GIMNAZIJA JOVAN JOVANOVIĆ ZMAJ

MATURSKI RAD

Primene Teorije Grupa

Daniel Silađi

Novi Sad, januar 2014.

Sadržaj

1. Motivacija, grupe i simetrije

U svakodnevnom životu se često dešava da se susrećemo sa predmetima za koje kažemo da su ”simetrični”. Šta je zapravo simetrija? Na primer, možemo reći da je neki objekat simetričan ako ”izgleda isto” kad ga gledamo sa različitih tačaka gledišta.
Formalnije, simetrija nekog objekta je neka transformacija u prostoru koja preslikava taj objekat na njega samog. Vremenom, ljudi su primetili da sve ovakve transformacije imaju još neka svojstva, karakteristična za sve transformacije:

1. Transformacije simetrije su bijektive, tj. za svaku transformaciju postoji inverzna transformacija koja ”poništava” njen efekat, i dovodi objekat u početno stanje. Na primer, u slučaju rotacije za ugao φ oko neke ose, inverzna transformacija je rotacija za ugao $-\varphi$, odnosno $2\pi - \varphi$ oko iste te ose. Neke transformacije, poput osne simetrije mogu biti i same sebi inverzne.

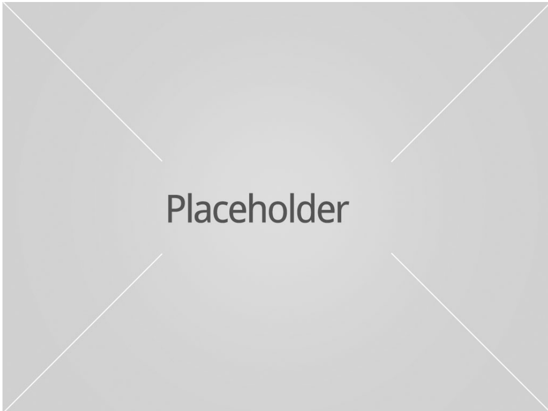
2. Kombinovanjem (kompozicijom) dve transformacije takođe dobijamo transformaciju. Na primer, kompozicija dve rotacije (sa zajedničkom osom rotacije) je opet rotacija, kompozicija dve simetrije može biti translacija ili rotacija, ...

3. Svaki objekat ima jednu (trivijalnu) simetriju, identičko preslikavanje, koje slika svaku tačku u nju samu.

Kasnije ćemo videti da skup transformacija (i uopšte bilo kakvih apstraktnih matematičkih objekata) sa ovakvim svojstvima čini *grupu* (grupu transformacija u ovom slučaju).

1.1. Simetrije ravanskih figura

Za početak, krenimo od nekih jednostavnijih figura, pravilnih mnogouglova. Opet, od njih je najjednostavniji (jednakostranični) trougao.

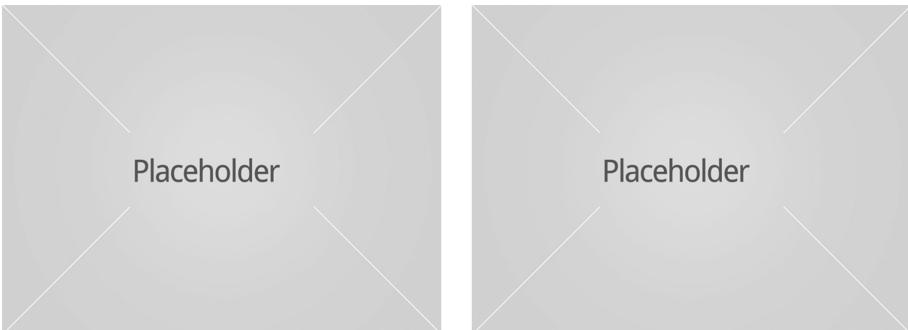


Slika 1.1: Simetrije jednakostraničnog trougla

Kao što vidimo, postoji 6 transformacija simetrije:

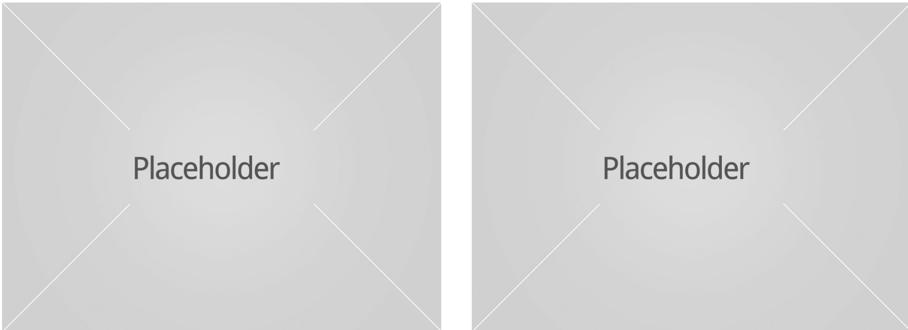
- Rotacije oko centra trougla: r (za $\pi/3$), $r \circ r = r^2$ (za $2\pi/3$) i $r \circ r \circ r = r^3 = e$ (za 2π, odnosno 0 radijana - identičko preslikavanje)
- Osne simetrije s_1, s_2 i s_3 u odnosu na prave ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Primetimo da opet važi $s_i \circ s_i = s_i^2 = e$, za $i \in \{1, 2, 3\}$, ali i $s_1 s_2 = r^2$,...

Slično se dešava i kod kvadrata i pravilnog šestougla, samo sa više osa simetrije i većim stepenom rotacione simetrije:

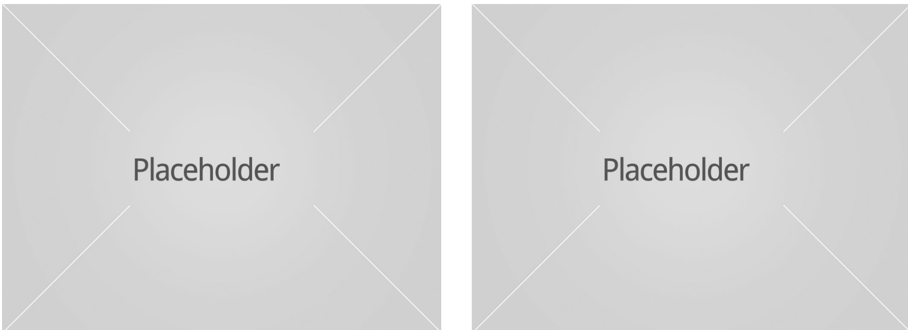


Slika 1.2: Simetrije kvadrata i pravouglog šestougla

Sa druge strane, postoje i primeri kod kojih se javlja i translaciona simetrija. Jasno je da to moraju biti beskonačni crteži kod kojih se jedan ili više osnovnih elementata ponavljaju po jednoj (frieze) ili dve dimenzije (wallpaper). Interesantno je da se obe vrste ovakvih crteža mogu potpuno klasifikovati u zavisnosti od simetrija koje poseduju. Tako imamo 7 frieze-grupa i 17 wallpaper-grupa transformacija.



Slika 1.3: Primeri frieze crteža



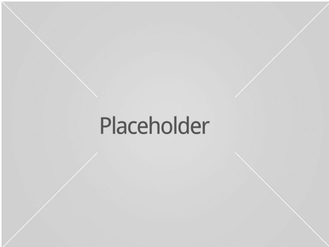
Slika 1.4: Primeri wallpaper-a

1.2. Simetrije trodimenzionalnih tela

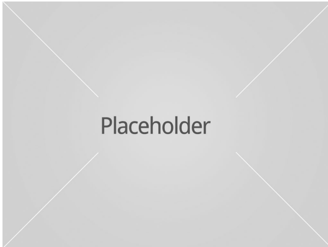
U tri dimenzije, dobro su poznate simetrije pravilnih poliedara (tetraedra, kocke, oktaedra i ikosaedra), ali su značajne i grupe simetrija molekula i kristala (kristalografske grupe), koje se takođe mogu kompletno klasifikovati, kao u dvodimenzionalnom slučaju.

1.3. Simetrije u fizici

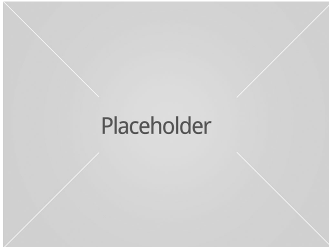
Konačno, simetrije našeg prostora (Poincaré-ova i Lorentz-ova grupa u specijalnoj teoriji relativnosti) proizilaze iz svih kvantnih teorija polja, dok je sam



(a) Molekul



(b) Molekul



(c) Kristalna rešetka

Standardni Model (najprihvaćenija takva teorija) baziran na unutrašnjim simetrijama grupe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (kasnije će biti biti objašnjeno šta to znači).

2. Uvod u teoriju grupa

2.1. Osnovne definicije

Kao što je već bilo rečeno, elementi neke grupe ne moraju nužno da budu transformacije, već elementi proizvoljnog skupa G, za koje smo definisali operaciju "množenja" (formalno: operaciju grupe) koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Ako a i b pripadaju G, onda i njihov proizvod, ab pripada G
2. Operacija množenja je asocijativna, odnosno važi $a(bc) = (ab)c$
3. G sadrži *jedinični element* e, za koji važi $ae = ea = a$, za svako $a \in G$
4. Za svako $a \in G$ postoji $b \in G$, za koje važi $ab = ba = e$. Takav b se zove *inverzni element* za a, i obeležava se sa b^{-1}

Iako operaciju grupe često nazivamo "množenjem", ona zapravo i može a i ne mora to da bude:

- Skup racionalnih (ili realnih) brojeva bez 0 čini grupu u odnosu na množenje (u uobičajenom smislu)
- Skup celih (ali ne i prirodnih!) brojeva čini grupu u odnosu na sabiranje
- Skup svih invertibilnih (njihova determinanta je različita od 0) kvadratnih matrica dimenzija $n \times n$ čini grupu, a operacija grupe je množenje matrica

Ali, čak i u ovim primerima nismo pričali o apstraktim grupama, nego o njihovim konkretnim primerima, realizacijama. Struktura neke apstraktne grupe je zadata isključivo definisanjem operacije množenja svakog uređenog para elemenata, bilo nabrajanjem ili na neki drugi način, ali bez pozivanja na "prirodu" tih elemenata. Primetimo da operacija množenja ne mora biti komutativna (npr kod množenja matrica), ali ako jeste, odnosno ako za svako $a, b \in G$ važi $ab = ba$, onda je grupa G komutativna ili *Abelova*.
Broj elemenata u grupi naziva se *red grupe*.

Ako odabereno neki element a grupe G, možemo ga pomnožiti sa samim sobom i dobiti proizvod aa, koji ćemo obeležavati sa a^2. U opštem slučaju, proizvod $\underbrace{aa...a}_{n \text{ puta}}$ obeležavamo sa a^n. Slično, možemo definisati i negativne stepene a:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

Ako su svi stepeni a različiti, kažemo da je a *beskonačnog reda*. Inace, ispisivanjem stepena a, naići ćemo na dva prirodna broja r i s, $r > s$, za koje važi

$$a^r = a^s.$$

Množenjem obe strane jednakosti sa a^{-s}, dobijamo

$$a^{r-s} = a^0 = e, r - s > 0.$$

Neka je n najmanji broj za koji je $a^n = e$, $n > 0$. Tada je n *red elementa* a.

Primeri: brojevi (sta jeste i sta nije), transformacije, simetrije Klasifikacija grupa sa 2, 3, 4 elementa, primer da 1 grupa moze imati vise od 1 realizacije, izomorfizam

2.2. Simetrična grupa S_n, permutacije

Definicija permutacije, ciklusi, parnost. Definicija simetricne grupe cayleyeva teorema

2.3. Lagranžova teorema

2.4. Invarijantne podgrupe, faktor grupa

Konjugacija, unutrasnji automorfizam, invarijantna (normalna) podgrupa, faktor grupa, homomorfizam. Veza homomorfizma i normalnih podgrupa.

3. Teorija grupa u fizici

3.1. Vektorski prostor

Definicija vektorskog prostora Linearne transofrmacije, veza sa matricama Skalarni proizvod (unitaran vektorski prostor). Ortogonalnost, cuvanje skalarnog proizvoda.

3.2. Izometrijske transofrmacije n-dimenzionog prostora

Moze biti i nad R GL(N, C) - opsta linearna grupa SL(N, C) - specijalna linearna grupa U(N, C) - unitarna grupa SU(N, C) - specijalna unitarna grupa O(N, C) - ortogonalna grupa SO(N, C) - specijalna ortogonalna

3.3. Dvodimenzionalne tačkaste kristalografske grupe

Definicija 1 (Mreža)**.** Šta je mreža...

Definicija 2. Grupa $G \subseteq O(n, \mathbb{R})$ u odnosu na koju je mreža reda n invarijantna se zove *kristalografska tačkasta grupa*, ako

Teorema 1. *Svaka kristalografska tačkasta grupa je konačna*

Dokaz. Dokazaćemo ovu teoremu u dve dimenzije: Jednostavnom proverom dobijamo da se svaka izometrija koja čuva neku tačku O može predstaviti kao rotacija oko tačke O, osna simetrija u odnosu na neku pravu koja prolazi kroz O, ili kao kompozicija neke takve rotacije i osne simetrije. Jasno je da je dovoljno pokazati da imamo konačno mnogo rotacija, jer dodavanjem osnih simetrija u (konačnu)

grupu C_n, reda n, dobijamo takođe konačnu grupu D_n, reda $2n$.
Dakle, pretpostavimo suprotno, da je grupa G kristalografska tačkasta grupa u sve dimenzije, i sadrži beskonačno mnogo rotacija. Pošto je svaka rotacija određena sa jednim realnim brojem iz $[0, 2\pi)$, za svako $\epsilon > 0$ po Dirihleovom principu možemo naći $f, g \in G$, takve da je $f \neq g$ i $|f - g| \leq \epsilon$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $f > g$. Pošto je G grupa, i $f - g$ pripada G, odnosno G sadrži rotaciju za proizvoljno mali ugao. To je kontradikcija sa diskretnošću mreže koju očuvava data grupa G (jer dobijamo da možemo naći proizvoljno bliske tačke u toj mreži). $\square$

Posledica 1. *U dve dimenzije tačkaste kristalografske grupe mogu biti samo oblika C_n i D_n, za $n \in \mathbb{N}$*

Teorema 2. *Za datu kristalografsku grupu G, koja čuva rešetku u $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$, njena podgrupa rotacija H može biti isključivo reda 1, 2, 3, 4, ili 6.*

Dokaz. Direktnom konstrukcijom dobijamo da postoje rešetke u dve i tri dimenzije, koje su invarijantne pri svakoj od rotacija za $2\pi/n$, za $n \in 1, 2, 3, 4, 6$. Ostaje da se pokaže da je $n \neq 5$ i $n \leq 6$.
Uočimo neku tačku A te rešetke, i posmatrajmo njena rastojanja od svihostalih tačaka te rešetke. Pošto je rešetka diskretna, postoji tačka B, koja je najbliža tački A, na udaljenosti $d = |AB|$.
U slučaju da je $n > 6$, posmatramo trougao $\triangle ABC$, pri čemu je C tačka rešetke nastala rotiranjem tačke B oko A, za ugao $\varphi = 2\pi/n$. Po kosinusnoj teoremi, $|BC|^2 = 2d^2 - 2d^2 \cos\varphi$, odnosno $|BC| = d\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}$. Za $n = 6$ dobijamo da je $|BC| = d$, a za sve ostale $n > 6$ važi da je $\cos(2\pi/n) > \frac{1}{2}$, odnosno $|BC| < d$, što je kontradikcija sa minimalnošću d.
Dakle, ostaje slučaj $n = 5$. Tada uočimo pravilni petougao stranice d čija su temena na rešetci. Zbog osobina grupe G i rešetke, ivice tog petougla možemo presložiti u petokraku zvezdu, tako da njena temena i dalje budu na rešetci. Naravno, temena te zvezde su i dalje temena nekog pravilnog petougla, ali sa manjom stranicom $d' < \frac{d}{2}$. Ovaj postupak možemo ponavljati proizvoljan broj puta, i tako dobiti tačke te rešetke na proizvoljno maloj udaljenosti, što je kontradikcija sa diskretnošću rešetke. $\square$

3.4. Lorencova grupa

Postoji jedan interesantan homomorfizam između $SL(2,\mathbb{C})$ i Lorencove grupe L, grupe svih linearnih transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ koje čuvaju Lorencovu metriku

$$|x| := x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Svakom vektoru $x \in \mathbb{R}^4$ pridružimo jednu 2×2 matricu $\psi(x)$, na sledeći način:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix},$$

tako da važi $|x| = det(\psi(x))$. Tada, preslikavanje $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \to L$, dato sa $\varphi(A)(x) = \psi^{-1}(A\psi(x)A^*)$ je homomorfizam, pri čemu se matrica $A*$ dobija transponovanjem matrice A i konjugovanjem svih njenih elemenata. I zaista, ψ je linearni izomorfizam iz $\mathbb{R}^4$ u

$$\psi(\mathbb{R}^4) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \middle| x, y, z, u \in \mathbb{C} \text{ i } \overline{x} = x, \overline{y} = z, \overline{u} = u \right\}$$

Može se proveriti da je ovaj prostor invarijantan pod $M \to AMA^*$, za svako $A \in GL(2,\mathbb{C})$. Takođe, za $A \in SL(2,\mathbb{C})$, $\varphi(A)$ čuva metriku, zbog multiplikativnih svojstava determinante:

$$|\varphi(A)(x)| = \det(\psi(\varphi(A)(x))) = \det(A\psi(x)A^*) = \det(A)\det(\psi(x))\det(A^*) = \det(\psi(x)) = |x|$$

4. Zaključak

Zaključak.