03-13 - Probabilidade

> Aula passada

- Espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, P)$
  Propriedades:

6. Se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$
   Aqui, $A_n \uparrow A$ significa que como $A_n \subset A_{n+1}, \forall n$,

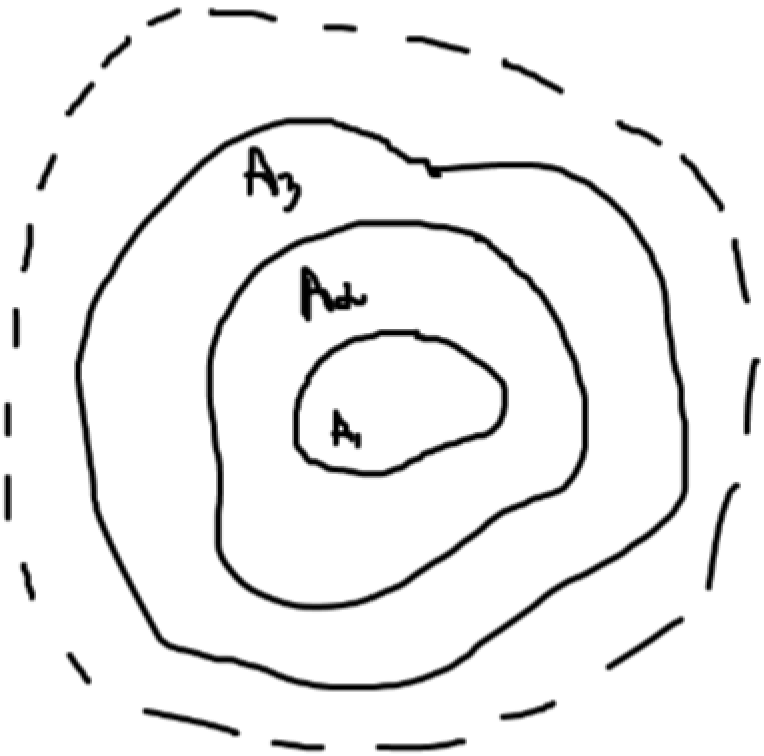
$$\cup_{n=1}^{\infty} = \{x \text{ tais que } \exists n \text{ tal que } x \in A_n$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

   Se $A_n \downarrow A$, então $P(A_n) \downarrow P(A)$
   Caso particular: Se $A_n \downarrow \phi$ então $P(A_n) \downarrow \phi$. (continuidade do vazio)
   Se $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos 2 a 2, então

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Exemplo:



Seja $B_1 = A_1$
Para cada $n > 1$, seja $B_n = A_n - A_{n-1}$
Então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$
Como $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ é uma união disjunta, temos

$$P(A) = P(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] = \lim_{n \longmapsto \infty} P(A_n)$$

> Verdadeiro ou falso?
> Se $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, então $\lim_{n \longmapsto \infty} P(A_n) = P(A)$
> Falso!
> Os intervlos A_n podem ser
> $A_1, \phi, A_2, \phi, \dots$

Como construir espaços de probabilidade?
a) Caso discreto: $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$
Definir $p_i = P(\{w_i\})$ para cada i, de modo que $\sum pi = 1$
$\mathbb{A} = 2^{\Omega} = \{A | A \subset \Omega\}$
$\forall A \in \mathbb{A}$, definir $P(A) = \sum_{w_1 \in \mathbb{A}} p_i$

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = \sum p_i = 1$
3. Se A e B são disjuntos

$$P(A \cup B) = \sum_{w_i \in A \cup B} p_i = \sum_{w_i \in A} p_i + \sum_{w_i \in B} p_i = P(A) + P(B)$$

b) Caso contínuo: $\Omega = \mathbb{R}$ (ou um intervalo)

- $A = B(\sigma$-álgebra de Borel) (menor álgebra que contém todos os intervalos)
- Definir probabilidade para os intervalos e estender para a álgebra os intervalos de modo que valham as proprosições 1,2, e 3.

$$P(-\infty, a] \longmapsto P(x), x \in B$$

satisfazendo algumas condições

Definição

A probabilidade condicional de A dado B $(A, B \in \mathbb{A} e P(B) > 0$ é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Obs: i) $P(B|B) = 1$
ii) $(\Omega, \mathbb{A}, P(.\,|B))$ é um novo espaço de probabilidade

Exemplo: Dado equilibrado lançado das vezes;

1. $A =$ 1º resultado sair 5
2. $B =$ soma=6
3. $C =$ soma=2
   a) $P(A) = 1/6$
   b) $P(B) = 1/5$
   c) $P(C) = 0$

Exemplo: uma urna contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas tiradas uma a uma sem reposição
Qual é a probbilidade de
a) 1ª branca e 2ª preta?p