1 Temos

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & +3 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $x_3^* = -x_3$ temos $x_3^* \geq 0$.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para x_4, definimos duas novas variáveis

$$x_4^+ = \max\{0, x_4\} \qquad x^4_+ - x_4^- = x_4$$

$$x_4^- = -\min\{0, x_4\}$$

Assim, $x_4^+, x_4^- \geq 0$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -10 & -1 & +1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^* \\ x_4^+ \\ x_4^- \end{bmatrix} \qquad x_1, x_2, x_3^*, x_4^+, x_4^- \geq 0$$

Logo, nosso problema se adapta à segunda coluna da tabela das notas de aula.

$$\max c^T x^*$$

$$\begin{cases} Ax^* = b \\ Cx^* \leq d \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3^*, x_4^+, x_4^- \geq 0$$

Escrevendo o dual

$$\min \lambda^T b + \mu^T d \qquad \text{onde} \quad \mu_{2\times 1}$$

$$A^T \lambda + C^T \mu \geq c \qquad \lambda_{1\times 1}$$

$$\mu \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda \text{ livre}$$

Claramente o dual do dual é o primal, pela tabela.

$c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Aqui, vamos considerar $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = [0]$

Assim, já temos o problema análogo à segunda coluna da tabela das notas de aula.

$$\max c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ Cx \leq d \end{cases}$$
$$x \geq 0$$

Assim, o dual é

$$\min \lambda^T b + \mu^T d$$
$$A^T \lambda + C^T \mu \geq c$$
$$\mu \geq 0$$

Como A e b são nulos, podemos simplificar o dual

$$\min \mu^T d \qquad\qquad \min \mu_1 + \mu_2$$
$$C^T \mu \geq c \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mu \geq 0$$

Podemos tomar $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 1$, atendendo as restrições e minimizando $\mu_1 + \mu_2$. Daí, o valor ótimo do dual é atingido em $c^T x = 3$, pelo teorema da dualidade forte. Uma solução possível é $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 1$.

3 Temos

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Considerando $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos o problema da segunda coluna da tabela

$$\max c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ Cx \leq d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Cujo dual é

$$\min \lambda^T b + \mu^T d$$
$$A^T \lambda + C^T \mu \geq c$$
$$\mu \geq 0$$

simplificando

$$\min \mu^T d$$
$$C^T \mu \geq c$$
$$\mu \geq 0.$$

Para a segunda parte da questão, observe que no ~~dual~~ primal temos $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$, isto é, basta $x_2 \leq x_1 - 2$.

Como $x_1, x_2 \geq 0$ e queremos maximizar a soma, tomemos $x_2 = x_1 - 2$. Mas para qualquer solução x_2^* e x_1^* temos

$$x_2^* + x_1^* = 2x_1^* - 2 < 2x_1^* = x_1^* - 2 + 1 + x_1^* + 1 = (x_2^* + 1) + (x_1^* + 1)$$

4 Podemos multiplicar as restrições por (...)

ou seja, apresentamos que o problema não possui um valor ótimo pois pra cada solução apresento outra que maximiza $x_1 + x_2$. Agora no dual temos

$$\min \quad \mu_1 - 2\mu_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\mu_1 - \mu_2 \geq 1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 \leq -1 \\ \mu_1 + \mu_2 \geq 1 \end{cases}$$

Claramente não existe solução pela Tricotomia.

Concluímos que nenhum dos problemas possui solução viável.

4 Podemos multiplicar as restrições por (-1) e então usar a última coluna da tabela. Assim

$$\begin{array}{l} \min q^T z \\ -Mz \leq q \\ z \geq 0 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} \min q^T z \\ M^T z \leq q \\ z \geq 0 \end{array}$$

Considerando A, b nulos temos o dual

$$\begin{array}{l} \max \mu^T q \\ (M^T)^T \mu \leq q \\ \mu \leq 0 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} \max q^T \mu \\ M\mu \leq q \\ \mu \leq 0 \end{array}$$

Fazendo substituição de variáveis $\lambda = -\mu$:

$$\begin{array}{l} \max -(q^T \lambda) \\ -M\lambda \leq q \\ \lambda \geq 0 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} \min q^T \lambda \\ -M\lambda \leq q \\ \lambda \geq 0 \end{array}$$

z, μ e λ tem as mesmas dimensões pois M é ~~simetri~~ quadrada!

Que equivale ao primal.

Como o dual é igual ao primal segue que se um é viável o outro também é e se um tem solução ótima o outro também tem. Pelo Teorema 6.15.3, temos que afirmar que os sistemas são viáveis é equivalente a dizer que possuem solução ótima ∎