Примене Теорије Група

Даниел Силађи

11. јануар 2014.

Садржај

1 Мотивација, групе и симетрије **2**
1.1 Симетрије раванских фигура 3
1.2 Симетрије тродимензионалних тела 4
1.3 Симетрије у физици 5

2 Увод у теорију група **6**
2.1 Основне дефиниције 6
2.2 Симетрична група S_n, пермутације 7
2.3 Лагранжова теорема 7
2.4 Инваријантне подгрупе, фактор група 7

3 Теорија група у физици **8**
3.1 Векторски простор 8
3.2 Изометријске трансформације n-димензионог простора 8
3.3 Дводимензионалне тачкасте кристалографске групе 8
3.4 Lorentz-ова група 9

4 Закључак **11**

Глава 1

Мотивација, групе и симетрије

У свакодневном животу се често дешава да се сусрећемо са предметима за које кажемо да су "симетрични". Шта је заправо симетрија? На пример, можемо рећи да је неки објекат симетричан ако "изгледа исто" кад га гледамо са различитих тачака гледишта.
Формалније, симетрија неког објекта је нека трансформација у простору која пресликава тај објекат на њега самог. Временом, људи су приметили да све овакве трансформације имају још нека својства, карактеристична за све трансформације:

1. Трансформације симетрије су бијективе, тј. за сваку трансформацију постоји инверзна трансформација која "поништава" њен ефекат, и доводи објекат у почетно стање. На пример, у случају ротације за угао φ око неке осе, инверзна трансформација је ротација за угао $-\varphi$, односно $2\pi - \varphi$ око исте те осе. Неке трансформације, попут осне симетрије могу бити и саме себи инверзне.

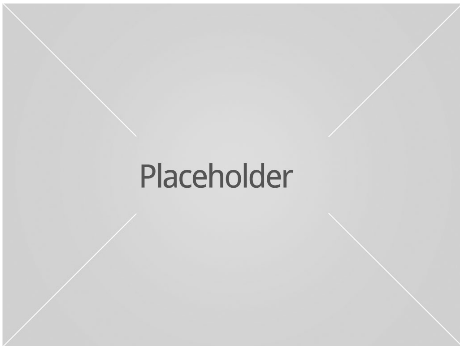
2. Комбиновањем (композицијом) две трансформације такође добијамо трансформацију. На пример, композиција две ротације (са заједничком осом ротације) је опет ротација, композиција две симетрије може бити транслација или ротација, ...

3. Сваки објекат има једну (тривијалну) симетрију, идентичко пресликавање, које слика сваку тачку у њу саму.

Касније ћемо видети да скуп трансформација (и уопште било каквих апстрактних математичких објеката) са оваквим својствима чини *групу* (групу трансформација у овом случају).

1.1 Симетрије раванских фигура

За почетак, кренимо од неких једноставнијих фигура, правилних многоуглова. Опет, од њих је најједноставнији (једнакостранични) троугао.

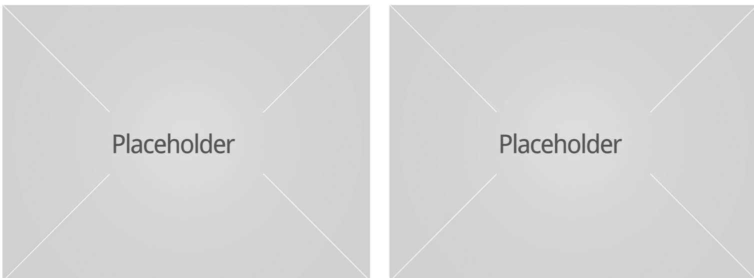


Слика 1.1: Симетрије једнакостраничног троугла

Као што видимо, постоји 6 трансформација симетрије:

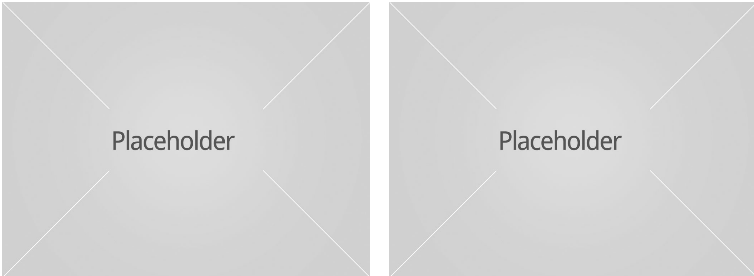
- Ротације око центра троугла: r (за $\pi/3$), $r \circ r = r^2$ (за $2\pi/3$) и $r \circ r \circ r = r^3 = e$ (за 2π, односно 0 радијана - идентичко пресликавање)
- Осне симетрије s_1, s_2 i s_3 у односу на праве ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Приметимо да опет важи $s_i \circ s_i = s_i^2 = e$, за $i \in \{1, 2, 3\}$, али и $s_1 s_2 = r^2$, ...

Слично се дешава и код квадрата и правилног шестоугла, само са више оса симетрије и већим степеном ротационе симетрије:

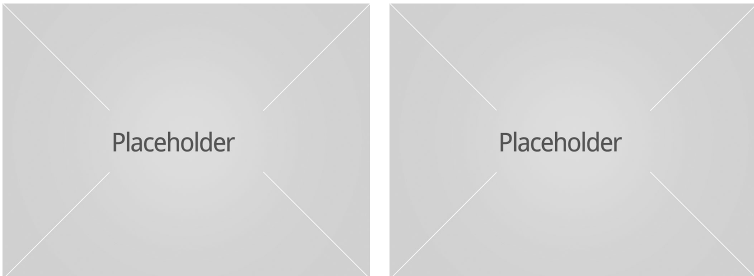


Слика 1.2: Simetrije kvadrata i pravouglog šestougla

Са друге стране, постоје и примери код којих се јавља и транслациона симетрија. Јасно је да то морају бити бесконачни цртежи код којих се један или више основних елемената понављају по једној (*frieze*) или две димензије (*wallpaper*). Интересантно је да се обе врсте оваквих цртежа могу потпуно класификовати у зависности од симетрија које поседују. Тако имамо 7 frieze-група и 17 wallpaper-група трансформација.



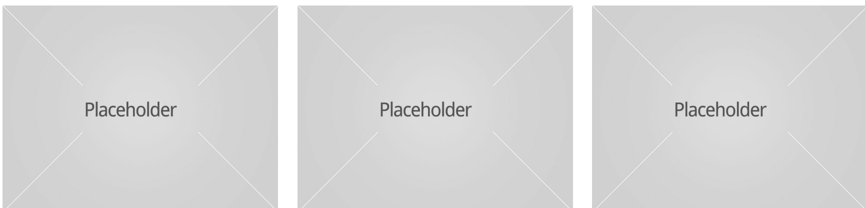
Слика 1.3: Primeri frieze crteža



Слика 1.4: Примери wallpaper-a

1.2 Симетрије тродимензионалних тела

У три димензије, добро су познате симетрије правилних полиедара (тетраедра, коцке, октаедра и икосаедра), али су значајне и групе симетрија молекула и кристала (кристалографске групе), које се такође могу комплетно класификовати, као у дводимензионалном случају.



(a) Молекул (b) Молекул (c) Кристална решетка

1.3 Симетрије у физици

Коначно, симетрије нашег простора (Poincaré-ова и Lorentz-ова група у специјалној теорији релативности) произилазе из свих квантних теорија поља, док је сам Стандардни Модел (најприхваћенија таква теорија) базиран на унутрашњим симетријама групе $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (касније ће бити бити објашњено шта то значи).

Глава 2

Увод у теорију група

2.1 Основне дефиниције

Као што је већ било речено, елементи неке групе не морају нужно да буду трансформације, већ елементи произвољног скупа G, за које смо дефинисали операцију "множења" (формално: операцију групе) која задовољава следеће особине:

1. Ако a и b припадају G, онда и њихов производ, ab припада G
2. Операција множења је асоцијативна, односно важи $a(bc) = (ab)c$
3. G садржи *јединични елемент* e, за који важи $ae = ea = a$, за свако $a \in G$
4. За свако $a \in G$ постоји $b \in G$, за које важи $ab = ba = e$. Такав b се зове *инверзни елемент* за a, и обележава се са b^{-1}

Иако операцију групе често називамо "множењем", она заправо и може а и не мора то да буде:

- Скуп рационалних (или реалних) бројева без 0 чини групу у односу на множење (у уобичајеном смислу)
- Скуп целих (али не и природних!) бројева чини групу у односу на сабирање
- Скуп свих инвертибилних (њихова детерминанта је различита од 0) квадратних матрица димензија $n \times n$ чини групу, а операција групе је множење матрица.

Али, чак и у овим примерима нисмо причали о апстрактим групама, него о њиховим конкретним примерима, реализацијама. Структура неке апстрактне групе је задата искључиво дефинисањем операције множења сваког уређеног пара елемената, било набрајањем или на неки други начин, али без позивања на "природу" тих елемената.
Приметимо да операција множења не мора бити комутативна (нпр код множења матрица), али ако јесте, односно ако за свако $a, b \in G$ важи $ab = ba$, онда је група

G комутативна или *Абелова*.
Број елемената у групи назива се *ред групе*.
Ако одаберено неки елемент a групе G, можемо га помножити са самим собом и добити производ aa, који ћемо обележавати са a^2. У оптштем случају, производ

$$\underbrace{aa...a}_{n \text{ пута}}$$

обележавамо са a^n. Слично, можемо дефинисати и негативне степене a:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

Ако су сви степени a различити, кажемо да је *a бесконачног реда*. Иначе, исписивањем степена a, наићи ћемо на два природна броја r и s, $r > s$, за које важи

$$a^r = a^s.$$

Множењем обе стране једнакости са a^{-s}, добијамо

$$a^{r-s} = a^0 = e, r - s > 0.$$

Нека је n најмањи број за који је $a^n = e$, $n > 0$. Тада је *n ред елемента a*.

Primeri: brojevi (sta jeste i sta nije), transformacije, simetrije Klasifikacija grupa sa 2, 3, 4 elementa, primer da 1 grupa moze imati vise od 1 realizacije, izomorfizam

2.2 Симетрична група S_n, пермутације

Definicija permutacije, ciklusi, parnost. Definicija simetricne grupe cayleyeva teorema

2.3 Лагранжова теорема

2.4 Инваријантне подгрупе, фактор група

Konjugacija, unutrasnji automorfizam, invarijantna (normalna) podgrupa, faktor grupa, homomorfizam. Veza homomorfizma i normalnih podgrupa.

Глава 3

Теорија група у физици

3.1 Векторски простор

Definicija vektorskog prostora Linearne transformacije, veza sa matricama Skalarni proizvod (unitaran vektorski prostor). Ortogonalnost, cuvanje skalarnog proizvoda.

3.2 Изометријске трансформације n-димензионог простора

Moze biti i nad R GL(N, C) - opsta linearna grupa SL(N, C) - specijalna linearna grupa U(N, C) - unitarna grupa SU(N, C) - specijalna unitarna grupa O(N, C) - ortogonalna grupa SO(N, C) - specijalna ortogonalna

3.3 Дводимензионалне тачкасте кристалографске групе

Дефиниција 1 (Мрежа)**.** Šta je mreža...

Дефиниција 2. Група $G \subseteq O(n, \mathbb{R})$ у односу на коју је мрежа реда n инваријантна се зове *кристалографска тачкаста група*, ако

***Теорема* 1.** *Свака кристалографска тачкаста група у две димензије је коначна*

Доказ. Једноставном провером добијамо да се свака изометрија која чува неку тачку O може представити као ротација око тачке O, осна симетрија у односу на неку праву која пролази кроз O, или као композиција неке такве ротације и осне симетрије. Јасно је да је довољно показати да имамо коначно много ротација, јер додавањем осних симетрија у (коначну) групу C_n, реда n, добијамо такође коначну групу D_n, реда $2n$.
Дакле, претпоставимо супротно, да је група G кристалографска тачкаста група

у све димензије, и садржи бесконачно много ротација. Пошто је свака ротација одређена са једним реалним бројем из $[0, 2\pi)$, за свако $\epsilon > 0$ по Дирихлеовом принципу можемо наћи $f, g \in G$, такве да је $f \neq g$ и $|f - g| \leq \epsilon$. Без умањења општости, претпоставимо да је $f > g$. Пошто је G група, и $f - g$ припада G, односно G садржи ротацију за произвољно мали угао. То је контрадикција са дискретношћу мреже коју очувава дата група G (јер добијамо да можемо наћи произвољно блиске тачке у тој мрежи). □

***Последица* 1.** *У две димензије тачкасте кристалографске групе могу бити само облика C_n и D_n, за $n \in \mathbb{N}$*

***Теорема* 2.** *За дату кристалографску групу G, која чува решетку у $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, њена подгрупа ротација H може бити искључиво реда 1, 2, 3, 4, или 6.*

Доказ. Директном конструкцијом добијамо да постоје решетке у две и три димензије, које су инваријантне при свакој од ротација за $2\pi/n$, за $n \in 1, 2, 3, 4, 6$. Остаје да се покаже да је $n \neq 5$ и $n \leq 6$.
Уочимо неку тачку A те решетке, и посматрајмо њена растојања од свих осталих тачака те решетке. Пошто је решетка дискретна, постоји тачка B, која је најближа тачки A, на удаљености $d = |AB|$.
У случају да је $n > 6$, посматрамо троугао $\triangle ABC$, при чему је C тачка решетке настала ротирањем тачке B око A, за угао $\varphi = 2\pi/n$. По косинусној теореми, $|BC|^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos\varphi$, односно $|BC| = d\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}$. За $n = 6$ добијамо да је $|BC| = d$, а за све остале $n > 6$ важи да је $\cos(2\pi/n) > \frac{1}{2}$, односно $|BC| < d$, што је контрадикција са минималношћу d.
Дакле, остаје случај $n = 5$. Тада уочимо правилни петоугао странице d чија су темена на решетци. Због особина групе G и решетке, ивице тог петоугла можемо пресложити у петокраку звезду, тако да њена темена и даље буду на решетци. Наравно, темена те звезде су и даље темена неког правилног петоугла, али са мањом страницом $d' < \frac{d}{2}$. Овај поступак можемо понављати произвољан број пута, и тако добити тачке те решетке на произвољно малој удаљености, што је контрадикција са дискретношћу решетке. □

3.4 Lorentz-ова група

Постоји један интересантан хомоморфизам између $SL(2, \mathbb{C})$ и Lorentz-ове групе L, групе свих линеарних трансформација векторског простора $\mathbb{R}^4$ које чувају Lorentz-ову метрику

$$|x| := x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Сваком вектору $x \in \mathbb{R}^4$ придружимо једну 2×2 матрицу $\psi(x)$, на следећи начин:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix},$$

тако да важи $|x| = det(\psi(x))$. Тада, пресликавање $\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \to L$, дато са $\varphi(A)(x) = \psi^{-1}(A\psi(x)A^*)$ је хомоморфизам, при чему се матрица $A*$ добија транспоновањем матрице A и коњуговањем свих њених елемената. И заиста, ψ је линеарни изоморфизам из $\mathbb{R}^4$ у

$$\psi(\mathbb{R}^4) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, u \in \mathbb{C} \text{ i } \overline{x} = x, \overline{y} = z, \overline{u} = u \right\}$$

Може се проверити да је овај простор инваријантан под $M \to AMA^*$, за свако $A \in GL(2, \mathbb{C})$. Такође, за $A \in SL(2, \mathbb{C})$, $\varphi(A)$ чува метрику, због мултипликативних својстава детерминанте:

$$|\varphi(A)(x)| = \det(\psi(\varphi(A)(x))) = \det(A\psi(x)A^*) = \det(A)\det(\psi(x))\det(A^*) = \det(\psi(x)) = |x|$$

Глава 4

Закључак