EMAP - Escola de Matemática Aplicada
Fundação Getúlio Vargas
Curvas e Superfícies

Geodésicas

Daniel Jacob Tonn

Professor(a): Asla Medeiros de Sá

Rio de Janeiro
28 de junho de 2023

Sumário

Introdução

Ao se aprofundar no estudo de superfícies surge um questionamento comum: qual a forma otimizada de se deslocar entre dois pontos da superfície percorrendo somente os pontos pertencentes à essa? A resposta para esse problema se chama curva *minimizante* e induz a um ramo de estudos da Geometria Diferencial que se chama *Geodésicas* .
A ideia original de geodésica surgiu na Grécia Antiga, onde os gregos buscavam otimizar o caminho entre duas localidades quaisquer sabendo que o caminho a ser percorrido não era plano. A noção foi formalizada com rigor a partir do século XVIII, com o surgimento do cálculo diferencial. No início do século XX, a teoria da relatividade geral, na qual as geodésicas têm um papel de destaque, veio definitivamente reforçar a importância do estudo destas curvas.
O objetivo final deste trabalho é abordar de forma suave e gentil o estudo das geodésicas, apresentando teoremas relacionados de forma clara e objetiva. Além disso, trabalhar um pouco das aplicações do tema na vida real.
No decorrer das demonstrações são utilizados resultados de outros campos da matemática que não são o foco deste trabalho. As conclusões não demonstradas encontram-se devidamente referenciadas no campo apêndice.

1 Conceitos introdutórios

1.1 Curvas

Definição 1. *Curva parametrizada. Uma curva parametrizada em* $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$$

sendo $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto. O conjunto imagem de* γ*,* $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$*, é dito traço de* γ*, e pode ser expresso em coordenadas cartesianas da seguinte forma:*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), t \in I$$

Se tivermos que $\gamma_i(t)$ *é diferenciável para todo* $i = 1, 2...n$*, então o vetor*

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)), t \in I$$

está bem definido e é chamado de vetor tangente (vetor velocidade) de γ *em* t*.*

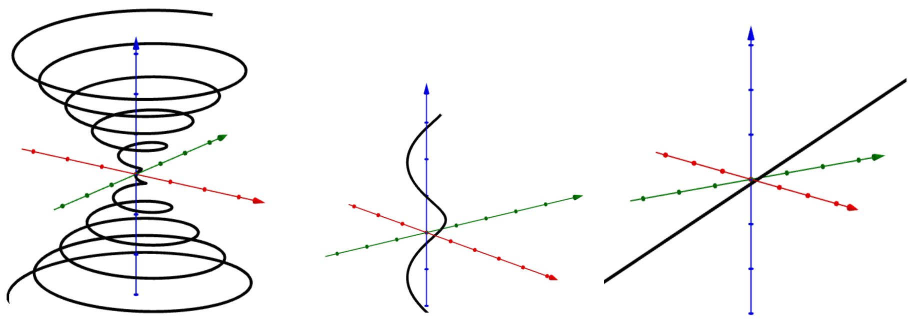


Figura 1: Curvas em $\mathbb{R}^3$

Definição 2. *Curva regular. Uma curva parametrizada é dita regular quando* $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I$ *Isto é, o vetor velocidade não se anula em nenhum ponto do intervalo aberto* I*.Intuitivamente, trata-se de uma curva sem "bicos"e contínua.*

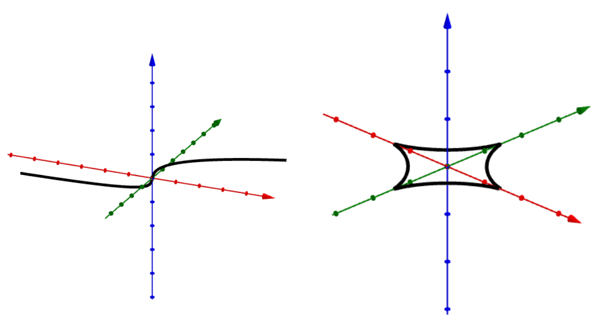


Figura 2: Esquerda: regular; Direita: não regular

Definição 3. *Curva simples. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é chamada de simples se para $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I$ termos*

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

Em outras palavras, chamamos uma curva de simples se ela não possuir auto intersecções.

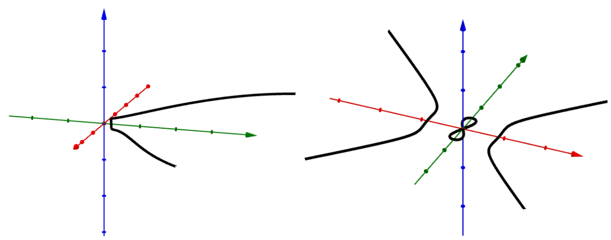


Figura 3: Esquerda: simples; Direita: não simples

Definição 4. *Curva planar. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é chamada de planar se possuir torção nula em todos os pontos. Como não há torções (Apêndice* **??***), a curva mora em um plano, o que designa a nomenclatura.*

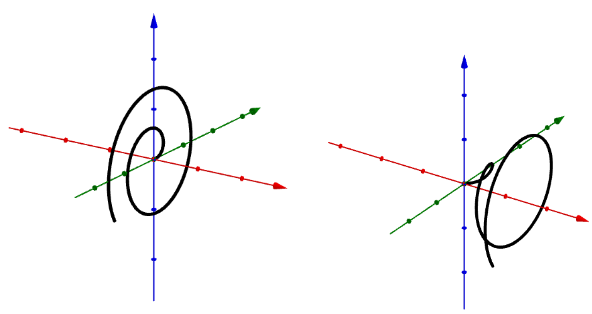


Figura 4: Esquerda: planar; Direita: não planar

1.2 Superfícies

Definição 5. *Superfícies regular.Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma Superfície Regular, quando é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, quando, para cada $p \in S$. existe um difeomorfismo*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$$

em que U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e V é um aberto relativo de S - isto é, a intersecção de um aberto de $\mathbb{R}^3$ com S que contém p. A aplicação X é dita, então, uma parametrização local de S em p.

Definição 6. *Superfície de revolução. Uma* ***superfície de revolução*** *é formada pelo rastro de rotação de uma curva simples plana em $\mathbb{R}^3$ ao redor de um eixo de rotação (uma reta que não intersecte essa curva).*

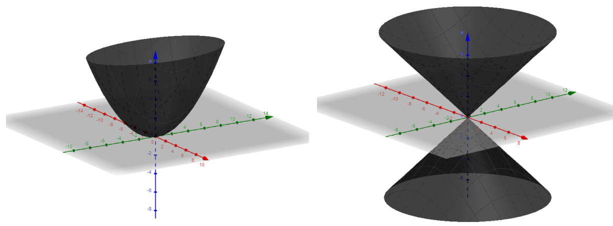


Figura 5: Esquerda: regular; Direita: não regular

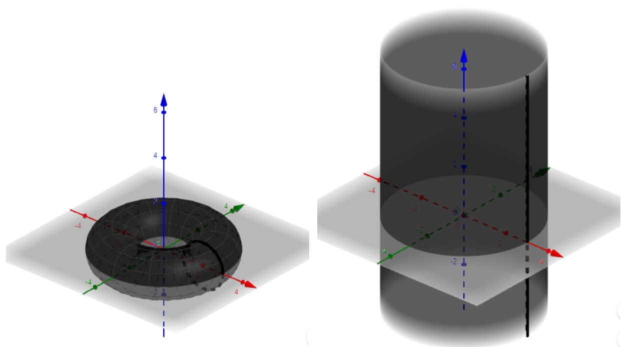


Figura 6: Esquerda: tórus; Direita: cilindro

Definição 7. *Superfície orientável. Uma* ***superfície de orientável*** *é aquela que permite orientação de vetores normais em todos os pontos, ou seja, para qualquer ponto $t \in S$ tem-se*

$$N(t) \neq 0$$

Em que $N(t)$ representa o vetor normal da superfície S no ponto t. Se a curva S estiver parametrizada por $X(u,v) : U \to S$, então o vetor normal pode encontrado pelo produto vetorial entre as derivadas parciais de X:

$$N(t) = \left| \frac{dS}{du} \times \frac{dS}{du} \right|$$

1.2.1 Primeira Forma Fundamental

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de uma superfície parametrizada $S(u,v)$, de derivadas parciais de primeira ordem X_u e X_v são, por definição

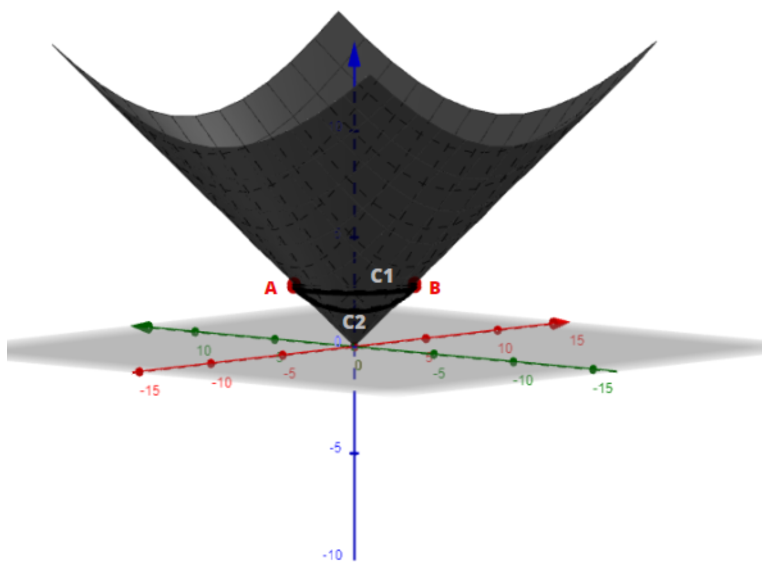
$$E = < X_u, X_u >$$

$$F = < X_u, X_v >$$

$$G = < X_v, X_v >$$

2 O que são geodésicas?

Antes de introduzir os conceitos de geodésica, se faz necessário o esclarecimento de uma sutil diferença em torno do tema *minimizantes*. Pode-se definir **curva minimizante** como o caminho de menor comprimento entre dois pontos quaisquer de uma superfície. Na geometria euclidiana, o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta que os conecta. Para superfícies não planas essa definição de menor distância como sendo um segmento de reta torna-se obsoleta. Consideremos por exemplo um cone,exibido parcialmente abaixo, contendo dois pontos $A = (x_A, y_A, z)$ e $B = (x_B, y_B, z)$ e duas curvas C_1 e C_2 também contidas nessa superfície. A curva C_1 é traçada a partir da intersecção de um plano paralelo ao plano XY.



A intuição é que C_1 minimiza a distância percorrida entre A e B, o que não é verdade pois girar em torno do cone sobre paralelos de menor raio equivale a uma menor distância percorrida. Todavia, é necessário levar em consideração o desvio feito com relação ao paralelo, que pode gerar uma distância menos eficiente. O equilíbrio entre esse desvio e minimizar a distância AB é descrito pela curva C_2. Ao se tratar da comparação de distâncias entre dois pontos através do comprimento de curvas é conveniente saber calcular tal grandeza. Dada uma curva regular $\gamma(t)$(parametrizada por comprimento de arco[1]), o comprimento L da curva γ para $t \in (a, b)$ é dado pela integral do módulo do vetor derivada no intervalo:

$$L = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt \tag{1}$$

Uma propriedade de extrema utilidade das curvas parametrizadas por comprimento de arco é a de possuírem derivada do vetor tangente perpendicular ao vetor tangente, ou

[1] Uma curva parametrizada por comprimento de arco possui o módulo do vetor derivada constante e igual a 1.

seja,

$$\gamma'(t) \perp \gamma"(t)$$

Se tal propriedade é cumprida, então é dito que essa curva possui aceleração tangencial nula. Todas as curvas que possuem aceleração tangencial nula são as **curvas geodésicas**. Em particular, uma curva minimizante é uma curva geodésica, mas a recíproca não é válida. Considere por exemplo uma esfera em $\mathbb{R}^2$. Tomados dois pontos distintos p_1 e p_2 não antípodos [2] são geradas duas curvas de aceleração tangencial nula, mas apenas uma das duas é minimizante. Dadas as discussões acima, pode-se formalizar o conceito de curvas geodésicas.

Definição 8. *Uma curva parametrizada diferenciável em uma superfície regular $S, \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$, é dita uma geodésica parametrizada se a derivada do vetor tangente é sempre perpendicular ao espaço tangente da superfície, ou seja, se para todo $p = \gamma(t) \in \gamma(I)$ temos $\gamma"(t) \in T_{\gamma(t)}S^{\perp}$.Analogamente, uma curva regular $C \subset S$ é dita uma geodésica de S se, para todo ponto $p \in C$, existe uma parametrização local $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to C$, de C em p, tal que γ é uma geodésica parametrizada.*

Uma das características importantes desse conjunto de curvas é a de serem todas regulares, conforme resultado do Teorema 1.

Teorema 1. *A norma do vetor velocidade de toda geodésica parametrizada é uma função constante.*

Demonstração: Vimos que toda curva geodésica é, por definição, uma curva regular, e portanto assume vetor derivada não nulo: $||\gamma'(t)|| \neq 0$. Tome o quadrado desse módulo e admita

$$||\gamma'(t)||^2 =< \gamma'(t), \gamma'(t) > .Ap\hat{e}ndice1$$

Derivando esse produto interno obtemos

$$\frac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = 2 < \gamma'(t), \gamma"(t) > .Ap\hat{e}ndice2$$

Tendo ainda que

$$\gamma'(t) \perp \gamma''(t) \implies < \gamma'(t), \gamma''(t) >= 0.Ap\hat{e}ndice3.$$

Substituindo na equação derivada:

$$\frac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = 2 < \gamma'(t), \gamma''(t) >= 0$$

Logo, se a derivada de $||\gamma'(t)||^2$ é 0, podemos assumir que $||\gamma'(t)||^2$ é constante e portanto $||\gamma'(t)||$ é contante. □

Para que uma curva de derivada constante em módulo seja geodésica é necessário que uma condição seja satisfeita. Condição esta discutida no teorema 2. Denotaremos por N o vetor normal à superfície $\gamma(t)$ em t e $a \times b$ a representação do produto vetorial entre os vetores a e b.

[2]**antípodo**: Que se encontra em lugar diametralmente oposto a outro.

Teorema 2. *Sejam N o vetor normal de uma superfície regular orientável S e $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to S$ uma curva diferenciável, cujo vetor velocidade tem norma constante. Então γ é uma geodésica se, e somente se,*

$$< \gamma"(t), N \times \gamma(t) >= 0 \ \forall \ t \in I$$

*Demonstração. (ida):*Suponha inicialmente que γ realmente é uma curva geodésica. Sabendo que o produto vetorial de dois vetores gera um vetor ortogonal à estes, temos que $N \times \gamma'(t)$ é ortogonal à $\gamma'(t)$ e à N. Pela *Definição* 8, temos que $\gamma"(t) \parallel N$ e portanto $\gamma"(t) \perp N \times \gamma'(t)$, o que implica produto vetorial nulo, satisfazendo a equação.
Demonstração. (volta): Queremos que $\gamma"(t) \parallel N$ para que $\gamma(t)$ seja geodésica. Para que isso ocorra basta provarmos que $\gamma"(t) \perp \gamma'(t)$ e $\gamma"(t) \perp N \times \gamma'(t)$ e como $\gamma"(t) \perp \gamma'(t)$ então resta $\gamma"(t)$ estar na direção do vetor N.
Observe que o conjunto dos vetores $\{\gamma'(t), N, N \times \gamma'(t)\}$ geram uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$e se um vetor é ortogonal a dois destes, então é paralelo ao terceiro (*Apêndice*??.
Pelo enunciado, temos que $\gamma'(t) \perp \gamma"(t)$ - o vetor velocidade ter norma constante implica ser ortogonal à sua derivada, conforme o *Teorema*??. Suponha que a equação do enunciado seja verídica por hipótese, então $\gamma"(t) \perp N \times \gamma'(t)$. Logo, se $\gamma"(t)$ é perpendicular à $\gamma'(t)$ e também à $N \times \gamma'(t)$, então é paralelo ao vetor N, o que caracteriza uma curva geodésica. □

Outras propriedades fundamentais desse grupo de curvas que são existência e unicidade a partir de um ponto em uma dada direção. Por questões estéticas deste arquivo, tais propriedades serão discutidas na próxima seção, por referenciarem diretamente as equações das geodésicas.

3 Equações das geodésicas

Tomemos uma parametrização local $X : U \to S$, de uma superfície regular orientável S, e consideremos, para cada $(u,v) \in U$, a base $\{Xu(u,v), Xv(u,v), N\}$ de $\mathbb{R}^3$. Em coordenadas com respeito a essa base, as funções vetoriais X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} escrevem-se como

$$\begin{cases} X_{uu} &= \Gamma^1_{11}X_u + \Gamma^2_{11}X_v + eN \\ X_{uv} &= \Gamma^1_{12}X_u + \Gamma^2_{12}X_v + fN \\ X_{vv} &= \Gamma^1_{22}X_u + \Gamma^2_{22}X_v + gN \end{cases} \tag{2}$$

A notação é interpretada da seguinte maneira:

$$\Gamma^i_{jk} \implies \begin{cases} i = & \begin{cases} 1, \text{ se multiplicado por } X_u \\ 2, \text{ se multiplicado por } X_v \end{cases} \\ jk = & \text{variável pela qual houve derivação parcial} \end{cases}$$

Os coeficientes e,f e g são chamados de coeficientes da *Segunda Forma Fundamental*, que discutiremos mais à frente e os coeficientes Γ^i_{jk} são chamados de símbolos de *Christoffel* e são funções definidas em U que podem ser expressas em função dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental. Para determinar quais são os coeficientes é exigido algebrismo. Para simplificação, vamos realizar o processo de determinar apenas os coeficientes associados a X_{uu}. Afim de determiná-los, vamos realizar operações tomando produtos internos.

$$< X_{uu}, N >=< (\Gamma^1_{11}X_u + \Gamma^2_{11}X_v + eN), N >$$

$$=< \Gamma^1_{11}X_u, N > + < \Gamma^2_{11}X_v, N > + < eN, N >$$

$$= \Gamma^1_{11} < X_u, N > +\Gamma^2_{11} < X_v, N > +e < N, N >$$

Como o vetor normal è perpendicular ao espaço tangente e a norma do vetor normal corresponde a 1:

$$< X_{uu}, N >= 0 + 0 + e||N||^2 = e \tag{3}$$

De forma análoga, tomando o produto interno entre X_{uv} e N e o produto interno entre X_{vv} e N:

$$< X_{uv}, N >= f \tag{4}$$

$$< X_{vv}, N >= g \tag{5}$$

Escrevendo também os vetores X_u e X_v nessa mesma base canônica e tomando o produto interno com X_{uu}:

$$< X_{uu}, X_u >= \Gamma^1_{11}||X_u||^2 + \Gamma^2_{11} < X_v, X_u > +e < N, X_u >$$

$$< X_{uu}, X_v >= \Gamma^1_{11} < X_u, X_v > +\Gamma^2_{11}||X_v||^2 + e < N, X_v >$$

Substituindo pela notação dos coeficientes da primeira forma fundamental:

$$< X_{uu}, X_u >= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F + 0 \tag{6}$$

$$< X_{uu}, X_v >= \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G + 0 \tag{7}$$

Agora, se tomarmos das derivadas parciais dos coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{array}{rc} E_u = & 2 < X_{uu}, X_u > \\ E_v = & 2 < X_{uv}, X_u > \\ F_u = & < X_{uu}, X_v > + < X_u, X_{uv} > \end{array} \tag{8}$$

De forma direta, temos

$$< X_{uu}, X_u > = \frac{E_u}{2} \tag{9}$$

Tomando o dobro de F_u e substituindo $2 < X_{uv}, X_u >$ por E_v:

$$2F_u = 2 < X_{uu}, X_v > + E_v$$

$$< X_{uu}, X_v > = F_u - \frac{E_v}{2} \tag{10}$$

Substituindo 9 e 10 em 6 e 7, respectivamente, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F & = & \frac{E_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G & = & F_u - \frac{E_v}{2} \end{cases} \tag{11}$$

Como $EG - F2 > 0$, a matriz de coeficientes tem determinante positivo. Logo, possui inversa, cujas entradas são funções de E, F e G. Portanto, o sistema acima tem uma solução única, de modo que $\Gamma_{11}^1 e \Gamma_{11}^2$ são funções de E, F, G, E_u, E_v e F_u. Concluimos que os coeficientes de *Christoffer* podem ser expressos como funções dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas de primeira ordem. Perante essas informações sobre os coeficientes de *Christoffer* podemos finalmente apresentar as equações de uma curva diferencial, conforme **??**

Preposição 1. *Equações diferenciáveis das geodésicas. Sejam S uma superfície regular, $X = X(u, v)$ uma parametrização local de S e*

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$$

uma curva diferenciável. Então γ é uma geodésica se, e somente se, as funções $u = u(t)$ e $v = v(t)$ satisfazem as equações

$$\begin{array}{ccccccccc} u" & + & (u')^2\Gamma_{11}^1 & + & 2u'v'\Gamma_{12}^1 & + & (v')^2\Gamma_{22}^1 & = & 0 \\ v" & + & (u')^2\Gamma_{11}^2 & + & 2u'v'\Gamma_{12}^2 & + & (v')^2\Gamma_{22}^2 & = & 0 \end{array} \tag{12}$$

em que os coeficientes de Christoffer são calculados em $(u(t), v(t))$.

Demonstração. Pela regra da cadeia temos que a derivada da curva é

$$\gamma' = u'X_u + v'X_v$$

Se derivarmos novamente com relação a t

$$\gamma" = \frac{d}{dt}u'X_u + \frac{d}{dt}v'X_v$$

$$\gamma" = u"X_u + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv}v"X_v$$

Para que γ seja geodésica, para cada $t \in I$ sua componente tangencial, ou seja, sua projeção em $T_{\gamma(t)}S$, deve ser nula. Seja $\alpha(t) := proj_{T_{\gamma(t)}S}\gamma"(s)$. Utilizando as equações obtidas em 2, podemos encontrar as coordenadas de α com relação à base X_u, X_v, obtendo, assim

$$\alpha(t) = AX_u + BX_v$$

onde

$$A = u"(u')^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + (v')^2\Gamma^1_{22} + (v')^2\Gamma^2_{22}$$
$$B = v" + (u')^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + (v')^2\Gamma^2_{22}$$

Concluímos então que $A = B = 0$ e portanto γ é uma geodésica se, e somente se, u e v satisfazem as equações do enunciado. $\square$

Preposição 2. *(Invariância das geodésicas por isometrias locais). Sejam $f : S_1 \to S_2$ uma isometria local entre superfícies regulares, S_1 e S_2 , e $\gamma : I \to S_1$ uma curva diferenciável. Então, γ é uma geodésica de S_1 se, e somente se, $f\gamma$ é uma geodésica de S_2 .*

Demonstração. Uma vez que o conceito de geodésica é local, podemos supor, sem perda de generalidade, que a imagem de γ está contida numa vizinhança parametrizada de S, $V = X(U)$, a qual é isométrica, via f, ao aberto $f(V) \subset S_2$. Sendo assim, temos que γ se escreve como $\gamma(t) = X(u(t), v(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$, $(u(t), v(t)) \in U$. Fazendo-se, então, $\sigma = f\gamma$ e $Y = fX$, tem-se, para todo $tinI$, que $\sigma(t) = Y(u(t), v(t))$. Porém, os coeficientes da primeira forma fundamental de X coincidem com os de Y. Consequentemente, vale o mesmo para os correspondentes símbolos de Christoffel. Portanto, as equações diferenciais 1 para γ e σ coincidem, donde se infere que uma delas será uma geodésica se, e somente se, a outra também o for. $\square$

Por fim, demonstraremos que as geodésicas de fato existem sobre uma superfície regular e que são únicas dado um ponto e uma direção.

Preposição 3. *(Existência e unicidade de geodésicas). Dados um ponto p de uma superfície regular S e $w \in TpS$ existem um intervalo aberto I que contenha* 0 *e uma única geodésica $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(0) = w$.*

Demonstração. Vamos demonstrar a existência de funções $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ tais que a curva γ definida por $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica com as propriedades desejadas. Com esse fim, vamos identificar quais condições iniciais u e v devem satisfazer. Para que tenhamos $\gamma(0) = p$, devemos ter

$$(u(0), v(0)) = X_1(p) =: (u0, v0) \tag{13}$$

Além disso, veja que

$$\gamma(0) = \left[\frac{d}{dt}X(u(t), v(t))\right]_{t=0}$$
$$= dX_{(u(0),v(0))}(u(0), v(0))$$

Portanto, supondo 13, para termos $\gamma(0) = w$ devemos ter

$$(u(0), v(0)) = dX^{-1}_{(u0,v0)}(w) \tag{14}$$

De fato, essas condições já nos garantem a existência e unicidade de γ. Basta perceber que as equações 12 são da forma

$$\begin{cases} u = f(u, v, u, v) \\ v = g(u, v, u, v) \end{cases}$$

em que f e g são funções diferenciáveis, e utilizar o teorema da existência e unicidade para soluções de equações diferenciais ordinárias. Com isso, existe um único intervalo I que contenha 0 e uma única solução $(u(t), v(t))$, com $t \in I$, que cumpre 13 e 14, de modo que a curva $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ onde $t \in I$, é a única geodésica de S, a qual cumpre as condições $\gamma(0) = p$ e $\gamma(0) = w$.

$\square$

4 Exemplos

4.1 Cilindro

Sabendo que retas são geodésicas de um plano e adotando a preposição 2, somos capazes de determinar quais sao as equações das geodésicas de um cilindro de equação

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$$

que dado um ponto e uma direção, só pode gerar retas, círculos ou hélices. Para tal, vamos considerar o plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0$ e a isometria

$$f : U \subset S \to f(U) \subset S^1 \times \mathbb{R}, U = \{(x, y) \in S; -\pi < x < \pi\}$$

dada por $f(x, y, z) = (cosx, senx, y)$ Logo, as geodésicas do cilindro são as imagens dos segmentos de reta pela aplicação f.

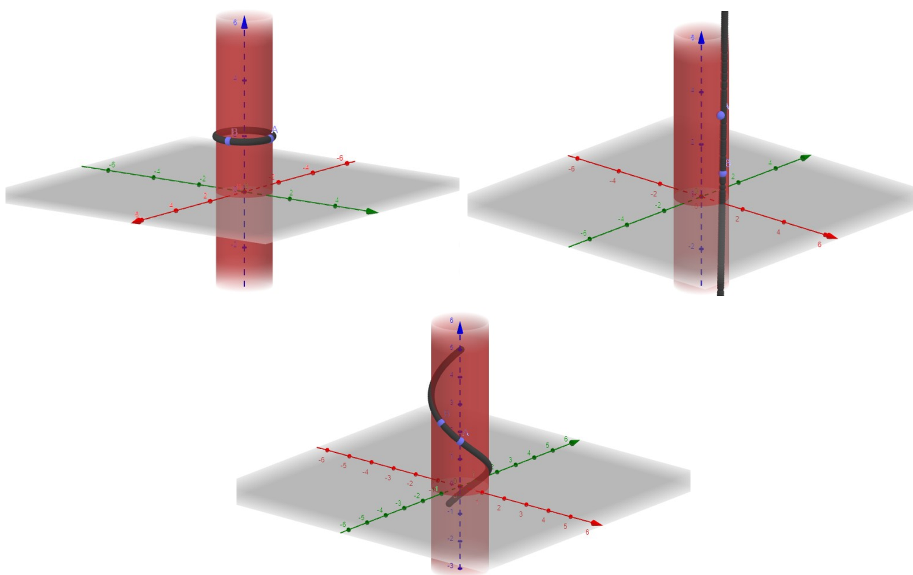


Figura 7: Geodésicas do cilindro

4.2 Esfera

Para encontrar as geodésicas da esfera vamos prosseguir por um argumento mais geométrico. Perceba que o grande arco C de S_2 de equação parametrizada $\gamma(\theta) = (cos(\theta), sen(\theta), 0)$ tem aceleração $\gamma"(\theta) = -(cos(\theta), sen(\theta)) = -\gamma(\theta)$. Como $T_{\gamma(t)}S_2 = \gamma(t) \perp$, temos que $\gamma"(t)$ é perpendicular ao espaço tangente em $\gamma(t)$. Podemos concluir então que $\gamma(t)$ descreve, de fato, uma geodésica. Como todo grande arco é a imagem C por uma rotação, que preserva isometria, então todo grande arco de S_2 é uma geodésica.

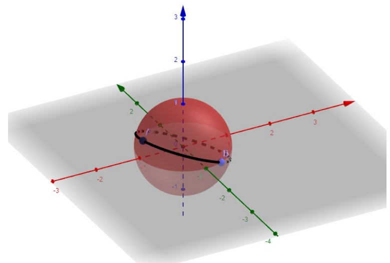


Figura 8: Geodésicas da esfera

4.3 Tórus

Podemos parametrizar o tórus por

$$X(u,v) = ((a + rcosu)cosv, (a + rcosu)senv, rsenu), (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Como o tórus é uma superfície de revolução, todos os seus meridianos são geodésicas, conforme [1]. Seus paralelos são geodésicas desde que $f'(u) = (a+rcosu)' = -rsenu$ seja 0, o que só ocorre em $u = 0$ e $u = \pi$. Se $u = 0$, a geodésica será

$$\alpha_1 = ((a + r)cosv, (a + r)senv, 0)$$

que equivale à circunferência externa do tórus. Se $u = \pi$ a geodésica será

$$\alpha_2 = ((a - r)cosv, (a - r)senv, 0)$$

ou seja, a circunferência interna do tórus. As demais geodésicas do todo são caracterizadas por

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{f}\sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}}$$

onde $f(u) = a + rcosu$, $f'(u) = -rsenu$ e $g'(u)rcosu$. Daí,

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{a + rcosu}\sqrt{\frac{r^2sen^2u + r^2cos^2u}{(a + rcosu)^2 - c^2}}$$

de onde se conclui que

$$v(u) = cr\int \frac{1}{(a + rcosu)\sqrt{(a + rcosu)^2 - c^2}}du$$

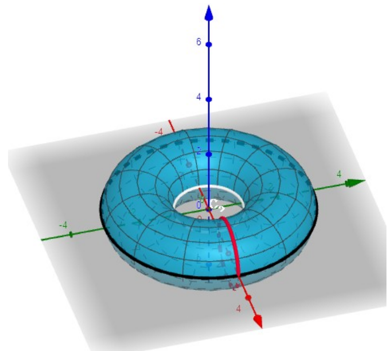


Figura 9: Geodésicas do tórus

5 Geodésicas na prática

Para além dos gregos, as curvas geodésicas possuem aplicações importantes na otimização de rotas. A construção de rodovias, ferrovias e viadutos é feita baseando-se na minimização de distâncias, apesar de existirem muitas outras variáveis a serem impostas além da menor distância, como custo-benefício, limitação do terreno, declividade, etc.
De forma análoga, as rotas pré-estabelecidas para navegação marítima também levam em conta as curvas geodésicas numa superfície com menos desdobramentos (superfície do mar).
Também são aplicáveis na análise de movimento de objetos em espaços tridimensionais. Elas ajudam a calcular as trajetórias ideais para que um objeto se mova de um ponto a outro, minimizando a distância percorrida. Nas populares animações, as interações de movimento de cada parte do personagem ou objeto são modelados de acordo com essas curvas, permitindo uma maior fluidez dos movimentos e gerando uma perspectiva mais realista. Fora das telas, o movimento de equipamentos robóticos também usufrui de tal tema. Isso é especialmente relevante em robôs móveis, como os autônomos ou braços robóticos, onde é necessário evitar obstáculos e otimizar o movimento para alcançar metas específicas.
A teoria da relatividade geral de Albert Einstein também possui aplicações. Nesse contexto, as curvas geodésicas são usadas para descrever as trajetórias que as partículas seguem em um espaço-tempo curvo sob a influência da gravidade. Se um foguete é lançado num espaço que sofra muita influência gravitacional de diferentes objetos, que por conseguinte geram um espaço-tempo mais distorcido, a curvas realizada pelo foguete é, nada mais, que uma geodésica. No ramo da óptica, o comportamento da luz também segue um comportamento geodésico. Dessa vez, as curvas geradas pelos feixes de luz não são suaves, isto é, mudam bruscamente de direção como nas reflexões do espelho, gerando curvas irregulares formadas a partir de segmentos de retas, à menos de proximidade de buracos negros, onde o comportamento da luz deixa de ser retilíneo.

6 Sugestão de leitura

Apêndice 1. *[2], página 5. [3], página 56. Observação*

Apêndice 2. *[4], Capítulo 4.2 - Exemplo 56.*

Apêndice 3. *[3], Definição 4.12.*

Apêndice 4. *[5], Capítulo 3.4*

Apêndice 5. *[2], Capítulo 1.2*

Referências

1 BRUXEL, D. A. Um estudo sobre curvas geodésicas. Universidade Federal da Fronteira Sul, 2018.

2 LIMA, R. F. de. Introdução a geometria diferencial. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2016.

3 GÓMEZ, M. G. L.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. d. S. *Geometria analítica*. [S.l.]: Limusa, 1984.

4 LIMA, R. F. de. Topologia e análise no espaço r n. *Coleçao Textos Universitário*, 2015.

5 STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. [S.l.]: Belmont, CA: Thomson, Brooks/Cole, 2006.