EMAP - Escola de Matemática Aplicada
Fundação Getúlio Vargas
Curvas e Superfícies

Curvas Evolutas e Involutas

Daniel Jacob Tonn
Nicole dos Santos de Souza

Professor(a): Asla Medeiros de Sá

Rio de Janeiro
26 de abril de 2023

Sumário

1 A curvatura de uma curva

Podemos definir, intuitivamente, a curvatura de uma curva regular num determinado ponto como uma medida de variação de direção da reta tangente numa vizinhança desse ponto. Isto é, quanto maior for essa variação de direção, maior será, em valor absoluto, a curvatura.

Para tornar essa ideia mais precisa, fixamos um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, e consideramos uma função diferenciável que mede o ângulo entre cada vetor tangente à curva dada e $\mathbf{v}$. A taxa de variação dessa função-ângulo num determinado ponto, constitui, então, uma medida da variação de direção da reta tangente numa vizinhança desse ponto, e, portanto, uma legítima definição de curvatura.

Mas será que essa função diferenciável sempre existe? E se existir, podemos provar sua unicidade?

O estudo dessa função é um passo importante para progredirmos na compreensão do conceito de curvatura.

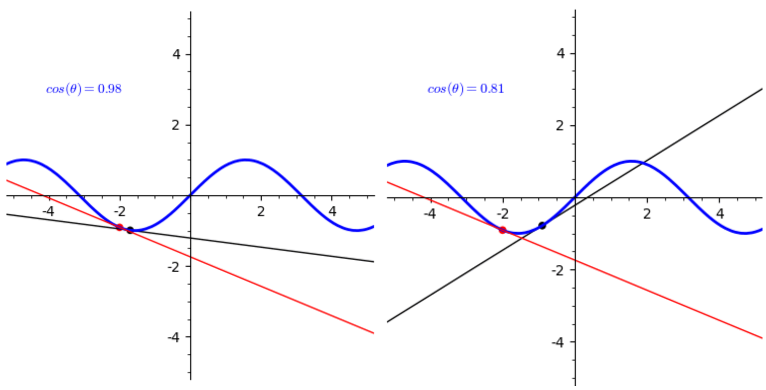

Figura 1: variação do ângulo entre tangentes próximas

1.1 Função-ângulo

Denotemos por S^1 o círculo de $\mathbb{R}^2$ com centro na origem e raio 1. É notável que, toda curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, tal que $||\gamma(s)|| = 1 \forall s \in I$, tem seu traço contido em S^1. Nesse caso, escreveremos $\gamma : I \to S^1$.

Convém observarmos também que, para toda curva diferenciável $\gamma : I \to S^1$ e para todo $s \in I$, $\gamma(s)$ é ortogonal a $\gamma'(s)$. Observe:

$$||\gamma(s)|| = 1$$
$$< \gamma(s), \gamma(s) >= 1$$
$$\frac{d}{ds} < \gamma(s), \gamma(s) >= \frac{d}{ds} 1$$
$$2 < \gamma(s), \gamma'(s) >= 0$$

Logo, $\gamma(s)$ e $\gamma'(s)$ são ortogonais.

1.1.1 Definição

(FUNÇÃO-ÂNGULO)

Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \to S^1$, diz-se que $\theta : I \to \mathbb{R}^2$ é uma função-ângulo de γ, quando:

$$\gamma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)))\forall s \in I.$$

1.1.2 Diferenciabilidade e unicidade

Para seguirmos verificando a diferenciabilidade e a unicidade convém fazermos algumas considerações.

Primeiramente consideremos o seguinte operador linear ortogonal:

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$J : (x, y) \to (-y, x)$$

que, geometricamente, constitui a rotação de 90° no sentido anti-horário. Com isso, observamos que, dados $v, w \in \mathbb{R}^2$, denotando-se por $det(v, w)$ o determinante da matriz cujos vetores colunas são v e w, nessa ordem, temos:

$$det(v, w) =< Jv, w >$$

Além disso, como o determinante é anti-simétrico:

$$< Jv, w >= - < v, Jw > .$$

Dessa forma, suponhamos que $\gamma : I \to S^1$ admita uma função-ângulo diferenciável, $\theta : I \to \mathbb{R}^2$. Teríamos, então:

$$\gamma'(s) = \theta'(s)(-sen(\theta(s)), cos(\theta(s))) = \theta'(s)J\gamma(s)$$

Aplicando o produto interno com $J\gamma(s)$:

$$< \gamma'(s), J\gamma(s) >=< \theta'(s)J\gamma(s), J\gamma(s) >$$

$$\implies \theta'(s) = det(\gamma(s), \gamma'(s)) \ *$$

Com essas considerações podemos demonstrar a seguinte proposição:

Diferenciabilidade e Unicidade - *Seja $\gamma : I \to S^1$ uma curva diferenciável. Então, γ admite função-ângulo $\theta : I \to \mathbb{R}$, a qual é diferenciável. Além disso, toda função ângulo de γ, a qual é diferenciável, difere de θ por uma constante apenas.*(1)

Demonstração:

Tomemos $s_0 \in I$ arbitrariamente, e observemos que, sendo $\gamma(s_0)$ um ponto de S^1, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\gamma(s_0) = (cos(\theta_0), sen(\theta_0)).$$

Motivados, então, pela igualdade (*), definimos a função:

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} det(\gamma(u), \gamma'(u))du, \ s \in I$$

Como o determinante é uma forma n-linear, é uma função diferenciável. Então, temos que θ é diferenciável e satisfaz

$$\theta'(s) = det(\gamma(s), \gamma'(s)).$$

Dessa forma, podemos definir uma σ:

$$\sigma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s))),\ \ s \in I$$

que é uma função diferenciável que cumpre

$$\sigma(s_0) = (cos(\theta_0), sen(\theta_0)) = \gamma(s_0).$$

Nos interessa mostrar que γ e σ coincidem. Faremos isso através da função:

$$f(s) =< \gamma(s), \sigma(s) > ,\ s \in I$$

Derivando com respeito a s:

$$f' =< \gamma', \sigma > + < \gamma, \sigma' >=< \gamma', \sigma > +\theta' < \gamma, J\sigma >$$

$$=< \gamma', \sigma > +det(\gamma, \gamma') < \gamma, J\sigma >$$

$$=< \gamma', \sigma > - < J\gamma, \gamma' >< \gamma, J\sigma >$$

Vimos antes que $\gamma(s)$ é ortogonal à $\gamma'(s)$ $\forall s \in I$. Portanto, $\gamma(s)$ e $J\gamma(s)$ são paralelos. Em outras palavras, para todo $s \in I$ existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda(s)J\gamma(s) = \gamma'(s)$.

Podemos concluir, então:

$$f' =< \gamma', \sigma > - < J\gamma, \gamma' >< \gamma, J\sigma >$$

$$= \lambda < J\gamma, \sigma > -\lambda < J\gamma, \sigma >= 0.$$

Como f' é zero, sabemos que f é constante. Mas, temos de $f(s_0) = 1$ que $< \gamma(s), \sigma(s) >= 1 \forall s \in I$.

Assim, podemos concluir pela desigualdade de Cauchy-Schwarz[1] que $\gamma(s)$ e $\sigma(s)$ são linearmente dependentes. Mas, como ambos são vetores unitários, mostramos:

$$\gamma(s) = \sigma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s))) \forall s \in I$$

Temos, então, de (*), duas funções ângulos de γ com derivadas iguais e, portanto, diferem apenas por uma constante.

Concluímos que a γ admite função ângulo diferenciável e que é única a não ser por uma constante.

1.2 Definição de curvatura

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular. É conhecido que toda curva regular admite parametrização por comprimento de arco, então vamos supor que α *é unit speed*. Se chamarmos o vetor tangente a α em $s \in I$ por $T(s)$, temos $||T(s)|| = 1 \forall s \in I$. Segue então, de acordo com o que acabamos de provar, que a curva $T : I \to S^1$ admite uma função-ângulo diferenciável, $\theta : I \to \mathbb{R}$, isto é:

$$T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s))) \forall s \in I.$$

[1]A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que, dado um espaço vetorial $\mathbf{V}$ com produto interno $< .,. >: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, então, para quaisquer dois vetores $u, v \in \mathbf{V}$, se tem: $< u, v >^2 \leq (< u, u > . < v, v >)$ com igualdade se, e somente se, u e v forem linearmente dependentes.(2)

Definimos, então, a *curvatura* de α em $s \in I$ como:

$$k(s) = \theta'(s) \rightarrow \text{o quanto a direção da tangente varia}$$

Sabemos de (*) que:

$$k(s) = det(T(s), T'(s)) = det(\alpha'(s), \alpha''(s)).$$

Em particular, $|k(s)|$ é igual à área do retângulo determinado pelos vetores $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$. Mas, como $\alpha'(s)$ é unitário:

$$|k(s)| = ||\alpha''(s)||.$$

Quanto ao sinal de k, observemos que, quando $k(s) > 0$, tem-se $\theta(s) > 0$, donde θ é crescente numa vizinhança de s. Logo, nessa vizinhança, o vetor tangente a α varia no sentido anti-horário. Analogamente, quando $k(s) < 0$, numa vizinhança de s, o vetor tangente à α varia no sentido horário.

1.2.1 Exemplo: (Retas)

Seja v um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$ e consideremos a reta $\alpha(s) = p + sv, s \in \mathbb{R}$. Temos que $\alpha'(s) = v$, logo, α é *unit speed* e $\alpha''(s) = 0$. Dessa forma, $k(s) = det(\alpha'(s), \alpha''(s)) = 0 \forall s \in R$. Podemos concluir, então, que a curvatura de uma reta é 0.

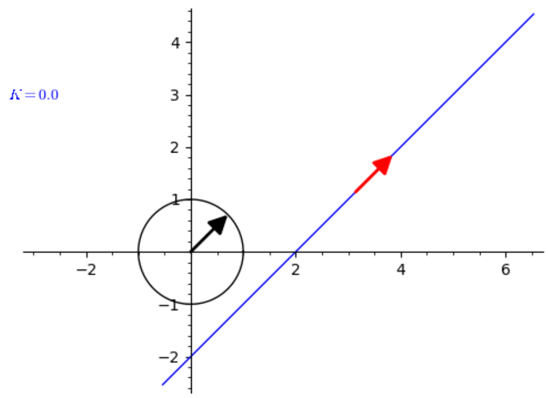

Figura 2: Curvatura de uma reta

1.2.2 Exemplo: (Circunferências)

Seja $\alpha(s) = p + r(cos(\frac{s}{r}), sen(\frac{s}{r}))$, $s \in \mathbb{R}$, a circunferência de raio $r > 0$ e com centro $p \in \mathbb{R}^2$. Nota-se que:

$$\alpha'(s) = (-sen(\frac{s}{r}), cos(\frac{s}{r}))$$

$$\implies ||\alpha'(s)|| = (-sen(\frac{s}{r}))^2 + (cos(\frac{s}{r}))^2 = 1$$

Ou seja, $\alpha(s)$ é *unit speed*. Além disso:

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{r}(cos(\frac{s}{r}), sen(\frac{s}{r}))$$

$$||\alpha''(s)|| = \frac{1}{r}$$

Logo, a curvatura de uma circunferência é dada por:

$$k(s) = \frac{1}{r} \rightarrow \text{ sendo r o raio da circunferência.}$$

Mais pra frente entenderemos como isso está relacionado com o *raio de curvatura* e o *círculo osculador*.

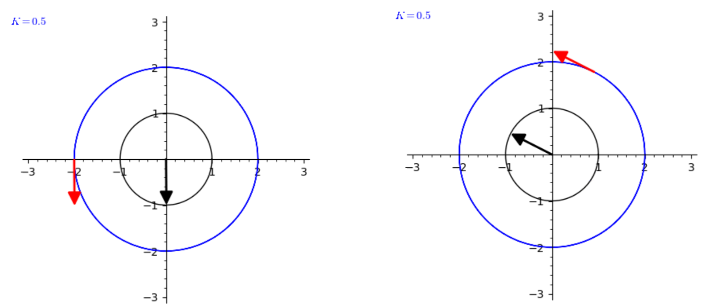

Figura 3: Curvatura de uma circunferência

1.2.3 Caso geral para curvas não unit speed

Consideremos uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, e $\beta = \alpha(\phi) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco. A curvatura de α em $t \in I, k_{\alpha(t)}$, é, por definição, a curvatura de β em $\phi^{-1}(t)$, isto é:

$$k_\alpha := k_\beta(\phi^{-1}(t)).$$

Temos, para todo $s = \phi^{-1}(t) \in I_0$, que:

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s))\phi'(s)$$

$$\beta''(s) = \alpha''(\phi(s))(\phi'(s))^2 + \alpha'(\phi(s))\alpha''(\phi(s))$$

$$\phi'(s) = \frac{1}{||\alpha'(\phi(s))||}$$

Daí, por propriedades de determinantes, obtemos:

$$k_\alpha = k_\beta = det(\beta'(s), \beta''(s)) = (\phi'(s))^3 det(\alpha'(\phi(s)), \alpha''(\phi(s)))),$$

isto é:

$$k_\alpha(t) = \frac{det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{||\alpha'(t)||^3}.$$

Obtemos, assim, a curvatura para uma curva regular α qualquer.

1.3 Circunferência osculadora

Em qualquer ponto de curvatura não nula de uma curva α existe uma circunferência que passa nesse ponto, com a mesma curvatura e a mesma tangente que a curva nesse ponto. O centro e o raio dessa circunferência são denominados, respectivamente, por centro de curvatura e raio de curvatura de α nesse ponto, e, a circunferência, por circunferência osculadora. Esta circunferência é aquela que tem maior ordem de contato com α no ponto considerado. (3)

De maneira mais rigorosa, dizemos que a circunferência osculadora passa por três pontos infinitamente próximos da curva. Mais especificamente, a circunferência osculadora em $P_0 = \alpha(t_0)$ pode ser considerada como a posição limite das circunferências que passam por P_0 e por outros dois pontos da curva suficientemente próximos de P_0, $P_1 = \alpha(t_1)$ e $P_2 = \alpha(t_2)$, quando t_1 e t_2 tendem para t_0.

Dessa forma, o centro de curvatura é a posição limite dos centros dessas circunferências, e o raio de curvatura o limite da sucessão dos seus raios.(4)

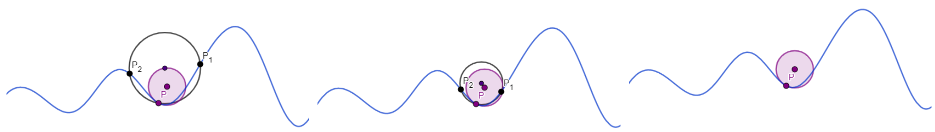

Figura 4: Aproximação da circunferência osculadora

1.3.1 Descrição intuitiva

Imagine um carro se movendo ao longo de uma estrada curva em um plano. De repente, em um ponto da estrada, o volante trava. Depois disso, o carro se move em um círculo que deixará um rastro na estrada. O raio desse círculo é raio de curvatura e esse círculo é o círculo osculante da curva da estrada naquele ponto. Note também que, quanto mais o volante estiver virado no momento que travou, maior será a curvatura naquele ponto, e, consequentemente, menor será o raio da circunferência que o carro irá percorrer. Por isso, faz sentido pensarmos em curvatura como o inverso do raio do círculo osculador.

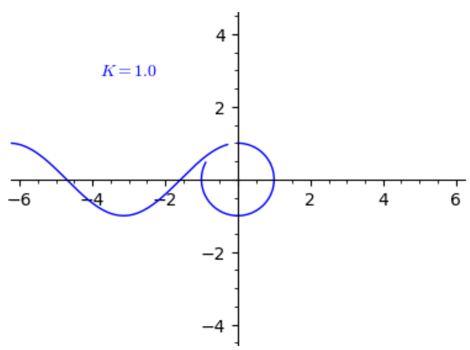

Figura 5: Descrição intuitiva

1.3.2 Centro de curvatura

O centro de curvatura de uma curva regular $\alpha(t)$, com curvaturas não nulas, é o ponto $C(t)$ localizado na linha normal à α no ponto $\alpha(t)$ a uma distância $p(t) = \frac{1}{k(t)}$, na direção da normal $N(t)$ no ponto $\alpha(t)$. (5) De forma explícita:

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t).$$

A nova curva $C(t)$ é chamada de *evoluta* de $\alpha(t)$. Note que os centros de curvatura são os centros das circunfêrencias osculadoras de α.

É perceptível, também, que o centro de curvatura está sempre no lado côncavo da curva.

2 Evolutas e Involutas

2.1 Evolutas

Dada uma curva regular $\alpha(t)$, é possível realizar aproximações da curvatura de α em t através das circunferências osculadoras. Assim, como vimos, uma curva evoluta δ_α é formada pelos centros dessas circunferências. Note que os centros dessas circunferências pertencem à reta normal à curva em t. Havíamos definido, então, que a evoluta de α, δ_α, é dada por:

$$\delta_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t)$$

Vamos supor, agora, que α é *unit speed.* A derivada da evoluta $\delta_\alpha(t)$, é, então:

$$C'(t) = (\frac{1}{k(t)})'N(t) = \frac{-k'(t)}{k(t)^2}N(t)$$

Com isso podemos concluir que a evoluta é uma curva regular se, e somente se $k'(s) \neq 0$. Um ponto onde $k'(s) = 0$ é um ponto singular da evoluta.

Veja também que podemos descrever o vetor normal $N(t)$ como: $\frac{J\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$.

Assim, a evoluta fica da forma:

$$\delta_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{J\alpha'(t)}{k(t)||\alpha'(t)||}$$

Isso será útil para curvas *não unit speed.*

2.1.1 Evoluta de uma circunferência

Uma circunferência β qualquer tem curvatura constante e igual em valor absoluto ao inverso do seu raio. Dessa forma, o centro de curvatura em qualquer ponto de β coincide com o centro da circunferência. Assim, o traço da evoluta de uma circunferência resume-se a um único ponto, o seu centro.

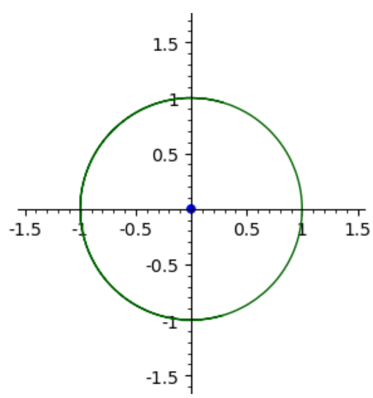

Figura 6: Evoluta de um círculo

2.1.2 Evoluta de uma elipse

Dada a elipse parametrizada por $\alpha(t) = (acos(t), bsen(t))$, onde $a > b > 0$ e $t \in [0, 2\pi)$.

Temos:

$$\alpha'(t) = (-asen(t), bcos(t))$$

$$\alpha''(t) = (-acos(t), -bsen(t))0$$

$$k(t) = \frac{det(\alpha', \alpha'')}{||\alpha'(t)||^3} = \frac{ab}{(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{\frac{3}{2}}}$$

Assim, podemos calcular sua evoluta:

$$\delta_\alpha = \alpha(t) + \frac{J\alpha'(t)}{k(t)||\alpha'(t)||}$$

$$\delta_\alpha = (acos(t) + bsen(t)) + \frac{(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{\frac{3}{2}}}{ab(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{\frac{1}{2}}}(-bcost, -asent)$$

$$\delta_\alpha = (acost - \frac{a^2sen^2tcost + b^2cos^3t}{a}, bsent - \frac{a^2sen^3t + b^2cos^2tsent}{b})$$

$$\delta_\alpha = \frac{a^2cost(1 - sen^2t) - b^2cos^3t}{a}, \frac{b^2sent(1 - cos^2t) - a^2sen^3t}{b})$$

$$\delta_\alpha = (\frac{a^2 - b^2}{a}cos^3t, \frac{b^2 - a^2}{b}sen^3t)$$

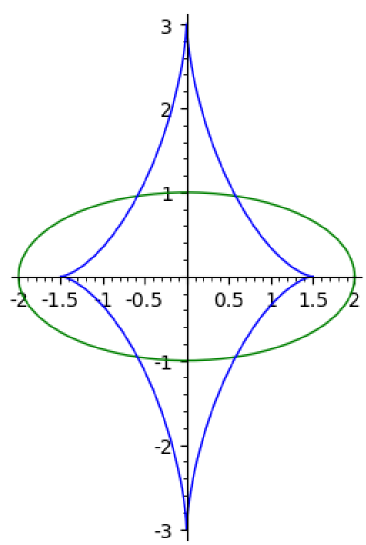

Figura 7: Evoluta de uma Elipse, a=2, b=1

2.1.3 Curvas envolventes

Chama-se envolvente de uma família de curvas do plano a uma curva que é tangente a cada membro da família em algum ponto. Se desenharmos retas normais a uma curva qualquer α, estas retas concentram-se aparentemente ao longo de uma curva, envolvendo-a. Esta curva aparente corresponde à envolvente da família das normais a α. Como as normais a α são tangentes à sua evoluta, concluímos que a envolvente da família das normais a α é a evoluta de α.

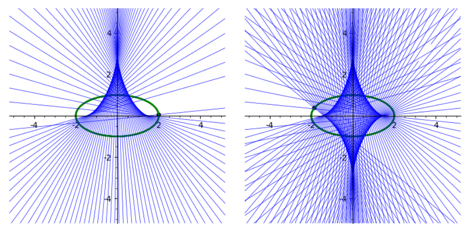

Figura 8: Envolvente de uma elipse

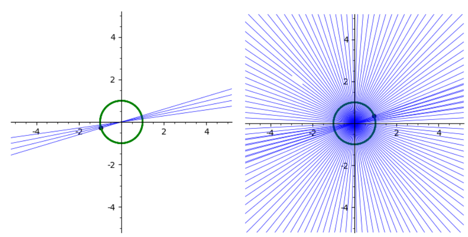

Figura 9: Envolvente de um círculo

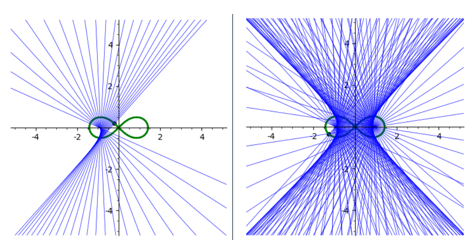

Figura 10: Envolvente da lemniscata

2.2 Curvas Paralelas

Uma paralela a uma curva dada é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância fixa da curva com relação à direção das normais. Veremos que curvas paralelas têm os mesmos centros de curvatura e portanto a mesma evoluta.
Retas paralelas e circunferências concêntricas são exemplos de curvas paralelas sendo que as curvas paralelas, em ambos os casos, são semelhantes à curva dada.

Embora se possa esperar que tal aconteça para qualquer curva, vamos nos deparar com o fato interessante de as curvas paralelas a uma curva dada não serem em geral semelhantes à curva original, como por exemplo em uma elipse.

(a) Retas paralelas a uma reta dada

(b) Círculos paralelos a um círculo dado

Figura 11: Curvas paralelas(6)

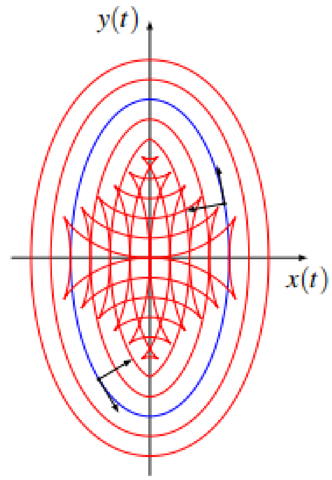

Figura 12: Elipse e suas paralelas

Entenderemos melhor isso ao explorar as paralelas de uma elipse mais à frente.

2.2.1 Definição

Seja α uma curva regular, uma paralela à α a uma distância $|c|, c \in \mathbb{R}$ é a curva:

$$\alpha_c = \alpha + c\vec{n}$$

Derivando, obtemos:

$$\alpha_c' = \alpha' + c\vec{n}'$$
$$\alpha_c' = \alpha' + c(-kv\vec{t}) \to \alpha' = v\vec{t}$$
$$\alpha_c' = (1 - ck)\alpha'$$

Como podemos interpretar isso? Ora, se considerarmos que α é regular, a derivada que encontramos difere de 0 e, assim, α_c' e α' são paralelos. Esses vetores terão o mesmo sentido se $(1 - ck) > 0$ e terão sentidos opostos se $(1 - ck) < 0$. Ainda, da mesma igualdade, conseguimos concluir que os pontos não regulares de α_c são aqueles em que $c = \frac{1}{k(t)}$.

2.2.2 Pontos não regulares das paralelas pertencem às evolutas

Teorema: *Seja α uma curva regular e α_c uma de suas paralelas. Temos que $\alpha_c(t_0)$ é um ponto não regular da paralela se, e somente se pertencer à evoluta de α, isto é, $\alpha_c(t_0) = \delta_{\alpha_c}(t_0)$.*

Demonstração: Como vimos, um ponto não regular de α obedece: $c = \frac{1}{k(t_0})$. Assim:

$$\alpha_c(t_0) = \alpha(t_0) + c\vec{n}$$
$$\alpha_c(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}$$
$$\alpha_c(t_0) = \delta_\alpha(t_0)$$

donde resulta que $\alpha_c(t_0)$ pertence à evoluta de α e portanto os pontos não regulares das paralelas a α percorrem a sua evoluta.

2.2.3 Curvas paralelas com a mesma evoluta

Vamos ver agora que duas curvas paralelas têm a mesma evoluta em valores de t para os quais ambas são regulares e de curvatura não nula.

Teorema: *Se para um dado valor de t os pontos de uma curva α e uma de suas paralelas α_c são regulares e de curvatura não nula então os centros de curvatura de ambas as curvas nesses pontos são coincidentes.*

Demonstração Verificando as derivadas dos vetores unitários na direção normal:

$$\vec{n}' = -k_\alpha \alpha'$$
$$\vec{n}'_c = -k_{\alpha_c} \alpha'_c$$

Onde k_α é a curvatura da curva original e k_{α_t} a curvatura da paralela.

Vimos anteriormente que para α regular α e α' são paralelos e o sentido depende do sinal de $(1 - ck)$. Temos:

$$Se 1 - ck > 0 \to k_\alpha \alpha' = k_{\alpha_c} \alpha'_c = k_{\alpha_c}(1 - ck)\alpha'$$

$$\implies k_\alpha = k_{\alpha_c}(1 - ck)$$
$$\implies \frac{1}{L_{\alpha_c}} = \frac{1}{k_\alpha} - c$$

De modo semelhante, para $(1 - ck) < 0$:

$$-\frac{1}{L_{\alpha_c}} = \frac{1}{k_\alpha} - c$$

Em ambos os casos, o centro de curvatura da paralela α_c é dado por:

$$C(t) = \alpha_c + \frac{1}{k_{\alpha_c}}\vec{n_c}$$
$$= \alpha + \cancel{c}\vec{n} + (\frac{1}{k_\alpha} - \cancel{c})\vec{n}$$
$$C(t) = \alpha + \frac{1}{k_\alpha}\vec{n},$$

que corresponde ao centro de curvatura da α.

2.2.4 Exemplo: elipses

Vamos consideras as paralelas da elipse $\alpha(t) = (acos(t), bsen(t))$, onde $a > b > 0$ e $t \in [0, 2\pi)$.

Sabemos:

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2sen^2t + b^2cos^2t)^{3/2}}$$

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2)sentcost}{(a^2sen^2t + b^@cos^2t)^{5/2}}$$

Os *vértices* da elipse, definidos pelos pontos em que $k'(t) = 0$, são quatro: $t = 0, t = \frac{\pi}{2}, t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$. Além disso, o valor máximo da curvatura ocorre para $t = 0$ e $t = \pi$, onde a curvatura equivale a $\frac{a}{b^2}$, enquanto o valor mínimo da curvatura ocorre para $t = \pi/2$ e $t = 2\pi$, com $k(t) = \frac{b}{a^2}$. Observe que no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ a curvatura decresce de $\frac{a}{b^2}$ para $\frac{b}{a^2}$ e portanto:

$$\frac{a}{b^2} \geq k(t) \geq \frac{b}{a^2} \implies \frac{b^2}{a} \leq \frac{1}{k(t)} \leq \frac{a^2}{b}.$$

Vamos considerar a família de todas as curvas paralelas à elipse

$$\alpha_c(t) = \alpha(t) + c\vec{n}$$

Se $\frac{b^2}{a} < c < \frac{a^2}{b}$, então existe $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $c = \frac{1}{k(t_0)} \implies ck(t_0) = 1$, e portanto $\alpha_c(t_0)$ é um ponto não regular de α_c e é também centro de curvatura de α em t_0. Por simetria a curva α_c vai ter quatro pontos não regulares pertencentes à evoluta de α.

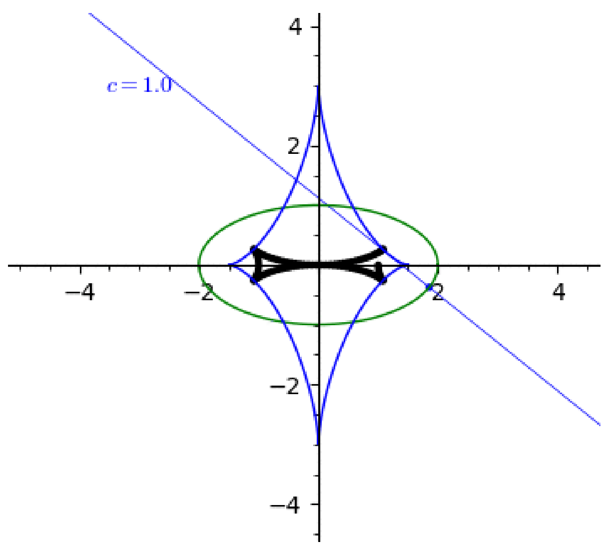

Figura 13: não regular em 4 pontos

Se $c < \frac{b^2}{a}$ ou $c > \frac{a^2}{b}$ a paralela é regular;

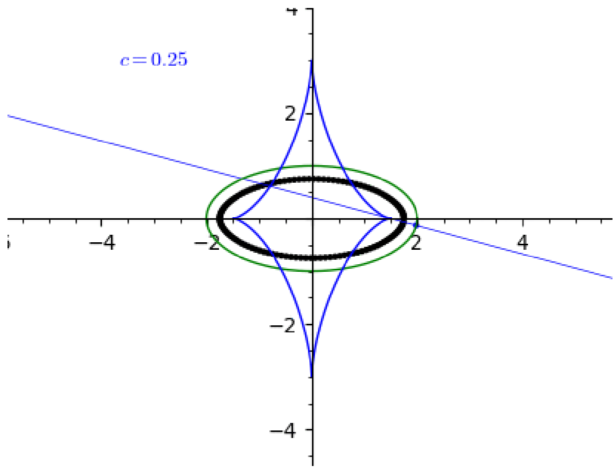

Figura 14: regular

Se $c = \frac{b^2}{a}$ a paralela é irregular nos pontos em que $t = 0, t = \pi$.

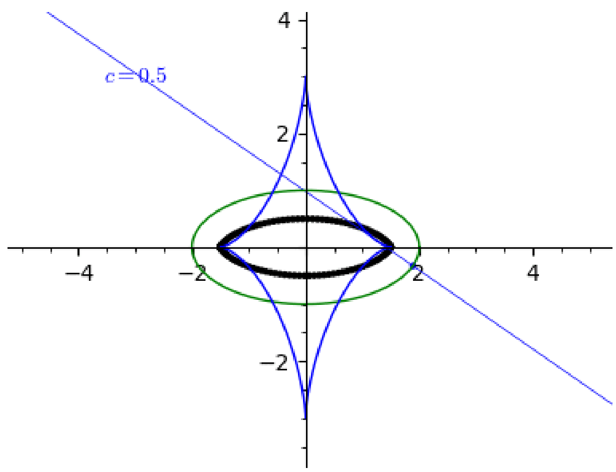

Figura 15: não regular em dois pontos

Se $c = \frac{a^2}{b}$ a paralela é irregular para $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$.

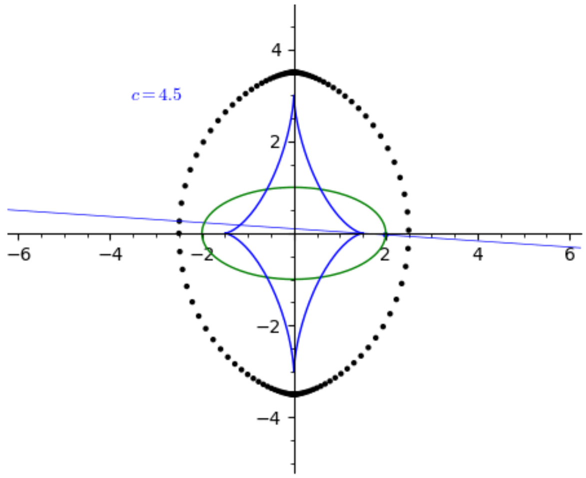

Figura 16: não regular em dois pontos

2.2.5 Curvas off-set

É válido prestarmos atenção nas semelhanças entre curvas paralelas e outro conceito muito aplicável na vida real: as *curvas offset*.

Enquanto "curvas paralelas" é um conceito mais amplo, aplicável em diversas áreas da geometria, a "curva offset" é um conceito mais específico utilizado principalmente em desenho assistido por computador (CAD). No entanto, é comum utilizar os termos "curvas offset" e "curvas paralelas" de forma intercambiável, uma vez que ambos visam criar uma geometria paralela a uma forma dada a uma distância fixa. É importante ressaltar, entretanto, que no contexto das curvas offset, a geometria resultante deve ser semelhante à original, o que não é necessariamente exigido nas curvas paralelas.

2.3 Involutas

Definição: Uma involuta de uma curva α é uma curva δ_α que tem como evoluta α, ou seja, $\delta_{\delta_\alpha} = \alpha$.

As involutas de uma curva não são únicas. Se δ_α é uma involuta de α então α é a evoluta de δ_α. Todas as paralelas a δ_α terão α como evoluta, logo todas as paralelas a δ_α são involutas de α. Veremos também que se verifica que quaisquer duas involutas de uma mesma curva são paralelas.

2.3.1 Intuição de uma involuta

Imagine que você tem uma corda enrolada em torno de uma curva plana qualquer. Se você desenrolar a corda de maneira uniforme e com uma força constante, a trajetória seguida pelo final da corda será a curva involuta da curva original.

2.3.2 Duas involutas de uma mesma curva são paralelas

Teorema: *Qualquer paralela a uma involuta de uma curva dada, numa vizinhança de um ponto regular (e de curvatura não nula) da involuta e da paralela, é uma involuta da curva. Inversamente quaisquer duas involutas de uma curva dada, numa vizinhança de um ponto regular e de curvatura não nula para ambas, são paralelas.*

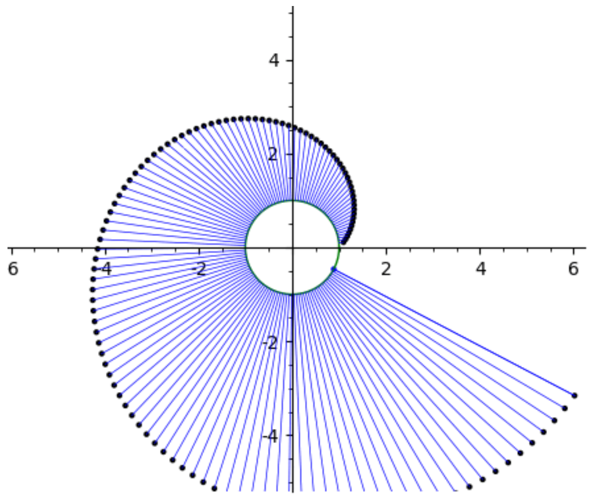

Figura 17: Involuta de um círculo

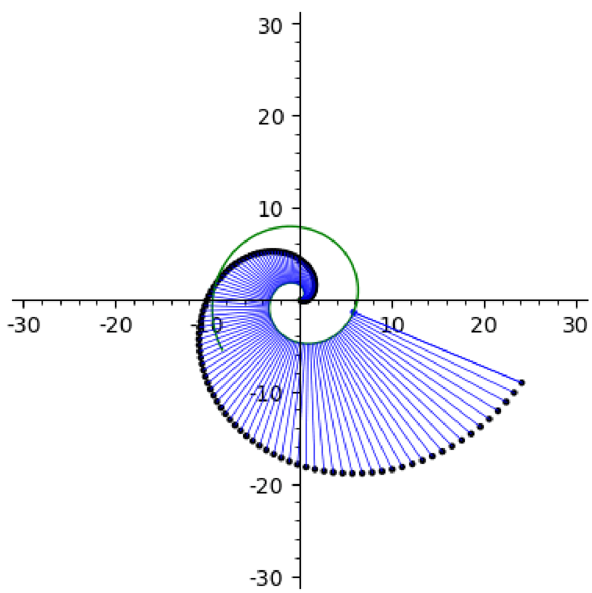

Figura 18: Involuta de uma espiral

Demonstração Já foi visto que curvas paralelas têm a mesma evoluta em valores de t para os quais ambas são regulares e de curvatura não nula. Para provar o inverso, consideremos duas curvas α e γ com a mesma evoluta. Tomaremos a curvatura de α como k e a curvatura de γ como L. Assim:

$$\delta_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n}_\alpha = \delta_\gamma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{L(t)}\vec{n}_\gamma.$$

Derivando com relação a t, obtemos:

$$\alpha'(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n_\alpha}' + \frac{k'(t)}{k(t)^2}\vec{n_\alpha} = \gamma'(t) + \frac{1}{L(t)}\vec{n_\gamma}' + \frac{L'(t)}{L(t)^2}\vec{n_\gamma},$$

$$\frac{k'(t)}{k(t)^2}\vec{n_\alpha} = \frac{L'(t)}{L(t)^2}\vec{n_\gamma}.$$

E assim:

$$\frac{k'(t)}{k(t)^2} = \frac{L'(t)}{L(t)^2}$$

ou

$$\frac{k'(t)}{k(t)^2} = -\frac{L'(t)}{L(t)^2}$$

já que $\vec{n_\gamma}$ e $\vec{n_\alpha}$ possuem o mesmo sentido, ou, sentidos opostos.

Se integrarmos isso:

$$\frac{1}{k(t)} = \pm\frac{1}{L(t)} + c$$

Ao isolar $\gamma(t)$ e substituir com o que temos acima, em ambos os casos, teremos:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\vec{n_\alpha} - \frac{1}{L(t)}\vec{n_\gamma} \\ &= \alpha(t) + c\vec{n_\gamma}\end{aligned}$$

E, com isso, concluímos que α é paralela à γ.

2.3.3 Aplicações

As curvas involutas são amplamente utilizadas na engenharia mecânica em projetos de engrenagens e polias. Elas são empregadas para determinar a forma da superfície do dente da engrenagem ou da polia, garantindo a transmissão uniforme do movimento. Além disso, as curvas involutas também são aplicadas na geometria diferencial e na física matemática, sendo utilizadas para modelar o movimento de objetos em algumas situações específicas, como na descrição da trajetória de partículas em campos gravitacionais uniformes.

Referências

1 LIMA, R. F. d. *Introdução à geometria diferencial*. [S.l.]: SBM.

2 WIKIPEDIA. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*. 2023. Disponível em: ⟨https://pt.wikipedia.org/wiki/Desigualdade_de_Cauchy-Schwarz⟩.

3 ACADEMY, K. *Circumference and area of circles*. 2012. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=ugtUGhBSeE0&ab_channel=KhanAcademy⟩.

4 CARVALHO, M. T. C. R. d. Introdução à geometria diferencial.

5 WIKIPEDIA. *Círculo de Curvatura*. 2023. Disponível em: ⟨https://pt.wikipedia.org/wiki/Circulo_de_Curvatura⟩.

6 PRADO, D. d. S. Um estudo sobre curvas e suas paralelas: Proposta de ensino de geometria diferencial na educacao bÁsica.