
Primeira prova de Programação Linear - Duração 3h
Abril 2024

Todas as respostas devem ser justificadas.

Exercício 1. 2 pontos. Uma empresa pode escolher quatro tipos de líquidos : 8 000 litros do líquido A ao custo unitario 5,50 \$, 4 250 litros de B ao custo unitario 4,50 \$, 16 000 litros de C ao custo unitario 7,50 \$, e 2 000 litros de D ao custo unitario 11,25 \$.

A empresa pode revender estes líquidos diretamente, sem transforma-los, e vende-los por 6 \$ por litro.

Ela pode também elaborar as misturas E, F e G. As misturas devem apresentar as características dadas na tabela 1.

Mistura	Líquido A	Líquido B	Líquido C	Líquido D
E	30%	Pelo menos 10%	40%	No máximo 5%
F	Pelo menos 25%	No máximo 20%	20%	Pelo menos 10%
G	20%	Pelo menos 15%	40%	No máximo 20%

Table 1: Proporção de cada líquido num litro de mistura

As misturas se vendem respectivamente 11 \$, 15 \$ e 14 \$ por litro, e o mercado pode comprar todas as misturas produzidas.

A empresa é obrigada a produzir pelo menos 400 litros de E, pelo menos 800 litros de F e pelo menos 200 litros de G.

Enfim, misturando 2 partes de G com uma parte de E, podemos obter um produto P vendido 22 \$ por litro e cuja demande é suficientemente grande para ser considerada ilimitada.

Modelar este problema por um problema de otimização linear dado que a empresa quer maximizar seu lucro.
Vamos considerar as seguintes notações

1. Vamos denotar os líquidos A, B, C e D por líquidos 1, 2, 3 e 4 , respectivamente.
2. Vamos denotar as misturas E, F e G por misturas 1, 2 e 3, respectivamente.
3. x_{ij} vai denotar a quantidade de líquido i usado na produção da mistura j, $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$.

4. l_i vai denotar a quantidade de líquido i que vai ser vendido diretamente $i = 1, 2, 3, 4$.

5. p denota a quantidade do produto P que serÃÂ¡ produzida

Segundo a descrição do problema temos que considerar o seguinte conjunto de restrições

1. Estoques disponível dos líquidos: $l_1 + \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 8000$, $l_2 + \sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 4250$, $l_3 + \sum_{j=1}^{4} x_{3j} \leq 16000$ e $l_4 + \sum_{j=1}^{4} x_{4j} \leq 2000$.

2. Composição das misturas:

   - Mistura 1: $x_{11} = .3 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$, $x_{21} \geq .1 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$, $x_{31} \geq .4 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$, $x_{41} \leq .05 \sum_{i=1}^{4} x_{i1}$,
   - Mistura 2: $x_{12} \geq .25 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$, $x_{22} \leq .2 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$, $x_{32} = .2 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$, $x_{42} \geq .1 \sum_{i=1}^{4} x_{i2}$
   - Mistura 3: $x_{13} = .2 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$, $x_{23} \geq .15 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$, $x_{33} = .4 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$, $x_{43} \leq .2 \sum_{i=1}^{4} x_{i3}$.

3. Produção mínima de misturas: $\sum_{i=1}^{4} x_{i1} \geq 400$, $\sum_{i=1}^{4} x_{i2} \geq 800$ e $\sum_{i=1}^{4} x_{i3} \geq 200$.

4. $p/3$ e $2p/3$ são as quantidades de mistura 1 e mistura 3 usadas para produzir a quantidade p do produto P. Desta forma temos que $\sum_{i=1}^{4} x_{i1} - p/3 \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{4} x_{i3} - 2p/3 \geq 0$.

O custo de produção dos 4 líquidos é:

$$5.5 \left(\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + l_1 \right) + 4.5 \left(\sum_{j=1}^{3} x_{2j} + l_2 \right) + 7.5 \left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j} + l_3 \right) + 11.25 \left(\sum_{j=1}^{3} x_{4j} + l_4 \right)$$

A receita obtida será

$$6 \sum_{i=1}^{4} l_i + 22p + 11 \left(\sum_{i=1}^{4} x_{i1} - \frac{p}{3} \right) + 15 \sum_{i=1}^{4} x_{i2} + 14 \left(\sum_{i=1}^{4} x_{i3} - \frac{2p}{3} \right)$$

Logo o PPL a ser considerado é

$$
\begin{array}{llcl}
\max & r - c \qquad \text{(receita - custo)} & & \\
\text{s.t} & 6\left(\sum_{i=1}^{4} l_i\right) + 22p + 11\left(\sum_{i=1}^{4} x_{i1} - \frac{p}{3}\right) + 15\left(\sum_{i=1}^{4} x_{i2}\right) + 14\left(\sum_{i=1}^{4} x_{i3} - \frac{2p}{3}\right) & = & r \\
& 5.5\left(\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + l_1\right) + 4.5\left(\sum_{j=1}^{3} x_{2j} + l_2\right) + 7.5\left(\sum_{j=1}^{3} x_{3j} + l_3\right) & & \\
& +11.25\left(\sum_{j=1}^{3} x_{4j} + l_4\right) & = & c, \\
& x_{11} - .3\sum_{i=1}^{4} x_{i1} & = & 0, \\
& x_{21} - .1\sum_{i=1}^{4} x_{i1} & \geq & 0, \\
& x_{31} - .4\sum_{i=1}^{4} x_{i1} & \geq & 0, \\
& x_{41} - .05\sum_{i=1}^{4} x_{i1} & \leq & 0, \\
& x_{12} - .25\sum_{i=1}^{4} x_{i2} & \geq & 0, \\
& x_{22} - .2\sum_{i=1}^{4} x_{i2} & \leq & 0, \\
& x_{32} - .2\sum_{i=1}^{4} x_{i2} & = & 0, \\
& x_{42} - .1\sum_{i=1}^{4} x_{i2} & \geq & 0, \\
& x_{13} - 2\sum_{i=1}^{4} x_{i3} & = & 0, \\
& x_{23} - .15\sum_{i=1}^{4} x_{i3} & \geq & 0, \\
& x_{33} - .4\sum_{i=1}^{4} x_{i3} & = & 0, \\
& x_{43} - .2\sum_{i=1}^{4} x_{i3} & \geq & 0, \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{i1} & \geq & 400. \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{i2} & \geq & 80, \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{i3} & \geq & 200, \\
& l_1 + \sum_{j=1}^{3} x_{1j} & \leq & 8000, \\
& l_2 + \sum_{j=1}^{4} x_{2j} & \leq & 4250, \\
& l_3 + \sum_{j=1}^{4} x_{3j} & \leq & 16000, \\
& l_4 + \sum_{j=1}^{4} x_{4j} & \leq & 2000, \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{i1} - \frac{p}{3} & \geq & 0, \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{i3} - \frac{2p}{3} & \geq & 0, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad p \geq 0, \quad l_i \geq 0, \; i = 1,2,3,4, \; l = 1,2,3. & &
\end{array}
$$

Exercício 2. 1.75 pontos. A companhia energética Dark necessita realizar o planejamento energético para um novo prédio. A energia necessária é classificada em 3 categorias: (a) iluminação; (b) aquecimento ambiente; (c) aquecimento água. As necessidades mensais de cada categorias são:

Iluminação	20MW
Aquecimento ambiente	10MW
Aquecimento água	30MW

3 fontes de energia podem ser instaladas para suprir a energia necessária: (a) eletricidade; (b) painéis solares; (c) gás natural. O suprimento máximo mensal de energia de cada fonte é:

Eletricidade	50MW
Painéis solares	50MW
Gás natural	20MW

A iluminação só pode ser suprida pela energia "eletricidade", a um custo de R$50 por MW. As demais categorias ("aquecimento ambiente" e "aquecimento água") podem ser supridas por qualquer fonte. Os custos unitários de suprimento para estas categorias (em R$/MW) são os seguintes:

	Eletricidade	Gás natural	Painéis solares
Aquecimento ambiente	90	60	30
Aquecimento água	80	50	40

O objetivo é minimizar o custo total de energia mensal do prédio. Escrever um programa linear para modelar este problema.
Vamos considerar as seguintes notações

1. Vamos denotar as fontes de energia: eletricidade, panéis solares e gás natural por fontes 1, 2 e 3, respectivamente.

2. Vamos denotar as catégorias de energia: Iluminação, Aquecimento ambiente e Aquecimento água, por catégorias 1, 2 e 3, respectivamente.

3. vamos denotar por x_{ij} a quantidade de energia elétrica produzida pela fonte i usada para satisfazer a demanda da catégoria de energia j, $1, j = 1, 2, 3$

Segundo a descrição do problema temos que considerar o seguinte conjunto de restrições

1. Suprimento máximo de cada fonte energética: $\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 50$, $\sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leq 50$ e $\sum_{j=1}^{3} x_{3j} \leq 20$

2. A iluminação só pode ser suprida pela fonte de energia "eletricidade" $x_{i1} = 0$ $i = 2, 3$.

3. Necessidades mensais de suprimento de cada catégoria de energia: $\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 20$, $\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 10$, $\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 30$.

O custo total de energia é: $50x_{11} + 90x_{12} + 80x_{13} + 60x_{22} + 50x_{23} + 30x_{32} + 40x_{33}$.
Logo o PPL a ser considerado é

$$
\begin{array}{ll}
\min & 50x_{11} + 90x_{12} + 80x_{13} + 60x_{22} + 50x_{23} + 30x_{32} + 40x_{33} \\
\text{s.t} & \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \quad \leq 50, \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \quad \leq 50, \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \quad \leq 200, \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{i1} \quad = 20 \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{i2} \quad = 10 \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{i3} \quad = 30 \\
& \qquad x_{11} \quad \geq 0, \ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \ j = 2, 3.
\end{array}
$$

Exercício 3. Cones. Denote

$$F = \{x \geq_K 0 \ : \ \langle \lambda, x\rangle \leq a\}.$$

Assume that $\lambda \in \mathrm{int}(K_*)$. Define

$$\delta = \begin{cases} \min \langle \lambda, x\rangle \\ x \in X := \{x \in K : \|x\| = 1\}. \end{cases}$$

Note that $x \to \langle \lambda, x\rangle$ is continuous on the compact set X and therefore there is $\bar{x} \in X$, $\bar{x} \neq 0$ such that $\delta = \langle \lambda, \bar{x}\rangle$ which implies $\delta > 0$ (from 2)). With this notation, for any $x \in F$ we have $\|x\| \leq \frac{a}{\delta}$. Indeed, for every $x \in K, x \neq 0$, by definition of δ, if $\|x\| > a/\delta$ we get $\langle \lambda, x\rangle = \|x\|\langle \lambda, \frac{x}{\|x\|}\rangle \geq \|x\|\delta > a$ and $x \notin F$. Therefore F is bounded. Since it is also a closed set of a Euclidean space it is compact. Conversly, assume that F is compact. Then if we had $\langle \lambda, x\rangle \leq 0$ for some $x \in K, x \neq 0$ we would have $\langle \lambda, kx\rangle \leq 0 < a$ with $kx \in K$ for all $k \geq 0$. It follows kx would be in F for all $k \geq 0$ and F would not be bounded and therefore would not be compact, which is not possible. We conclude that we must have $\langle \lambda, x\rangle > 0$ for every $x \in K, x \neq 0$, which implies, using item 2), that $\lambda \in \mathrm{int}(K_*)$.

Exercício 4. 2 pontos. O epígrafo de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\mathrm{epi}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y \geq f(x)\right\}.$$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa se

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \ \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \, \alpha \in [0,1].$$

a) Prove que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa e contínua então $\mathrm{epi}(f)$ é igual a seu fecho convexo.

b) Mostre que o interior relativo do conjunto $\mathrm{epi}(f)$ é o conjunto

$$\mathrm{ri}\left(\mathrm{epi}(f)\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\right\}.$$

Item b) Vamos supor que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Vamos provar que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\}$ é aberto o que implica o resultado. Observe que a função $g > \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $g(x, y) = f(x) - y$ é trivialmente contínua. Deste fato, o fato de que a pre-imagem de um conjunto aberto por uma função contínua também é um conjunto aberto, e a relação $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\} = g^{-1}\left(]-\infty, 0[\right)$, segue a afirmação. Let $E = \mathrm{epi}(f)$ and $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\}$. Recall that

$$\mathrm{ri}(E) = \{y_0 = (x_0, t_0) : \exists \varepsilon > 0 : B(y_0, \varepsilon) \cap \mathrm{Aff}(E) \subset E\}.$$

We want to show $\mathrm{ri}(E) = O$. Let $y_0 \in O$. Since O is open, there is $\varepsilon > 0$ such that $B(y_0, \varepsilon) \subset O \subset E$. Then $B(y_0, \varepsilon) \cap \mathrm{Aff}(E) \subset B(y_0, \varepsilon) \subset E$ and

$y_0 \in \mathrm{ri}(E)$. Now let $y_0 \in \mathrm{ri}(E)$ and for $y_0 = (x_0, t_0)$, $B(y_0, \varepsilon) = \{(x,t) : |t - t_0| + \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. There is $\varepsilon > 0$ such that for $(x,t) \in \mathrm{Aff}(E)$ and $|t - t_0| + \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ we have $(x,t) \in E$, i.e., $y \geq f(x)$. Then for $(x,t) = (x_0, t_0 - \varepsilon/2)$ we have $|t - t_0| + \|x - x_0\| \leq \varepsilon$ and therefore $(x,t) \in E$ which implies $t_0 > t_0 - \varepsilon/2 = t \geq f(x_0)$ and $(x_0, t_0) \in O$ (note that $(x,t) \in \mathrm{Aff}(E)$ because $(x_0, t_0) \in E$, $(x_0, 2t_0) \in E$ and therefore for any $\theta \in \mathbb{R}$ we have $\theta(x_0, t_0) + (1-\theta)(x_0, 2t_0) = (x_0, 2t_0 - \theta t_0) \in \mathrm{Aff}(E)$ where t can be written $2t_0 - \theta t_0$).

b) Suponha que f é diferenciável num ponto x_0, que $y_0 = f(x_0)$, e que $H = \{(x,y) \,|\, \langle (d,1), (x,y) \rangle = c_0\}$ é um hiperplano suporte do epi(f) no ponto (x_0, y_0). Prove que o vetor d é paralelo ao vetor $\nabla f(x_0)$

Item a). Primeiro, vamos provar que epi(f) é um conjunto convexo. Sejam $(x_i, y_i) \in$ epi(f) $i = 1,2$ e $\alpha \in (0,1)$, isto é, $y_i \geq f(x_i)$ $i = 1,2$. Defina $(\hat{x}, \hat{y}) = \alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$. Este vetor pertence ao epi(f) se $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$. Usando a definição de convexidade da função f temos que

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \leq \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2$$

e segue o resultado. Agora vamos provar que epi(f) é um conjunto fechado. Considere uma sequência $\{(x^k, y^k)\} \subset$ epi(f) e tal que $(x^k, y^k) \to (\bar{x}, \bar{y})$ quando $k \to +\infty$. Das relações $y^k \geq f(x^k)$ e da continuidade de f segue passando ao limite quando $k \to +\infty$ $\bar{y} \geq \bar{f}(\bar{x})$, isto é, $(\bar{x}, \bar{y}) \in$ epi(f) o que conclui a prova.

Item b) Vamos supor que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$. Vamos provar que o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\}$ é aberto o que implica o resultado. Observe que a função $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(x) - y$ é trivialmente contínua. Deste fato, o fato de que a pre-imagem de um conjunto aberto por uma função contínua também é um conjunto aberto, e a relação $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\} = g^{-1}\left(]-\infty, 0[\right)$, segue a afirmação.

Item b). Temos que $c_0 = \langle (d,1), (x_0, y_0) \rangle$. Adicionalmente, temos que epi(f) é um subconjunto de um dos semiespaços definidos por H. Vamos supor que epi$(f) \subset H_+ = \{(x,y) \,|\, \langle (d,1), (x,y) \rangle \geq c_0\}$. Neste caso temos que

$$\langle d, x - x_0 \rangle + y - y_0 = \langle (d,1), (x,y) - (x_0, y_0) \rangle \geq 0, \; \forall\, (x,y) \in \mathrm{epi}(f),$$

ou seja,

$$y \geq y_0 + \langle d, x - x_0 \rangle \;\; \forall\, (x,y) \in \mathrm{epi}(f)$$

Em particular considerando um vetor não-nulo arbitrário $u \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $t\,0$, $x = x_0 + tu$ e $y = f(x)$ segue que

$$f(x_0 + tu) - f(x_0) \geq t \,\langle d, u \rangle$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$ obtemos que

$$\langle \nabla f(x_0), u \rangle \geq \langle d, u \rangle \Leftrightarrow \langle \nabla f(x_0) - d, u \rangle \geq 0, \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Isto claramente implica que $d = \nabla f(x_0)$. A análise do caso em que $\text{epi}(f) \subset H_- = \{(x,y) \mid \langle (d,1),(x,y)\rangle \leq c_0\}$ é similar e nesse caso obtemos que $d = -\nabla f(x_0)$.

Exercício 5. 2 pontos. Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
P)\ \min\ & 4.3x_1 + 2.7x_2 + 2.5x_3 + 2.2x_4 + 4.5x_5 \\
s.a.\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10, \\
& -x_2 - x_3 - x_5 \leq -4, \\
& 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0, \\
& 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0, \\
& x_i \geq 0\ i = 1,2,3,4,5.
\end{aligned}
$$

a) Escreva o problema dual de P).

b) Sabendo que a solução do problema dual de P) é $y^* = (-0.0294, 0, -0.00636, -0.00244)$, determine o valor ótimo e uma solução óptima de P).

c) Seja P_1) o novo PPL obtido ao multiplicar a primeira inequação do problema P) por 10. Encontre uma solução ótima do dual do problema P_1).

Item a). O problema dual de P) é

$$
\begin{aligned}
D)\ \min\ & 10y_1 - 4y_2 \\
s.a.\quad & y_1 + 6y_3 + 4y_4 \geq 4.3, \\
& y_1 - y_2 + 6y_3 + 10y_4 \geq 2.7, \\
& y_1 - y_2 - 4y_3 - y_4 \geq 2.5, \\
& y_1 - y_2 - 4y_3 - 2y_4 \geq 2.2, \\
& y_1 + 36y_3 - 3y_4 \geq 4.5, \\
& y_i \geq 0\ i = 1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

Item b) O valor ótimo coincide com o valor ótimo de seu problema dual $z^* = 10 \cdot 2.94 - 4 \cdot 0 = 29.4$. Vamos denotar por $\hat{x}^* = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)$ uma solução ótima de P). Usando as condições de otimalidade do teorema das folgas complementares temos que qualquer solução ótima de do problema P) deve satisfazer as equações 1, 3 e 4 do deste problema em igualdade, devido q que as correspondentes variáveis duals são não nulas. Adicionalmente y^* satisfaz em igualdade somente a primeira, quarta e quinta inequações do conjunto de restrições do problema D) e portanto $\hat{x}_2 = \hat{x}_3 = 0$. Desta forma temos que $\hat{x}_1$, $\hat{x}_4$ e $\hat{x}_5$ satisfazem as seguinte equações

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_1 + \hat{x}_4 + \hat{x}_5 &= 10, \\
6\hat{x}_1 - 4\hat{x}_4 + 36\hat{x}_5 &= 0, \\
4\hat{x}_1 - 2\hat{x}_4 - 3\hat{x}_5 &= 0,
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema acima obtemos $\hat{x}_1 = 3.36$, $\hat{x}_4 = 6.48 =$ e $\hat{x}_5 = 0,16$.

Item c). O novo PPL é

$$
\begin{aligned}
P_1)\ \min\ & 4.3x_1 + 2.7x_2 + 2.5x_3 + 2.2x_4 + 4.5x_5 \\
s.a.\quad & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 10x_5 \leq 100, \\
& -x_2 - x_3 - x_5 \leq -4, \\
& 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0, \\
& 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0, \\
& x_i \geq 0\ i = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

Seu correspondente problema dual é

$$
\begin{aligned}
D_1)\ \min\ & 100\hat{y}_1 - 4\hat{y}_2 \\
s.a.\quad & 10\hat{y}_1 + 6\hat{y}_3 + 4\hat{y}_4 \geq 4.3, \\
& 10\hat{y}_1 - \hat{y}_2 + 6\hat{y}_3 + 10\hat{y}_4 \geq 2.7, \\
& 10\hat{y}_1 - \hat{y}_2 - 4\hat{y}_3 - \hat{y}_4 \geq 2.5, \\
& 10\hat{y}_1 - \hat{y}_2 - \hat{4}\hat{y}_3 - 2\hat{y}_4 \geq 2.2, \\
& 10\hat{y}_1 + 36\hat{y}_3 - 3\hat{y}_4 \geq 4.5, \\
& \hat{y}_i \geq 0\ i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $y_1 = 10\hat{y}_1$ e $y_i = \hat{y}_i$ $i = 2, 3, 4$ no PPL D$_1$) obtemos o PPL D), o que prova que ambos problemas sao equivalentes. Desta forma, usando a inversa desta mudança de variáveis, a partir da soluçao ótima dada do PPL D), $y^* = (-0.0294, 0, -0.00636, -0.00244)$, podemos obter a seguinte soluçao ótima do PPL D$_1$, $\hat{y}^* = (-0.00294, 0, -0.00636, -0.00244)$

Exercício 6. 1 ponto. Mostre que um conjunto $H \subset X (= \mathbb{R}^n?)$ é um hiperplano se e somente se ele é da forma $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ onde $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é linear não nula e $\alpha \in \varphi(\mathbb{R}^n)$.

Seja H uma variedade linear afím de dimensão $n-1$. Então $H = V + \{x_0\}$ onde V é um subespaço de dimensão $n-1$. Temos que V of $\mathbb{R}^n$ é da forma $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = 0\}$ para algum vetor no nulo $a \in \mathbb{R}^n$. Definindo a função linear $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$ e $\alpha = \varphi(x_0)$ segue que $\varphi(a) = \|a\|^2 \neq 0$ e portanto φ é não nula. Adicionalmente, temos que

$$x \in \varphi^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \langle a, x - x_0\rangle = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in H$$

Logo, concluímos que $\varphi^{-1}(\alpha) = H - \{x_0\}$ o que implica que $V = \varphi^{-1}(\alpha)$. Por outro lado, a equivalência entre as primeiras 4 relações acima mostra que para quaisquer função linear $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$ e número real $\alpha \in \mathrm{Im}(\varphi)$ temos que

$$x_0 + \varphi^{-1}(\alpha) = \varphi^{-1}(0) = \{x \mid \langle a, x\rangle = 0\}$$

e concluímos que $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ é um hiperplano