

LISTA 5 Solução numérica de EDP

(As questões sinalizadas com (**)) deverão ser entregues até o 01 de Dezembro, 00:00 hrs)

1. Determine uma aproximação para a solução da EDP seguinte utilizando o método BTCS

$$\begin{aligned}\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 \quad t > 0; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \cos(\pi(x - \frac{1}{2})) \quad (0 \leq x \leq 1)\end{aligned}$$

- (a) Use $\Delta t = 0.04$, $\Delta x = 0.01$ e compare os resultados obtidos em $t = 0.5$, com a solução exata $u(x, t) = e^{-t} \cos(\pi(x - \frac{1}{2}))$
- (b) Seja $\Delta t = 0.06$, quais são os valores possíveis de Δx , tal que o método FTCS não explode mesmo para valores muito grandes do tempo t ?
2. (**) Uma área importante onde equações parabólicas são usadas é no estudo da evolução espaço-temporal de populações biológicas. Populações tendem a comportar-se como o calor, no sentido de que elas se espalham ou propagam desde áreas com altas densidades até áreas com densidades mais baixas. Além de, obviamente, crescer e morrer. Para modelar a densidade $u(x, t)$ da população no tempo t ($0 \leq t \leq L$) e na posição x ($0 \leq x \leq L$), considere o seguinte modelo dado por uma EDP de reação-difusão:

$$\begin{aligned}u_t &= cu_{xx} + du \quad c, d \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \quad (0 \leq x \leq L) \\ u(0, t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(L, t) &= 0, \quad t > 0\end{aligned}$$

O termo difusivo cu_{xx} causa que a população se espalhe ao longo da direção x . O termo du (reação) contribui com o crescimento da população na razão d . As condições de fronteira representam o fato de que a população vive no espaço $0 \leq x \leq L$. Se a população sobrevive ou segue em direção à extinção vai depender dos valores de c, d e L .

- (a) Utilize o método FTCS para elaborar um programa computacional que tenha como entrada: $c, d, L, T, \Delta t, \Delta x$ e que a saída seja o gráfico da solução $u(x, t)$ para $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.
- (b) Pode-se provar que para a população sobreviver tem que ser $d > \pi^2 \frac{c}{L^2}$. Comprove computacionalmente esse resultado teórico. Para isto considere $L = 1, c = 1$, e confirme computacionalmente que para $d = 9.5$ a população tende à extinção com o passar do tempo, e que para $d = 10$ a população aumenta no transcorrer do tempo.
- (c) Os resultados computacionais dependem dos valores $\Delta t, \Delta x$ utilizados? Justifique.
- (d) Ecologistas que estudam sobrevivência de espécies frequentemente estão interessados em conhecer o menor valor de L tal que a população não fique extinta. Suponha que sejam conhecidos $c = d = 1$. Determine, usando simulações no computador, esse valor mínimo de L . Compare com o resultado teórico do item b.
3. Determine todos os autovalores e autovetores da matriz tridiagonal $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sigma & j = i - 1 \text{ e } j = i + 1 \\ 1 - 2\sigma & j = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4. Seja a matriz tridiagonal $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} -\sigma & j = i - 1 \text{ e } j = i + 1 \\ 1 + 2\sigma & j = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para quais valores de σ , $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$?

5. Implemente o método numérico CTCS (também conhecido como leapfrog) para determinar uma aproximação para a solução da equação de onda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 2\pi \sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \quad t > 0\end{aligned}$$

utilizando $\Delta t = \Delta x = 0.1$.

- (a) Compare seus resultados em $t = 1$ com a solução exata $u(x, t) = \sin(2\pi x)(\sin(2\pi x) + \cos(2\pi x))$

6. Considere a equação de onda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \quad -10 < x < 10, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \exp(-x^2) \quad -10 \leq x \leq 10 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \quad -10 \leq x \leq 10 \\ u(-10, t) &= u(10, t) = 0 \quad t > 0\end{aligned}$$

- (a) Implemente o método CTCS e utilize este método com $\Delta x = 0.04$ e $\Delta t = 0.02$ para fazer um gráfico da solução em $[-10 \ 10] \times [0 \ 40]$. Comprove que a solução tem forma de "catarata" nessa região.
- (b) Comprove que a solução repete periodicamente esse padrão "catarata" no transcorrer do tempo. Para isso, faça um gráfico da solução na região $[-10 \ 10] \times [0 \ 80]$, e na região $[-10 \ 10] \times [0 \ 120]$, e analise os resultados.

7. Considere a equação de Poisson

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{xy}(x^2 + y^2) \quad \text{na região } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) &= 1, \quad u(x, 1) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, y) &= 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1\end{aligned}$$

- (a) Escreva na forma matricial um método numérico para resolver essa equação.
- (b) Use $\Delta x = 0.2$ e $\Delta y = 0.1$ para fazer um gráfico da solução na região considerada e compare os resultados com a solução exata $u(x, y) = e^{xy}$.