Lista 2 - Variável Complexa

Aluno: Daniel Jacob Tonn

1. Encontre:

- As raízes quadradas de $1-\sqrt{2}i$;
- As raízes cúbicas de -27;
- As raízes de ordem 5 de -1;
  Resposta:
  i) Sendo a raiz procurada $z = x+iy$, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Igualando à $1-\sqrt{2}i$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $x = \frac{-1}{\sqrt{2}y}$. Substituindo na primeira, obtemos

$$\frac{1}{2y^2} - y^2 = 1 \implies 1 - 2y^4 = 2y^2$$

Realizando uma reparametrização de $u = y^2$:

$$2u^2 + 2u - 1 = 0$$

Por Bháskara,

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Mas como $y = \sqrt{u}$ e $y \in \mathbb{R} \implies y^2 = u \in \mathbb{R}$:

$$y = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}.$$

Substituindo o valor encontrado de y na na segunda equação do sistema:

$$x^2 - \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 1$$

$$x^2 - \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$x^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

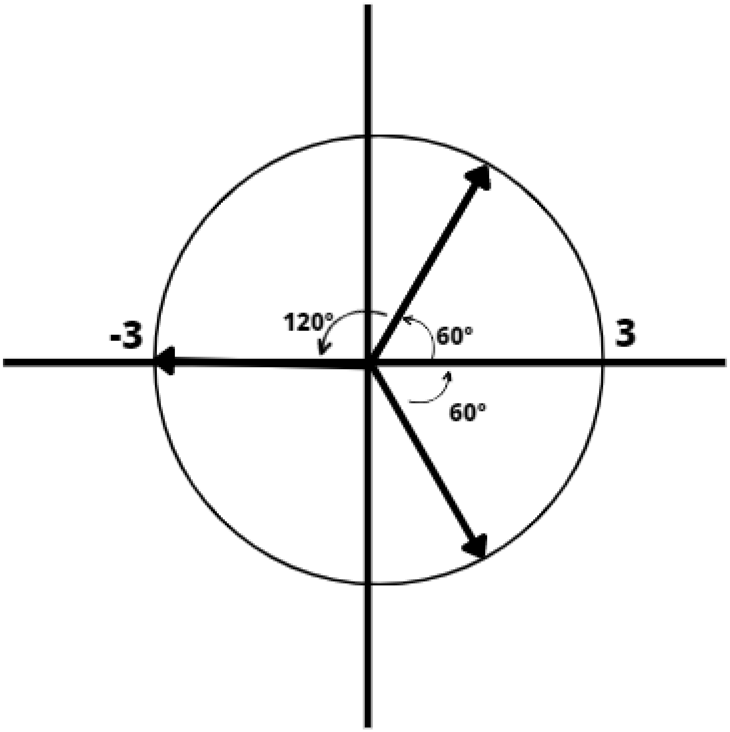
$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

Note, na segunda equação do sistema montado, que x e y precisam ter sinais opostos, e que isso não altera o resultado da primeira equação do sistema.
Logo, as raízes são

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}i$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}i$$

ii) Sabemos que uma das raízes cúbicas de -27 é real e vale -3. Sabemos ainda que as raízes se distribuem no traço de uma circunferência de módulo 3 e centro em $0+0i$, com ângulo entre soluções igualmente distribuídos, como na figura a seguir.



Podemos então escrever as soluções em coorcenadas polares como

$$3(cos(60^{\text{o}}) + isen(60^{\text{o}}))$$

$$3(cos(60^{\text{o}}) - isen(60^{\text{o}}))$$

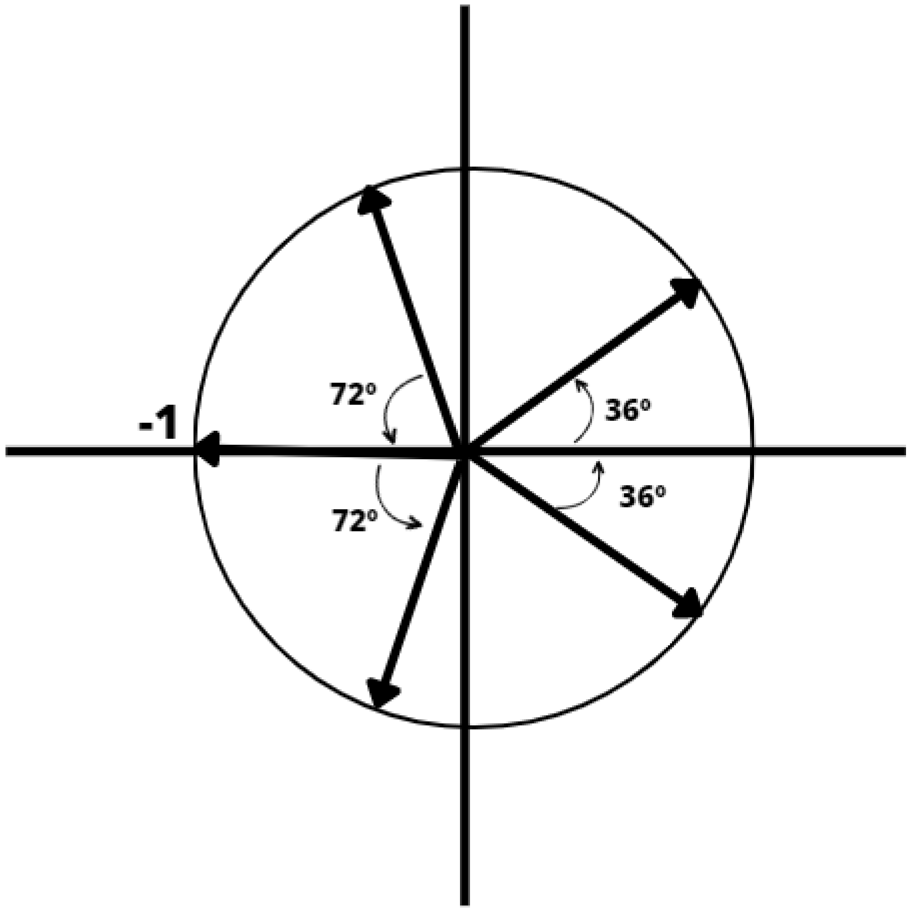
Note que esses vetores são conjugado um do outro.
Encontramos, então as 3 raízes:

$$z_1 = -3$$

$$z_2 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}$$

iii) Sabemos que uma das raízes é o número real -1. As outras 4 soluções estão dispostas em um círculo de raio 1 com ângulos de 72^{o} entre sí, como na imagem abaixo:



Como meia volta é π, 36° equivalem a $\pi/5$. As soluções em coordenadas polares são:

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = \cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\right)i$$

$$z_3 = \cos(\pi/5) - i\sin(\pi/5) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}\right)i$$

$$z_4 = \cos(3\pi/5) + i\sin(3\pi/5) = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\right)i$$

$$z_5 = \cos(3\pi/5) - i\sin(3\pi/5) = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}\right)i$$

2) Sejam $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$, $g : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$ funções definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se f e g são limitadas num subconjunto $K \subset \Omega$, então $f + g$ e $f.g$ tmbém são limitadas em K.

Resposta:
i) Se a sequência f é limitada num subconjunto K, podemos afirmar a existência de M de forma que $M \geq |f(n)| \forall n \in K$. De forma semelhante tomemos N de modo que $N \geq |g(n)| \forall n \in K$. Somando as duas desigualdades temos

$$M + N \geq |f(n)| + |g(n)|$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$M + N \geq |f(n)| + |g(n)| \geq |f(n) + g(n)|$$

Sendo $R = M + N$ temos $R \geq |f(n) + g(n)|$, portanto $f + g$ é limitada.

ii) Tomando M e N da mesma maneira que anteriormente, temos

$$MN \geq |f(n)||g(n)| = |f(n)g(n)|$$

Tomando agora $R = MN$, temos $f.g$ limitada.

De maneira menos informal e mais geométrica, como f é limitada podemos afirmar que todos os seus elementos estão dentro de uma circunferência de raio M - e da mesma forma podemos tomar uma circunferência de raio N que englobe todos os elementos de g.
Essa ideia é formalizada por

$$M > |f(n)| \forall n \in K$$

$$N > |g(n)| \forall n \in K$$

Ao somar ambas expressões surge do lado direito da inequação algo que é maior ou igual ao módulo de qualquer elemento de $f + g$ - conclusão tirada da desigualdade triangular. Mas se é possível limitar os elementos de $f + g$ por um módulo, então os elementos de $f + g$ estão contidos em uma circunferência de raio $M + N$.

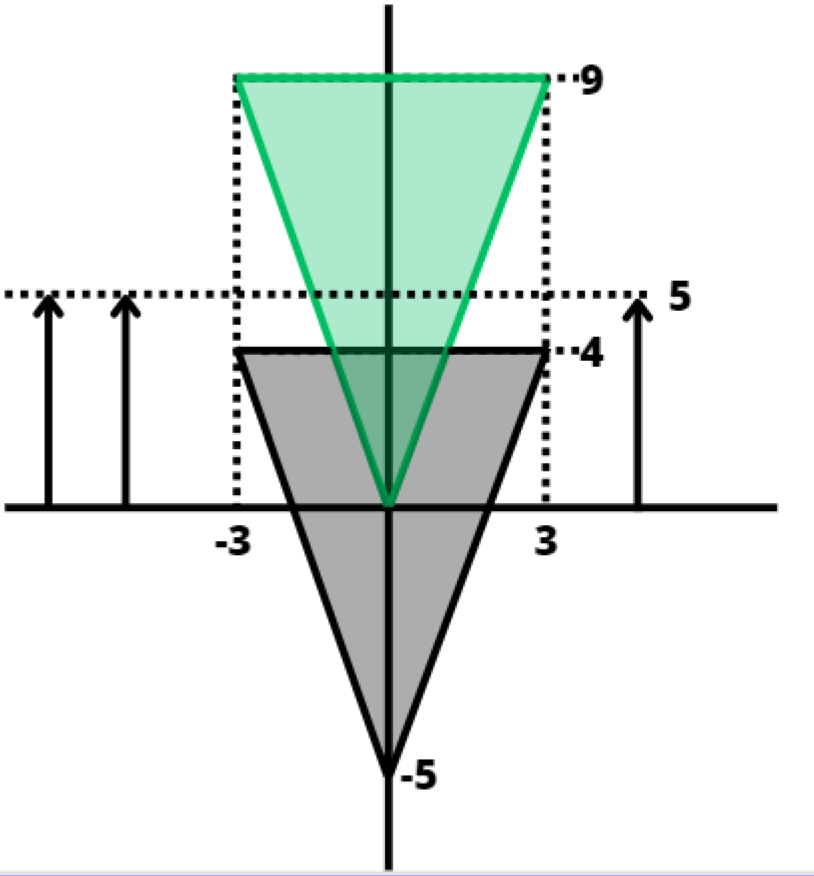
$$M + N > |f(n)| + |g(n)| \geq |f(n) + g(n)| \forall n \in K$$

Se agora multiplicarmos ambas equações, temos

$$MN > |f(n)||g(n)| = |f(n)g(n)|$$

Conseguimos novamente limitar fg a uma circunferência, dessa vez de raio MN, portanto fg é também limitada.

3. Determine a imagem do triângulo com vértices em $3 + 4i$, $3 - 4i$ e $-5i$ pela função $f(z) = z + 5i$.
   Seja $z = x + iy$, então a função $f(z) = z + 5i = x + (5 + y)i$ é tal que leva cada ponto do plano $5i$ acima.
   Dado o domínio como sendo o triângulo de vértices $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e $-5i$ (cinza), a imagem após aplicada a função é o triângulo de vértices $3 + 9i$, $-3 + 9i$ e $0 + 0i$ (verde), como representado na imagem abaixo:



4. Toda sequência limitada de números complexos possui uma subsequência convergente.

Resposta:
Para que uma sequência (z_n)de números complexos seja convergente precisamos que $Re(z_n)$ seja convergente, assim como $Im(z_n)$ também seja convergente. Como (z_n) é limitada, então as sequências $Re(z_n)$ e $Im(z_n)$ também o são.
Como $Re(z_n)$ e $Im(z_n)$ são sequências de números reais, podemos utilizar o teorema de *Bolzano Weiertrass* para demonstar que (z_n) converge.
Teorema de Bolzano Weiertrass
Seja uma sequência de números reais denominada como (a_n) e um pico definido como $a_n > a_m$ para qualquer $m > n$.
Vamos dividir a demonstração em dois casos distintos:

1. A sequência possui uma quantidade infinita de picos e sejam esses nomeados como $P_1 > P_2 > P_3 > \ldots$, então tomando os elementos (a_{n_k}) de (a_n) de modo que (a_{n_k}) seja um pico, então temos uma sequência monótona decrescente - e limitada - e portanto convergente.
2. A sequência possui uma quantidade finita de picos. Então a partir de algum $n > n_0$ temos $a_n > a_{n_0}$, e para algum $m > n$ temos $a_m > a_n$ e assim por diante. Tomando os elementos a_{n_k} a partir do ultimo pico, tais que $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ (afirmamos a existência desse $a_{n_{k+1}}$), temos uma sequência monótona crescente e limitada, e portanto convergente.
   Vamos chamar de x_0 o $\lim_{n\to\infty}(a_{n_k})$.
   Agora, sendo (z_{n_k}) a subsequência limitada tal que $Re(z_{n_k})$ converta a x_0, temos que toda subsequência de $Re(z_{n_k})$ converte também a x_0. Podemos tomar os elementos $(z_{n_{k_l}})$ de (z_{n_k}) de modo que $Im(z_{n_k})$ converta a y_0. Pelo Teorema de Bolzano, se $(a_n) = Im(z_{n_k})$, podemos afirma a existência de $(a_{n_k}) = Im(z_{n_{k_l}})$ de modo que $Im(z_{n_{k_l}})$ seja convergente.
   Logo, concluímos que uma sequência limitada qualquer (z_n) de números complexos possui uma subsequência $(z_{n_{k_l}})$ convergente à $z_0 = x_0 + iy_0$.