Домашняя работа

Методы условной оптимизации

Студент: Д.Д.Наумов
Группа: 8О-306Б-17

Задание

Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами.

При 1-ом способе изготовления x_1 изделий требуется затрат, равных $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1 2$, а при 2-ом способе затраты на изготовления x$_2$ изделий составляет $b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2$

Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.

Вариант

Номер по списку: 15

$f_1(x_1) = 7.5 + 450x_1 + 11.25x_1^2$

$f_2(x_2) = 8.5 + 900x_2 + 3.75x_2^2$

$d = 40$

1 Метод Лагранжа

1. Рассматриваемая функция: $F(x_1, x_2) = 16 + 450x_1 + 11.25x_1^2 + 900x_2 + 3.75x_2^2$

   Уравнение связи: $x_1 + x_2 = 40$

2. Составим вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 16 + 450x_1 + 11.25x_1^2 + 900x_2 + 3.75x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 40)$$

3. Необходимое условие эксремума функции $L(x_1, x_2, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 22.5x_1 + 450 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 7.5x_2 + 900 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 40 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 15 \\ \lambda = -1012.5 \end{cases}$$

4. Дифференцирование условия связи: $dx_1 + dx_2 = 0$

5. Проверка на минимум:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} &= 22.5 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} &= 7.5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 22.5 & 0 \\ 0 & 7.5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = a_{11} = 22.5 > 0 \\ &\Delta_2 = \begin{vmatrix} 22.5 & 0 \\ 0 & 7.5 \end{vmatrix} = 168.75 > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{минимум}$$

2 Метод штрафных функций

1. $m = 1$. Ограничение $g(x) = x_1 + x_2 - 40 = 0$
2. Составим вспомогательную функцию:

$$F(x_1, x_2, r_k) = 16 + 450x_1 + 11.25x_1^2 + 900x_2 + 3.75x_2^2 + \frac{r_k}{2}(x_1 + x_2 - 40)^2$$

3. Необходимые и достаточные условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 22.5x_1 + 450 + r_k(x_1 + x_2 - 40) = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 7.5x_2 + 900 + r_k(x_1 + x_2 - 40) = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

$(2) - (1) = 7.5x_2 - 22.5x_1 + 450 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 60$

Подставим результат в (1):

$$22.5x_1 + 450 + r_k(4x_1 - 100) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{100r_k - 450}{22.5 + 4r_k} \\ x_2 = 3\dfrac{100r_k - 450}{22.5 + 4r_k} - 60 = \dfrac{60r_k - 2700}{22.5 + 4r_k} \end{cases}$$

4. Составим матрицу Гессе:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22.5 + r_k & r_k \\ r_k & 7.5 + r_k \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta_1 = a_{11} = 22.5r_k \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 22.5 + r_k & r_k \\ r_k & 7.5 + r_k \end{vmatrix} = 30r_k + 168.75 \end{matrix}\right\}$$

5. Итерационный процесс:

k	r_k	$x_1(r_k)$	$x_2(r_k)$	$F(x_1(r_k), x_2(r_k), r_k)$	$\lambda = r_k g(x_1(r_k), x_2(r_k), r_k)$
0	10	8.8	-33.6	997	-648.0
1	100	22.6	7.81	27944	-958.58
2	1000	22.75	14.24	32147	-1006.84
3	∞	25	15	32641	-1012.5

6. Предельный переход:

$$x_1 = \lim_{r_k \to \infty} \frac{100r_k - 450}{22.5 + 4r_k} = 25$$

$$x_2 = \lim_{r_k \to \infty} \frac{60r_k - 2700}{22.5 + 4r_k} = 15$$

$$\lambda = \lim_{r_k \to \infty} r_k \left(\frac{100r_k - 450}{22.5 + 4r_k} + \frac{60r_k - 2700}{22.5 + 4r_k} - 40 \right)$$