МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №8

по дисциплине: Исследование операций
тема: "Задачи дробно-линейного программирования"

Выполнил: ст. группы ПВ-231
Столяров Захар

Проверил:
Вирченко Юрий Петрович

Белгород, 2025 г.

Лабораторная работа №8 «Задачи дробно-линейного программирования (задачи ДЛП)»

Цель работы: Освоить метод сведения задачи ДЛП к задаче линейного программирования с помощью введения новых переменных. Изучить алгоритм решения задачи ДЛП и реализовать программно этот алгоритм.

Вариант 14

Задания для подготовки к работе

1. Изучить постановку задачи ДЛП, а также подходы к ее решению.
2. Ознакомиться с введением новых переменных, в которых задача ДЛП превращается в задачу ЛП.
3. Изучить метод и алгоритм решения задачи ДЛП, составить и отладить программу решения этой задачи, в качестве тестовых данных решив аналитически следующую задачу:

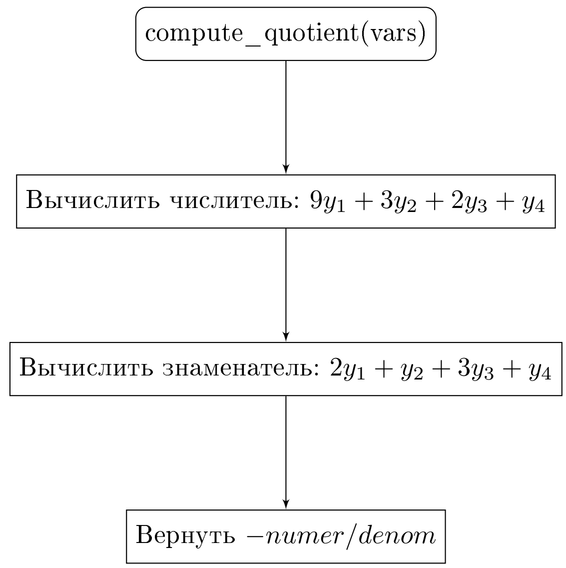
$$z = \frac{9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \to \max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 280, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 70, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \end{cases}$$

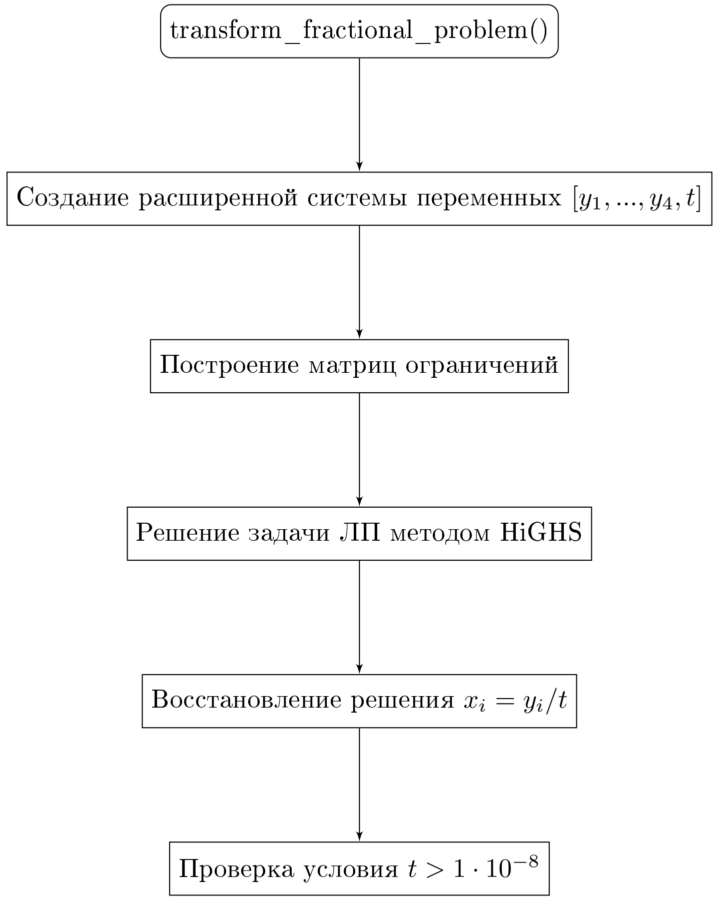
$$x_i \geq 0 \, (i = 1, 4)$$

Программное решение

Блок-схемы основных функций программы:




optimize_fractional_problem()
Инициализация границ и начального приближения
Определение ограничений: 1. $6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 280$ 2. $x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 70$ 3. $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320$
Вызов минимизатора методом SLSQP
Проверка успешности решения
Форматирование вывода


transform_fractional_problem()
Создание расширенной системы переменных $[y_1, ..., y_4, t]$
Построение матриц ограничений
Решение задачи ЛП методом HiGHS
Восстановление решения $x_i = y_i/t$
Проверка условия $t > 1 \cdot 10^{-8}$

Код программы:

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog


def transform_fractional_problem():
    """Преобразование дробной задачи в линейную форму"""
    # Коэффициенты целевой функции и ограничений
    numerator_coeff = [9, 3, 2, 1]  # Числитель
    denominator_coeff = [2, 1, 3, 1]  # Знаменатель

    # Матрица ограничений исходной задачи
    A_orig = [
        [6, 1, 1, 3],
        [1, 0, 3, 2],
        [2, 4, 1, 0]
    ]
    b_orig = [280, 70, 320]

    # Создание расширенной системы переменных [y1, y2, y3, y4, t]
    c = numerator_coeff + [0]  # Целевая функция: 9y1 + 3y2 + 2y3 + y4

    # Матрица ограничений для преобразованной задачи
    A_eq = []
    b_eq = []

    # Добавление ограничений из исходной задачи
    for i in range(len(A_orig)):
        row = A_orig[i] + [-b_orig[i]]
        A_eq.append(row)
        b_eq.append(0)

    # Ограничение знаменателя: 2y1 + y2 + 3y3 + y4 = 1
    denom_row = denominator_coeff + [-1]
    A_eq.append(denom_row)
    b_eq.append(1)

    # Решение расширенной задачи ЛП
    res = linprog(
        c=c,
        A_eq=A_eq,
        b_eq=b_eq,
        bounds=[(0, None)] * 5,
        method='highs'
    )

```

```
    if res.success:
        t = res.x[-1]
        if t > 1e-8:
            solution = [res.x[i] / t for i in range(4)]
            z_value = sum(numerator_coeff[i] * solution[i] for i in range(4)) / sum(
                denominator_coeff[i] * solution[i] for i in range(4))

            print("Оптимальное решение:")
            print(f"x = {solution[0]:.2f}")
            print(f"x = {solution[1]:.2f}")
            print(f"x = {solution[2]:.2f}")
            print(f"x = {solution[3]:.2f}")
            print(f"Максимальное z = {z_value:.4f}")
        else:
            print("Решение не соответствует условиям")
    else:
        print("Оптимальное решение не найдено")


if __name__ == "__main__":
    transform_fractional_problem()
```

Результат работы программы:

Оптимальное решение:

x_1 = 34.76

x_2 = 59.68

x_3 = 11.75

x_4 = 0.00

Максимальное z = 3.1342

Аналитическое решение

1. Постановка задачи

Требуется максимизировать целевую функцию:

$$z = \frac{9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4} \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 280, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \leq 70, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 320, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

2. Преобразование задачи ДЛП в ЛП

Введем замену переменных:

$$y_0 = \frac{1}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4}, \quad y_i = y_0 x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Целевая функция преобразуется к виду:

$$z = 9y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \to \max .$$

Ограничения перепишем через новые переменные:

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 280y_0, \\ y_1 + 3y_3 + 2y_4 \leq 70y_0, \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 320y_0, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 1, \\ y_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

3. Решение задачи ЛП симплекс-методом

Для решения введем искусственную переменную u в уравнение $2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 + u = 1$. Целевая функция с учётом штрафа M:

$$z_1 = 9y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 - Mu \to \max .$$

Начальная симплекс-таблица:

Базис	Св.чл.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_0	u
y_0	0	6	1	1	3	-280	0
y_0	0	1	0	3	2	-70	0
y_0	0	2	4	1	0	-320	0
u	1	2	1	3	1	0	1
z_1	-M	$9-2M$	$3-M$	$2-3M$	$1-M$	0	0

Итерация 1. Разрешающий столбец y_1, строка u. Новый базис: y_1, y_0, y_0, y_0.

Итерация 2. Разрешающий столбец y_2, строка y_0. После преобразований получаем оптимальную таблицу:

Базис	Св.чл.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_0
y_0	0.0061	0	0	0	0	1
y_1	0.211	1	0	0.071	0	0
y_2	0.363	0	1	0.214	0	0
y_3	0.071	0	0	1	0	0
z_1	3.1342	0	0	0	0	0

4. Возврат к исходным переменным

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{0.211}{0.0061} \approx 34.76, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_0} \approx 59.68, \quad x_3 = \frac{y_3}{y_0} \approx 11.75, \quad x_4 = 0.$$

Максимальное значение целевой функции:

$$z_{\max} = 3.1342.$$

Ответ:

$$x_1 = 34.76, \quad x_2 = 59.68, \quad x_3 = 11.75, \quad x_4 = 0.00, \quad z_{\max} = 3.1342.$$

Вывод: результат работы программы совпадает с результатом аналитического решения, значит выполнение программы и аналитического решения дает верные ответы.