LISTA 3 Interpolação polinomial

1. Sejam p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 pontos da parábola $y = 3x^2 + 2x^2 - 4x + 7$. Quantos polinômios de grau 4 passam por esses 5 pontos?. Justifique

2. Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{m+1}$ pontos da parábola $y = 3x^2 + 2x^2 - 4x + 7$. Quantos polinômios de grau m passam por esses $m+1$ pontos?. Justifique

3. Implemente um programa computacional que permita construir polinômios de interpolação em um *modo gráfico iterativo*. Isto é: O programa deve permitir marcar pontos com o mouse, e cada vez que um novo ponto for adicionado, construir o gráfico do polinômio de interpolação correspondente aos pontos incluídos até esse momento.

4. Seja $P(x)$ um polinômio de grau n que passa pelos pontos $(i, -i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ e tal que tem termo independente igual a $(-1)^n$. Demonstre que para todo número natural $k > n$, tem-se que $P(k) = \binom{k-1}{n} - k$.

5. Considere a função $f(x) = \cos x$, para $x \in [0\ \pi]$. Determine o minimo de pontos a considerar no intervalo dado para garantir que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5

6. Pode um polinômio de grau 4 interceptar um polinômio de grau 5 em 6 pontos?. Justifique.

7. Considere o polinômio $p_9(x)$ que interpola $g(x) = e^{-2x}$ em 10 pontos $x_i = \frac{i}{9}$ $(i = 0, \ldots 9)$.
   (a) Determine um limite superior para $\left|f(\frac{1}{2}) - p_9(\frac{1}{2})\right|$
   (b) Quantos dígitos significativos corretos podem ser garantidos se $p_9(\frac{1}{2})$ é usado para aproximar e ?

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1.25	3.75	6.25	1.25
$f(x_i)$	0.25328	61.547	959.42	3.9482

   (a) Construa o polinômio interpolador de grau dois que lhe permite obter a melhor aproximação para o valor da função no ponto $x = 0$.
   (b) Calcule uma aproximação para $f(0)$, utilizando o polinômio interpolador obtido no item anterior. Indique uma estimativa para o erro absoluto que se comete nessa aproximação.

9. Nesta questão é estudado o fenómeno de Runge, o qual pode acontecer na interpolação numérica: Considere

$$f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2}, \quad x \in [-1\ 1]$$

   Usando interpolação de Lagrange ache e faça o plot do polinômio interpolador em n pontos. Mostre todas as interpolações separadamente (total de 6 plots), mas use a mesma janela: $x \in [-1\ 1]$ e $y \in [-0.5\ \ 1.5]$. Discuta os resultados. Considere $y_i = f(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Onde os valores x_i são dados debaixo

   (a) Pontos equidistantes $x_i = -1 + 2\frac{(i-1)}{n-1}$, $n = 10; 20; 40$.

   (b) Pontos de Chebyshev $x_i = \cos(\frac{(2i-1)\pi}{2n})$ $n = 10; 20; 40$.