EMAP - Escola de Matemática Aplicada
Fundação Getúlio Vargas
Programação Linear Inteira

Lista de Exercícios de Modelagem

Aluno(a):Daniel Jacob Tonn

Professor:Dr. Vincent Gérard Yannick Guigues

Rio de Janeiro
Março de 2024

Lista 1 - Modelagem

Exercício 2. *Numa usina química, produzimos dois tipos de produtos a partir de três fertilizantes. O produto I, composto por um quilograma de nitratos e dois quilogramas de sal de potássio e vendido por $R\$7$, e o produto II, composto de um quilograma de nitratos, um quilograma de fosfatos e três quilogramas de sal de potássio e vendido por $R\$9$. Sobram no estoque $8kg$ de nitratos, $4kg$ de fosfatos e $19kg$ de sal de potássio.*

1. *Qual quantidade de cada produto a empresa tem que produzir para maximizar o lucro?*
2. *Uma cooperativa agrícola quer negociar (i.e., minimizar) o preço de um quilograma de cada componente para comprar a granel todos os fertilizantes do estoque. Como determinar os preços para que a venda a granel seja pelo-menos tão lucrativa como a venda dos produtos?*

Resposta. Antes de determinar quais são as variáveis de decisão, vamos exibir os dados em uma tabela afim de facilitar a visualização destes.

	Nitrato (N)	Sal de potássio (S)	Fosfato (F)	Preço (P)
I	$1kg$	$2kg$	$-$	$R\$7$
II	$1kg$	$3kg$	$1kg$	$R\$9$
Estoque	$8kg$	$19kg$	$4kg$	$-$

para a primeira parte do problema, podemos extrair as variáveis de decisão de forma semelhante a questão 1. Aqui, essas variáveis correspondem a quantidade de cada um dos dois tipos de produto,

$$T_I \text{ e } T_{II}.$$

A função objetiva é aquela que descreve o lucro final:

$$f(\mathbf{T}) = 7T_I + 9T_{II}$$

As restrições diante do problema proposto são unicamente da limitação de matéria-prima,

$$T_I + T_{II} \leq 8$$
$$2T_I + 3T_{II} \leq 19$$
$$T_{II} \leq 4$$

Novamente, as condições de integridade consideram que só é possível produzir os compostos quilo a quilo, ou seja, $T_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{I, II\}$ e por consequência a imagem de $f(\mathbf{T}$ é discreta inteira. Bem definida a modelagem do primeiro problema, podemos utilizá-lo pra desenvolver a segunda parte. Tendo a equação objetiva e maximização do lucro, podemos definir as novas variáveis de decisão da segunda parte do problema como P_N, P_S e P_F que representam o preço do quilo granel do nitrato, do sal de potássio e do fosfato, respectivamente. Daí, a função objetiva é

$$P_N + 2P_S + 4F_S \geq 4$$

$$P_N + 3P_S + P_F \geq 9$$

As condições de integridade impostas sobre essa parte do problema se direcionam ao valor do preço de cada fertilizante à granel, que devem ser valores positivos (mas não necessariamente inteiros): $P_i \in \mathbb{R}^+$, $i \in \{N, S, F\}$.

Exercício 3. *Um modelo de carro é montado em* 3 *usinas situadas em cidades* V_1, V_2 *e* V_3. *O motor destes modelos é fornecido por por duas outras usinas situadas nas cidades* U_1 *e* U_2. *As usinas de montagem precisam de pelo menos* 5, 4 *e* 3 *motores, respectivamente. Cada usina pode fornecer no máximo* 6 *motores. A direção da empresa quer minimizar o custo de transporte dos motores entre os dois sítios de fábrica e os três sítios de montagem. Os custos unitários (por motor transportado) para todos os itinerários possíveis são:*

	V_1	V_2	V_3
U_1	38	27	48
U_2	37	58	45

Como minimizar o custo total de transporte respeitando a oferta e a demanda?

Resposta. As variáveis de decisão são as que representam a quantidade de motores a serem transportadas de cada usina pra cada montadora. Podemos representar essas variáveis por q_{ji}, em que $j \in \{1, 2\}$ são as usinas fornecedoras e $i \in \{1, 2, 3\}$ são as montadoras clientes.
A função objetiva é a que descreve o custo total de deslocamento dos motores

$$f(\mathbf{q}) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} q_{ji} c_{ji} \right\}$$

onde c_{ji} representa o custo do transporte de um motor da usina j para a fábrica i.Podemos escrever a função objetivo em sua forma extensa:

$$38q_{11} + 27q_{12} + 48q_{13} + 37q_{21} + 58q_{22} + 45q_{23}$$

As restrições de disponibilidade de motores são

$$q_{11} + q_{12} + q_{13} = 6;$$

$$q_{21} + q_{22} + q_{23} = 6;$$

e as restrições de demanda são

$$q_{11} + q_{21} = 5;$$

$$q_{12} + q_{22} = 4;$$

$$q_{13} + q_{23} = 3;$$

Além disso, o fator de integridade: só é possível transportar motores inteiros, $q_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como o custo do transporte de cada um é inteiro e queremos concluir as entregas demandadas (não minimizar o custo a ponto de ficar sem entregas) temos que $f(\mathbf{q}) \in \mathbb{N} \cap \{0\}$.

Exercício 4. *Um sapateiro faz* 6 *sapatos por hora, se fizer somente sapatos e* 5 *cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele trabalha* 10 *horas por dia e gasta* 2 *unidades de couro para fabricar* 1 *unidade de sapato e* 1 *unidade de couro para fabricar* 1 *unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de* 78 *unidades por dia e que o lucro unitário por sapato é de* 5 *reais e o de cinto é de* 4 *reais, pede-se: o modelo do sistema de produção diário do sapateiro, se o objetivo é maximizar seu lucro diário.*

Resposta. As variáveis de decisão são aquelas referentes a quantidade de cada tipo de peça produzida diariamente pelo sapateiro. Nomearemos de S a quantidade de sapatos que o sapateiro produz diariamente e C a quantidade diária de cintos produzidos.
A função objetivo relaciona a quantidade de cada item produzido com o lucro de cada unidade de peça, conforme a expressão

$$f(S, C) = \max \{5S + 4C\}.$$

Inicialmente, a quantidade máxima de couro disponível diariamente é de 78 unidades, daí,

$$2S + C \leq 78$$

descreve a primeira restrição. Considerando que o sapateiro trabalha uma hora completa confeccionando um tipo de produto e somente então decide entre continuar por mais uma hora no mesmo produto ou alternar, a restrição de horas pode ser estabelecida:

$$\frac{S}{6} + \frac{C}{5} = 10.$$

As condições de integridade são a confecção de uma quantidade inteira de sapatos cintos confeccionados e lucro final, ou melhor dizendo,

$$S, C, f(S, C) \in \mathbb{N}$$

Exercício 5. *Certo fabricante de combustível para avião vende 2 tipos de combustível, A e B. O combustível de tipo A possui 25% de gasolina 1, 25% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. 0 combustível B tem 50% de gasolina 2 e 50% de gasolina 3. Há disponível para produção 500 galões de gasolina 1 e 200 galões de cada gasolina 2 e 3. Os lucros pela venda dos combustíveis A e B são, respectivamente, 20 e 30 dólares. Quanto se deve fazer de cada combustível para se obter um lucro máximo? Formule e resolva o problema.*

Resposta. Vamos exibir os dados em uma tabela pra facilitar verificação das informações

Combustível	Gasolina 1	Gasolina 2	Gasolina 3	Preço (P)
A	25%	25%	50%	$20
B	–	50%	50%	$30
Estoque	500	200	200	–

As variáveis de decisão são Q_A e Q_B que indicam a quantidade de combustível dos tipos A e B, respectivamente.
A função objetivo é descrita por

$$f(Q_A, Q_B) = \max\{20Q_A + 30Q_B\}$$

e suas restrições são unicamente advindas da disponibilidade de matéria prima em estoque:

$$\frac{1}{4}Q_A \leq 500;$$

$$\frac{1}{4}Q_A + \frac{1}{2}Q_B \leq 200;$$

$$\frac{1}{2}Q_A + \frac{1}{2}Q_B \leq 200.$$

Lista 2 - Modelagem

Gestão da produção de eletricidade. *As usinas térmicas e hidrelétricas brasileiras podem ser agrupadas em 4 subsistemas intercambiando energia entre eles. Supomos que cada região contenha uma usina hidrelétrica (agregação das usinas hidrelétricas deste subsistema) e um número arbitrário de usinas térmicas. Cada usina hidrelétrica funciona com um reservatório. Somente 80% das afluências de uma região dada são armazenadas nos reservatórios. O restante é diretamente convertido em eletricidade por usinas ao fio d'água. O custo de produção da eletricidade com as usinas térmicas é uma função linear da produção enquanto ele é considerado nulo com usinas hidrelétricas. Cada usina tem uma capacidade de produção conhecida e os níveis dos reservatórios devem ficar entre determinados valores mínimos e máximos. Cada dia, a demanda dos clientes deve ser atendida, eventualmente comprando energia no mercado spot a um custo unitário mais alto que o maior custo unitário das térmicas.*
Explicar como determinar as produções diárias das usinas térmicas e hidrelétricas para o próximo mês, de maneira a minimizar o custo e satisfazer a demanda e as restrições de funcionamento das usinas.

Resposta. Suponha que temos h usinas hidrelétricas e t usinas térmicas. O que precisamos determinar é a quantidade diária de produção de energia de cada usina i, $i = \{1, 2, \ldots, h, h+1, \ldots, h+t\}$. Vamos chamar essas quantidades de q_i - essas são nossas **variáveis de decisão**. Em cada usina hidrelétrica $i = \{1, 2, \ldots h\}$ chega uma quantidade de afluência A_i. Imediatamente, $0.2A_i$ é convertido em eletricidade a um custo 0 de produção, enquanto $0.8A_i$ é armazenado no reservatório r_i para produção nos dias seguintes, ainda considerando custo zerado. Das usinas térmicas $i = \{h+1, \ldots, h+t\}$, tendo custo linear de produção de i sendo x_i, o custo final da produção por cada usina térmica se dá por $q_i x_i$ - naturalmente, se o custo de produção em cada usina térmica for o mesmo, $x_i = x, \forall i \in \{h+1, \ldots, h+t\}$. Daí, nossa **função objetivo** é aquela que descreve o custo de produção total.

$$f(q_i) = \sum_i q_i x_i$$

A função acima deve ser minimizada satisfazendo algumas restrições descritas no enunciado: - Supondo que cada reservatório r_j inicia o dia com um nível de água n_i conhecido e as capacidades máxima e mínima desse reservatório são M e m,respectivamente. Ao final do dia essa quantidade de água n_i somada ao fluxo de entrada pela afluência menos a conversão em eletricidade devem satisfazer os níveis máximos e mínimos de cada reservatório, ou melhor dizendo:

$$m < n_i + 0.8A_i - q_i < M$$

Além disso, cada usina tem uma capacidade máxima de produção c_i conhecida. Daí,

$$q_i \leq c_i$$

Além disso, claro, a demanda diária deve ser satisfeita, ou seja,

$$\sum q_i = D$$

em que D representa a demanda total pelos clientes

Gestão de carreiras. *Queremos investir M reais em n ativos financeiros. O retorno do ativo i no período de investimento é r_i. Escrever um problema de otimização linear que permita determinar a quantidade de dinheiro a investir em cada ativo para maximizar o lucro. Qual é a solução deste problema?*

Resposta. As **variáveis de decisão** são a quantidade investida q_i em cada ativo financeiro i. Daí, nossa **função objetivo** é aquela que descreve o lucro

$$f(q_i) = \sum q_i r_i$$

A função acima deve ser maximizada respeitando as **restrições** de limitação de investimento:

$$\sum q_i = M$$

Planificação da expansão da produção. *Consideramos o problema de expansão da capacidade de produção de uma usina produzindo m produtos. Cada uma das n máquinas é flexível e cada produto pode ser produzido por qualquer máquina. A máquina j está agora disponível para h_j horas de funcionamento por semana e horas adicionais podem ser adquiridas a um custo atualizado de c_j por hora. O uso da máquina j é limitado por uma cota superior de u_j horas; por outro lado, uma revisão de t_j horas da máquina j é necessária para cada hora de funcionamento. O tempo total gasto em revisão não pode ultrapassar T horas. A taxa de produção do produto i na máquina j é a_{ij}, com um custo associado de g_{ij} por hora. Cada semana, a empresa deve satisfazer a demanda em cada um dos m produtos. Cada unidade de produto i não vendida acarreta um custo p_i. A empresa quer decidir quantas horas adicionais são necessárias para cada máquina com os dados a seguir:*

- $n = 4$, $m = 3$, $T = 100$, $p_i = (400, 400, 400)$;
- $c_j = (2.5, 3.75, 5.0, 3.0)$, $t_j = (0.08, 0.04, 0.03, 0.01)$;
- $h_j = (500, 500, 500, 500)$, $t_j = (2000, 2000, 3000, 3000)$;
- $[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \\ 0.05 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$, $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2.6 & 3.4 & 3.4 & 2.5 \\ 1.5 & 2.4 & 2.0 & 3.6 \\ 4.0 & 3.8 & 3.5 & 3.2 \end{bmatrix}$;
- *as demandas nos diferentes produtos (numa semana dada) são dadas por* $\{1800, 600, 3000\}$.

Resposta. Nossas **variáveis de decisão** serão T_{ij} que representam o tamanho do intervalo de tempo em que o produto i é produzido na máquina j. A partir daí, podemos escrever nossa função objetivo que descreve o custo final de produção. Pelo enunciado, a taxa de produção do produto i na máquina j é a_{ij}. Daí, custo de produção do produto i na máquina j é

$$\sum_i \sum_j T_{ij} q_{ij},$$

enquanto isso o custo pelas horas extras de cada máquina j é

$$\left(\sum_i (T_{ij}) - h_j \right) c_j$$

portanto o custo total com horas extras é

$$\sum_j \left(\sum_i (T_{ij}) - h_j \right) c_j$$

Além disso, nos resta o custo dos produtos não vendidos:

$$\sum_i \left(\sum_j (T_{ij} a_{ij}) - d_i \right) p_i$$

em que d_i é a demanda semanal do produto i. Podemos então escrever nossa **função objetivo**:

$$\sum_i \sum_j T_{ij} q_{ij} + \sum_j \left(\sum_i (T_{ij}) - h_j \right) c_j + \sum_i \left(\sum_j (T_{ij} a_{ij}) - d_i \right) p_i$$

Devemos agora apresentar as **restrições** diante do modelo. Inicialmente, a limitação de horas trabalhadas por cada máquina:

$$\sum_i T_{ij} \leq u_j, \forall j;$$

Agora, a restrição diante do tempo de revisão:

$$\left(\sum_i T_{ij} \right) t_j \leq T, \forall j$$

Por fim, as restrições diante da demanda

$$\sum_j T_{ij} a_{ij} = d_i, \forall i$$

Gestão de contratos com opção de cancelamento . Uma empresa deve entregar cada mês, via um gasoduto (visto como um armazém de gás com capacidades mínimas e máximas), uma determinada quantidade de gás a seus clientes. Para isso, ela dispõe de um armazém de gás e de um contrato (já pago) com um país produtor de gás que garante uma determinada chegada de gás cada mês. Este gás pode ser enviado no armazém ou no gasoduto diretamente. Além disso, a empresa passou contratos de Gás Natural Liquefeito (GNL) com opção de cancelamento. Cada um destes contratos permite a entrega de uma determinada quantidade de gás, para uma data fixada no contrato. Porém, esta carga pode ser cancelada até um mês antes do dia da entrega, pagando uma multa, dependendo do momento em que é feito o cancelamento (quanto mais tarde o cancelamento, mais elevada a multa). O preço pago pelo GNL é o preço spot do gás natural no dia da entrega. O GNL é entregue por navios que ficam no porto até serem esvaziados. Para evitar que os navios permaneçam muito tempo no porto, um custo (função linear do armazém) é pago cada mês para o gás que sobra nos navios. O gás é vendido aos clientes 30% acima do preço spot. Escrever um programa de otimização linear que permite determinar que contratos tem que cancelar assim como os fluxos de gás na rede de modo a maximizar o lucro satisfazendo as restrições do sistema.

Resposta. Nossas variáveis de decisão são $x_j \in \{0,1\}$ que determina se o contrato j vai ser cancelado ou não e também as variáveis A_G - determina a quantidade de gás que vai do armazém pro gasoduto - P_g - que determina quanto do gás fornecido pelo país vai diretamente para o gasoduto e A_1 que determina quanto gás vai ficar retido no armazém no fim. Nossa **função objetivo** é a que descreve o lucro da empresa. Temos inicialmente o custo com o cancelamento dos contratos, que podemos descrever como

$$\sum_j x_j m_j$$

em que m_j é a multa paga pelo cancelamento do contrato j. Temos ainda o custo do pagamento feito aos navios pelo que sobra de gás dos contratos não cancelados, que é descrita pelo tanto de gás que entra no armazém menos o tanto que sai do armazém. Considere ainda que A_0, A_1 e A_G representam a quantidade de gás no armazém inicialmente, no fim e a quantidade de gás oriunda do armazém direcionada para o gasoduto, respectivamente. Ainda, q_j é quantidade de gás fornecida pelo contrato j e c o custo unitário pago pelo gás que sobra nos navios.a despesa com o que sobra de gás nos navios é

$$((\sum_j (x_j q_j) + P_A + A_0) - A_1 - A_G)c$$

Considerando que o gás que sobra nos navios não advém de contratos cancelados e também não é passado ao clientes (ao menos naquele mês), o lucro da empresa pode ser escrito como a venda do gás menos o custo pago pelo GNL menos os custos adicionais com cancelamento de contrato e pagamento com sobras nos navios. Seja s o preço spot:

$$f(X, A_G, A_0, A_1) =$$

$$= 1.3s(P_G + A_G) - (\sum_j (x_j) m_j) s - \left(\sum_j (x_j) m_j + \left(\left(\sum_j (x_j q_j) + P_A + A_0 \right) - A_1 - A_G \right) c \right)$$

As **restrições** diante do problema são com relação a demanda, limitação de oferta pelo país fornecedor e limites do armazém. A limitação diante da demanda é

$$P_G + A_G = D$$

A limitação do país é que

$$P_G + P_A = P,$$

em que P representa a quantidade de gás fornecida no contrato já pago com o país fornecedor. Por fim, a limitação do armazém que deve respeitar as capacidades mínima e máxima.

$$m < A_1 < M$$

Problema de "Unit commitment". *Uma empresa dispõe de 10 usinas térmicas que estão por enquanto desligadas. As usinas devem ser usadas para satisfazer, para cada um dos meses do ano seguinte, as demandas em eletricidade dos clientes da empresa. Para cada usina, o custo de produção é uma função linear da produção. Por outro lado, ligar uma usina acarreta um custo fixo que depende da usina. Uma vez ligada, a usina fica funcionando até o final do ano. Escrever um problema de otimização que permita saber que usinas ligar e quando, assim como as produções das usinas ligadas de modo a satisfazer as demandas minimizando o custo de produção.*

Resposta. As **variáveis de decisão** são x_{it} - em que $x \in \{0, 1\}$ e i determina se a usina está ligada no mês t - e também as variáveis P_{it} - que determinam a produção da usina i no mês t. Para cada usina, chamaremos o custo de produção de p_i, enquanto o custo fixo por ligar a usina é c_i. Individualmente, cada usina tem um custo fixo se é ligada - podemos verificar isso pela variável $x_{i,12}$. Daí, a **função objetivo** é aquela que descreve os custos da empresa:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{10} \left(x_{\{12,i\}} c_i + \sum_{t=1}^{12} x_{it} P_{it} p_i \right)$$

As **restrições** impostas diante do problema são com relação a demanda. Sendo a demanda de cada mês d_t,

$$\sum_{i=1}^{10} x_{it} P_{it} = d_t, \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\}$$

Além disso outra restrição imposta foi a de uma máquina que foi ligada permaneça ligada pelo restante do ano. Impomos então que

$$x_{n+1,i} \geq x_{n,i}$$