$\boxed{1}$ Vamos tomar uma solução de $Ax=b$ que nomearemos x_0. Sabemos que as outras soluções do problema podem ser escri-tos como $x = x_0 + n$, onde n satisfaz $An=0$, ou seja, $n \in N(A)$.

Vamos separar nossa análise em 3 casos:

$$c^T n > 0, \quad c^T n < 0 \quad e \quad c^T n = 0$$

Tomando n de modo que $c^T n < 0$ temos

$$c^T(x_0+n) = c^T(x_0+n)$$

$$c^T(x_0+n) + c^T n < c^T(x_0+n)$$

$$c^T(x_0+2n) < c^T(x_0+n)$$

ou seja, se eu tomo um vetor solução $x = x_0 + n$ de modo que $c^T n < 0$, sempre consigo fornecer outra solução que gera um valor menor na função.

De forma semelhante tomando agora as soluções $x = x_0 + n$ de modo que $c^T n > 0$ temos

$$c^T(x_0+n) = c^T(x_0+n)$$

$$c^T(x_0+n) > c^T(x_0+n) - \frac{1}{2} c^T n$$

$$c^T(x_0+n) > c^T\left(x_0 + \frac{1}{2} n\right)$$

e pelo mesmo argumento anterior sempre conseguimos fornecer outra solução que minimize $c^T x$.

Finalmente, tomando as soluções $x = x_0 + n$ de modo que $c^T n = 0$ temos

$$c^T(x_0) = c^T(x_0) + 0$$

$$c^T(x_0) = c^T(x_0) + c^T n$$

$$c^T(x_0) = c^T(x_0+n)$$

ou seja $c^T x$ é constante se $x = x_0 + n$ com $c^T n = 0$ e portanto são os mínimos, pois não conseguimos apresentar outra solução de $Ax=b$ que gere algum valor menor para $c^T x$.

4 Problema convexo otimizador

2 a) Vamos tomar dois pontos desse conjunto

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y = 1$$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^z x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^z = 1$$

Escrevendo a combinação convexa deles:

$$w = \alpha y + (1-\alpha) z, \quad \alpha \in [0,1]$$

$$w = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^z x_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y x_i \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha) \lambda_i^z x_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\left(\lambda_i^y \alpha + (1-\alpha) \lambda_i^z \right)}_{A_i}$$

Se $\sum_{i=1}^{n} A_i = 1$, podemos dizer que w está nesse conjunto

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y \alpha + (1-\alpha) \lambda_i^z = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^y}_{1} + (1-\alpha) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^z}_{1}$$

$$= \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1$$

$$= \cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha}$$

$$= 1$$

Logo, a combinação convexa w de y e z também pertence ao conjunto e o conjunto é convexo.

4 Problema convexo otimizado

2 b) Vamos tomar dois pontos desse conjunto

y, tal que $\|y - x_0\| \leq r$

z, tal que $\|z - x_0\| \leq r$

A combinação convexa deles é

$w = \alpha y + (1-\alpha) z$, $\alpha \in [0,1]$

Vamos verificar se w também está no conjunto

$$\|\alpha y + (1-\alpha) z - x_0\| = \|\alpha y + z - \alpha z - x_0\|$$

$$= \|\alpha y + z - \alpha z - x_0 - \alpha x_0 + \alpha x_0\|$$

$$= \|\alpha (y - x_0) + (1-\alpha)(z - x_0)\|$$

$$\leq \|\alpha (y - x_0)\| + \|(1-\alpha)(z - x_0)\|$$

$$= \alpha \underbrace{\|y - x_0\|}_{\leq r} + (1-\alpha) \underbrace{\|z - x_0\|}_{\leq r}$$

$$\leq \alpha r + (1-\alpha) r$$

$$= \cancel{\alpha r} + r - \cancel{\alpha r}$$

$$= r$$

Daí, $\|w - x_0\| \leq r$, o que significa w pertencer ao conjunto e portanto ser convexo.

$\boxed{2}$ c) Primeira parte:

Vamos tomar duas soluções y e z tais que

$$a^T y = b \quad e \quad a^T z = b$$

A combinação convexa deles é

$$w = \alpha y + (1-\alpha) z \quad , \alpha \in [0,1]$$

Verificando se w também está no conjunto:

$$a^T(\alpha y + (1-\alpha) z) \overset{?}{=} b$$

$$\underbrace{\alpha a^T y}_{=b} + \underbrace{a^T z}_{=b} - \alpha \underbrace{a^T z}_{=b} \overset{?}{=} b$$

$$\cancel{\alpha b} + a^T z - \cancel{\alpha b} \overset{?}{=} b$$

$$b = b \quad \checkmark$$

Portanto o conjunto em discussão é convexo.

Segunda parte:

Tomo y e z tais que

$$a^T y \leq b \quad e \quad a^T z \leq b$$

Combinação convexa:

$$w = \alpha y + (1-\alpha) z \, , \quad \alpha \in [0,1]$$

Verificando se w está no conjunto:

$$a^T(\alpha y + (1-\alpha) z) \overset{?}{\leq} b$$

$$\underbrace{\alpha a^T y}_{\leq b} + \underbrace{a^T z}_{\leq b} - \alpha \underbrace{a^T z}_{\leq b} \overset{?}{\leq} b$$

essa expressão é menor ou igual a

$$\cancel{\alpha b} + b - \cancel{\alpha b} \overset{?}{\leq} b$$

$$b \leq b \quad \checkmark$$

Portanto o conjunto é convexo.

2 d) Vamos tomar dois pontos y e z desse conjunto

A combinação convexa deles é

$$w = \alpha y + (1-\alpha) z, \quad \alpha \in [0,1]$$

Verificando se w pertence ao conjunto:

$$A(\alpha y + (1-\alpha) z) \overset{?}{=} b$$

$$\alpha \underbrace{Ay}_{b} + (1-\alpha) \underbrace{Az}_{b} \overset{?}{=} b$$

$$\cancel{\alpha} b + (1-\cancel{\alpha}) b \overset{?}{=} b$$

$$b = b \quad \checkmark$$

$$C(\alpha y + (1-\alpha) z) \overset{?}{\leq} d$$

$$\alpha \underbrace{Cy}_{\leq d} + (1-\alpha) \underbrace{Cz}_{\leq d} \overset{?}{\leq} d$$

$$\cancel{\alpha} d + (1-\cancel{\alpha}) d \overset{?}{\leq} d$$

$$d \leq d \quad \checkmark$$

Concluímos que é um conjunto convexo.

ões

$\boxed{3}$ ~~a)~~ Sejam C_i conjuntos convexos de interseção não vazia. Tome dois pontos x e $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$.

Notavelmente, se x e $\bar{x} \in \bigcap C_i$, então $x, \bar{x} \in C_i$. Como C_i é convexo então a combinação convexa $\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}$ está em C_i, mas se está em cada C_i está em $\bigcap C_i$ e portanto $\bigcap C_i$ possui todas as combinações convexas de seus pontos o que significa $\bigcap C_i$ ser convexo.

Para a segunda parte do enunciado, vamos definir como X_i o conjunto de todas as matrizes que satisfaçam $y_i^T A y_i$ para y_i fixo.

Vamos primeiro mostrar que X_i é convexo.

Sejam B e C duas matrizes que satisfaçam $y_i^T A y_i$, sua combinação afim é dada por

$$\alpha B + (1-\alpha) C \quad , \alpha \in [0,1]$$

Verificando se essa combinação afim está em X_i:

$$y_i^T (\alpha B + (1-\alpha) C) y_i \overset{?}{\geq} 0$$

$$\underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{y_i^T B y_i}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\alpha)}_{\geq 0} \underbrace{y_i^T C y_i}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} 0$$

Concluímos que a combinação convexa está no conjunto então ~~é~~ X_i é convexo.

Tomando agora $\bigcap X_i$ temos as matrizes que satisfazem $y^T A y \geq 0$ ~~φ~~ para todos os y, o que significa que $\bigcap X_i$ é o conjunto das matrizes semidefinidas positivas.

Como X_i é convexo, $\bigcap X_i$ é convexo.

4 Problema convexo otimizador

$$\min f(x) \text{ tal que } g(x) \leq 0$$

com $f(x)$ e $g(x)$ convexas

Tomaremos uma solução ótima x_0. O conjunto de soluções ótimas é

$$X = \{x \mid f(x) = f(x_0),\ g(x) \leq 0\}$$

Tomando agora dois pontos $x_1, x_2 \in X$ a combinação convexa deles é

$$w = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \quad , \alpha \in [0,1]$$

Queremos verificar se $f(w) = f(x_0)$ e $g(w) \leq 0$.

$$f(w) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$$

função convexa

$$\leq f(\alpha x_1) + f((1-\alpha) x_2)$$

$$= \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

como $f(x_1), f(x_2) \in X$, temos $f(x_1) = f(x_2) = f(x_0)$

$$f(w) = \cancel{\alpha} f(x_0) + (1-\cancel{\alpha}) f(x_0)$$

$$f(w) = f(x_0).$$

Agora,

$$g(w) = g(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$$

$$= \alpha \underbrace{g(x_1)}_{\leq 0} + (1-\alpha) \underbrace{g(x_2)}_{\leq 0}$$

$$g(w) \leq 0$$

Logo, concluímos que o conjunto de soluções ótimas de um problema convexo otimizador é convexo.

[5] a) Vamos tomar dois pontos do interior de X.

$$a \in int(x) \Rightarrow \exists\, \varepsilon_a \mid B(a, \varepsilon_a) \subset X$$

$$b \in int(x) \Rightarrow \exists\, \varepsilon_b \mid B(b, \varepsilon_b) \subset X$$

Vamos chamar de T o fecho convexo formado pelos conjuntos $B(a,\varepsilon_a)$ e $B(b,\varepsilon_b)$

$$T = \left\{ \alpha \mathbf{A} + (1-\alpha)\mathbf{B},\ \mathbf{A},\mathbf{B} \in B(a,\varepsilon_a) \cup B(b,\varepsilon_b) \right\}$$
$$\alpha \in [0,1]$$

O conjunto T certamente é aberto pois se trata do fecho convexo de abertos. Além disso, T é convexo pois com $\mathbf{A},\mathbf{B} \in B(a,\varepsilon_a) \cup B(b,\varepsilon_b) \subset X$. Concluímos que $T \subset int(x)$.

Daí, como $\cancel{\alpha a + (1-\alpha) b}$ $\alpha a + (1-\alpha) b \in T$ e $T \subset int(x)$ temos que $\alpha a + (1-\alpha) b \in int(x) \Rightarrow int(X)$ é convexo.

b) Tomando dois pontos quaisquer de X_ε:

$$u, v \in X_\varepsilon$$

A combinação convexa deles é

$$w = \alpha u + (1-\alpha) v$$

Vamos verificar se

$$\inf_{x \in X} \| \alpha v + (1-\alpha) u - x \| \overset{?}{\leq} \varepsilon$$

$$\inf_{x \in X} \| \alpha v + (1-\alpha) u - x + \alpha x - \alpha x \| \overset{?}{\leq} \varepsilon$$

tomando desigualdade triangular

$$\leq \inf_{x \in X} \| \alpha v - \alpha x \| + \inf_{x \in X} \| (1-\alpha) u - x + \alpha x \| \overset{?}{\leq} \varepsilon$$

$$= \alpha \underbrace{\inf_{x \in X} \| v - x \|}_{\leq \varepsilon} + (1-\alpha) \underbrace{\inf_{x \in X} \| u - x \|}_{\leq \varepsilon} \overset{?}{\leq} \varepsilon$$

$$\leq \cancel{\alpha}\varepsilon + (1-\cancel{\alpha})\varepsilon \leq \varepsilon$$

$$\varepsilon \leq \varepsilon \quad \checkmark$$

Portanto é convexo!

5 c) ~~Um ponto de X_ε satisfaz $B_y \varepsilon$~~

c) $X_\varepsilon = \{ y \mid \inf_{x \in X} \|y - x\| \le \varepsilon \}$

os pontos de $X + B(0,\varepsilon)$ são escritos como

$x + b$, onde $x \in X$ e $b \in B(0,\varepsilon)$

Vamos demonstrar que os dois conjuntos acima são iguais pela demonstração de $X_\varepsilon \subseteq X + B(0,\varepsilon)$ e também $X_\varepsilon \supseteq X + B(0,\varepsilon)$

Tomando um ponto $y \in X^\varepsilon$ temos que $dis(y, X) \le \varepsilon$, ou seja, existe um $x \in X$ tal que $\|y - x\| \le \varepsilon. \Rightarrow (y - x) \in B(0,\varepsilon)$.
Escrevendo o ponto y como

$$y = x + y - x$$
$$y = x + (y - x)$$

onde $x \in X$ e $(y-x)$, como demonstrado pertence a $B(0,\varepsilon)$ temos que $y = x + b$, onde $x \in X$ e $b = (y-x) \in B(0,\varepsilon)$, logo $y \in X + B(0,\varepsilon)$ e $X_\varepsilon \subseteq X + B(0,\varepsilon)$.

Tomando agora um ponto $y \in X + B(0,\varepsilon)$ podemos reescrevê-lo como $y = x + b$, com $x \in X$ e $b \in B(0,\varepsilon)$.
Mas $\inf_{x \in X} \|y - x\| = \inf_{x \in X} \|\cancel{x} + b - \cancel{x}\| = \|b\| \le \varepsilon$, o que satisfaz ~~$y \in X + B(0,\varepsilon)$~~. $y \in X^\varepsilon$. Logo, $X + B(0,\varepsilon) \subseteq X^\varepsilon$ e concluimos que $X_\varepsilon = X + B(0,\varepsilon)$.

Para a segunda parte da questão vamos usar o fato de $X^\varepsilon = X + B(0,\varepsilon)$ e de que a soma de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo. A seguir, a demonstração:

Considere dois conjuntos convexos A e B.
O conjunto A+B é tal que

$$A+B=\{a+b\ ,\ a\in A\ e\ b\in B\}$$

Tome dois pontos x_1 e x_2 desse conjunto.

$$x_1=a_1+b_1\ ,\ a_1\in A\ e\ b_1\in B$$
$$x_2=a_2+b_2\ ,\ a_2\in A\ e\ b_2\in B$$

A combinação convexa deles é

$$\alpha(x_1)+(1-\alpha)(x_2)\ ;\ \alpha\in[0,1]$$

$$\alpha(a_1+b_1)+(1-\alpha)(a_2+b_2)$$

$$\underbrace{\alpha a_1+(1-\alpha)(a_2)}_{a'}+\underbrace{\alpha b_1+(1-\alpha)b_2}_{b'}$$

Mas $a'\in A$, pois é combinação convexa de a_1 e a_2 que são pontos de A e a é convexo. O mesmo argumento vale para $b'\in B$.

Se tomarmos então $A=X$, convexo por definição e $B=B(0,\varepsilon)$.
temos que $A+B=X+B(0,\varepsilon)=X^{\varepsilon}$ é convexo.

$B(0,\varepsilon)$ é convexo pois tomando dois pontos

$$b_1\in B(0,\varepsilon)\Rightarrow\|b_1\|\leq\varepsilon$$
$$b_2\in B(0,\varepsilon)\Rightarrow\|b_2\|\leq\varepsilon$$

tem-se

$$\|\alpha b_1+(1-\alpha)b_2\|\leq\|\alpha b_1\|+\|(1-\alpha)b_2\|$$
$$\leq\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon$$
$$\leq\varepsilon$$

ou seja, $B(0,\varepsilon)$ é convexo também.
Concluímos que $X^{\varepsilon}=X+B(0,\varepsilon)$ é convexo.

6) Vamos demonstrar que

$$(\alpha_1+\alpha_2)C \subseteq \alpha_1 C+\alpha_2 C$$

$$\text{e} \quad \alpha_1 C+\alpha_2 C \subseteq (\alpha_1+\alpha_2)C$$

Os conjuntos podem ser escritos como

$$(\alpha_1+\alpha_2)C = \{(\alpha_1+\alpha_2)c_1,\ c_1 \in C\}$$

$$\alpha_1 C+\alpha_2 C = \{\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2;\ c_1, c_2 \in C\}$$

Tomando um ponto de $(\alpha_1+\alpha_2)C$:

$$x_1 = (\alpha_1+\alpha_2)c_1$$

$$x_1 = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_1$$

Como $c_1 \in C$, temos que $x_1 \in \alpha_1 C+\alpha_2 C$ e portanto

$$(\alpha_1+\alpha_2)C \subseteq \alpha_1 C+\alpha_2 C$$

Tomando agora um ponto de $\alpha_1 C+\alpha_2 C$

$$x_2 = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$$

$$x_2 = (\alpha_1+\alpha_2).\left(\frac{\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)$$

Como C é convexo e $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = 1$, temos que

$c_3 = \left(\frac{\alpha_1 c_1}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_2 c_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right)$ é uma combinação convexa de dois pontos de C e portanto $c_3 \in C$. Reescrevendo x_2:

$$x_2 = (\alpha_1+\alpha_2)c_3,\quad c_3 \in C.$$

Logo, $x_2 \in (\alpha_1+\alpha_2)C$ e portanto $\alpha_1 C+\alpha_2 C \subseteq (\alpha_1+\alpha_2)C$, o que acarreta à conclusão de que

$$\alpha_1 C+\alpha_2 C = (\alpha_1+\alpha_2)C$$

Para a segunda parte da questão considere $C = \{-1, 1\}$

Tem-se

$$(\alpha_1+\alpha_2)C = \{(\alpha_1+\alpha_2); -(\alpha_1+\alpha_2)\}$$

$$\alpha_1 C+\alpha_2 C = \{(\alpha_1+\alpha_2); -(\alpha_1+\alpha_2); -\alpha_1+\alpha_2; \alpha_1-\alpha_2\}$$

Claramente distintos, deixando de valer a igualdade

7

Supondo que exista a que separa S, T, podemos afirmar que existe c tal que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle a, x\rangle = c\}$$ é um hiperplano separador

Sem perda de generalidade, considere

$$T \subseteq H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \geq c\}$$

$$S \subseteq H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq c\}$$

- $\forall x \in S$ temos $\langle a, x\rangle \leq c$ o que implica $\sup_{x \in S} \langle a, x\rangle \leq c$.

De forma análoga temos $\forall y \in T$ que $\langle a, y\rangle \geq c$ o que implica $\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle \geq c$.

Daí, $\sup_{x \in S} \langle a, x\rangle \leq c \leq \inf_{y \in T} \langle a, y\rangle$

- Como $\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle \leq \sup_{x \in S} \langle a, x\rangle$ e $\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle \leq \sup_{y \in T} \langle a, y\rangle$

temos a relação

$$\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle \leq \sup_{y \in T} \langle a, y\rangle.$$

A relação acima se reduz ainda à restrição estritamente menor

$$\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle < \sup_{y \in T} \langle a, y\rangle.$$

Supondo que $\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle = \sup_{y \in T} \langle a, y\rangle$ teríamos a relação

$$\inf_{x \in S} \langle a, x\rangle = \sup_{x \in S} \langle a, x\rangle = c = \inf_{y \in T} \langle a, y\rangle = \sup_{y \in T} \langle a, y\rangle,$$ ou

seja, S e T seriam o mesmo plano e não seriam separáveis por a, uma contradição pela hipótese inicial.

Agora, supondo que

$$\sup_{x\in S}\langle a,x\rangle \leq \inf_{y\in T}\langle a,y\rangle$$

e que ~~sup~~ $\inf_{x\in S}\langle a,x\rangle < \sup_{y\in T}\langle a,y\rangle$

então $\exists!\, c$ tal que

$$\sup_{x\in S}\langle a,x\rangle \leq c \leq \inf_{y\in T}\langle a,y\rangle$$

Temos então que

$\forall x\in S \quad \langle a,x\rangle \leq c$

$\forall y\in T \quad \langle a,\cancel{x}y\rangle \geq c$

Como assumimos que $\inf\langle a,x\rangle < \sup\langle a,y\rangle$, então existe algum y_0 pro qual $y_0\in T$ e $\langle a,y_0\rangle > \langle a,x\rangle\ \forall x$, o que torna S e T diferentes, ou melhor, $T-S\neq\emptyset$.

Logo, podemos afirmar que existe um hiperplano separador tal que $\langle a,x\rangle = c$ que torna os conjuntos separáveis.

$$H=\{x \mid \langle a,x\rangle = c\}$$

Para a segunda parte do exercício, vamos considerar que uma separação é dita forte se existem dois hiperplanos paralelos diferentes que separam S e T convexos.

Supondo S e T fortemente separáveis, então $\exists!\ c_1$ e c_2 tais que

$$\inf_{y\in T}\langle a,y\rangle \geq c_2 > c_1 \geq \sup_{x\in S}\langle a,x\rangle$$

~~Mas pela existência de c_2 e c_1 podemos~~ ~~com~~ ~~tomar c^* de modo que $c_2 > c^* > c_1$.~~

Supondo S e T fortemente separáveis, podemos tomar dois hiperplanos separadores

$$H_1 = \{x, \langle a, x\rangle = c_1\}$$

$$H_2 = \{x, \langle a, x\rangle = c_2\}$$

de modo que $\forall x \in S$ tem-se $\langle a, x\rangle \leq c_2 < c_1$ e $\forall y \in T$ tem-se $\langle a, y\rangle \geq c_1 > c_2$.

Como $c_1 > c_2$, podemos tomar c^* de modo que $c_1 > c^* > c_2$.

Daí, temos que

$$\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle \geq c_1 > c^* \cancel{\geq} > c_2 \geq \sup_{\cancel{y}\, x \in S} \langle a, x\rangle$$

ou melhor

$$\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle > c^* > \sup_{x \in S} \langle a, x\rangle$$

$$\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle > \sup_{x \in S} \langle a, x\rangle \quad (1)$$

Agora, supondo que a relação (1) é verdadeira, queremos demonstrar que S e T são fortemente separáveis.

Pela relação estrita de desigualdade podemos tomar c' de modo que

$$\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle > c' > \sup_{x \in S} \langle a, x\rangle$$

Novamente pra cada desigualdade estrita podemos tomar c_1 e c_2 de modo que

$$\inf_{y \in T} \langle a, y\rangle \geq c_1 > c' > c_2 \geq \sup_{\cancel{y \in T}\, x \in S} \langle a, x\rangle$$

Pela relação acima podemos formar dois hiperplanos

$$H_1 = \{x | \langle a, x\rangle \cancel{\geq} = c_1\} \text{ ~~onde~~ } \cancel{T \subset H_1}$$

$$H_2 = \{x | \langle a, x\rangle = c_2\}$$

onde $T \subseteq H_1^+$, $H_2, S \subset H_1^-$, $H_1, T \subset H_2^+$, $S \subset H_2^-$. Logo, como $H_1 \neq H_2$, os conjuntos são fortemente separáveis.