03-06 - Curvas

Em $\mathbb{R}^2$ podemos representar o parordenado (v, u), com $u = (x_u, y_u)$ e $v = (x_v, y_v)$ como

$$[v \quad u] = \begin{bmatrix} x_v & x_u \\ by_v & y_u \end{bmatrix}$$

Sabemos que o determinante dessa matriz é dado por

$$det \begin{bmatrix} x_v & x_u \\ by_v & y_u \end{bmatrix} = x_v y_u - x_u y_v.$$

Definimos a matriz de rotação de 90^{o} no sentido antihorário como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, uma rotação de 90^{o} no sentido antihorário do vetor v equivale a:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_v \\ x_v \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$det\left[J_v \quad u\right] = \begin{bmatrix} -y_v \\ x_v \end{bmatrix} \left[x_u \quad y_u\right] = -y_v y_u - x_u x_v = - < v, u >.$$

Já vimos na aula passada que toda curva regular admite reparametrização por comprimento de arco (unit-speed), ou seja,

$$||\alpha'(t)|| = 1$$

Vamos observar que o traço produzido por uma função

$$\gamma(t) : I \longmapsto \mathbb{R}^2 \text{ tal que } ||\gamma(t)|| = 1 \forall s \in I$$

é uma curva contida na circunferência em $\mathbb{R}^2$ de raio 1 e centro na origem. Vamos escrever $\gamma(t) : I \longmapsto S'$, para S' sendo essa circunferência de raio 1 centrada na origem.
Já vimos que quando $||\gamma(t)|| = 1$ temos $\gamma'(t) \perp \gamma(t) \forall t$.

Função Ângulo

Dada uma função diferenciável $\gamma : I \longmapsto S'$ diz-se que $\theta(s)$ é uma função ângulo quando $\gamma(s) = (cos\theta(s), sen\theta(s))$.

$$\theta'(s) = det < \gamma(s), \gamma'(s) >$$

$$\theta'(s) = det < \alpha'(s), \alpha''(s) >$$

Vamos supor que $\gamma(s) : I \longmapsto S'$ admite ângulo diferenciável $\theta(s) : I \longmapsto \mathbb{R}$. Nesse caso temos

$$\gamma(s) = (-\theta(s) sen\theta(s), \theta'(s) cos\theta(s))$$

$$= \theta'(s)(-sen\theta(s), cos\theta(s))$$

$$= -\theta'(s) J(\gamma(s))$$

$$< J\gamma(s), \gamma'(s) > = < J\gamma(s), \theta'(s) J\gamma(s) >$$

$$= \theta'(s) < J\gamma(s), J\gamma(s) >$$

então

$$\theta'(s) = det < \gamma(s), \gamma'(s) >$$

$$= det < \alpha'(s), \alpha''(s) >$$

note a parametrização unit-speed!

$$K(s) = \theta'(s) = det(T(s)T'(s)) = det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Em particular, $|K(s)|$ é a área do retângulo determinado pelos vetores $\alpha'(s)$ e $\alpha''(s)$. Uma vez que $||\alpha'(s)|| = 1$, temos que $||\alpha''(s)||$.