03-08 - Análise na Reta

Vimos anteriormente que $\mathbb{R}$ é um corpor fechado por soma e multiplicação e possui uma relação de ordem. Ser fechado por soma e multiplicação significa que uma função f é bijetiva de modo que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, pode ser definida por $f(a, b) = a + b \longmapsto \mathbb{R}$ ou então $f(a, b) = ab \longmapsto \mathbb{R}$.
Pelos axiomas da aula anterior, podemos provar todas as propriedades, e uma propriedade já provada pode ser usada pra provar alguma outra propriedade. Sendo assim,

- 1ª Propriedade:
  Se $x, y \in \mathbb{R}^+$, então $x + y \in \mathbb{R}^+$.
  Se $x, y \in \mathbb{R}^+$, então $xy \in \mathbb{R}^+$.

- 2ª Propriedade (tricotomia):
  Ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.
  Definimos então $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}^+ : -x \in \mathbb{R}^+\}$.
  Definimos também $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

- 3ª Propriedade:
  i) x(-y) = (-x)y
  Prova:

$$0 = 0$$

$$x(y - y) = 0$$

$$x(y - y) + y(-x) = +y(-x)$$

$$x(y) + x(-y) + y(-x) = +y(-x)$$

$$x(y) + y(-x) + x(-y) = +y(-x)$$

$$x(y) + y(-x) + x(-y) = +y(-x)$$

$$y(x + (-x)) + x(-y) = +y(-x)$$

$$0 + x(-y) = y(-x)$$

  ii)(-x)(-y) = xy

$$0 = 0$$

$$x(y - y) = -y(x - x)$$

$$x(y) + x(-y) = -y(x) + (-y)(-x)$$

  Vimos que $x(-y) = (-x)(y)$

$$x(y) = (-y)(-x)$$

- 4ª propriedade:
  Se $x \neq 0$ então $x^2 \in \mathbb{R}^+$.
  Pela primeira propriedade, se $x \in \mathbb{R}^+$, $xx > 0$.
  Provamos na terceira propriedade que $xx = (-x)(-x)$, portanto $(-x)(-x) > 0$, cqd.

- 5ª Propriedade:
  $1 > 0$
  $1 = 1.1 = 1^2 > 0$

- 6ª Propriedade:
  i) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$ (propriedade transitiva).
  ii) Dado x,y ou $x < y$, ou $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia).
  iii) Se $x < y$, $x + z < y + z \forall z \in \mathbb{R}$
  iv) Se $x < y$ então $z \in \mathbb{R}^+ \implies xz < yz$ e $z \in \mathbb{R}^- \implies xz > yz$.
  Provas:
  i) $x < y \implies y - x \in \mathbb{R}^+$ da mesma forma que
  $y < z \implies z - y \in \mathbb{R}^+$
  Somando dois números positivos temos um números positivo, então

  $$(y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$$
  $$z - x \in \mathbb{R}^+$$
  $$z > x$$

  ii) sai pela tricotomia
  iii) $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$

  $$y - x + z - z \in \mathbb{R}^+$$
  $$(y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}^+$$
  $$y + z > x + z$$

Origem dos naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números formados por 1,1+1,1+1+1,... é chamado de conjunto dos números naturais e segue a propriedade de ordem. Seja

$$0 < 1$$
$$0 + 1 < 1 + 1$$
$$0 < 1 < 1 + 1$$

Por transitividades,

$$1 + 1 < 1 + 1 + 1$$

Denotamos essas somas por $\{1, 2, 3, \dots\}$.
Daqui, conseguimos concluir ainda que $\mathbb{N}$ é infinito.
Definimos como $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$
Dado $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Ou então

$$|x| = max\{-x, x\}$$

Teorema: $x, y \in \mathbb{R}$ (desigualdade triangular)

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Temos que $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$, daí $|x| + |y| \geq x + y$.
Temos ainda que $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$, daí $|x| + |y| \geq -(x + y)$.
Sendo assim, $|x| + |y| \geq max\{(x + y), -(x + y)\} = |x + y|$
Se $a < b$ o intervalo entre a e b é tal que
i) $[a, b]$: $x \in \mathbb{R}$: $a \leq x \leq b$
ii) $(a, b]$: $x \in \mathbb{R}$: $a < x \leq b$
iii) $[a, b)$: $x \in \mathbb{R}$: $a \leq x < b$
iv) (a, b) : $x \in \mathbb{R}$: $a < x < b$
Um conjunto $A \in \mathbb{R}$ é limitado superiormente se $\exists b \in \mathbb{R} | x \leq b$.
No caso de existência, b é cota superior.
Um conjunto $A \in \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se $\exists c \in \mathbb{R} | x \geq c$.
No caso de existência, b é cota superior.
Dizemos que A é limitado se for simultaneamente limitado superiormente e inferiormente.
Daí, tiramos a concllusão que A é limitado se, e somente se, existir um conjunto $[c, b]$ tal que $A \in [c, b]$.
A é limitado se $\exists \delta$ tal que $|x| \leq \delta \forall x \in A$.
O corpo dos reais é o único corpo ordenado completo.