

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №2
по дисциплине: Исследование операций
тема: “Симплекс-метод в чистом виде”

Выполнил: ст. группы ВТ-231
Масленников Даниил

Проверил:
Вирченко Юрий Петрович

Белгород, 2025 г.

Лабораторная работа №2 «Симплекс-метод в чистом виде.»

Цель работы: изучение симплекс-метода для решения задачи линейного программирования с использованием симплекс-таблиц, получение навыков кодирования изученного алгоритма, отладки и тестирования соответствующих программ.

Вариант 14

Задания для подготовки к работе

1. Выяснить: какой вид должна иметь задача ЛП, чтобы можно было применять симплекс-метод в чистом виде, а также как составляется первая симплекс-таблица?
2. Изучить алгоритм перехода от одной симплекс-таблицы к другой при решении задачи симплекс-методом.
3. Запрограммировать и отладить изученный алгоритм. В рамках подготовки тестовых данных аналитически решить задачу:

$$z = 6x_2 + 9x_4 + 2x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 26, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 10, \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_6 = 12, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, 6})$$

Задание 1

Выяснить: какой вид должна иметь задача ЛП, чтобы можно было применять симплекс-метод в чистом виде, а также как составляется первая симплекс-таблица?

Ответ: Для непосредственного применения симплекс-метода задача линейного программирования должна быть представлена в *канонической форме* (или, иначе говоря, в базисном виде с допустимым начальным решением). В наиболее простом случае это подразумевает следующее:

Необходимо найти максимум целевой функции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,$$

которая задана при системе линейных ограничений в виде уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

и условиях неотрицательности переменных: $x_i \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Для *запуска* симплекс-метода требуется:

1. Привести систему к *базисному виду*, то есть выбрать m базисных переменных и выразить их через оставшиеся $n - m$ переменных. При этом начальное базисное решение должно быть *допустимым*, что означает неотрицательность всех базисных переменных на первом шаге.
2. Преобразовать целевую функцию, исключив из неё базисные переменные. Это означает, что z должна быть выражена только через свободные (небазисные) переменные.

Если допустимое начальное (опорное) решение существует, то можно построить первую симплекс-таблицу и выполнять итеративные преобразования, двигаясь к оптимальному решению. В процессе также может быть выявлена неограниченность целевой функции или несовместность системы ограничений.

Задание 2

Построение начальной симплекс-таблицы

Предположим, что после приведения системы к базисному виду мы получили следующие выражения для базисных переменных:

$$\begin{aligned}x_1 &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1,n}x_n, \\x_2 &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2,n}x_n, \\&\vdots \\x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{r,n}x_n,\end{aligned}$$

где: - x_1, x_2, \dots, x_r — базисные переменные, - x_{r+1}, \dots, x_n — свободные переменные, - $b_1, \dots, b_r \geq 0$ (условие допустимости решения).

Целевая функция выражена исключительно через свободные переменные:

$$z = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_n x_n \rightarrow \max.$$

Для построения симплекс-таблицы выполним следующие преобразования: 1. Перенесём все слагаемые с переменными в левую часть уравнений, оставив свободные члены справа. 2. Целевую функцию представим в виде:

$$z - \gamma_{r+1}x_{r+1} - \dots - \gamma_n x_n = \gamma_0.$$

Полученная система уравнений и целевая функция представляются в виде следующей симплекс-таблицы:

	Св. член	x_1	x_2	\dots	x_n
x_1	b_1	1	0	\dots	$a_{1,n}$
x_2	b_2	0	1	\dots	$a_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_r	b_r	0	0	\dots	$a_{r,n}$
z	γ_0	0	0	\dots	$-\gamma_n$

Пояснения к таблице:

- В первом столбце указаны базисные переменные.
- Столбец "Св. член" содержит значения b_i для уравнений и γ_0 для целевой функции.
- В строке z коэффициенты при переменных записаны со знаком "минус что соответствует преобразованной форме целевой функции.

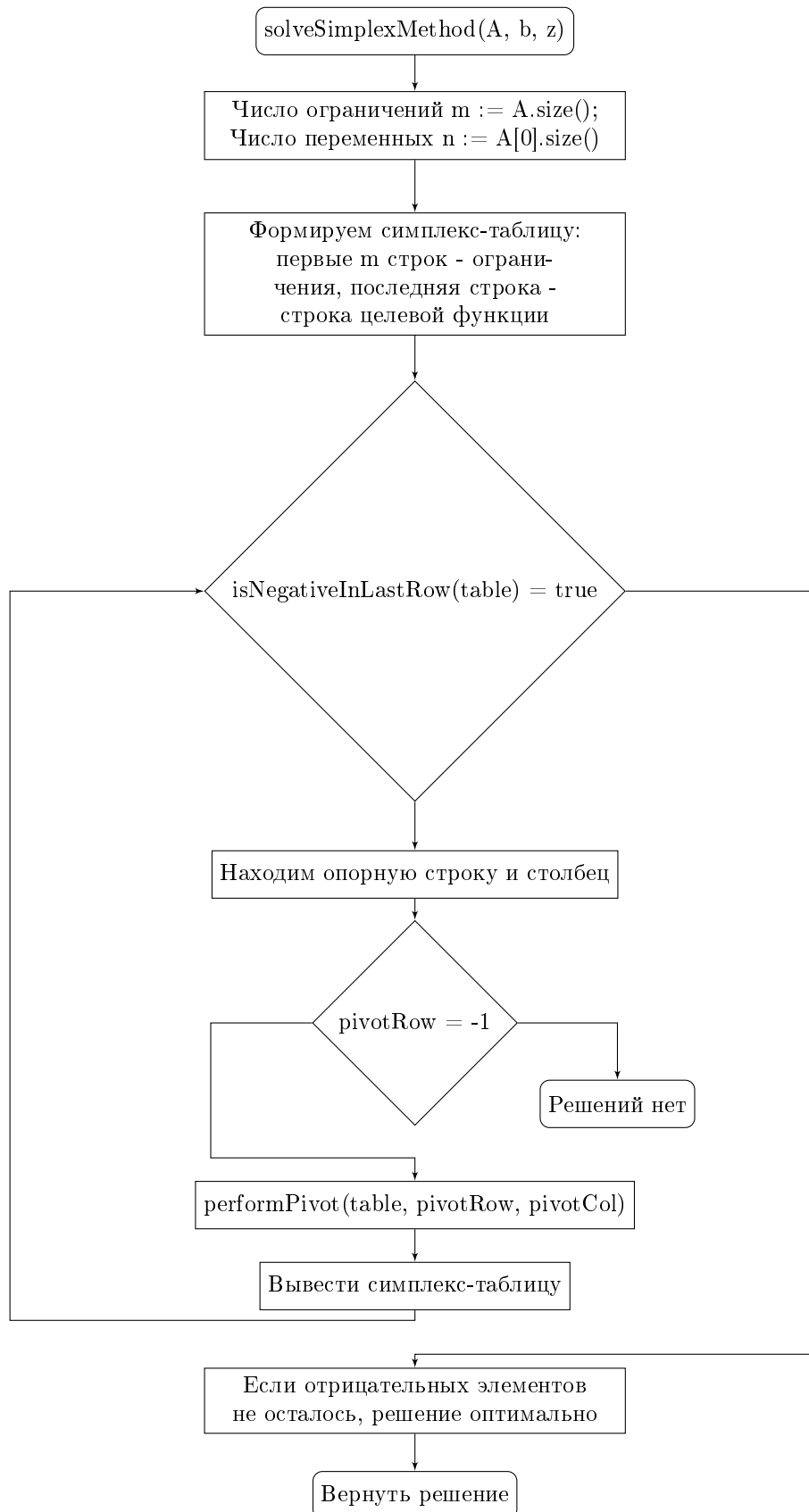
Эта таблица представляет собой **начальный этап** симплекс-метода. На последующих шагах:

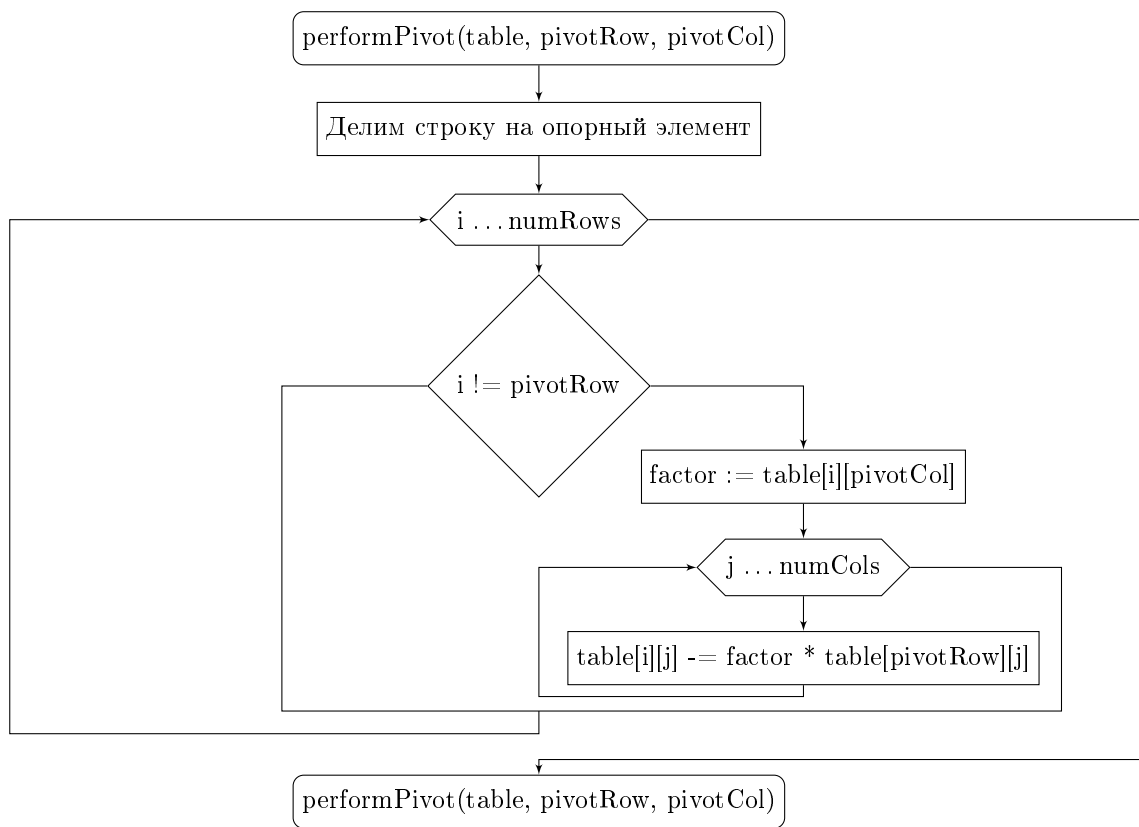
- Выбирается разрешающий элемент.
- Таблица преобразуется для перехода к новому базисному решению.
- Значение целевой функции при этом не уменьшается.

Процесс продолжается до выполнения критерия оптимальности, который заключается в отсутствии положительных коэффициентов в строке z при свободных переменных.

Задание 3

Блок-схемы:





Код программы:

Результат работы программы:

```
Исходная симплекс-таблица:
  x1    x2    x3    x4    x5    x6    b
  0.00    5.00    0.00    5.00    1.00    1.00    26.00
  1.00   -3.00    0.00   -4.00    0.00   -2.00    10.00
  0.00    4.00    1.00   -6.00    0.00   -3.00    12.00
 -0.00   -6.00   -0.00   -9.00   -0.00   -2.00     0.00

Шаг - pivot = (1, 4):
  x1    x2    x3    x4    x5    x6    b
  0.00    1.00    0.00    1.00    0.20    0.20     5.20
  1.00    1.00    0.00    0.00    0.80   -1.20    30.80
  0.00   10.00    1.00    0.00    1.20   -1.80    43.20
  0.00    3.00    0.00    0.00    1.80   -0.20    46.80

Шаг - pivot = (1, 6):
  x1    x2    x3    x4    x5    x6    b
  0.00    5.00    0.00    5.00    1.00    1.00    26.00
  1.00    7.00    0.00    6.00    2.00    0.00    62.00
  0.00   19.00    1.00    9.00    3.00    0.00    90.00
  0.00    4.00    0.00    1.00    2.00    0.00    52.00

Максимум целевой функции: 52.00
Оптимальный план: x1 = 62.00, x2 = 0.00, x3 = 90.00, x4 = 0.00, x5 = 0.00, x6 = 26.00
```

Аналитическое решение

1. Постановка задачи

Дана задача линейного программирования:

$$z = 6x_2 + 9x_4 + 2x_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 26, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_4 - 2x_6 = 10, \\ 4x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_6 = 12, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, 6})$$

2. Решение

- Начальное базисное решение:

$$x_1 = 10, \quad x_3 = 12, \quad x_5 = 26, \quad x_2 = x_4 = x_6 = 0$$

Начальное значение целевой функции: $z = 0$.

- Симплекс-таблица (начальная):

Баз.пер.	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	10	1	-3	0	-4	0	-2
x_3	12	0	4	1	-6	0	-3
x_5	26	0	5	0	5	1	1
$-Z$	0	0	-6	0	-9	0	-2

- Итерация 1:

- Разрешающий столбец: x_4 (наибольший по модулю отрицательный коэффициент)
- Отношения b/a_{i4} :

$$x_1 : 10/(-4) < 0 \quad (\text{пропускаем}), \quad x_3 : 12/(-6) < 0 \quad (\text{пропускаем}), \quad x_5 : 26/5 = 5.2$$

- Разрешающая строка: x_5 , элемент: 5

После преобразований:

Баз.пер.	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	30.8	1	1	0	0	0.8	-1.2
x_3	43.2	0	10	1	0	1.2	-1.8
x_4	5.2	0	1	0	1	0.2	0.2
$-Z$	46.8	0	3	0	0	1.8	-0.2

- Итерация 2:

- Разрешающий столбец: x_6 (единственный отрицательный коэффициент)
- Отношения:

$$x_1 : 30.8/(-1.2) < 0 \quad (\text{пропускаем}), \quad x_3 : 43.2/(-1.8) < 0 \quad (\text{пропускаем}), \quad x_4 : 5.2/0.2 = 26$$

- Разрешающая строка: x_4 , элемент: 0.2

Результат:

Баз.пер.	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	62	1	7	0	6	2	0
x_3	90	0	19	1	9	3	0
x_6	26	0	5	0	5	1	1
$-Z$	52	0	4	0	1	2	0

- Оптимальное решение:

$$x_1 = 62, \quad x_3 = 90, \quad x_6 = 26, \quad x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

- Максимальное значение:

$$z_{\max} = 52$$

Вывод: аналитическое решение совпадает с результатом написанной мной программы, что подтверждает корректность симплекс-метода.