Introduktion till matematisk modellering och databehandling i Python

Datorlaboration

Stefan Gustafsson och Per Jönsson

Institutionen för materialvetenskap och tillämpad matematik
Malmö universitet

Lejonmänniskan från Hohlenstein i Tyskland är en skulptur i djur- och människoform. Skulpturen, snidad av mammutelfenben med en sten av flinta, är världens äldsta kända skulptur och kan vara upp till 41 000 år gammal.

Studieinstruktioner

Inför inlämningen ska du:

- läsa kap 15 – 16 i kompendiet
- *själv skriva in kommandona som beskrivs i de olika exemplen i kompendiet*, alternativt köra cellerna i py-filen **kurslitteraturen_exempel.py**, som finns i zip-filen på Canvas
- titta på videofilmerna kap15, kap16, vilka beskriver om förklarar kursavsnittet. Viedeofilmerna finns på Canvas.

Inlämning på Canvas

Följande laddas upp på Canvas:

- py-fil med namnet **datorlaboration.py**, där varje uppgift skrivs i en cell. Länken till videoinspelningen, där du löser en uppgift samtidigt som du förklarar vad de olika kommandona gör, skall vara inklistrad i toppen av py-filen tillsammans med ditt namn.

De inlämnade lösningarna ska vara kommenterade där det är motiverat.

Godkänd inlämning

För att inlämningen ska bli godkänd ska du redovisa alla uppgifter som är angivna. Dessutom ska dina lösningar, redovisade i den inlämnade py-filen, vara körbara och ge rätt resultat. Den efterfrågade videoinspelning ska vara gjord och länken inklistrad i py-filen. 80 % av uppgifterna måste vara rätt.

Underkänd inlämning

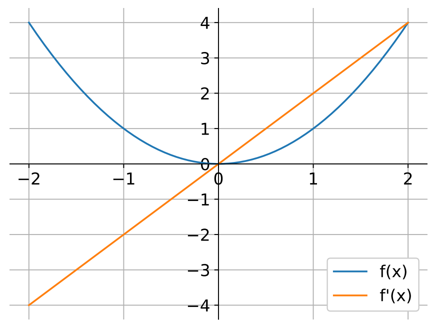
Inlämningen är ett examinerande moment. Om din inlämning är underkänd, eller om du har missat att lämna in den i rätt tid, får du möjlighet att lämna in den vid de angivna ominlämningstillfällena 22/8-24/8 eller 5/9-7/9. Underkänd inlämning kan inte kompletteras, utan måste lämnas in igen i dess helhet vid de angivna ominlämningstillfällena.

Uppgifter

Lös och redovisa följande uppgifter i en py-fil med namnet **inlamn5.py** som laddas upp på Canvas. Varje uppgift löses i en separat cell, där du börjar med skriva vilken uppgift det handlar om, t.ex. uppgift 1, uppgift 2 etc.

1. Följ exempel 15.5 på sidan 188 i kompendiet och skriv ett program som plottar funktionen $f(x) = x^2$ och dess derivata $f'(x)$ i intervallet $[-2, 2]$. För att få en bra approximation på derivatan, använd 2000 punkter.

   Du ska få en plot som den i figuren nedan.



2. Låt $L(t)$ vara längden av en organism som funktion av organismens ålder t. Enligt von Bertalanffys tillväxthypotes, se `https://sv.wikipedia.org/wiki/Ludwig_von_Bertalanffy`, är organismens längdökning per tidsenhet, $\dfrac{dL}{dt}$, proportionell mot $L_{\max} - L$ där $L_{\max}$ är organismens fulla längd (organismen växer fort i början då $L_{\max} - L$ är stor, men då organismen närmar sig sin fulla längd, och $L_{\max} - L$ är nära noll, går tillväxten allt långsammare). Vi har alltså

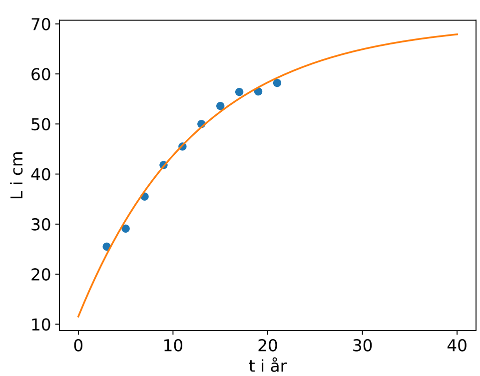
$$\frac{dL}{dt} = r(L_{\max} - L).$$

(a) Lös differentialekvationen i intervallet $[0, 40]$ och plotta lösningen då $L_{\max} = 68.5$ och $r = 0.1$. Antag att $L(0) = 18$. jämför exempel 16.4 i kompendiet.

(b) Vi har följande längder för rödspätta

t i år	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
L i cm	25.5	29.1	35.5	41.8	45.5	50.0	53.6	56.4	56.5	58.2

Gör en mintsakvadratanpassning och bestäm r, $L_{\max}$ och $L(0)$. Plotta uppmätta längder tillsammans med anpassningfunktionen i samma figur, se exempel 16.5 på sidan 198 i kompendiet. Plotten ska se ut som i figuren nedan.



(c) Massan $M(t)$ och längden $L(t)$ hos organismen är ofta relaterade enligt

$$M(t) = \alpha L(t)^{\nu},$$

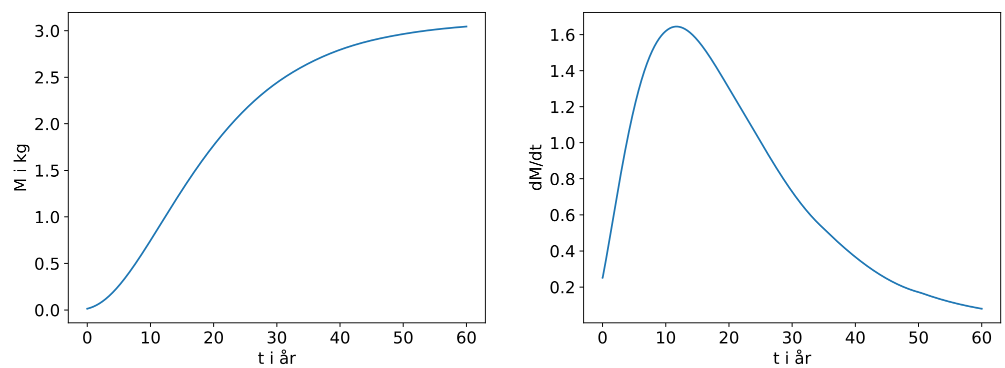
där α och ν är positiva konstanter. Då $\nu = 3$ har vi isometrisk tillväxt, som innebär att organismen bevarar sina proportioner vid tillväxten. För rödspätta gäller att

$$M(t) = 0.00000892\, L(t)^3,$$

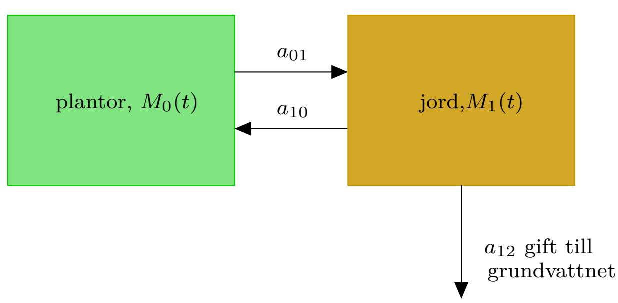
där M mäts i kilo och L i cm. Plotta $M(t)$ som funktion av t. Plotta även $M'(t)$ och bestäm vid vilken tid t masstillväxten är som störst, se avsnitt 15.6 och 15.7 i kompendiet.

(d) Använd ett skärminspelningsprogram och spela in en video där du förklarar, rad för rad, vad de olika kommandona i din lösning av uppgifterna (a) till (c) gör. Videon laddas upp på YouTube och du klipper in länken överst i den py-fil. Tips: om du skriver kommenterar till alla raderna i din kod går det enklare att prata till.

$M(t)$ och $M'(t)$ ska se ut som i figuren nedan.



3. Vid besprutning med bekämpningsmedel (insektsgift) hamnar en del av substansen på växterna medan en del hamnar i jorden. Gift transporteras från växten till jorden via ursköljning med regn och via löv som faller ner och förmultnar. Giftet i jorden återförs till växterna som en del av näringsupptaget via rötterna. Giftet i jorden minskar hela tiden då det följer med ner i grundvattnet. Vi har följande diagram för transport av giftet.



För att använda modellen måste man uppskatta eller mäta överföringskoefficienterna a_{01}, a_{10} och a_{12}. Från studier av besprutningseffekter på bananplantor fick man värdena $a_{01} = 0.25$, $a_{10} = 0.02$ och $a_{12} = 0.05$ per månad.

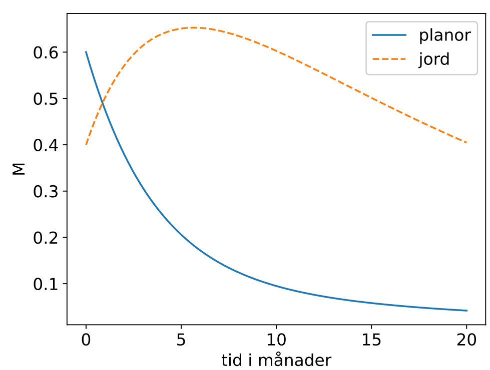
Låt, av en given mängd gift, $M_0(t)$ vara procenttalet i eller på plantorna och $M_1(t)$ vara procenttalet i jorden som funktion av tiden t i månader. Vi har då följande system av differentialekvationer

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{dM_0}{dt}}_{\substack{\text{ändring av procenttalet} \\ \text{i plantorna per tids-} \\ \text{enhet}}} = -\underbrace{0.25M_0}_{\substack{\text{utflöde till} \\ \text{jord}}} + \underbrace{0.02M_1}_{\substack{\text{inflöde från} \\ \text{jord}}} \\ \underbrace{\frac{dM_1}{dt}}_{\substack{\text{ändring av procenttalet} \\ \text{i jorden per tids-} \\ \text{enhet}}} = \underbrace{0.25M_0}_{\substack{\text{inflöde från} \\ \text{plantor}}} - \underbrace{(0.02+0.05)M_1}_{\substack{\text{utflöde till} \\ \text{plantor och} \\ \text{grundvatten}}} \end{cases}$$

(a) Lös systemet av differentialekvationer och plotta lösningarna i tidsintervallet $[0, 20]$ under antagandet att 60 % av giftet hamnar på plantorna, $M_0(0) = 0.6$, och att 40 % hamnar på marken, $M_1(t) = 0.4$.

(b) Från din plott, skatta tiden vid vilken giftnivån i jorden är som högst.

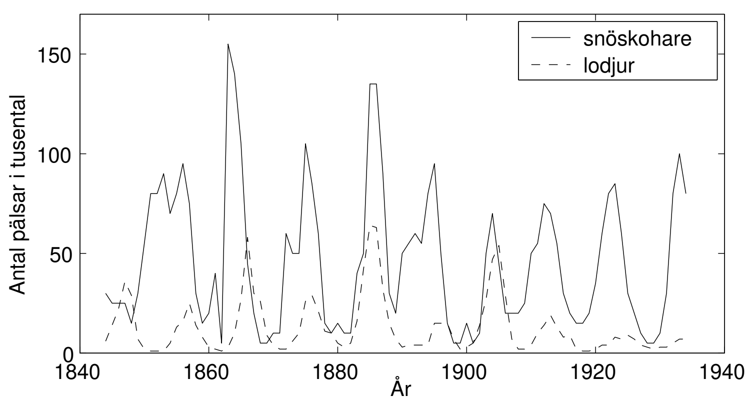
Din plott ska se ut som i figuren nedan. Tiden är ungefär $t = 5.6$ månader.



4. (Extrauppgift om du har lust) Lodjur och snöskohare är ett exempel på ett jägar-byte-system, se figur 1.

Figur 1: *Lodjur och snöskohare är ett exempel på ett jägar-byte-system.*

Det är välkänt att populationerna i ett sådana system har en tendens att svänga. The Hudson Bay Company, vilket är ett pälsföretag i Kanada, har bokfört antalet pälsar inkomna från lodjur och snöskoharar sedan 1840. Deras data visar att antalet pälsar, och därmed lodjurs och snöskohare populationerna själva, svänger med en förvånansvärd regelbundenhet, se figur 2.



Figur 2: *Antalet sålda pälsar av snöskohare och lodjur.*

För att förklara svängningarna i populationerna i jägar-byte-system satte den italienske matematikern Volterra upp en modell för populationerna. Modellen bygger på följande antaganden:

(a) bytena tillväxer exponentiellt om jägaren inte håller dem under kontroll

(b) jägaren är beroende av bytet för att överleva

(c) antalet dödade bytesdjur per tidsenhet är proportionellt mot sannolikheten för ett möte mellan jägare och byte

(d) antalet födda jägare är proportionellt mot födointaget (antalet dödade byten) per tidsenhet.

Om vi låter $N_0(t)$ beteckna antalet bytesdjur och $N_1(t)$ antalet jägare så leder antagandena ovan till följande system av differentialekvationer

$$
\begin{cases}
\underbrace{\dfrac{dN_0}{dt}}_{\substack{\text{ändring av antalet}\\ \text{bytesdjur per tids-}\\ \text{enhet}}} = \underbrace{aN_0}_{\substack{\text{antal födda bytes-}\\ \text{djur per tidsenhet}}} - \underbrace{bN_0N_1}_{\substack{\text{antalet döda bytes-}\\ \text{djur per tidsenhet}\\ \text{på grund av jakt}}} \\
\underbrace{\dfrac{dN_1}{dt}}_{\substack{\text{ändring av antalet}\\ \text{jägare per tids-}\\ \text{enhet}}} = -\underbrace{cN_1}_{\substack{\text{antal döda jägare}\\ \text{per tidsenhet}}} + \underbrace{dN_0N_1}_{\substack{\text{antalet födda jägare}\\ \text{per tidsenhet}}}
\end{cases}
$$

(a) Lös ekvationssystemet med $a = 1$, $b = 0.03$, $c = 0.5$, $d = 0.013$, $N_0(0) = 90$, $N_1(0) = 40$. Plotta lösningarna i tidsintervallet $[0, 50]$.

(b) Plotta lösningen i det så kallade fasplanet, dvs. med N_0 på ena axeln och N_1 på andra axeln. Lös ekvationerna för lite olika begynnelsevärden och plotta lösningarna i fasplanet.

(c) Lös ekvationerna för lite olika värden på parameterarna a, b, c, d. Vilka parameterkombinationer ger kortare respektive längre oscillationstider?

Plottarna ska se ut som i figuren nedan