03-08 - Cálculo Complexo

Dado $z_0 \in \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$. Dizemos que f é contínua em z_0 se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.
Diemos que f é holomorfa em $z_o \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

existir quando $h \longmapsto 0$.

> Nota
> Se tem limite é holomorfa.
> Se é expressa como uma série de função convergente é analítica.

Se $f'(z_0)$ existe,

$$f(z_0 + h) - f(z) - hf'(z_0) = h\Psi(h)$$

(divide por h). Aqui, $\Psi(h) \longmapsto 0 \text{ se } h \longmapsto 0$.
Logo f é contínua em z_0.
Exemplos de funções holomorfas:

$$f(z) = z^n$$

$$\frac{(z+h)^n - f^n}{h} = \frac{(\cancel{z^n} + nz^{n-1}h + \ldots + h^n) - \cancel{z^n}}{h} = \frac{\cancel{h}(nz^{n-1} + \ldots + h^{n-1})}{\cancel{h}} = n$$

Sabendo que $h \longmapsto 0$, $\text{f}'(z) = nz^{n-1}$.
Um exemplo de uma função que não é holomorfa é $f(z) = |z|$.
Outro exemplo de uma função não holomorfa é $f(z) = \bar{z}$.
Demonstração:

$$\lim_{h \longmapsto 0} \frac{(\bar{z + h}) - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

Se $h \in \mathbb{R}$ então $\lim = 1$, se $h \in \mathbb{C}$ então $lim = -1$. Como os limites divergem, a função não é derivável e portanto não é holomorfa.

Função exponencial

$$f(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Essa série é absolutamente convergente, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}.$$

Logo, a série é convergente e define uma função holomorfa cuja derivada $(e^z)' = e^z$.
Definimos uma série como a soma de infinitas parcelas

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Onde os somatórios parciais são

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(s_n) é uma sequência em $\mathbb{C}$.
Dizemos que

$$\lim_{n \longmapsto \infty} s_n = s_\infty$$

o questionamento é se esse limite existe. Em outras palavras, queremos saber se dado um $\epsilon > 0$, existe $n \geq n_0$ tal que $|s_\infty - s_n| < \epsilon$.
Uma sequência (a_n), $a_n \in \mathbb{C}$ é chamada sequência de Cauchy se $\forall \epsilon > 0$ existir $n_0 > 0$ tal que se $m, n > n_0$ então

$$|a_m - a_n| < \epsilon.$$

Teorema: Seja a_n uma sequência em $\mathbb{C}$. Ela é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.

Demonstração:
Seja A a convergência de a_n.
i) Dade $\epsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que se $n > n_0$, então $|a_n - A| < \epsilon$. Para $m > n_0$:

$$|a_n - A - a_m + A| \leq |a_n - A| + |a_m - A| \leq \epsilon + \epsilon.$$

ii)Suponha que a sequência seja de Cauchy, então

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n$$

O limite sperior dessa sequência é $lim(sup(an)) = \alpha_n = max\{a_1, \ldots a_n\}$. Conforme n cresce, α_n também cresce.
Mostraremos que $\alpha_n \to A$.
Para $k > 1$: $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$
A sequência α_n^k também converge para A.

$$A = \lim_{n \longmapsto \infty} sup(a_n)) = \lim_{n \longmapsto \infty} A_n$$

Características: para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 > 0 talque\$a_n < A + \epsilon \forall n \geq n_0$
.
Daqui, $a_n < A_n < A + \epsilon$
Lembrete: $A_n \geq A - \epsilon$ não pode acontecer.
Existem infinitos $n \geq 0$ tais que $a_n \geq A - \epsilon$

$$a = \lim_{n \longmapsto 0} inf(a_n)$$

Se, e somente se, $\lim inf(a_n) = \lim sup(a_n)$ então a série converge.
Supondo que $A \neq a$ chegamos a uma contradição.

Série de Sequência

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

é uma função convergente. S_m convergem.
Sendo

$$f_n : \Omega \to \mathbb{C}$$

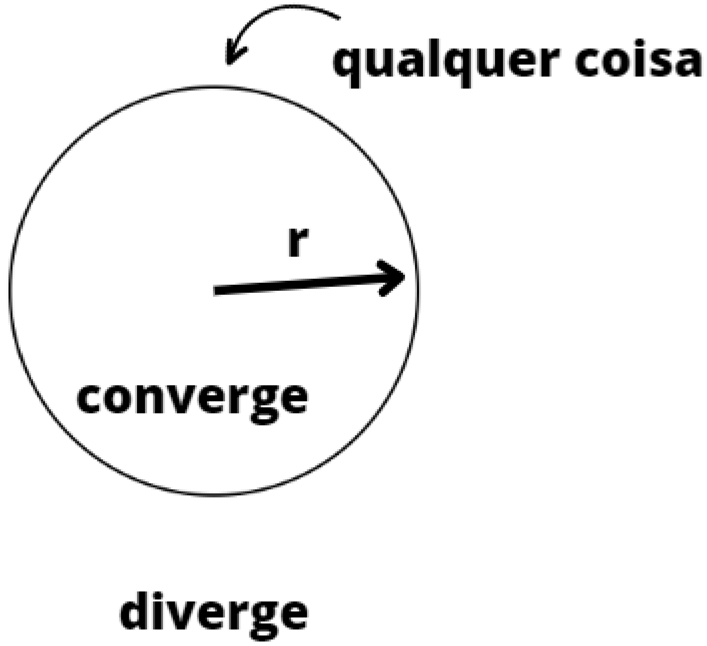
a sequência $f_n(z_0) convergea\$f(z_0)$ se $\forall \epsilon > 0 \exists n_0$ tal que se $n > n_0$.
$|f_n(z_0) - f(z_0)| < \epsilon (*)$.
f_n converge em $z_0 \in \Omega$.
$f_n \to f$ uniformemente se $(*)$ vale para todo $z \in \Omega$. O limite de uma sequência uniforme de funções contínuas é uma função continua.
Como f_n é contínua em $z_0 \in \Omega$. Dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que se
$|z - z_0| < \delta$
então $|f_n(z) - f(z_0)| < \epsilon$
Queremos mostrar que f é contínua:
Existe n_0 tal que se
$:= |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$

$$\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

Dizemos que $f_n(z)$ é convergente se para todo $z \in \Omega$, $(f_n(z))$ é uma sequência de Cauchy, isto é, dado $\epsilon > 0 \exists n_0$ tal que $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$, para $m, n > n_0$.

Exemplos de séries de potências:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$



- $$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} sup|a_n|^{1/n}$$