V e.v $\iff \exists A \mid V = \ker(A)$

Prova: $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ V e.v

Vamos m.q

$V = \ker(A)$ para $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix}$

E e.a $\iff \exists A, b \mid E = \{x \mid Ax = b\}$

$$E = x_0 + V = x_0 + \ker(A)$$
$$= \{x \mid Ax = b \text{ onde } b = Ax_0\}$$

$E = x_0 + V$, $\dim V = k$, $A\ (n-k) \times n$

$V = \ker(A)$

1. $V \subseteq \ker(A)$

$v \in V$, $a_i \in V^\perp$ $\forall i$

$\Rightarrow a_i^T v = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \quad a_i^T v = 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \quad Av = 0 \iff v \in Ker(A)$

2. $Ker(A) \subseteq V$

$V = [V^\perp]^\perp$

$x \in Ker(A),\ Ax = 0,\ a_i^T x = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$

Queremos mq $x \in (V^\perp)^\perp$

$y \in V^\perp$ e queremos mq $x^T y = 0$

$\Updownarrow$

$y = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i a_i \Rightarrow x^T y = \sum_{1}^{h} \alpha_i x^T a_i = 0$

$$\begin{cases} \max \\ \min \quad c^T x \\ Ax \leq b \\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in I \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

1) Escolha as variáveis de decisão $x_1, \dots, x_n$

* Usar nomes de variáveis que fazem sentido com a física do problema

2) Função objetiva: $c^T x$: o que queremos maximizar ou minimizar

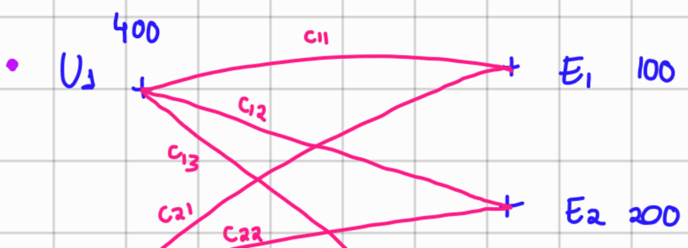
3) Restrições do problema $Ax \leq b$, $x_i \in \mathbb{Z}$

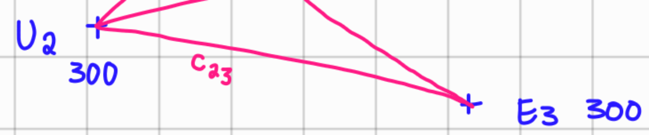
Exercício 1. Uma fábrica possui duas usinas U_1 e U_2. A usina U_1 dispõe de 400 unidades de um produto e a U_2 de 300 unidades do mesmo produto. A fábrica tem três clientes E_1, E_2 e E_3 cujas demandas respectivas para o produto são 100 unidades para E_1, 200 unidades para E_2 e 300 unidades para E_3. Os custos de transportes são resumidos na tabela seguinte:

	E_1	E_2	E_3
U_1	1	1.5	3.5
U_2	2	1	2

Por exemplo, cada unidade fornecida a E_1 a partir de U_2 custa 2 reais. Como obter um sistema de distribuição ótimo.

Modelo de Transporte





- as fábricas precisam produzir uma quantidade $\geq$ demanda dos clientes

- Parâmetros do Problema:

→ d_i para E_i

→ c_i para U_i

→ c_{ij} custo de transporte entre i e j

1. Variáveis de decisão x

x_{ij}: unidades do produto enviado de $U_i \to E_j$ caso geral: $i = 1, \dots, m$

x_{11}, x_{12}, x_{13} e x_{21}, x_{22}, x_{23} $j = 1, \dots, n$

2. Função objetiva a ser minimizada $c^T x$

$$f(x) = c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \dots + c_{23} x_{23} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

caso geral: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

3. Restrições do problema $Ax \leq b$

- Restrições de capacidade

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} &\leq 400 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} &\leq 300 \end{aligned}\right\} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i \ \forall i$$

- Restrições de atendimento a demanda

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} x_{i1} &= 100 \\ \sum_{i=1}^{2} x_{i2} &= 200 \\ \sum_{i=1}^{2} x_{i3} &= 300 \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq d_j \text{ para } E_j$$

$x_{ij} \in \mathbb{N}$ Integralidade

$x_i \geq 0$

Exercício 2. Numa usina química, produzimos dois tipos de produtos a partir de três fertilizantes. O produto I, composto por um quilograma de nitratos e dois quilogramas de sal de potássio é vendido por R$7, e o produto II, composto de um quilograma de nitratos, um quilograma de fosfatos e três quilogramas de sal de potássio é vendido por R$9. Sobram no estoque 8kg de nitratos, 4kg de fosfatos e 19kg de sal de potássio.

I 1. Qual quantidade de cada produto a empresa tem que produzir para maximizar o lucro?

II 2. Uma cooperativa agricola quer negociar (i.e., minimizar) o preço de um quilograma de cada componente para comprar a granel todos os fertilizantes do estoque. Como determinar os preços para que a venda a granel seja pelo-menos tão lucrativa como a venda dos produtos?

Problema de Mistura

P \ F	NO_3	KCl	PO_4	Preço
I	1 kg	2 kg		7
II	1	3 kg	1 kg	9
	8	19	4	

$$(P)\begin{cases} \max\ 7p_1 + 9p_2 \\ p_1 + p_2 \leq 8 \\ 2p_1 + 3p_2 \leq 19 \\ p_2 \leq 4 \\ p_1, p_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

I

1. Variáveis de decisão

p_1 quantidade de I $p_1 \in \mathbb{N}$

p_2 quantidade de II $p_2 \in \mathbb{N}$

π_1 : preço de 1kg de NO_3

π_2 : " KCl

π_3 : " PO_4

2. Função Objetiva

$$\text{Lucro}(p_1, p_2) = 7p_1 + 9p_2$$

3. Restrições

Restrições de recurso:

II

(D) "dual" de (P)

$$\begin{cases} \min\ 8q_1 + 19q_2 + 4q_3 \\ q_i \geq 0 \\ q_1 + 2q_2 \geq 7 \\ q_1 + 3q_2 + q_3 \geq 9 \end{cases}$$

* se o primal é max, o dual é min para qualquer problema de é convexo teorema da dualidade

continuar o problema.

Exercício 6. Uma fábrica de petróleo deseja utilizar quatro tipos de petróleos para produzir três tipos de diesel: A, B, e C. A respeito dos tipos de petróleo, temos as seguintes informaões:

Tipo de petróleo	Quant. max. disp. por dia	Custo (reais por baril)
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

O diesel A não pode conter mais de 30% do petróleo do tipo 1, nem mais de 50% do tipo 3, mas deve conter no mínimo 40% do tipo 2. O preço de venda deste diesel est de 5.5 reais por baril.

O diesel B cujo preço de venda é 4.5 reais por baril, deverá ser composto de pelo menos 10% do tipo 2 mas no máximo de 50% do tipo 1.

O diesel C não poderá conter mais de 70% do petróleo do tipo 1 e o seu preço de venda é de 3.5 reais por baril.

A fabrica gostaria de saber a quantidade de baris de cada tipo de petróleo que deveria ser utilizada na fabricação de cada um dos tipos de diesel para poder maximizar seu lucro.

1. Variáveis de decisão: $i = 1, 2, 3, 4$ $j = A, B, C$

$q = [q_{ij}]$ → quantidade de barris do tipo de petróleo i para o diesel j

diesel A $\begin{cases} q_{1A} \\ q_{2A} \\ q_{3A} \\ q_{4A} \end{cases}$ diesel B $\begin{cases} q_{1B} \\ q_{2B} \\ q_{3B} \\ q_{4B} \end{cases}$ diesel C $\begin{cases} q_{1C} \\ q_{2C} \\ q_{3C} \\ q_{4C} \end{cases}$

2. Função objetiva

$$5{,}5(q_{1A}+q_{2A}+q_{3A}+q_{4A}) + 4{,}5(q_{1B}+q_{2B}+q_{3B}+q_{4B}) + 3{,}5(q_{1C}+q_{2C}+q_{3C}+q_{4C})$$

$$-\ 3(q_{1A}+q_{1B}+q_{1C}) - 6(q_{2A}+q_{2B}+q_{2C}) - 4(q_{3A}+q_{3B}+q_{3C})$$

$$-\ 5(q_{4A}+q_{4B}+q_{4C}) = f(q)$$

3. Restrições

(II) $q_{1A} \leq 0{,}3(q_{1A}+q_{2A}+q_{3A}+q_{4A})$

(III) $q_{3A} \leq 0{,}5(q_{1A}+q_{2A}+q_{3A}+q_{4A})$

(IV) $q_{2A} \geq 0{,}4(q_{1A}+q_{2A}+q_{3A}+q_{4A})$

Restrições de capacidade

$$\left.\begin{array}{l} q_{1A}+q_{1B}+q_{1C} \leq 3000 \\ q_{2A}+q_{2B}+q_{2C} \leq 2000 \\ q_{3A}+q_{3B}+q_{3C} \leq 4000 \\ q_{4A}+q_{4B}+q_{4C} \leq 1000 \end{array}\right\} (I)$$

(V) $q_{1B} \leq 0{,}5(q_{1B}+q_{2B}+q_{3B}+q_{4B})$

(VI) $q_{2B} \geq 0{,}1(q_{1B}+q_{2B}+q_{3B}+q_{4B})$

(VII) $q_{1C} \leq 0{,}7(q_{1C}+q_{2C}+q_{3C}+q_{4C})$

$q_{iA}+q_{iB}+q_{iC} \geq 0 \quad , i=1,2,3,4$ (VIII)

O modelo de programação linear é $\begin{cases} \max f(q) \\ (I)-(VIII) \end{cases}$

Problema da mochila. Mickey esta preparando sua mochila para um trecking na *Cordillera de los Andes*. Cada objeto que ele pode levar tem uma certa utilidade (expressa por um número positivo). Cada objeto tem um peso conhecido e Mickey não quer carregar mais de P kg. Escrever um problema de otimização que permita determinar os objetos a serem colocados na mochila de modo a maximizar a utilidade. Como modificar este problema se tomarmos em consideração o volúme de cada objeto; o volúme da mochila sendo V?

* tem um peso e um volume máximo

1. Variáveis de Decisão

$x_i = 1, \dots, n$ para n objetos, onde $x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é levar na mochila} \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$

Função Objetiva

07/03/2024

8.4 - warehousing Problem

- n períodos
- p_i preço de compra e venda no tempo i
- C capacidade de armazenamento
- r custo unitário de armazenamento

Variáveis de decisão

1. x_i , $i=1,\dots,n$ estoque no início de i
2. u_i quantidade comprada em i
3. s_i quantidade vendida em i

Maximizar o lucro

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} p_i (s_i - u_i) - r \cdot x_i \\ x_{i+1} = x_i + u_i - s_i \ , \ i = 1, \dots, n-2 \\ 0 = x_n + u_n - s_n \rightarrow \text{precisa ficar vazia no final} \\ x_i + z_i = C \ , \ z_i \geq 0 \ , \ i = 1, \dots, n \\ x_i, u_i, s_i \geq 0 \ \ \forall i \end{cases}$$

"slack variable"

$x_{n+1} = 0$

$x_1 = 0$

Modelagem de Roteamento de Ambulâncias

chamados de emergência

Laspated → biblioteca de discretização

consideramos um problema de otimização linear da forma

$$(LP) \quad c^* = \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ a_i^T x \geq b_i, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

* problema primal

onde $c, a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ $(b \in \mathbb{R}^m)$

OBS: Uma restrição $a^T x = b$ pode ser escrita $a^T x \geq b, -a^T x \geq -b$

OBS: O problema

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ a_i^T x \geq b_i, & \forall i \end{cases} \iff - \begin{cases} \min & -c^T x \\ a_i^T x \geq b_i, & \forall i \end{cases}$$

O problema dual de (LP) é

$$(D) \quad d^* = \begin{cases} \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m} & \lambda^T b \\ \lambda \geq 0, & A^T \lambda = c \end{cases}$$

- Dualidade Fraca:

1. $\forall \lambda \geq 0 : A^T \lambda = c, \ \forall x \mid a_i^T x \geq b_i, \ \forall i$

temos $\lambda^T b \leq c^T x$

2. $d^* \leq c^*$

— Dualidade Forte :

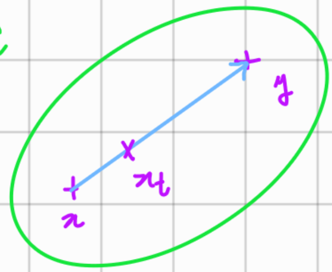
1. O dual do dual é equivalente ao primal

2. Se LP é viável ($\exists x \mid a_i^T x \geq b_i \; \forall i$) e $\exists c_* \in \mathbb{R} \mid c^T x \geq c_*$ $\forall x \mid a_i^T x \geq b_i \; \forall i$

então $d_* = c_*$

Convexidade

Def C é convexo se, e somente se, $\forall x, y \in C$,



$$[x, y] = \{ tx + (1-t)y ; 0 \leq t \leq 1 \} \subseteq C$$

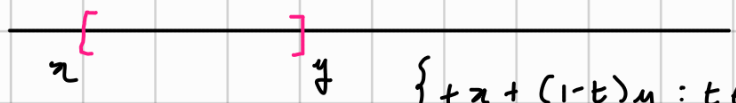
$$[x, y] = \{ x + t(y - x), 0 \leq t \leq 1 \}$$

Teorema de separação de conjuntos convexos

Sejam A, B convexos, $A \cap B = \emptyset$

Exemplos de conjuntos convexos

Espaço afim E

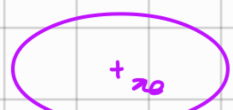


$$\{ tx + (1-t)y : t \in \mathbb{R} \} \subseteq E$$

Poliedro $\{ x \mid a_\alpha^T x \leq b_\alpha, \forall \alpha \in I \}$ conj. das soluções de um conj de desigualdades lineares

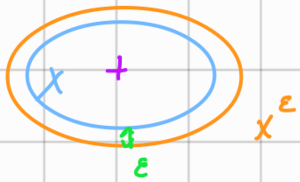
$\hookrightarrow \{ x \mid Ax \leq b \}$ $A_{m \times n}$

Elipsoide $\mathcal{E} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0)^T Q (x - x_0) \leq K^2 \}$

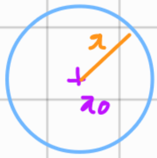


X convexo

$X^{\varepsilon} = \{x \mid dist(x, X) \leq \varepsilon\}$ | convexo



$B(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$



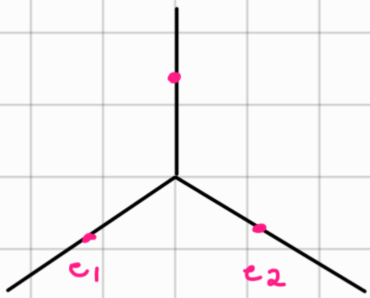
$x_0, x_1, \dots, x_m$ afim independente.

O simplex S associado a $x_0, x_1, \dots, x_m$ é $S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$

Simplex Unitário

$(x_0, x_1, \dots, x_m) = (0, e_1, \dots, e_n)$

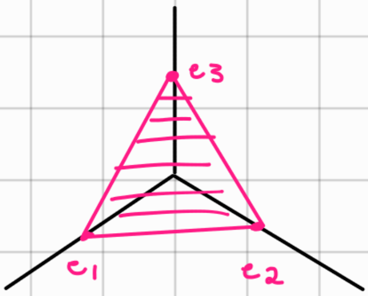
$e_i \in \mathbb{R}^n$, $(e_1, \dots, e_m)$ base canônica de $\mathbb{R}^n$



Simplex Probabilística

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$



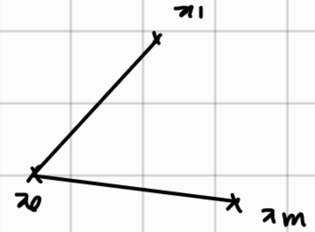
Um simplex é um poliedro. Seja

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

Seja $A = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

com $x_0, x_1, \dots, x_m$ afim indep.

$(x_0, x_1, \dots, x_m)$ afim indep $\Rightarrow Kn(A) = \{0\}$



$\Rightarrow \exists\, B \mid BA = I$

$(x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0)$ L.I

$$A\alpha = 0 \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum \alpha_i x_i = 0 \\ \sum \alpha_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0$$

$$y \in S \iff \exists\, \theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} \;\Big|\; \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = A\theta, \; e^T\theta = 1, \text{ com } e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \exists\, \theta = 0 \;\Big|\; B\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \theta, \; e^T\theta = 1$$

$$\iff B\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \; e^T B \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Def: Uma combinação convexa de $x_1, \ldots, x_m$ é da forma

$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

X é convexo

toda combinação convexa de pontos de X é um ponto de X

par de f

Por indução na quantidade de pontos na combinação convexa

toda combinação convexa de m pontos de X é um ponto de X

X convexo $\Rightarrow H_2$

se H_m vale para $m \geq 2$ queremos mostrar que H_{m+1} vale

Seja $x = \sum^{m+1} \alpha_i x_i$, $x_i \in X$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum^{m+1} \alpha_i = 1$

$i=1$; ; ; $i=1$

$\exists i \mid \alpha_i \neq 1$ [se $\alpha_i = 1 \ \forall i \Rightarrow \sum \alpha_i$

Podemos supor α

Prop. Sejam X_i, $i \in I$ convexos. Então $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ é convexo

seja $X \neq \emptyset$

Def: $\text{conv}(X)$ é o menor conjunto convexo que contém X

Prop. $\text{conv}(X) = \underbrace{\bigcap_{S \text{ convex},\, X \subseteq S} S}_{S(X)}$

$\text{conv}(X) \subseteq S(X)$

$S(X) \subseteq \text{conv}(X)$

Prop. $\text{conv}(X) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ,\ n \geq 1 ,\ x_i \in X ,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 ,\ \lambda_i \geq 0 \right\}}_{S(X)}$

Prova

1. a) $S(X)$ é convexo

b) $X \subseteq S(X)$

$\Rightarrow \operatorname{conv}(X) \subseteq S(X)$

2. Seja $x \in S(X)$

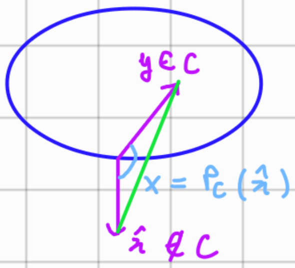
* se tiver, pegar c/ alguém a aula do dia 14

projeção num conjunto convexo

19/03/2024

prop. 2.15 seja C convexo fechado

$\exists!\ a \in C$ t.q. $\|a - \hat{x}\| = \begin{cases} \min \|y - \hat{x}\| \\ y \in C \end{cases}$



prop. 2.16 seja C convexo fechado $\neq \emptyset$

$x = P_C(\hat{x}) \iff \forall y \in C,\ \langle y - x, \hat{x} - x\rangle \leq 0$

Prova

1. x_0 sol. de $\begin{cases} \min f(y) \\ y \in C \end{cases}$ com f, C convexos, f dif.

$\iff \forall x \in C,\ \underbrace{\langle x - x_0, \nabla f(x_0)\rangle}_{(1)} \geq 0,\quad x_0 = x$

$\begin{cases} \min \frac{1}{2}\|y - \hat{x}\| = f(y) \\ y \in C \end{cases}$ $\qquad \nabla f(y) = y - \hat{x}$

(1) $\langle y - x, x - \hat{x}\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C$

2. $\Rightarrow x = P_C(\hat{x}) \quad \forall\ 0 \leq t \leq 1$

$\|\underbrace{tx + (1-t)y}_{\in C} - \hat{x}\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2 \quad \forall y \in C$

$\forall y \in C: \ \forall\ 0 \leq t \leq 2$

$\|x - \hat{x} + t(y - x)\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2$

$\|x - \hat{x}\|^2 + t^2\|y - x\|^2 + 2t\langle x - \hat{x}, y - x\rangle \geq \|x - \hat{x}\|^2$

$$\|\hat{x}-x\|^2 + t^2\|y-x\|^2 + 2t\langle \hat{x}-x, y-x\rangle \geq \|\hat{x}-x\|^2$$

$$t\,\|y-x\|^2 \geq 2\langle \hat{x}-x, y-x\rangle$$

$$t \to 0 \quad \langle \hat{x}-x, y-x\rangle \leq 0$$

$\Leftarrow$ $\forall y \in C$ $\langle y-x, \hat{x}-x\rangle \leq 0$

Queremos mostrar que $x = P_C(\hat{x})$

$\forall y \in C$

$$\|\hat{x}-y\|^2 = \|\hat{x}-x+x-y\|^2 = \|\hat{x}-x\|^2 + \underbrace{\|x-y\|^2}_{\geq 0} + 2\underbrace{\langle \hat{x}-x, x-y\rangle}_{\geq 0} \geq \|\hat{x}-x\|^2$$

$\Rightarrow$ $x = P_C(\hat{x})$

Def. Conjunto Cônico : C é cônico se $\forall x \in C$, $\forall t \geq 0$, $tx \in C$

Def cone : C é um cone se C é cônico e convexo

Prop. C é um cone $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1.\ C \text{ é cônico} \\ 2.\ \forall x,y \in C,\ x+y \in C \end{cases}$

Prova: $\Rightarrow$

1. vale

2. $\forall x,y \in C$, $x+y = \frac{1}{2}\underbrace{2x}_{\in C} + \frac{1}{2}\underbrace{2y}_{\in C} \in C$

$\Leftarrow$ C cônico

$\forall x,y \in C$, $\forall\ 0 \leq t \leq 1$

$$\underbrace{\overset{\geq 0}{t}x}_{\in C} + \underbrace{(\overset{\geq 0}{1-t})y}_{\in C} \in C$$

Exemples:

1. cone poliedral: $C = \{x \mid a_i^T x \leq 0 \ \forall i = 1,\dots,n\}$
2. cone de Lorentz: $C = \{(x,t) \mid t \geq \|x\|\}$
3. $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ A = A^T,\ \forall x \mid x^T A x \geq 0\}$

Seja $X \neq \emptyset$

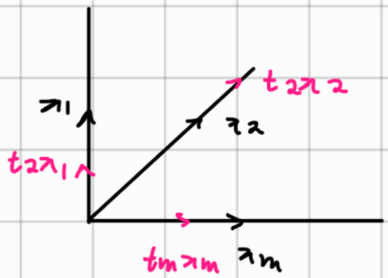
A (X), $\text{conv}(X)$

$\text{conic}(X)$: menor (para $\subseteq$) cone $\supseteq X$ $\qquad$ $\text{conic}(X) \subseteq S(X)$

$$\text{conic}(X): \underbrace{\bigcap_{S \text{ cone},\, X \subseteq S} S}_{S(X)} \qquad S(X) \subseteq \text{conic}(X)$$

$\text{conic}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \right.$

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$



Prop. 38: Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

$\overline{\text{conic}(X)}$: menor cone fechado que contém X é dado por

$$\overline{\text{conic}(X)} : \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Prop. 39: Seja C cone fechado. Seja $\hat{x} \notin C$

Então:

1. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), \hat{x} \rangle > 0$
2. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$

Prova:

1. $\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), \hat{x} \rangle$

$$\| $$

$$\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), \hat{x} - P_C(\hat{x}) + P_C(\hat{x}) \rangle$$

$$= \underbrace{\| \hat{x} - P_C(\hat{x}) \|^2}_{>0} + \langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) \rangle$$

$$> \langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) \rangle$$

$= 2 \langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), \frac{1}{2} P_C(\hat{x}) \rangle$

$= 2 \underbrace{\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) - \frac{1}{2} P_C(\hat{x}) \rangle}_{\geq 0}$

2. $\forall y \in C \quad \forall t \geq 0, t \neq 0$

$\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), y \rangle$

$= \langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), ty \rangle$

$= \Big| \dfrac{\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), ty - P_C(\hat{x}) \rangle}{t} + \dfrac{\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) \rangle}{t}$

C cone $\Rightarrow ty \in C$

$\Rightarrow$ (prop 2.16)

$\leq \dfrac{\langle \hat{x} - P_C(\hat{x}), P_C(\hat{x}) \rangle}{t}$

$t \to +\infty$

Def [ri] Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$

$x_0 \in ri(C) \iff \exists \; \varepsilon > 0 \mid B(x_0, \varepsilon) \cap Aff(C) \subseteq C$

Def um hiperplano é um espaço em $\mathbb{R}^n$

$E \to dim(k) \qquad Ax = b$

Def seja $H = \{ x \mid a^T x = c \}$

$H_+ = \{ x \mid a^T x \geq c \}, \quad H_- = \{ x \mid a^T x \leq c \}$

Teorema 4.6 Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo e $y \in \overline{C}^c$

$\exists \; a \neq 0, \; a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, y \rangle > \sup\limits_{x \in C} \langle a, x \rangle$

Prova :