Лабораторная работа N4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

1.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(\pi,y,t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(x,\pi,t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y).$$
Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1$.
2). $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$.
3). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

2.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0,$$
$$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(x, \frac{\pi}{2}\mu_2, t) = 0,$$
$$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y).$$
Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1$.
2). $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$.
3). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

3.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$$u(0,y,t) = \cosh(y)\exp(-3at),$$
$$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0,$$

$u(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t)=\frac{5}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0)=\cos(2x)\cosh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

4.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0,$

$u(0,y,t)=\cosh(y)\exp(-3at),$

$u(\frac{\pi}{4},y,t)=0,$

$u(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at),$

$u_y(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0)=\cos(2x)\cosh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

5.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0,$

$u(0,y,t)=\sinh(y)\exp(-3at),$

$u(\frac{\pi}{2},y,t)=-\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_y(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0)=\cos(2x)\sinh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

6.

$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a>0,$

$u(0,y,t)=\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_x(\frac{\pi}{4},y,t)=-2\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_y(x,0,t)=\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,\ln 2,t)=\frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x,y,0)=\cos(2x)\sinh(y).$

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

7.

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-xy\sin t,$

$u(0,y,t)=0,$

$u(1,y,t)=y\cos t,$

$u(x,0,t)=0,$
$u(x,1,t)=x\cos t,$
$u(x,y,0)=xy$.
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=xy\cos t$.

8.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-xy\sin t\ ,$$
$u(0,y,t)=0,$
$u(1,y,t)-u_x(1,y,t)=0,$
$u(x,0,t)=0,$
$u(x,1,t)-u_y(x,1,t)=0,$
$u(x,y,0)=xy$.
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=xy\cos t$.

9.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin x\sin y(\mu\cos\mu t+(a+b)\sin\mu t)\ ,$$
$u(0,y,t)=0,$
$u(\frac{\pi}{2},y,t)=\sin y\sin(\mu t),$
$u(x,0,t)=0,$
$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$
$u(x,y,0)=0$.
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.
2). $a=2, b=1, \mu=1$.
3). $a=1, b=2, \mu=1$.
4). $a=1, b=1, \mu=2$.

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin x\sin y(\mu\cos\mu t+(a+b)\sin\mu t)\ ,$$
$u(0,y,t)=0,$
$u_x(\pi,y,t)=-\sin y\sin(\mu t),$
$u(x,0,t)=0,$
$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$
$u(x,y,0)=0$.
Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.
2). $a=2, b=1, \mu=1$.
3). $a=1, b=2, \mu=1$.
4). $a=1, b=1, \mu=2$.