Gabarito da lista de EDO

December 9, 2023

1 Temas relevantes

1.1 Métodos de Euler

1.1.1 Método de Euler Explícito (Backward)

Suponha uma derivada com um ponto inicial conhecido:

$$\begin{cases} y' = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A intuição do processo iterativo é que sabendo o valor de y para t, avanço na direção da tangente de y até que t seja $t{+}h$, encontrando então uma aproximação do valor de $y_{i+1} = hf(y)$ Daí, o passo de Euler dar-se -á por

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

1.1.2 Método de Euler Implícito (Forward)

O método implícito é bem semelhante ao método explícito, mas possui uma diferença sutil. Assim como no método explícito, a ideia é que avançamos na direção da derivada, mas ao invés de utilizarmos o ponto anterior no cálculo da derivada, utilizaremos o próprio ponto, o que pode gerar uma equação não linear a ser resolvida. Daí, o passo iterativo dar-se-á por

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

O grau do método se dá pela derivada máxima expressa.

1.2 Método de Taylor

O método de Taylor diz que as funções podem ser aproximadas em algum ponto por pontos de sua vizinhança. Consiste basicamente em tomar o polinômio de Taylor até a n-ésima derivada:

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i)' + \frac{h^2}{2!}f(y_i)'' + \frac{h^3}{3!}f(y_i)''' + \cdots$$

1.3 Método do trapézio (Heun)

1.3.1 Método do trapézio explícito

É um refinamento do método de Euler e consiste em tirar uma média da derivada no ponto atual e a derivada no próximo ponto - sendo esse calculado pelo método de Euler explícito. Daí, tem-se o passo de Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(y_i, t_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(y_i, t_i))\right)$$

1.3.2 Método do trapézio implícito

Se assemelha bastante à versão explícita, mas considera uma média entre as derivadas do ponto atual e a do próximo ponto, mas desta vez o próximo ponto é calculado por Euler implícito, resultando no passo a seguir:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(y_i, t_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(y_{i+1}, t_{i+1}))\right)$$

1.4 Métodos de Runge-Kutta

Em resumo, os métodos de Runge-Kuta se baseiam na média de derivadas sobre todos os pontos a serem aproximados de um determinado intervalo.

1.4.1 RK1 - Primeira Ordem

O método de Runge-Kuta de primeira ordem é o método conhecido como método de Euler explícito.

1.4.2 RK2 - Segunda Ordem

$$\begin{aligned} k_1 = &\quad hf(t_n, y_n) \\ k_2 = &\quad f(t_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = &\quad y_n + \tfrac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

1.4.3 RK3 -Terceira Ordem

$$\begin{aligned} k_1 = &\quad hf(t_n, y_n) \\ k_2 = &\quad hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}) \\ k_3 = &\quad hf(t_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \\ y_{n+1} = &\quad y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned}$$

1.4.4 RK4 -Quarta Ordem

$$\begin{aligned} k_1 = &\quad hf(t_n, y_n) \\ k_2 = &\quad hft_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2} \\ k_3 = &\quad hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2}) \\ k_4 = &\quad hf(y_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = &\quad y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$