Расчетно-графическая работа

Методы безусловной оптимизации

Студент: Д.Д.Наумов
Группа: 8О-306Б-17

1 Классический метод

Функция: $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$

Задание: Найти экстремум и определить его тип (max или min) для заданной функции $f(x)$ классическим методом, используя необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Решение:

1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 + 45$

   $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + 6x_2 - 15$

2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 45 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 15 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -23x_2 = -105 \\ x_1 = 15 - 6x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = \frac{105}{23} \approx 4.6 \\ x_1 = -\frac{285}{23} \approx -12.4 \end{cases}$

   $x^{\text{ст}} = \begin{pmatrix} -12.4 \\ 4.6 \end{pmatrix}$

3. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} = 4 \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_2} = 6 \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$

   $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\Delta_1 = 4$

   $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 23$

5. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow x^{\text{ст}} -$ точка min

2 Градиентный метод с постоянным шагом

Задание: Задать начальную точку и выполнить четыре шага градиентным методом с постоянным шагом.

Решение:

1. $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$

   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h = 0.1,\ \varepsilon = 0.1,\ k = 0$

   $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + 45 \\ x_1 + 6x_2 - 15 \end{pmatrix}$

Итерация 1:

2. $\nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix}$
3. $|\nabla f(x^{(0)})| \approx 47 > \varepsilon$

   Условие окончания не выполнено
4. $x^{(1)} = x^{(0)} - h\nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$
5. $f(x^{(1)}) = -184.5 < f(x^{(0)}) = 0$
6. $k = 1$

Итерация 2:

2. $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 28.5 \\ -10.5 \end{pmatrix}$
3. $|\nabla f(x^{(1)})| \approx 30 > \varepsilon$

   Условие окончания не выполнено
4. $x^{(2)} = x^{(1)} - h\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 28.5 \\ -10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.35 \\ 2.55 \end{pmatrix}$
5. $f(x^{(2)}) = -260 < f(x^{(1)}) = -184$
6. $k = 2$

Итерация 3:

2. $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 18.15 \\ -7.05 \end{pmatrix}$
3. $|\nabla f(x^{(2)})| \approx 19.5 > \varepsilon$

   Условие окончания не выполнено
4. $x^{(3)} = x^{(2)} - h\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -7.35 \\ 2.55 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 18.15 \\ -7.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.165 \\ 3.255 \end{pmatrix}$

5. $f(x^{(3)}) = -291 < f(x^{(2)}) = -260$
6. $k = 3$

Итерация 4:

2. $\nabla f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 11.595 \\ -4.635 \end{pmatrix}$
3. $|\nabla f(x^{(3)})| \approx 12.5 > \varepsilon$
   Условие окончания не выполнено
4. $x^{(4)} = x^{(3)} - h\nabla f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} -9.165 \\ 3.255 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 11.595 \\ -4.635 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.3245 \\ 3.7 \end{pmatrix}$
5. $f(x^{(4)}) = -304 < f(x^{(3)}) = -291$
6. $k = 4$

3 Метод наискорейшего спуска

Задание: Задать начальную точку и выполнить три шага методом наискорейшего спуска.
Решение:

1. $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$

   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h = 0.1,\ \varepsilon = 0.1,\ k = 0$

   $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + 45 \\ x_1 + 6x_2 - 15 \end{pmatrix}$

Итерация 1:

2. $\nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix}$

3. $|\nabla f(x^{(0)})| \approx 47 > \varepsilon$

   Условие окончания не выполнено

4. $x^{(1)}(h_0) = x^{(0)} - h_0 \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - h_0 \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5h_0 \\ 1.5h_0 \end{pmatrix}$

   $\left(\begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -165h_0 + 45 \\ 105h_0 - 15 \end{pmatrix} \right) = -9000h_0 + 2250 = 0$

   $h_0 = 0.25$

5. $x^{(1)} = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 3.75 \end{pmatrix}$

6. $k = 1$

Итерация 2:

2. $\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3.75 \\ -3.75 \end{pmatrix}$

3. $|\nabla f(x^{(1)})| \approx 5.3 > \varepsilon$

   Условие окончания не выполнено

4. $x^{(2)}(h_1) = x^{(1)} - h_1 \nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 3.75 \end{pmatrix} - h_1 \begin{pmatrix} 3.75 \\ -3.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.25 - 3.75h_1 \\ 3.75 + 3.75h_1 \end{pmatrix}$

   $\left(\begin{pmatrix} 3.75 \\ -3.75 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.75 - 11.25h_1 \\ -3.75 + 18.75h_1 \end{pmatrix} \right) = 22.7138 - 112.5h_1 = 0$

   $h_1 = 0.20$

5. $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

6. $k = 2$

Итерация 3:

2. $\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $|\nabla f(x^{(2)})| = 1.5 > \varepsilon = 0.1$

   Условие окончания не выполнено

4. $x^{(3)}(h_2) = x^{(2)} - h_2 \nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -12 \\ 4.5 \end{pmatrix} - h_2 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 1.5h_2 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

   $\left(\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 - 6h_2 \\ -1.5h_2 \end{pmatrix} \right) = 2.25 - 9h_2 = 0$

   $h_2 = 0.25$

5. $x^{(3)} = \begin{pmatrix} -12.375 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

6. $k = 3$

4 Метод покоординатного спуска

Задание: Задать начальную точку и выполнить три шага методом покоординатного спуска.
Решение:

1. $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$

   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h = 0.1,\ \varepsilon = 0.1,\ n = 2$

   $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + 45 \\ x_1 + 6x_2 - 15 \end{pmatrix}$

2. $l = 0$
3. $f(x^{(0)}) = 0$

Итерация 1:

4. $k = 1$
5. $\frac{\partial f(x^{k+nl-1})}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 45$
6. $\left|\left|\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}\right|\right| < \varepsilon$ - нет
7. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
8. $x^{(1)} = x^{(0)} - h\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot (45) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$
9. $f(x^{(1)}) = -162.0$
10. $f(x^{(1)}) = -162 < f(x^{(0)}) = 0$
11. $k \neq n$
12. k = 2

Итерация 2:

5. $\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2} = -19.5$
6. $\left|\left|\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2}\right|\right| > \varepsilon$
7. $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
8. $x^{(2)} = x^{(1)} - h\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2}e_2 = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot (-19.5) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1.95 \end{pmatrix}$
9. $f(x^{(2)}) = -188$
10. $f(x^{(2)}) = -188 < f(x^{(1)}) = -162$

11. $k = n \quad \Rightarrow \quad l = 1$

Итерация 3:

4. $k = 1$
5. $\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1} = 28.95$
6. $\left|\left|\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1}\right|\right| > \varepsilon$
7. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
8. $x^{(3)} = x^{(2)} - h\frac{\partial f(x^{(2)})}{\partial x_1}e_1 = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1.95 \end{pmatrix} - 0.1 \cdot (28.95) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.395 \\ 1.95 \end{pmatrix}$
9. $f(x^{(3)}) = -255.67$
10. $f(x^{(3)}) = -255 < f(x^{(2)}) = -188$
11. $k \neq n$
12. k = 2

5 Метод Гаусса-Зейделя

Задание: Задать начальную точку и выполнить два шага методом Гаусса-Зейделя.
Решение:

1. $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$
   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 0.1,\ n = 2$
2. $l = 0$
3. $f(x^{(0)}) = 0$

Итерация 1:

4. $k = 1$
5. $\frac{\partial f(x^{k+nl-1})}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 45$
6. $\left|\left|\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}\right|\right| > \varepsilon$ - продолжаем
7. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
8. $x^{(1)}(h_0) = x^{(0)} - h_0 \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - h_0 \cdot (45) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45h_0 \\ 0 \end{pmatrix}$
9. $f(x^{(1)}(h_0)) = 4050h_0^2 - 2025h_0$
10. $\frac{\partial f(x^{(1)}(h_0))}{\partial h_0} = 8100h_0 - 2025 = 0$
    $h_0 = 0.25$
11. $x^{(1)} = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 0 \end{pmatrix}$
12. $f(x^{(1)}) = -253 < f(x^{(0)}) = 0$
13. $k \neq n \ \Rightarrow \ k = 2$

Итерация 2:

5. $\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2} = -26.25$
6. $\left|\left|\frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2}\right|\right| > \varepsilon$ - продолжаем
7. $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
8. $x^{(2)}(h_1) = x^{(1)} - h_1 \frac{\partial f(x^{(1)})}{\partial x_2} e_2 = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 0 \end{pmatrix} - h_1 \cdot (-26.25) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 26.25h_1 \end{pmatrix}$
9. $f(x^{(2)}(h_1)) = 2067h_1^2 - 689.0625h_1 - 253$

10. $\frac{\partial f(x^{(2)}(h_1))}{\partial h_1} = 4134h_1 - 689 = 0$
    $h_1 \approx 0.17$
11. $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -11.25 \\ 4.46 \end{pmatrix}$
12. $f(x^{(2)}) = -310 < f(x^{(1)}) = -253$
13. $k = n \;\Rightarrow\; l = 1$
    Переходим к 4

6 Метод Ньютона

Задание: Задать начальную точку и выполнить один шаг методом Ньютона.
Решение:

1. $f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 45x_1 - 15x_2$

   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 0.1$

   $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + 45 \\ x_1 + 6x_2 - 15 \end{pmatrix}$

2. $\nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix}$

3. $\left|\nabla f(x^{(0)})\right| = \sqrt{45^2 + (-15)^2} \approx 47 > \varepsilon$

   Критерий окончания не выполнено

4. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 4$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6$ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$

   $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\Gamma(x_0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\Gamma^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & \frac{-1}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$

7. $\Delta_1 = \frac{6}{23} > 0, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{6}{23} & \frac{-1}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{4}{23} \end{vmatrix} = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \Gamma^{-1}(x_0) > 0$

8. $x^{(1)} = x^{(0)} - \Gamma^{-1}(x_0)\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{23} & \frac{-1}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{4}{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-275}{23} \\ \frac{105}{23} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -12 \\ 4.6 \end{pmatrix}$

7 Иллюстрация методов