LISTA 2 Métodos iterativos para sistemas de equações lineares

(As questões sinalizadas com **(**)** *deverão ser entregues até o dia 14 de setembro)*

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares de dimensão $n \geq 4$:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{1}{n} \\
x_{j-1} + (-1)^j n x_j + j x_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{n-1} x_i + \alpha\, x_n &= \frac{1}{n^j} \quad \text{para } j = 2, \ldots, n-2. \\
x_{n-2} + (-1)^{n-1} n x_{n-1} + \alpha\,(n-1) x_n &= \frac{1}{n^{n-1}} \\
x_{n-1} + (-1)^n n x_n &= \frac{1}{n^n}
\end{aligned}
$$

   (a) Prove que se $|\alpha| < 1$, o método iterativo de Gauss-Seidel aplicado a esse sistema é convergente. Justifique bem sua resposta.

   (b) Determine uma condição de parada para o processo iterativo de Gauss-Seidel aplicado a esse sistema.

2. **(**)** Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que os elementos na diagonal de A são todos 3, na subdiagonal inferior e superior são todos -1, e $A_{i,n+1-i} = \frac{1}{2}\ \forall i = 1, ..., n$ (excepto para $i = \frac{n}{2}$ e $i = \frac{n}{2} + 1$). Por exemplo, para $n = 4$

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & \\ & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & & -1 & 3 \end{bmatrix}
$$

   Defina o vetor $b = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{3}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)^\top$. Então a solução do sistema $Ax = b$ é $x^* = (1, 1, \cdots, 1, 1)$.

   (a) Implemente um programa que resolva o sistema $Ax = b$ usando o método de Jacobi e o método de Seidel. Considere como parâmetros de entradas: a dimensão n do sistema e a tolerancia ε. Considere como saída: a aproximação obtida com Jacobi, a obtida com Seidel e o número de iterações realizadas por cada método.

   (b) Para $n = 100000$, itere os métodos acima até obter uma aproximação com 6 digitos de precisão usando Jacobi e Seidel. Para isto utilize como critério de parada o erro exato na norma infinita, isto é: $\left\|x^* - x^{(k)}\right\|_\infty$. Quantas iterações foram necessárias para cada método?

   (c) Implemente um programa usando o método do Gradiente Conjugado e, para $n = 100000$, determine o erro exato $\left\|x^* - x^{(k)}\right\|_\infty$ após k iterações, para $k = k_{jacobi}$ e $k = k_{seidel}$, onde k_{jacobi} e k_{seidel} são a quantidade de iterações que foram necessárias com Jacobi e Seidel no item b). Qual dos 3 métodos teve a melhor performance?

3. Escreva um programa que, tendo como dados de entrada uma matriz A (diagonalmente dominante), um vetor b, e uma constante ε, utiliza o método de Jacobi e o método de Seidel para obter aproximacões da solução do SEL $Ax = b$ com uma presição ε.

   (a) Teste seu programa com matrizes diagonalmente dominantes por linhas e por colunas.

   (b) Teste seu programa com uma matriz tal que $\max(|\lambda_i|) < 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz de iteração C, e tal que A não seja uma matriz diagonalmente dominante. Comprove que neste caso o método é convergente. Por que?

   (c) Resolva o seguinte sistema de equações lineares com ao menos 5 dígitos de precição de cada x_i

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 0 \\
-x_{j-1} + 2.5x_j - x_{j+1} &= e^{-\frac{(i-3)^2}{20}} \qquad 2 \leq j \leq 4 \\
2x_5 - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

4. Considere o sistema Linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) Está garantida a convergencia do método de Gauss-Seidel, independentemente da condição inicial escolhida?

   (b) Com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenha o vetor $x^{(1)}$ e calcule uma estimativa do error $\left\|x - x^{(1)}\right\|_\infty$.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_{j-1} + 5x_j - x_{j+1} &= \cos(\frac{j}{10}) \qquad 2 \leq j \leq 10 \\ x_{11} &= \frac{x_{10}}{2} \end{aligned}$$

   (a) Construa a iteração para encontrar a solução deste problema pelos métodos de Jacobi e SOR com $\omega = 1$.

   (b) Usando esses métodos, encontre uma solução aproximada com erro absoluto inferior a 10^{-5}.

6. Prove ou refute a seguinte afirmação: "Para toda matriz A simétrica definida positiva e qualquer vetor b, o método de Jacobi aplicado ao sistema $Ax = b$ converge, independentemente da iteração inicial". Justifique sua resposta.

7. Seja a matriz A simétrica definida positiva e b um vetor qualquer. Demonstre que e o método de Seidel aplicado ao sistema $Ax = b$ é convergente.

8. Seja a função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$, onde $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz simétrica definida positiva e $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$

   (a) Prove que: x^*minimiza $f(x) \iff Ax^* = b$ (*não precisa usar cálculo para provar esse resultado*)

   (b) Use o método do Gradiente Conjugado para determinar o mínimo da função

$$f(x) = 2x^2 + 5y - 2yz - 8x - 2xy + 19 + 2y^2 - 6z + 2z^2$$

Observação: *Em algumas das questões acima, envolvendo matrizes de grandes dimensões, note que muitos elementos são iguais a zero. Use esse fato para trabalhar as matrizes como sparse. Isso ajudará a armarzenar e realizar operações de forma muito mais económica sem ter que reservar tanta mémoria para guardar todos os elementos da matriz. Apenas os elementos diferentes de zero precisam ser armazenados.*