

Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

Prof. Pedro Sérgio Pereira Lima

Atividade 4

Danilo Calhes Paixão dos Santos - RA 11025215

1 Introdução

A presente Seção tem como objetivo fornecer os fundamentos necessários, enquanto a Seção 2 objetiva definir o ferramental usado para a aplicação do conhecimento e, por fim, a Seção 3 se encarrega de aplicar o conhecimento em um exemplo.

1.1 Mapa de Estados e classificação de equilíbrio

A descrição de um sistema em um plano \mathbb{R}^2 pode ser feita através de um mapa de estados, em que se apresenta a uma derivada no tempo de uma variável de estado ($\frac{dx_i}{dt}$) em função da variável de estado x_i . A análise de um mapa de estados tem como função interpretar o ponto de equilíbrio de um sistema.

Podemos, então classificar o equilíbrio de um sistema através da natureza das raízes que compõem o sistema.

Natureza das raízes	Classificação do Ponto de equilíbrio
Reais e com diferente polaridade	Sela
Reais e com iguais polaridades	Nó(estável ou instável)
Imaginárias sem parcela real	Centro
Imaginárias com complexo conjugado	Foco(estável ou instável)

Tabela 1: Relação entre raízes e classificação do equilíbrio do sistema.

Analisando a matriz de estados, a partir do traço e de sua determinante, também é possível obter o valor das raízes da equação característica(ou auto valores), tal como descrito na equação 1, e, desta forma conseguimos classificar o ponto de equilíbrio do sistema a partir dos valores e polaridades do determinante(D) e traço(T), como apresentado na Tabela 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$T = tr(\mathbf{A}) = k_1 + k_4$$

$$D = det(\mathbf{A}) = k_1k_4 - k_2k_3$$

$$\lambda_{12} = \frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{T^2 - 4D}}{2} \quad (1)$$

$D < 0$			Sela
$D > 0$	$T = 0$		Centro
	$T^2 > 4D$	$T < 0$	Nó estável
		$T > 0$	Nó instável
	$T^2 < 4D$	$T < 0$	Foco estável
		$T > 0$	Foco instável

Tabela 2: Relação entre determinante e traço do sistema e classificação do ponto de equilíbrio do sistema.

2 Metodologia

Dado o embasamento teórico definido na seção anterior, optou-se por utilizar a linguagem de programação *Python* e algumas de suas bibliotecas como *numpy*, para realização de computação numérica com módulos de álgebra linear, e *jupyter* para estruturação do código em formato de *notebook*¹.

3 Análise de um ponto de Sela

A partir do conjunto de equações diferenciais que definem um sistema de segunda ordem e definindo variáveis de estados, podemos definir um sistema matricial que o descreve o sistema através das equações 2.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

Para a análise aqui feita, o termo forçante \mathbf{u} será nulo, dado que ele apenas desloca o ponto de equilíbrio do sistema. Podemos descrever um sistema de segunda ordem através de sua matriz canônica de estados \mathbf{A} , tal como é apresentado a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos que o traço e o determinante da matriz é dado por:

$$T = tr(\mathbf{A}) = -a_1$$

$$D = det(\mathbf{A}) = a_0$$

¹Os códigos aqui descritos ficarão disponibilizados no dia seguinte à data limite de entrega do relatório em <https://github.com/dancps/asdl>.

Ao estabelecermos a condição $D < 0$, para qualquer valor de traço estabelece-se um ponto de equilíbrio de tipo Sela. Desta maneira:

$$D < 0 \Rightarrow a_0 < 0$$

Inicialmente definimos um valor arbitrário arbitrário de $a_1 = 10$ e um valor $a_0 = -3.4$, de maneira a atender à condição imposta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3.4 & -10 \end{bmatrix}$$

Resolve-se, então o sistema de maneira a obter nas Figuras 1 e 2.

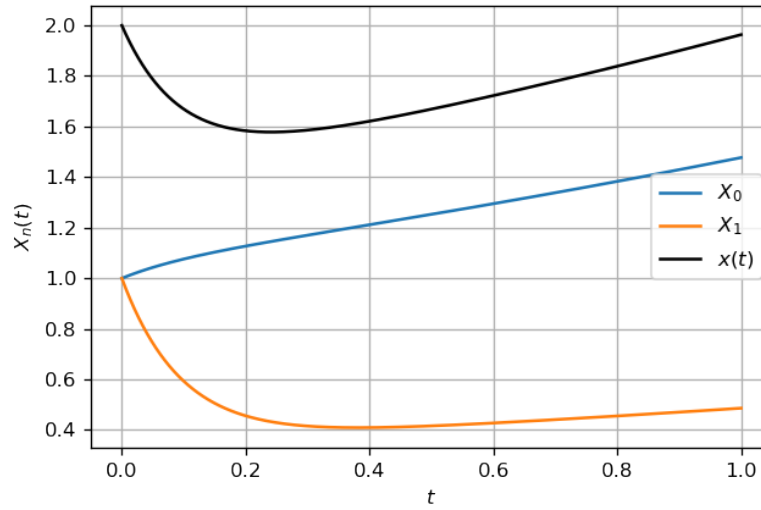


Figura 1: Componentes rápida e lenta do sistema.

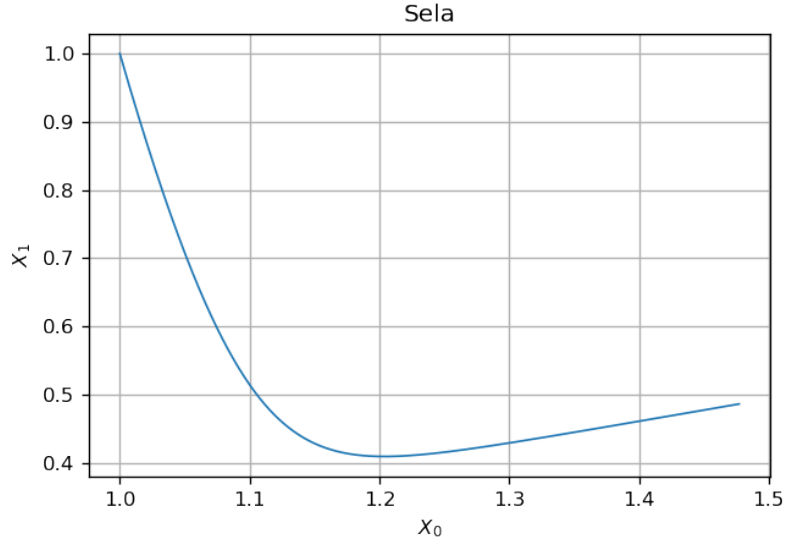


Figura 2: Representação gráfica das variáveis de estado.

De maneira a analisar o comportamento para diversos parâmetros, fixou-se o valor de a_0 em -3.4 e variou-se a_1 no intervalo -10 a 10:

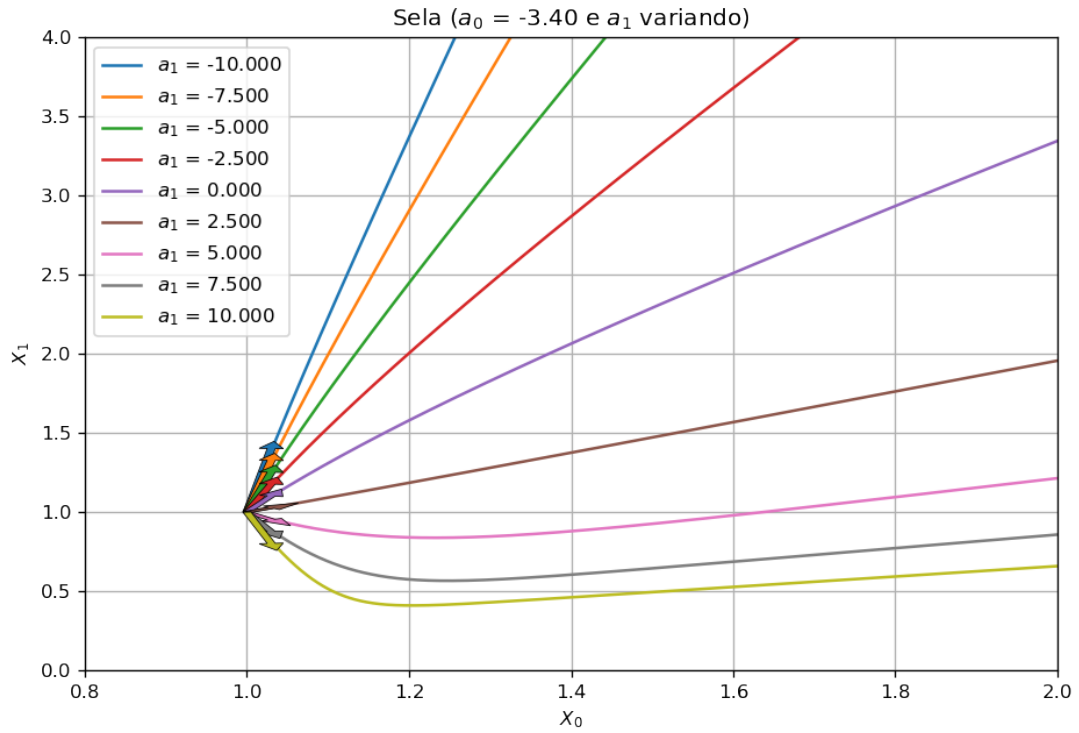


Figura 3: Análise de sensibilidade para a_1 , com a_0 negativo e fixo.

Por fim, a fim de testar a influência de a_0 , fixou-se o valor de a_1 em -7.5 e 7.5 e variou-se a_0 entre -4 e -10, como é apresentado nas Figuras 4 e 5, respectivamente:

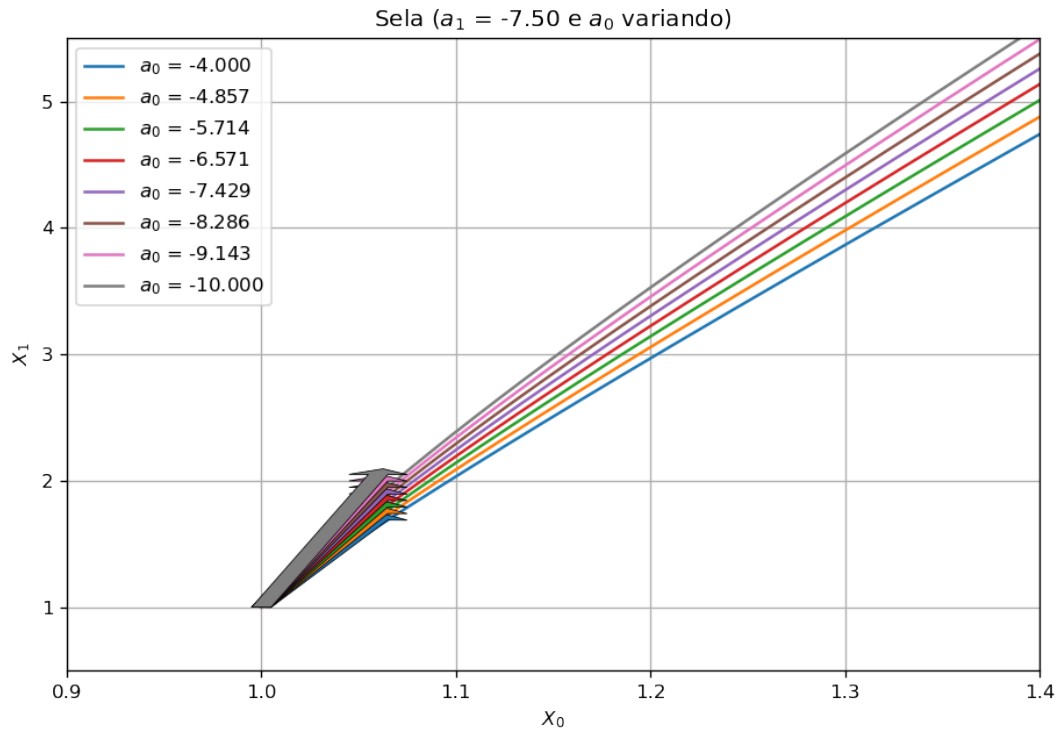


Figura 4: Análise de sensibilidade para a_1 negativo e a_0 variando.

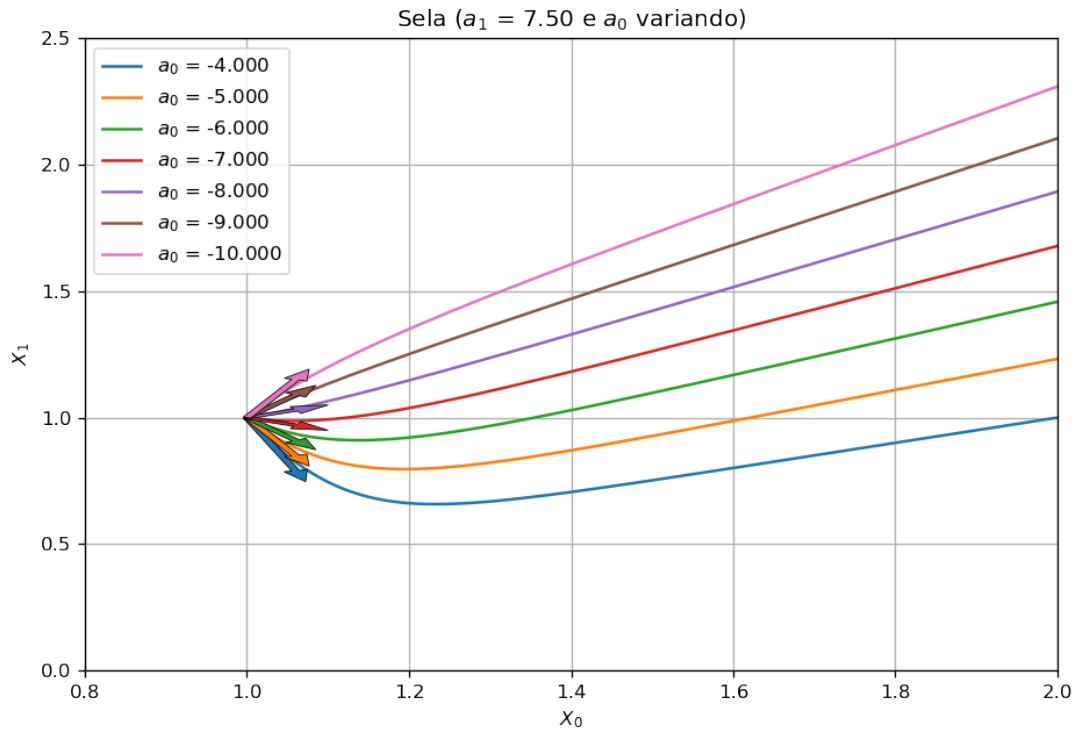


Figura 5: Análise de sensibilidade para a_1 positivo e a_0 variando.