$\boxed{1}$ Para demonstrar que ~~se~~ $x \in int(K) \Rightarrow x - t\bar{u} \in int(K)$ vamos apresentar algum t que faça $(x - t\bar{u})$ estar a no máximo uma distância ε de x.

$$\|(x - t\bar{u}) - x\| \leq \varepsilon$$

$$\|-t\bar{u}\| \leq \varepsilon$$

$$-t\|\bar{u}\| \leq \varepsilon$$

Se tomarmos $t = \dfrac{\varepsilon}{2\|\bar{u}\|}$, que é positivo, teremos

$$-\frac{\varepsilon}{2\cancel{\|\bar{u}\|}}\cancel{\|\bar{u}\|} \leq \varepsilon$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Logo, $x \in int(K) \Rightarrow \exists!\, t>0 \mid x - t\bar{u} \in int(K)$

Para a segunda parte, vamos supor que não existe $t>0$ que satisfaça $x - t\bar{u} \in (int(K))$ mas que $x \in int(K)$. Vimos anteriormente que essa suposição não é verídica pois foi apresentado que para qualquer $x \in int(K)$ $\exists!\, t>0$ que satisfaz $x - t\bar{u} \in int(K)$ - em particular, apresentamos $t = \varepsilon/2\|\bar{u}\|$, Ou seja, podemos concluir daqui que ~~se~~ $\nexists!\, t>0 \mid x - t\bar{u} \in int(K) \Rightarrow x \notin int(K)$

Como consequência da contrapositiva, $x - t\bar{u} \in int(K) \Rightarrow x \in int(K)$. ■

Logo, $x \in int(K) \Rightarrow \exists!\, t>0 \mid x - t\bar{u} \in int(K)$

e se $\exists!\, t>0 \mid x - t\bar{u} \in int(K) \Rightarrow x \in int(K)$

2 Se $\lambda \in int(K_*)$ então $\langle \lambda, z \rangle \geq 0$ $\forall z \in K$. Em particular, para $z = x$. Supondo $\langle \lambda, x \rangle = 0$, temos que λ e x pertencem ao bordo de K_*, que são os pontos que satisfazem $\langle \lambda, x \rangle = 0$ ou $\langle \lambda, x \rangle = \|\lambda\| \|x\|$, mas isso é um absurdo pois no enunciado $\lambda \in int(K_*) \Rightarrow \langle \lambda, x \rangle > 0$.

Para a segunda parte temos:

$\lambda \in int(K_*) \Rightarrow \langle \lambda, x \rangle > 0$ discutida acima.

A implicação $\langle \lambda, x \rangle > 0 \Rightarrow \lambda \in int(K_*)$ já considerando $\lambda \in K_*$, pelo enunciado, pode ser encontrada tomando a suposição por absurdo de λ estar no bordo de K_*.

Se $\langle \lambda, x \rangle > 0$ podemos tomar ε de modo que $\langle \lambda, x \rangle > \varepsilon > 0$.

Supondo então que λ está no bordo de K_* podemos tomar λ' suficientemente próximo de λ de modo que λ' não pertença a K_* mas satisfaça $\langle \lambda', x \rangle > 0$ e $\langle \lambda', x \rangle = \varepsilon$.

Mas se eu tomar todo λ' que satisfaça isso tenho que $\langle \lambda', x \rangle > 0$ com $\lambda' \in B(\lambda, \varepsilon)$ o que é uma contradição pois λ não pode estar no bordo de K_* se sua vizinhança pertence a K_*. Logo, como a vizinhança de λ pertence a K_* então $\lambda \in int(K_*)$.

3 O teorema geral da alternativa afirma que um conjunto S (definido abaixo) é inviável se, e somente se, ~~T_1, T_2~~ ou somente T_1 ou somente T_2 ou ambos tiverem solução.

$$S := \begin{cases} a_i^T x > b_i, & i = 1, \dots, p. \\ a_i^T x \geq b_i, & i = p+1, \dots, m. \end{cases}$$

Associado à S vamos considerar os dois sistemas abaixo:

$$T_I : \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \geq 0 \end{cases} \qquad T_{II} : \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i > 0 \end{cases}$$

Nosso objetivo é atingir tais conclusões partindo do lema homogêneo de Farkas que diz que o conjunto (F) abaixo é inviável se, e somente se $\exists \lambda \geq 0 \mid a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.

$$F : \begin{cases} a^T x \ngeq 0 \\ a_i^T x \geq 0, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Vamos também usar a proposição a seguir:

(P1) S não tem solução se, e somente se S^* não tem solução; onde S^* é

$$S^* = \begin{cases} -s < 0 \\ t - s \geq 0 \\ a_i^T x - b_i t - s \geq 0, & i = 1, \dots, p \\ a_i^T x - b_i t \geq 0, & i = p+1, \dots, m \end{cases}$$

Demonstração:

Tome uma solução $\hat{x}$ de S, ainda $\hat{t} = 1$ e

$\hat{s} = \min\{1, a_i^T \hat{x} - b_i, i = 1, \dots, p$. Segue que

$\hat{s} > 0$

$\hat{t} - \hat{s} = 1 - \hat{s} \geq 0$

$a_i^T \hat{x} - b_i \hat{t} - \hat{s} = a_i^T \hat{x} - b_i - \hat{s} \geq 0$

$a_i^T \hat{x} - b_i \hat{t} = a_i^T \hat{x} - b_i \geq 0$

o que significa que $(\hat{x}, \hat{s}, \hat{t})$ é solução do sistema S^*.

Como $\hat{t} \geq \hat{s} > 0$ podemos definir $\bar{x} = \hat{x}/\hat{t}$ e obtemos

$$a_i^T \bar{x} - b_i = \frac{1}{\hat{t}}(a_i^T \hat{x} - \hat{t} b_i) \geq \frac{\hat{s}}{\hat{t}} > 0 \quad \text{e}$$

$$a_i^T \bar{x} - b_i = \frac{1}{\hat{t}}(a_i^T \hat{x} - \hat{t} b_i) \geq 0$$

ou seja, $\bar{x}$ também é solução de S. Provamos então que um sistema é viável se, e somente se, o outro também for. viável, o que equivale à proposição

Agora, podemos finalmente partir para a demonstração do Teorema Geral da Alternativa.

Reescrevendo o sistema S^* como

$$\begin{cases} (0,-1,0)^T (x,s,t) < 0 \\ (0,-1,1)^T (x,s,t) \geq 0 \\ (a_i,-1,-b_i)^T (x,s,t) \geq 0 \\ (a_i,0,-b_i)^T (x,s,t) \geq 0 \end{cases}$$

e usando o Lema de Farkas segue que S^* é inviável se, e somente se

$$\exists\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \geq 0 \mid (0,-1,0) = \lambda_0 (0,-1,1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (a_i,-1,-b_i) + \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i (a_i,0,-b_i)$$

O que significa que λ satisfaz

$$\bar{\lambda} \geq 0 \ , \ 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 - \lambda_0 \ , \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$$

Como $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \geq 0$, temos $\lambda_0 \in [0,1]$, ou seja, λ satisfaz

(A) $\lambda \geq 0 \ , \ 0 = \sum \lambda_i a_i, \ \sum \lambda_i = 1 \ , \ \sum \lambda_i b_i = 0$ se $\lambda_0 = 0$

ou

(B) $\lambda \geq 0 \ , \ 0 = \sum \lambda_i a_i \ , \ \sum \lambda_i \in [0,1) \ , \ \sum \lambda_i b_i \in (0,1]$ se $\lambda_0 \in (0,1]$

em (A) satisfaz T_I e em (B) satisfaz T_{II}.

Por fim, vamos tomar uma solução x de S e tomar $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \geq 0$ uma solução ou de T_I ou de T_{II}.

Se λ é solução de T_I segue que

$$\sum^{p} \lambda_i (a_i^T x) > \sum^{p} \lambda_i b_i \ \text{e} \ \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i (a_i^T x) \geq \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i b_i$$

Daí, tem-se

$$0 = \left(\sum \lambda_i a_i\right)^T x = \sum^{m} \lambda_i (a_i^T x) > \sum^{m} \lambda_i b_i^T \geq 0$$

contradição! O que significa que se T_I ou T_{II} é viável, S é inviável.

4 Vamos reescrever os sistemas

1) $I = \{ a_i^T x < 0 \quad , i = 1, \dots, p \longrightarrow S$

$II = \begin{cases} \sum^p y_i a_i = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow T_I$

$y \neq 0 \Leftrightarrow \sum y_i > 0$

E T_{II} teremos $\sum y_i b_i = 0$, pois $b_i = 0$, mas é necessário $\sum y_i b_i > 0$, o que torna T_{II} inviável.

Daí, pelo teorema Geral da Alternativa

S é inviável $\Leftrightarrow$ T_{II} tem solução

que é o mesmo que

I é inviável $\Leftrightarrow$ II tem solução

De forma semelhante, pelo teorema, se

I tem solução $\Leftrightarrow$ II é inviável

2) Se existe v que satisfaz as restrições podemos tomar a desigualdade

$Nx \leq q$

e multiplicar por v^T, assim

$v^T N x \leq v^T q$

mas $v^T q \leq p$ então $v^T N x \leq v^T q \leq p \Rightarrow v^T N x \leq p$

Como $v^T N = (N^T v)^T = a^T$

$a^T x \leq p$

Pelo teorema de Gordon temos

$s \in \mathbb{R}_+$
e vetor de 1's

Ⓐ $\begin{cases} Nx \leq q \\ a^T x \leq p \end{cases}$ é viável Ⓑ $\begin{cases} Nx - q - se < 0 \\ -a^T x + p < 0 \\ -s < 0 \end{cases}$ é viável

Seja
$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N & -q-se \\ -a^T & p \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que $\tilde{N}\tilde{x} < 0$ é equivalente a (B) e pelo Teorema de Gordan $\tilde{N}\tilde{x} < 0$ é inviável se, e somente se

$$\begin{cases} \tilde{y} \neq 0 \\ \tilde{N} + \tilde{y} = 0 \\ \tilde{y} \geq 0 \end{cases} \quad \text{é viável}$$

Mas
$$\tilde{N}^T\tilde{y} = \begin{bmatrix} N & -q-se \\ -a^T & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

$$\begin{cases} N^T y = a\beta \\ q^T y = p\beta - se^T y \end{cases}$$

pra $\beta = 0$ a equivalência foi discutida acima, agora para $\beta > 0$

$$z = \left(\frac{1}{\beta}\right) y \geq 0$$

$$\begin{cases} N^T z = a \\ q^T z = \beta - se^T z \leq p \end{cases}$$

Como $s > 0$ e $e^T z \geq 0$, é equivalente a (B)

3) Pelo Teorema Geral da Alternativa o sistema não tem solução se, e somente se as somas

$$(S^T \lambda + N^T \mu)^T x < 0, \quad \text{com } \lambda \neq 0$$

$$\text{e } (S^T \lambda + N^T \mu)^T x \leq 0 \quad \text{se } \lambda = 0$$

são contraditórias.

Como ~~$\lambda \neq 0$ e~~ $\lambda \neq 0$ e se $Sx < 0$ e $Nx \leq 0$

a soma $x^T S x + \mu^T N^T x < 0$

$$[S^T \lambda + N^T \mu] x < 0$$

apresenta uma contradição ao considerar o sistema B