1

Variáveis de decisão

Q_{ij} a quantidade de líquido do tipo i, $i=\{A,B,C,D\}$ usado para produzir o líquido j, $j=\{A,B,C,D,E,F,G,P\}$.

Sendo assim, Q_{AA} é a quantidade de líquido A revendido sem transformações enquanto Q_{AP} é a quantidade de líquido A usado na produção do composto P, por exemplo

Função objetivo

$$\max\left(\sum_j p_j \sum_i Q_{ij} - \sum_i v_i \sum_j Q_{ij}\right)$$

onde p_j é o preço pelo qual o produto j foi vendido e $\sum_i Q_{ij}$ é a quantidade de produto j produzido (considerando que não há redução de volume do produto ao longo dos processos) e $\sum_j p_j \sum_i Q_{ij}$ é a quantia final da venda dos produtos. Ainda temos v_i como o preço pelo qual o produto i foi adquirido e $v_i \sum_j Q_{ij}$ o custo total da compra do produto i

Restrição de Integridade das variáveis

$Q_{ij} \geq 0$

Restrições de composição dos líquidos E, F, G

$$Q_{AE} = 0{,}3 \sum_i Q_{iE}$$

$$Q_{BE} \geq 0{,}1 \sum_i Q_{iE}$$

$$Q_{CE} = 0{,}4 \sum_i Q_{iE}$$

$$Q_{DE} \leq 0{,}05 \sum_i Q_{iE}$$

$$Q_{AF} \geq 0{,}25 \sum_i Q_{iF}$$

$$Q_{BF} \leq 0{,}2 \sum_i Q_{iF}$$

$$Q_{CF} = 0{,}2 \sum_i Q_{iF}$$

$$Q_{DF} \geq 0{,}1 \sum_i Q_{iF}$$

$$Q_{AG} = 0{,}2 \sum_i Q_{iG}$$

$$Q_{BG} \geq 0{,}15 \sum_i Q_{iG}$$

$$Q_{CG} = 0{,}4 \sum_i Q_{iG}$$

$$Q_{DG} \leq 0{,}2 \sum_i Q_{iG}$$

Restrições de produção mínima

$$\sum_i Q_{iE} \geq 400$$

$$\sum_i Q_{iF} \geq 800$$

$$\sum_i Q_{iG} \geq 200$$

$\sum_j Q_{Bj} \leq 1250$ $\quad\quad$ $\sum_j Q_{Dj} \leq \infty$

Restrição do composto P : $\frac{2}{3}G + \frac{1}{3}E$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}3\right)\sum_i Q_{iP}}_{\text{qtdd obrigatório do líquido A em P}} = Q_{AP}$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}4 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}4\right)\sum_i Q_{iP}}_{\text{qtdd do liq C em P}} = Q_{CP}$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}15\right)\sum_i Q_{iP}}_{\text{qtdd do liq B em P}} \leq Q_{BP}$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}05 + \frac{1}{3}0{,}2\right)\sum_i Q_{iP}}_{\text{qtdd do liq D em P}} \geq Q_{DP}$$

Restrição de matéria prima

$$\sum_j Q_{Aj} \leq 8000 \qquad \sum_j Q_{Cj} \leq 10000$$

$$\sum_j Q_{Bj} \leq 4250 \qquad \sum_j Q_{Dj} \leq 2000$$

2

a iluminação
b aquecimento amb
c aquec. água

A eletri
B painéis
C gás natural

Variáveis de decisão

Q_{ij} qtdd de energia enviado da fonte i, $i = \{A, B, C\}$ para o setor que j que demanda, $j = \{a, b, c\}$

Função objetivo

$$\min \left(\sum_i \sum_j p_{ij} Q_{ij} \right)$$

onde p_{ij} é o custo por MW unit. enviado de i para j.

Restrições de produção

$$\sum_j Q_{Aj} \leq 50$$

$$\sum_j Q_{Bj} \leq 50$$

$$\sum_j Q_{Cj} \leq 20$$

Restrições de demanda

$$\sum_i Q_{ia} = 20$$

$$\sum_i Q_{ib} = 10$$

$$\sum_i Q_{ic} = 30$$

Restrições de exclusividade da "iluminação"

$$Q_{Ba} = Q_{Ca} = 0$$

$$Q_{ij} \geq 0$$

3) ida $\Rightarrow$)

Supondo $\lambda \in int(K_*)$ vamos provar que o conjunto

$$C = \{x \geq_K 0 : \langle \lambda, x \rangle \leq a\}$$ é compacto

O complementar de

C é $C^c = \{x_K \geq 0 : \langle \lambda, x \rangle > a\} \cup \{K^c\}$

K^c é aberto, pois K é fechado e $\langle \lambda, x \rangle > a$ caracteriza um conjunto aberto pois com λ no interior de K tem-se $\langle \lambda \pm \varepsilon, x \pm \varepsilon \rangle > a$. Daí $\{x_K \geq 0 : \langle \lambda, x \rangle > a\}$ é aberto. A união de conjuntos abertos é aberto então C^c é aberta.

Se C é limitado $\exists\, V \in K$ tal que $\forall \alpha \geq 0$ tem-se

$\alpha V \in C$

$\alpha V \in \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle \lambda, x \rangle \leq a\}$

Daí $\forall \alpha$

$\langle \lambda, \alpha V \rangle = \alpha \langle \lambda, V \rangle \leq a$

se $\alpha > \dfrac{a}{\langle \lambda, V \rangle}$ então $\alpha \langle \lambda, V \rangle > a$

Daí $\forall \alpha\ \langle \lambda, \alpha V \rangle \leq a$ somente se $\langle \lambda, V \rangle = 0$, contradição pois $\lambda \in int(K_*)$.

Logo, se $\lambda \in int(K_*)$ então $\lambda \in \{x \in K ; \langle \lambda, x \rangle > 0\}$ e $V \in K$.

Concluímos que C é limitado fechado portanto compacto.

volta $\Leftarrow$)

Vamos provar que se $\lambda \notin int(K_*)$ o conjunto não é compacto e se $\lambda \in int(K_*)$ ele é compacto

$\lambda \notin int(K_*) \Rightarrow \exists$ $z \in K$ e não nulo tal que

$\langle \lambda, z \rangle \leq 0$

Daí para $a = \langle \lambda, \lambda \rangle \geq 0$

temos que $z \in K$ e $\langle \lambda, z \rangle \leq 0 \leq \langle \lambda, \lambda \rangle$, o que significa

que $z \in C$

Mas também funciona para $\alpha z \in K$, afinal K é cone e

$\langle \lambda, \alpha z \rangle = \alpha \langle \lambda, z \rangle \leq 0 \leq \langle \lambda, \lambda \rangle$

mas com $\alpha z \in C$ significa que C não é limitado,

o que significa que C não pode ser compacto

4 a) Vamos considerar que o enunciado se refere ao convexo do epígrafo(f).

Temos que o epi(f) é convexo pois tomando (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertencentes a epi(f) então a combinação convexa deles é

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \,;\, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$$

Como f é convexa

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

como $f(x_1) \leq y_1$ e $f(x_2) \leq y_2$ então

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leq \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$$

e podemos afirmar que $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \,;\, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)$ está no conjunto.

Além disso, epi(f) é fechado pois seu complementar é aberto, isto é, $epi^c(f)$ é aberto. O complementar de epi(f) é

$$epi^c(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y < f(x)\}$$

Daí, podemos tomar ε de modo que $|f(x) - y| < \varepsilon$ e tomar $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \in epi^c(f)$, ou seja, uma bola aberta de raio $\varepsilon/2$ centrada em y completamente em $epi^c(f)$. Concluímos que $epi^c(f)$ é aberto o que implica que epi(f) é fechado.

4 b) Tomando algum ponto (x,y) de $epi(f)$ de forma que $y > f(x)$ então tomamos ε_1 de forma que $y > f(x+\varepsilon_1)$ e $y > f(x-\varepsilon_1)$. Ainda pela desigualdade estrita temos ε_2 de forma que

$y \pm \varepsilon_2 > f(x \pm \varepsilon_1)$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$y \pm \varepsilon > f(x \pm \varepsilon)$ ou seja, a bola aberta $B((x,y);\varepsilon)$ está em $epi(f)$ o que significa que $(x,y) \mid y > f(x)$ está no interior de $epi(f)$.

Tomando agora $(x,y) \mid y = f(x)$ temos que para ε suficientemente pequeno $y - \varepsilon < f(x)$ e $y + \varepsilon > f(x)$, isto é, $(x,y) \mid y = f(x)$ não pertence ao interior de $epi(f)$ pois $y - \varepsilon < f(x) \Rightarrow y - \varepsilon \notin epi(f)$.

Tomando ainda $(x,y) \mid y < f(x)$ temos que $(x,y) \notin epi(f)$ portanto $(x,y) \notin int(epi(f))$.

Logo, um ponto (x,y) só está no interior$(epi(f))$ se satisfazer $y > f(x)$ estritamente.

6 vimos na sala de aula que um ...

5

a) Temos

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1,2976 \\ 2,7 \\ 2,5 \\ 2,1976 \\ 1,497 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & -4 & -4 & 36 \\ 4 & 10 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Como cada variável é não-negativa, considerando A matriz de zeros e b vetor de zeros temos que o problema pode ser escrito como

Primal

$\max\ c^T x$

s.a $Ax = b$

$Cx \leq d$

$x \geq 0$

que é o primal da segunda coluna da tabela presente nas notas de aula.

Remark 6.17 - Dualidade

Logo, o dual pode ser escrito como

$$\min\ \lambda^T b + \mu^T d$$
$$A^T \lambda + C^T \mu \geq c$$
$$\mu \geq 0$$

ou melhor

Dual

$$\min\ \mu^T d$$
$$C^T \mu \geq c$$
$$\mu \geq 0$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$$

dual

5 b) Tomando a solução y^* de DP como ótima temos que o valor ótimo do problema dual é atingido em

$$\begin{bmatrix} 2{,}94 \\ 0 \\ 0{,}0636 \\ 0{,}244 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 29{,}4 + 0 + 0 + 0 = 29{,}4$$

Pelo teorema da Dualidade forte temos que o valor ótimo do problema primal também é 29,4. Daí, quaisquer valores de x que satisfaçam as restrições do problema e atingam $c^T x = 29{,}4$ são soluções ótimas de P.

c) Ao multiplicar a primeira linha das restrições temos uma relação equivalente a original, isto é, $\tilde{x}$ que satisfaz a restrição original também satisfaz a modificada e por consequência o valor ótimo do problema primal - existência afirmada pelo teorema forte da dualidade, discutido nos itens anteriores - ainda se mantém o mesmo. Por consequência o valor ótimo do dual não se altera e a solução ótima é a mesma do item anterior.

As mudanças no problema dual se refletem em C e d onde

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & -4 & -4 & 36 \\ 4 & 10 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 100 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \min\ 100\mu_1 + \mu_2$$

mas $\mu_1' = \frac{1}{10}\mu_1$ torna o problema igual ao dual original. Sendo assim, o valor ótimo se mantém e a solução do dual modificado altera apenas a primeira coordenada de y^*:

$$y^*_{modificado} = [0{,}291 ; 0 ; 0{,}0636 ; 0{,}244]$$

6 Vimos em sala de aula que um hiperplano é escrito como

$$H = \{x \in X ; \langle x, a \rangle = c\}$$

Ainda temos que $H = V + \{x_0\}$, onde V é espaço vetorial e $x_0 \in H$. Logo, $\exists\, a \in \mathbb{R}^n$ tal que $V = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle a, x \rangle = 0\}$. Tomando $c = \langle a, x_0 \rangle$ temos ainda que

$$H = \{x \in X ; \langle x, a \rangle = c\}$$

Daí, se $H \subset X$ é hiperplano

$$H = \{x \in X ; \langle x, a \rangle = \alpha\}$$ para algum $a \in \mathbb{R}^n$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$

Considerando então

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \langle x, a \rangle = \alpha$$

Como o produto interno é linear não nulo

então
$$H = \varphi^{-1}(\alpha)$$

Agora partindo de $H = \varphi^{-1}(\alpha)$, como φ é linear e leva $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então sua inversa pode ser escrita como

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow X$$
$$\langle x, a \rangle = \alpha \longrightarrow x$$

para algum $a \in \mathbb{R}^n$.