

LISTA 6 Simulação estocástica

- Um ponto x e um ponto y são selecionados ao acaso (i.e. conforme a distribuição uniforme) no intervalo $[0, 2]$ e $[2, 3]$, respectivamente. Use o método de simulação Monte Carlo para calcular aproximadamente a probabilidade de que os três segmentos $[0, x]$, $[x, y]$ e $[y, 3]$ possam formar um triângulo.
- Seleciona-se, ao acaso, um ponto de $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Sejam u, v as coordenadas do ponto selecionado. Calcule, usando Monte Carlo, $\Pr(|\frac{v}{u} - 1| \leq \frac{1}{2})$
- Dois jogadores A e B jogam o seguinte jogo: A seleciona, ao acaso, um dos três "spinners" da figura 1, e B seleciona um dos outros dois. Ambos os jogadores giram os "spinners" selecionados. Aquele que obtenha o maior número é o ganhador. Assumindo que os números em cada "spinner" tem igual probabilidade de sair, simule computacionalmente várias vezes esse jogo e decida se você prefere ser o jogador A ou o jogador B.

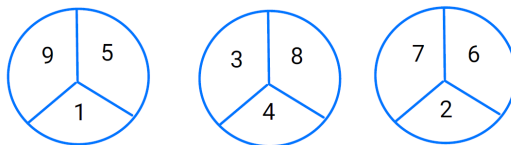


Figure 1: spinners

- Uma caixa contém k moedas. É conhecido que se a i -ésima ($i = 1, \dots, k$) moeda é lançada, a probabilidade de obter "cara" é $\frac{i}{k+1}$. Suponha que uma moeda é selecionada ao acaso e então é lançada repetidamente. Escreva um programa em Matlab que calcule via Monte Carlo, com uma tolerância de 10^{-2} , a probabilidade de que se nos primeiros n lançamentos são obtidas "caras", no lançamento $n + 1$ é obtida "cara" também. Considere como entrada do seu programa: k e n .
- Escreva um programa em Matlab que permita gerar, ao acaso, n pontos aleatórios independentes na circunferência de centro $(0, 0)$ e raio r .
 - Calcule, usando Monte Carlo, a probabilidade de que a distância entre 2 desses pontos seja menor que r
- Escreva um programa em Matlab que permita gerar, ao acaso, n pontos aleatórios independentes na esfera de centro $(0, 1, 2)$ e raio r .
 - Calcule, usando Monte Carlo, a probabilidade de que a distância entre 2 desses pontos seja menor que r
- Seja $M = \min\{k : \sum_{i=1}^k U_i > 1\}$ onde U_1, U_2, \dots são variáveis aleatórias $\sim U([0, 1])$
 - Estime $E(M)$ gerando 100 amostras de N .
 - Estime $E(M)$ gerando 1000 amostras de N .
 - Estime $E(M)$ gerando 10000 amostras de N .
 - Analisando essas simulações, qual você acha é o valor exato de $E(M)$?
- Considere o problema de calcular usando Monte Carlo a área interior da elipse

$$40x^2 + 25y^2 + y + \frac{9}{4} \leq 52xy + 14x$$

em $0 \leq x, y \leq 1$.

- Implemente uma função Matlab para calcular a área, gerando $N = 10^4$ números pseudo-aleatórios.
- Repita o cálculo com $N = 10^6$ e compare com a área correta $\frac{\pi}{18}$
- Quantas amostras são, ao menos, necessárias para voce calcular essa área com um erro $< 10^{-3}$, ao 99% de confiabilidade?

9. Um par de dados honestos são lançados repetidamente até que todos os possíveis resultados das somas (i.e., $1, 2, \dots, 12$) tenham acontecido ao menos uma vez. Faça um estudo por simulação para estimar o número médio de lançamentos que são necessários para obter todas essas possíveis somas.
10. Considere o problema de calcular, usando Monte Carlo, o volume interior do elipsóide

$$2 + 4x^2 + 4z^2 + y^2 \leq 4x + 4z + y$$

contido no cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.

- (a) Implemente uma função Matlab para calcular a área, gerando $N = 10^4$ números pseudo-aleatórios.
 - (b) Repita o cálculo com $N = 10^6$ e compare com valor correto $\frac{\pi}{24}$
 - (c) Quantas amostras são necessárias para voce calcular essa área com um erro $< 10^{-3}$ ao 95% de confiabilidade?
11. Suponha que você está no ponto de ônibus às 10:00 horas da manhã. Sabendo que o ônibus chega ao ponto em algum tempo uniformemente distribuido entre 10:00 e 10:30 da manhã; use simulação Monte Carlo para determinar a probabilidade de que, se às 10:15 o ônibus não chegou ainda, você tenha que esperar ao menos 10 minutos adicionais.
 12. Use Monte Carlo para aproximar:

- (a) $\int_{-2}^2 e^{x+x^2} dx$

- (b) $\int_0^{\infty} x(1+x^2)^{-2} dx$

- (c) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$

13. Um ônibus de certa companhia viaja entre as cidades A e B, as quais estão a uma distância de 100 km uma da outra. Sabe-se que quando o ônibus quebra na estrada, isso acontece aleatoriamente uniformemente no trajeto. Nas cidades A, B e na metade do caminho entre ambas, existem estações de serviços responsáveis por ajudar caso o ônibus quebre. A direção da companhia sugere que é mais eficiente colocar essas estações de serviço a uma distância de 25 km, 50 km e 75 km de A. Você (que é matemático) é consultado acerca dessa sugestão. Você concordaria com a proposta?
14. M dados honestos são lançados simultaneamente. Os dados que mostraram o número 6 são retirados do jogo, e com os dados restantes se repete o jogo (ou seja, os dados restantes se lançam novamente e aqueles que mostraram o número 6 são retirados do jogo). O jogo continua o jogo até que todos os dados sejam retirados. Qual o número medio de lançamentos necessários para acabar o jogo?