03-13 - Curvas

> Aula passada:

Função ângulo:

$\gamma : I \to S'$
$\gamma(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$

Curvatura:

$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$
$T(s)$ a tangente de α
$T(s) : I \to S'$
$T(s) := (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$
e $K(s) = \theta'(s)$

Diferenciabilidade de aplicações:

> Referência: Livro de Análise no $\mathbb{R}^n$ do Ronaldo

Dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação
$F : U \to \mathbb{R}^n$
$\rho \to (F_1(\rho), F_2(\rho), \ldots, F_m(\rho))$
Dizemos que uma aplicação é diferenciável em ρ se existe transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(\rho + h) - f(\rho) = Th + r(h)$$

sendo T a transformação e r o erro

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, com $t \neq 0$, tem-se

$$Th = \frac{T(th)}{t} = \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \pm \frac{r(th)||r||}{||th||}$$

> Nota: o $\pm$ saiu daqui:
>
> $$r(h) = \frac{r(th)}{t} \cdot \frac{||h||}{||h||}$$

Logo,

$$Th = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

Essa transformação linear T é chamada de derivada de f em x e é denotada como $f'(x)$

$$f'(x) : U \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Exemplos de aplicações diferenciáveis:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
   $(x, y) \longmapsto (y, x^2)$ no ponto $(1, 2)$;

$$Th = T(h_1, h_2) = \lim \frac{f(1,2) + T(h_1,h_2) - f(1,2)}{t}$$

$$= \lim \frac{f((1,2) + t(h_1,h_2)) - f(1,2)}{t}$$

$$= \lim \frac{f(1+th_1, 2+th_2) - f(1,2)}{t}$$

$$= \lim \frac{(2+th_2, 1+2th_1+(th_1)^2) - (2,1)}{t}$$

$$= \lim \frac{(th_2, 2th_1+(th_1)^2)}{t}$$

$$= \lim \cancel{t}\frac{(h_2, 2h_1+(th_1^2))}{\cancel{t}}$$

$$= (h_2, 2h_1)$$

$$T(h_1,h_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = (h_2, 2h_1)$$

2. $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto ||x||^2 = < x, x >$

$$Th = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{< x+th, x+th > - < x, x >}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{< x, x+th > + < th, x+th > - < x, x >}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{< x, x > +2 < th, x > + < th, th > - < x, x >}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{< x, x >} +2t < h, x > +t^2 < h, h > - \cancel{< x, x >}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \cancel{t} \frac{2 < h, x > +t < h, h >}{\cancel{t}}$$

$$= 2 < h, x >$$

$$= 2(x_1 h_1 + x_2 h_2 + \ldots)$$

3. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
T uma aplicação linear

$$dTh = \lim_{t \to 0} \frac{T(x+th) - T(x)}{t}$$

$$dTh = \lim_{t \to 0} \frac{T(th)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tT(h)}{t} = T(h)$$

4. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}'$
$(x, y) \to < x, y >$

$$Th = \lim \frac{f((x,y) + t(h_1, h_2)) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim \frac{< x + th_1, y + th_2 > - < x, y >}{t}$$

$$= \lim \frac{\cancel{< x, y >} + < th_1, y > + < x, th_2 > + < th_1, th_2 > - \cancel{< x, y >}}{t}$$

$$= \lim \frac{t < h_1, y > + t < x, h_2 > + t^2 < h_1, h_2 >}{t}$$

$$= \lim \frac{\cancel{t} < h_1, y > + < x, h_2 > + t < h_1, h_2 >}{\cancel{t}}$$

$$= < h_1, y > + < x, h_2 >$$