МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №1

по дисциплине: Исследование операций
тема: “Исследование множества опорных планов системы ограничений задачи линейного программирования (задачи ЛП) в канонической форме”

Выполнил: ст. группы ПВ-231
Столяров Захар

Проверил:
Вирченко Юрий Петрович

Белгород, 2025 г.

Лабораторная работа №1 «Исследование множества опорных планов системы ограничений задачи линейного программирования (задачи ЛП) в канонической форме.»

Цель работы: изучить метод Гаусса-Жордана и операцию замещения, а также освоить их применение к отысканию множества допустимых базисных видов системы линейных уравнений, и решению задачи линейного программирования простым перебором опорных решений.

Вариант 14

Оглавление

Система уравнений моего варианта

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_6 = -9 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 + x_5 + 7x_6 = 1 \end{cases}$$

Задание 1

Составить программу для отыскания всех базисных видов системы линейных уравнений:

Блок-схема функции gauss_jordan

images/block1.png

images/block2.png

images/block3.png

Код программы

Результат работы программы:

images/task1.png

images/task12.png

Описание программы:

1. Ввод данных:
   - Программа запрашивает количество уравнений и переменных.
   - Затем вводятся коэффициенты системы уравнений.
2. Метод Гаусса-Жордана:
   - Матрица приводится к приведённому ступенчатому виду.
   - Ведущие элементы (первые ненулевые элементы в строках) становятся равными 1.
   - Все остальные элементы в столбцах ведущих элементов обнуляются.
3. Анализ решения:
   - Если в процессе преобразований обнаруживается строка вида 0 0 ... 0 | b, где b != 0, система не имеет решений.
   - Если система имеет бесконечно много решений, программа указывает свободные переменные.
   - Если система имеет единственное решение, программа выводит его.

Задание 2

Организовать отбор опорных планов среди всех базисных решений, а также нахождение оптимального опорного плана методом прямого перебора. Целевая функция выбирается произвольно.

Код программы:

Результаты работы алгоритма:

images/task2.png

Описание программы:

1. Функция gauss_jordan:
    - Приводит расширенную матрицу системы к упрощённому ступенчатому виду.
2. Функция is_feasible:
    - Проверяет, является ли решение опорным планом (все переменные неотрицательны).
3. Функция objective_function:
    - Задаёт целевую функцию
4. Функция find_optimal_plan:
    - Находит все базисные решения.
    - Отбирает опорные планы.
    - Находит оптимальный опорный план, минимизирующий целевую функцию.

Задание 3

Решить систему линейных уравнений вручную (подготовить тестовые данные)

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_6 = -9 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 + x_5 + 7x_6 = 1 \end{cases}$$

- Так как n > m (переменных больше чем уравнений, то система имеет бесконечно много решений)
- Расширенная матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & -6 & 0 & 1 & | & -9 \\ 8 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 & | & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 9 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

- Приведение матрицы:

1. a_{11} = -1
   - Делим первую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 6 & 0 & -1 & | & 9 \\ 8 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 & | & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 9 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем первую строку на 8 и вычитаем из второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 6 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 41 & -33 & -48 & 2 & 11 & | & -64 \\ 4 & 3 & -2 & 9 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем первую строку на 4 и вычитаем из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 6 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 41 & -33 & -48 & 2 & 11 & | & -64 \\ 0 & 23 & -18 & -15 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

2. $a_{22} = 41$

   – Делим вторую строку на 41:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 6 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{33}{41} & -\frac{48}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 23 & -18 & -15 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

   – Умножаем вторую строку на -5 и вычитаем из первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{41} & \frac{6}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{33}{41} & -\frac{48}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 23 & -18 & -15 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

   – Умножаем вторую строку на 23 и вычитаем из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{41} & \frac{6}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{33}{41} & -\frac{48}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 0 & \frac{21}{41} & \frac{489}{41} & -\frac{5}{41} & \frac{198}{41} & | & \frac{37}{41} \end{pmatrix}$$

3. $a_{33} = \frac{21}{41}$

   – Делим третью строку на $\frac{21}{41}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{41} & \frac{6}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{33}{41} & -\frac{48}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{163}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{66}{7} & | & \frac{37}{21} \end{pmatrix}$$

   – Умножаем третью строку на $-\frac{33}{41}$ и вычитаем из второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{41} & \frac{6}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{123}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{55}{7} & | & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{163}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{66}{7} & | & \frac{37}{21} \end{pmatrix}$$

   – Умножаем третью строку на $-\frac{1}{41}$ и вычитаем из первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{7} & | & \frac{26}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{123}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{55}{7} & | & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{163}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{66}{7} & | & \frac{37}{21} \end{pmatrix}$$

- Матрица в упрощенном ступенчатом виде:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{7} & \frac{26}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{123}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{55}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{163}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{66}{7} & \frac{37}{21} \end{array}\right)$$

- После всех преобразований матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_2 \end{array}\right)$$

- Базисные переменные: x_1, x_2, x_3. Выражаем их через свободные x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{14}x_4 - a_{15}x_5 - a_{16}x_6 \\ x_2 = b_2 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5 - a_{26}x_6 \\ x_3 = b_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5 - a_{36}x_6 \end{cases}$$

- Итоговое решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{21} - \dfrac{5}{7}x_4 - \dfrac{5}{21}x_5 - \dfrac{4}{7}x_6 \\ x_2 = -\dfrac{1}{7} - \dfrac{123}{7}x_4 + \dfrac{1}{7}x_5 - \dfrac{55}{7}x_6 \\ x_3 = \dfrac{37}{21} - \dfrac{163}{7}x_4 + \dfrac{5}{21}x_5 - \dfrac{66}{7}x_6 \end{cases}$$

Найдем один из опорных планов (Всего их $C_6^3 = 20$):

- Для базисных переменных x_1, x_2, x_4
- Расширенная матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 & -4 & 0 & 1 & | & -9 \\ 8 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & | & 8 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

1. a_{11} = -1
   - Делим первую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 4 & 0 & -1 & | & 9 \\ 8 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & | & 8 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем первую строку на 8 и вычитаем из второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 4 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 41 & -48 & -33 & 2 & 11 & | & -64 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем первую строку на 4 и вычитаем из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 4 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 41 & -48 & -33 & 2 & 11 & | & -64 \\ 0 & 23 & -15 & -18 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

2. a_{22} = 41
   - Делим вторую строку на 41:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 4 & 0 & -1 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{48}{41} & -\frac{33}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 23 & -15 & -18 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем вторую строку на -5 и вычитаем из первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{48}{41} & -\frac{33}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 23 & -15 & -18 & 1 & 11 & | & -35 \end{pmatrix}$$

   - Умножаем вторую строку на 23 и вычитаем из третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{48}{41} & -\frac{33}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 0 & \frac{489}{41} & \frac{21}{41} & -\frac{5}{41} & \frac{198}{41} & | & \frac{37}{41} \end{pmatrix}$$

3. $a_{33} = \frac{21}{41}$
   - Делим третью строку на $\frac{489}{41}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & -\frac{48}{41} & -\frac{33}{41} & \frac{2}{41} & \frac{11}{41} & | & -\frac{64}{41} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{163} & -\frac{5}{489} & \frac{66}{163} & | & \frac{37}{489} \end{pmatrix}$$

   - Умножаем третью строку на $-\frac{48}{41}$ и вычитаем из второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{10}{41} & \frac{14}{41} & | & \frac{49}{41} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{123}{163} & \frac{6}{163} & \frac{121}{163} & | & \frac{240}{163} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{163} & -\frac{5}{489} & \frac{66}{163} & | & \frac{37}{489} \end{pmatrix}$$

   - Умножаем третью строку на $-\frac{6}{41}$ и вычитаем из первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1020}{6683} & -\frac{173}{6683} & \frac{2678}{6683} & | & \frac{8061}{6683} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{123}{163} & \frac{6}{163} & \frac{121}{163} & | & \frac{240}{163} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{163} & -\frac{5}{489} & \frac{66}{163} & | & \frac{37}{489} \end{pmatrix}$$

- После всех преобразований матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} & | & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} & | & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & | & b_2 \end{pmatrix}$$

- Базисные переменные: x_1, x_2, x_3. Выражаем их через свободные x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{14}x_4 - a_{15}x_5 - a_{16}x_6 \\ x_2 = b_2 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5 - a_{26}x_6 \\ x_3 = b_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5 - a_{36}x_6 \end{cases}$$

- Итоговое решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8061}{6683} - \dfrac{1020}{6683}x_4 + \dfrac{173}{6683}x_5 - \dfrac{2678}{6683}x_6 \\ x_2 = \dfrac{240}{163} + \dfrac{123}{163}x_4 - \dfrac{6}{163}x_5 - \dfrac{121}{163}x_6 \\ x_3 = \dfrac{37}{489} - \dfrac{7}{163}x_4 + \dfrac{5}{489}x_5 - \dfrac{66}{163}x_6 \end{cases}$$

  Целевая функция равна сумме свободных членов:

- $\dfrac{8061}{41} + \dfrac{240}{163} + \dfrac{37}{489} = \dfrac{55220}{20049}$

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы я составил программу для отыскания всех базисных решений системы уравнений с помощью метода Гаусса-Жордана, вывод которой совпал с ответом в моем аналитическом решении.