Primeira prova de Programação Linear - Duração 3h
Abril 2024

Todas as respostas devem ser justificadas.

Exercício 1. 2 pontos. Uma empresa pode escolher quatro tipos de líquidos : 8 000 litros do líquido A ao custo unitario 5,50 \$, 4 250 litros de B ao custo unitario 4,50 \$, 16 000 litros de C ao custo unitario 7,50 \$, e 2 000 litros de D ao custo unitario 11,25 \$.

A empresa pode revender estes líquidos diretamente, sem transforma-los, e vende-los por 6 \$ por litro.

Ela pode também elaborar as misturas E, F e G. As misturas devem apresentar as características dadas na tabela 1.

Mistura	Líquido A	Líquido B	Líquido C	Líquido D
E	30%	Pelo menos 10%	40%	No máximo 5%
F	Pelo menos 25%	No máximo 20%	20%	Pelo menos 10%
G	20%	Pelo menos 15%	40%	No máximo 20%

Table 1: Proporção de cada líquido num litro de mistura

As misturas se vendem respectivamente 11 \$, 15 \$ e 14 \$ por litro, e o mercado pode comprar todas as misturas produzidas.

A empresa é obrigada a produzir pelo menos 400 litros de E, pelo menos 800 litros de F e pelo menos 200 litros de G.

Enfim, misturando 2 partes de G com uma parte de E, podemos obter um produto P vendido 22 \$ por litro e cuja demande é suficientemente grande para ser considerada ilimitada.

Modelar este problema por um problema de otimização linear dado que a empresa quer maximizar seu lucro.

Exercício 2. 1.75 pontos. A companhia energética Dark necessita realizar o planejamento energético para um novo prédio. A energia necessária é classificada em 3 categorias: (a) iluminação; (b) aquecimento ambiente; (c) aquecimento água. As necessidades mensais de cada categorias são:

Iluminação	20MW
Aquecimento ambiente	10MW
Aquecimento água	30MW

3 fontes de energia podem ser instaladas para suprir a energia necessária: (a) eletricidade; (b) painéis solares; (c) gás natural. O suprimento máximo mensal de energia de cada fonte é:

Eletricidade	50MW
Painéis solares	50MW
Gás natural	20MW

A iluminação só pode ser suprida pela energia "eletricidade", a um custo de R$50 por MW. As demais categorias ("aquecimento ambiente" e "aquecimento água") podem ser supridas por qualquer fonte. Os custos unitários de suprimento para estas categorias (em R$/MW) são os seguintes:

	Eletricidade	Gás natural	Painéis solares
Aquecimento ambiente	90	60	30
Aquecimento água	80	50	40

O objetivo é minimizar o custo total de energia mensal do prédio. Escrever um programa linear para modelar este problema.

Exercício 3. Cones. 1.25 ponto. Seja

$$K_* = \{\lambda : \langle \lambda, z \rangle \geq 0 \; \forall z \in K\}.$$

Provar que λ está no interior de K_* se e somente se o conjunto

$$\{x \geq_K 0 \; : \; \langle \lambda, x \rangle \leq a\}$$

onde a é um número real fixo positivo é compacto.

Exercício 4. 2 pontos. O epígrafo de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\text{epi}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y \geq f(x)\right\}.$$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa se

$$f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}^n, \; \forall \, \alpha \in [0, 1].$$

a) Prove que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa e contínua então epi(f) é igual a seu fecho convexo.

b) Mostre que o interior relativo do conjunto epi(f) é o conjunto

$$\text{ri}\left(\text{epi}(f)\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, y > f(x)\right\}.$$

Exercício 5. 2 pontos. Considere o PPL

$$
\begin{aligned}
P)\ \min\ & 4.3x_1 + 2.7x_2 + 2.5x_3 + 2.2x_4 + 4.5x_5 \\
s.a.\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10, \\
& -x_2 - x_3 - x_5 \leq -4, \\
& 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0, \\
& 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0, \\
& x_i \geq 0\ i = 1,2,3,4,5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P)\ \max\ & 4.2976x_1 + 2.7x_2 + 2.5x_3 + 2.1976x_4 + 4.4976x_5 \\
s.a.\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10, \\
& -x_2 - x_3 - x_4 \leq -4, \\
& 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0, \\
& 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0, \\
& x_i \geq 0\ i = 1,2,3,4,5.
\end{aligned}
$$

a) Escreva o problema dual de P).

b) Sabendo que a solução do problema dual de P) é $y^* = (0.0294, 0, 0.00636, 0.00244)$ $y^* = (2.94, 0, 0.0636, 0.244)$, determine o valor ótimo e uma solução óptima de P).

c) Seja P_1) o novo PPL obtido ao multiplicar a primeira inequação do problema P) por 10. Encontre uma solução ótima do dual do problema P_1).

Exercício 6. 1 ponto. Mostre que um conjunto $H \subset X$ é um hiperplano se e somente se ele é da forma $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ onde $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é linear não nula e $a \in \mathbb{R}$.