функции $f'(x)=\frac{1}{1+x}*\frac{1}{2*x^{\frac{1}{2}}}-1$

λ=f'(x_M)= -0.8367

Проверим условия сходимости для метода итераций, построив графики производных сжимающих отображений:

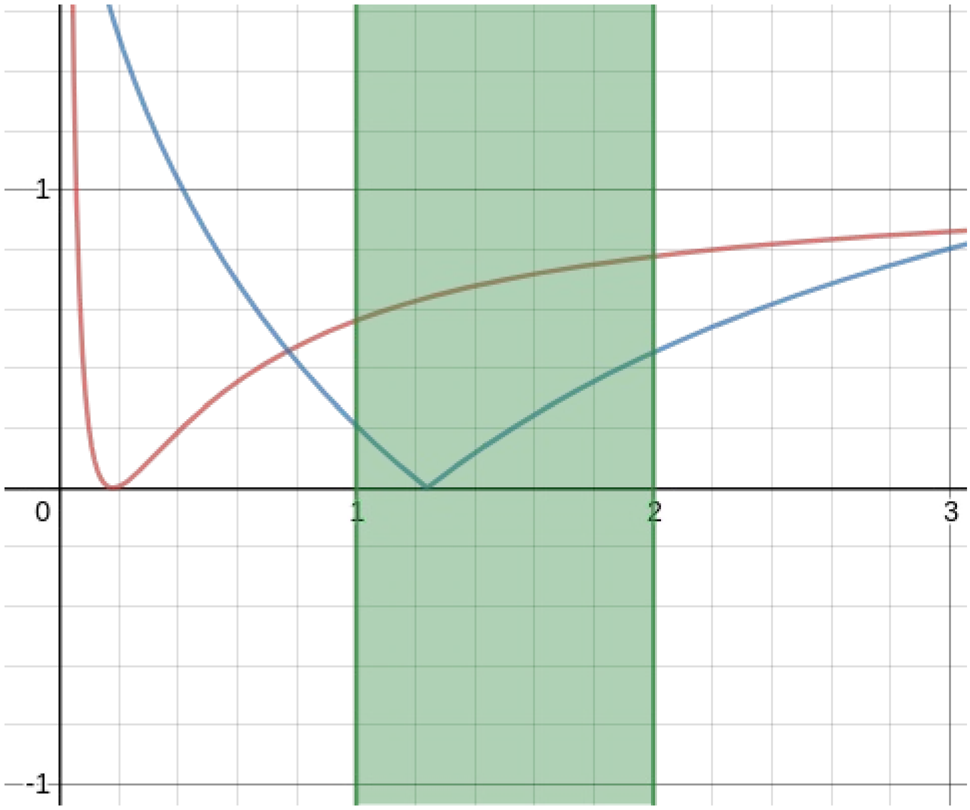


На графике видно , что условие сходимости функция удовлетворяет методу итераций, потому что на интервале [1;2] функция $\lambda_0 * f'(x)>0$.

Проверим условия сходимости для метода Ньютона, построив графики левых и правых частей неравенства $|f(x)*f''(x)|<(f'(x))^2$:

$y_1=|f(x)*f''(x)|$ - синий цвет

$y_2=(f'(x))^2$ - красный цвет



Из графика следует , что Метод Ньютона применим к этому уравнению.

АЛГОРИТМ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРГРАММЫ

Первым делом программа считает машинный эпсилон. Вычисление эпсилона ЭВМ было расписано в 3-ей части КП. В этом курсовом проекте я дал эпсилон тип double для максимальной точности. Вся программа выполняется через функции , поэтому я создаю функции для расчёта уравнений по аргументу x:

```
double f1(double x) {
return tan(x/2.0) - 1.0 / tan(x/2.0) + x;
}

double f2(double x) {
return 0.4 + atan(sqrt(x)) - x;
}
```

Чтобы эти функции можно было использовать в другой функции, то надо в качестве аргумента подать нужную функцию. Так для нахождения корня уравнения по методу дихотомии нужно брать среднее значение от суммы на концах отрезка , и если функция от левого края отрезка умноженная на функцию от среднего значения между краями отрезками:

```
double Dihotomia_Method(double f(double), double a, double b) {
double c = 0;
while (f(c)!=0 && fabs(b-a) > eps()) {
c = (a+b)/2;
```

```
if (f(c)*f(a)>0) a=c;
else b = c;
}
return c;
}
```

Для метода итераций надо было посчитать производную от уравнения и не зависящую от шага переменную, которая равняется 1/f“(x). Алгоритм , по которому ищется корень, очень простой: $x_{k+1}=x_k-\lambda_0 * f(x_k)$. Алгоритм выполняется пока $x_{k+1}=x_k$ выражение не станет истинной. Для этой функции тоже придётся использоваться в качестве аргумента функцию с параметром:

```
double Iterations_Method(double f(double), double a, double b) {
double x = (a + b) / 2;
double x1 = x+1;
while (fabs(x-x1)>=eps()) {
x1 = x;
x = f(x1);
}
return x;
}
```

Для метода Ньютона я использую формулу из прошлого метода с одним различием: вместо $\lambda_0 * f(x_k)$ используется отношение функции уравнение и функции производной. Тут уже нужны две функции-параметра:

```
double Newton_Method(double f(double), double fd(double), double a, double b)
{
double x = (a + b) / 2;
while (fabs(f(x)/fd(x))>=eps()) {
x -= f(x)/fd(x);
}
return x;
}
```

КОД ПРОГРАММЫ

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double eps()
{
double e = 1;
while (e /2.0 + 1.0 > 1.0) {
e = e / 2.0;
}

return e;
```

```
}

double f1(double x) {
return tan(x/2.0) - 1.0 / tan(x/2.0) + x;
}

double proiz_1(double x) {
return 1.0 / (2 * cos(x / 2.0) * cos(x / 2.0)) + 1.0 / (2 * sin(x / 2.0) * sin(x / 2.0)) + 1;
}

double F1(double x) {
return x - 0.3333 * f1(x);
}

double f2(double x) {
return 0.4 + atan(sqrt(x)) - x;
}

double proiz_2(double x) {
return (1.0 / (1 + x)) * (1.0 / (2 * sqrt(x))) - 1;
}

double F2(double x) {
return x + 0.8367 * f2(x);
}

double Newton_Method(double f(double), double fd(double), double a, double b)
{
double x = (a + b) / 2;
while (fabs(f(x)/fd(x))>=eps()) {
x -= f(x)/fd(x);
}
return x;
}

double Dihotomia_Method(double f(double), double a, double b) {
double c = 0;
while (f(c)!=0 && fabs(b-a) > eps()) {
c = (a+b)/2;
if (f(c)*f(a)>0) a=c;
else b = c;
}
return c;
}


double Iterations_Method(double f(double), double a, double b) {
double x = (a + b) / 2;
double x1 = x+1;
while (fabs(x-x1)>=eps()) {
x1 = x;
```

```
x = f(x1);
}
return x;
}

void main() {
printf("epsilon = %.20lf\n", eps());
printf("-------------------------------------\n");
printf("Variant #14 --> 1.076874\n");
printf("Dihotomia Method: %10f\n", Dihotomia_Method(f1, 1, 2));
printf("Iterations Method:%10f\n", Iterations_Method(F1, 1, 2));
printf("Newton Method: %13f\n", Newton_Method(f1, proiz_1, 1, 2));
printf("Variant #15 --> 1.238840\n");
printf("Dihotomia Method: %10f\n", Dihotomia_Method(f2, 1, 2));
printf("Iterations Method: %9f\n", Iterations_Method(F2, 1, 2));
printf("Newton Method: %13f\n", Newton_Method(f2, proiz_2, 1, 2));
printf("-------------------------------------\n");
}
```

ПРОТОКОЛ

```
epsilon = 0.00000000000000022204
-------------------------------------
Variant #14 --> 1.076874
Dihotomia Method:   1.076874
Iterations Method:  1.076874
Newton Method:      1.076874
Variant #15 --> 1.238840
Dihotomia Method:   1.238840
Iterations Method:  1.238840
Newton Method:      1.238840
-------------------------------------
```

Вывод

В ходе курсового проекта я описал идеи и принципы трёх численных методов по нахождению корня уравнения: дихотомии, итераций и Ньютона. В начале КП я проверил условия сходимости данных уравнений методам и провел нужные вычисления для использования методов. Составил алгоритм решения уравнений, на основе которого составлена программа на языке Си.

Список литературы

1. Метод бисекции [Электронный ресурс] – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_бисекции
2. Метод простой итерации [Электронный ресурс] – URL:

https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_простой_итерации
3. Метод Ньютона [Электронный ресурс] – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Ньютона