Daniel Jacob - Simplex (1)

Item a)

Basta fazer

$$\max\{2x_1 + x_2\}$$

$$\text{s.v.} \begin{cases} x_1 - x_2 + e_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + e_2 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Item b)

Para $(x_1, x_2) = (0,0)$ a solução básica é $e_1 = 2$ e $e_2 = 6$

$$(x_1, x_2, e_1, e_2) = (0, 0, 2, 6)$$

Item c)

Vamos realizar primeiro o processo iterativo simplex

z	x_1	x_2	e_1	e_2	b	
e_1	1	-1	1	0	2	$\to 2 \div 1 = 2$
e_2	1	1	0	1	6	$\to 6 \div 1 = 6$
	-2	-1	0	0	0	

e_1 sai da base e entra x_1.

Definimos

NewLine1 = Line1

NewLine2 = (-1) NewLine1 + Line2

NewLine3 = (2) NewLine1 + Line3

Daí a tabela se atualiza para

z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
x_1	1	-1	1	0	2
e_2	0	2	-1	1	4
1	0	-3	2	0	4

$\to 2/-1 = -2$ X

$\to 4/2 = 2$

e_2 sai da base e entra x_2

Definimos

$NewLine_2 = Line_2/2$

$NewLine_1 = Line_1 + NewLine_2$

$NewLine_3 = 3\,NewLine_2 + Line_3$

Daí nossa tabela se atualiza para

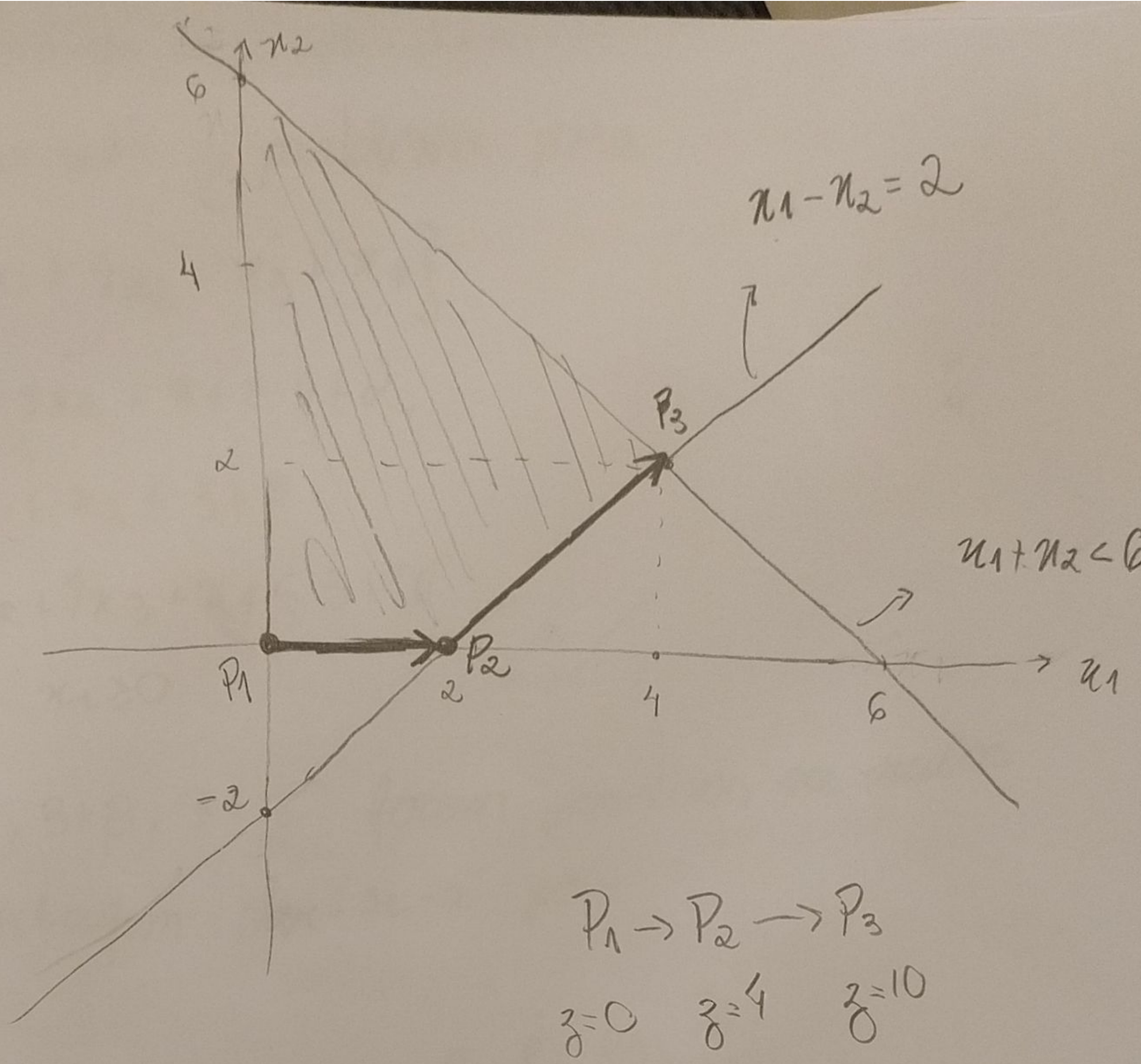
z	x_1	x_2	e_1	e_2	b
x_1	1	0	$1/2$	$1/2$	4
x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	2
1	0	0	$1/2$	$3/2$	10

Como a 3ª linha não possui elementos negativos atingimos uma solução ótima:

$$(x_1, x_2, e_1, e_2) = (4, 2, 0, 0)$$

Com $z = 10$:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$$



2 Na forma padrão, adicionando as variáveis de folga e_1 e_2 e_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b
e_1	1	3	0	1	1	0	0	4
e_2	2	1	0	0	0	1	0	3
e_3	0	1	4	1	0	0	1	3
z	2	4	1	1	0	0	0	0

Observe que na última linha todos os coeficientes são não negativos, isso significa que nossa variável básica $(0,0,0,0)$ é ótima.

De fato, minizar a função objetivo de coeficientes e variáveis não nulas sujeito a restrições de menor igual à algo positivo equivale à origem

Ao modificarmos o problema para

$$\min \{2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4\}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 + \alpha \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 + \beta \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 + \gamma \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Se $4+\alpha, 3+\beta, 3+\gamma$ forem positivos ou nulos a modelagem dar-se-á por

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b
e_1	1	3	0	1	1	0	0	$4+\alpha$
e_2	2	1	0	0	0	1	0	$3+\beta$
e_3	0	1	4	1	0	0	1	$3+\gamma$
z	2	4	1	1	0	0	0	0

Novamente a última linha é não nula revelando uma solução ótima em $(0,0,0,0)$

Suponha, sem perda de generalidade que $4+\alpha < 0$.

Para deixar o problema na forma padrão realizamos uma modificação nas restrições:

$$-x_1 - 3x_2 - x_4 \geq -4 - \alpha$$

Adicionando variável de folga

com $-4-\alpha > 0$

$$-x_1 - 3x_2 - x_4 - e_1 = -4 - \alpha$$

1

No entanto essa mudança na variável de folga altera a base do problema, modificando a solução ótima do problema. (5)

Qualquer modificação de forma que

$4+\alpha<0$, $3+\beta<0$, $3+\gamma<0$ altera a solução.

Daí,

a) Qualquer mudança em b desde que $b_i \geq 0$ mantém a solução ótima

c) Para pequenas variações, a solução se mantém

Modificando agora a função objetivo para

$$\min\{(2+\alpha)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\gamma)x_3+(1+\phi)x_4\}$$

Ao montar a tabela do simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b
e_1	1	3	0	1	1	0	0	4
e_2	2	1	0	0	0	1	0	3
e_3	0	1	4	1	0	0	1	3
	$2+\alpha$	$4+\beta$	$1+\gamma$	$1+\phi$	0	0	0	0

Desde que $2+\alpha>0$, $4+\beta>0$, $1+\gamma>0$, $1+\phi>0$ a solução se mantém pois a ultima linha continua não negativa, mantendo a solução ótima

Mas se alguma delas for negativo então o simplex vai rodar e a solução ótima se alterar.

Daí,

b) Podem mudar desde que $c_i \geq 0$, para manter a solução básica.

d) Pequenas mudanças (variando cada entrada em no máximo 1 unidade) mantém a solução ótima.

3 a) Suponha que estamos em uma etapa do simplex, com função objetivo assumindo o valor z_i. Para que z_i não se altere precisamos realizar uma combinação linear entre a ultima linha e uma linha cuja entrada da ultima coluna seja 0:

	variáveis	b
$\vdots$ x_i $\vdots$		$\vdots$ 0 $\vdots$
	c^T	z_i

Ao realizar tal modificação, entra uma variável x_j na base e sai x_i, no entanto x_j deixa de assumir zero (fora da base) para assumir o valor 0 (na base) e x_i deixa de assumir o valor 0 (na base) pra assumir o valor 0 (fora da base). Essencialmente, nada mudou, isto é, a iteração não se desloca em distância alguma nessa etapa.

b) Verdade. As etapas do simplex fazem o crescimento de z ser monotônico crescente, isto é, se uma variável x_i sai da base entra x_j significa que a solução $(x_1, x_2, \dots x_i, \dots, x_m) < (x_1, x_2, \dots x_j, \dots, x_m)$

c) Verdadeiro. O algoritmo atualiza a tabela para que na iteração que a variável x_j entra na base, as demais linhas da tabela sejam iguais a 0, inclusive na ultima linha. Daí, como na ultima linha esse coeficiente é não negativo na próxima iteração certamente não vai entrar.

d) Falso. Considere o problema

$$\max\{x_1 + x_2\}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Claramente $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$ são bases ótimas. Ambas são bases pois são as únicas da coluna com valor 1. Além disso a solução ótima referente a ambas as bases é ótima.

e) Interpretação ambígua. Se n é a quantidade de igualdades na forma padrão então existem n restrições de igualdade e no máximo n variáveis do problema original que são positivas, tornando o item d verdade. Mas se n representa a quantidade de igualdades nas restrições então é falso pois podemos ter o problema

$$\max\{x_1 + x_2\}$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Cuja solução ótima possui 1 variável na base, mais do que $n = 0$ igualdades.

Fase I

$$\min\{-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4\}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + v_1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + v_2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + v_3 = 6 \end{cases}$$

Montando o problema:

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	b
v_1	1	2	-1	1	1	0	0	0
v_2	2	-2	3	3	0	1	0	9
v_3	1	-1	2	-1	0	0	1	6
z	-4	1	-4	-3	1	1	1	-15

Entra x_1 e sai v_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	b
x_1	1	2	-1	1	1	0	0	0
v_2	0	-6	5	1	-2	1	0	9
v_3	0	-3	3	-2	-1	0	1	6
	0	9	-8	1	5	1	1	-15

$NewLine_1 = Line_1$

$NewLine_2 = Line_2 - 2NewLine_1$

$NewLine_3 = Line_3 - NewLine_1$

$NewLine_4 = Line_4 + 4NewLine_1$

Entra x_3 sai v_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	b
x_1	1	4/5	0	6/5	3/5	1/5	0	9/5
x_3	0	-6/5	1	1/5	-2/5	1/5	0	9/5
v_3	0	3/5	0	-13/5	1/5	-3/5	1	3/5
	0	-3/5	0	13/5	9/5	13/5	1	-3/5

$NewLine_2 = Line_2 \cdot \frac{1}{5}$

$NewLine_1 = Line_1 + NewLine_2$

$NewLine_3 = Line_3 - 3NewLine_2$

$NewLine_4 = Line + 8NewLine_2$

Entra x_2 sai v_3

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	v_3	b
x_1	1	0	0	14/3	1/3	1	-4/3	1
x_3	0	0	1	-5	0	-1	2	3
x_2	0	1	0	-13/3	1/3	-1	5/3	1
	0	0	0	0	2	2	2	0

$NewLine3 = \frac{5}{3} Line3$

$NewLine1 = Line1 - \frac{4}{5} NewLine3$

$NewLine2 = Line2 + \frac{6}{5} NewLine3$

$NewLine4 = Line4 + \frac{3}{5} NewLine3$

Temos uma solução básica $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 1)$ com valor da função igual a 0.

Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0	14/3	1
x_2	0	0	1	-5	3
x_3	0	1	0	-13/3	1
	-3	1	3	-1	0

$NewLine4 = 3Line1 + Line4$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0	14/3	1
x_3	0	0	1	-5	3
x_3	0	1	0	-13/3	1
	0	1	3	13	3

$NewLine_4 = Line4 - Line3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0	14/3	1
x_2	0	0	1	-5	3
x_3	0	1	0	-13/3	1
	0	0	3	52/3	2

$NewLine4 = Line4 - 3Line2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0	$14/3$	1
x_3	0	0	1	-5	3
x_2	0	1	0	$-13/3$	1
	0	0	0	$97/3$	-7

Solução ótima: $x = (1, 1, 3, 0)$

$z = -7$

5 a) O menor elemento negativo da ultima linha é -11

Daí como a 1ª linha nesta coluna é 0 e a terceira é negativa o pivo é 3.

b) Precisamos achar B, que é as colunas correspondentes a y_1, y_4 e y_6.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vimos que com a base podemos escrever o problema como

$$\min \left\{ z = z_0 + \bar{c}_D^T x_D \right.$$

$$\begin{cases} x_B + N x_D = \bar{b} \\ x_B, x_D \geq 0 \end{cases}$$

onde $A = [B|D]$.

tem-se $z_0 = c_B^T B^{-1} b$, $N = B^{-1} D$, $\bar{b} = B^{-1} b$, $\bar{c}_D = c_D - N^T c_B$.

Daí usando isso

$z_0 = 8$

$$\bar{c}_D^T = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -11 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 4/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ -2/3 & -2 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$x_D = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_D = \begin{bmatrix} 25/3 \\ -22 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

Obs: usei folhas de rascunho pra fazer as contas e o tempo ficou apertado daí coloquei a resposta pulando continhas.

O problema original vai ser da forma

$$\max \ c_B^T y_B + c_D^T y_D$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} B | D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_B \\ y_D \end{bmatrix} = b \right.$$

$$x_B, x_D \geq 0$$

Ajustando tudo:

$$\max \ -1y_1 + \frac{8}{3}y_2 - 11y_3 - 3y_4 + \frac{4}{3}y_5 + y_6$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 + 2y_5 = 10 \\ y_1 - 2y_3 + 2y_5 + y_6 = 6 \\ -3y_2 + y_3 + y_4 + y_6 = 4 \end{cases}$$

$\boxed{6}$

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2/5 \\ \frac{2}{5} & 2/5 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} I$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} I$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3+4+4 & 2-6+4 & 2+4-6 \\ -6+2+4 & 4-3+4 & 4+2-6 \\ -6+4+2 & 4-6+2 & 4+4-3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} I$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark$$

b) A solução básica que corresponde a B é

$$Bx^* = b \implies x^* = B^{-1} b$$

$$x^* = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -60+40+40 \\ 40-60+40 \\ 40+40-60 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para provar que x^* é ótimo verificamos se todas as

6 b) entradas de $C_B^T B^{-1}$ são negativas (notas de aula)

$$(-10 \quad -12 \quad -12)\begin{bmatrix} -0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & -0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & -0,6 \end{bmatrix} = (-3,6 \quad -1,6 \quad -1,6)$$

ou seja, a solução x^* associada a base B é ótima
Na implementação o resultado ótimo também foi esse.

c) No arquivo .ipynb em anexo está a implementação cuja solução ótima é $x = (4, 4, 4)$ e min é -136