Lista 1 - Variável Complexa

Aluno: Daniel Jacob Tonn

1. Demonstre a desigualdade de Cauchy

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n|^2 \leq (|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)(|b_1|^2 + \ldots + |b_n|^2)$$

   onde $a_j, b_j : j = 1, \ldots, n$ são números complexos.

Resposta:
Vamos realizar a demonstração por indução.
Primeiro, vamos verificar se é válido para $j = 1$:

$$|a_1b_1|^2 \leq |a_1|^2|b_1|^2$$

Sendo $a = x + iy$ e $b = w + iz$:

$$|(xw - zy) + i(yw + zx)|^2 \leq (x^2 + y^2)(w^2 + z^2)$$

$$(xw - zy)^2 + (yw + zx)^2 \leq (x^2 + y^2)(w^2 + z^2)$$

$$x^2w^2 - \cancel{2xwzy} + z^2y^2 + y^2w^2 + \cancel{2ywzx} + z^2x^2 \leq x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2$$

$$x^2w^2 + z^2y^2 + y^2w^2 + z^2x^2 = x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2$$

Verificada a base da nossa indução, vamos criar nossa hipótese indutiva:

$$|a_1b_1 + \ldots + a_kb_k|^2 \leq (|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2)$$

Nos resta então provar para $k + 1$:

$$|a_1b_1 + \ldots + a_{k+1}b_{k+1}|^2 \leq (|a_1|^2 + \ldots + |a_{k+1}|^2)(|b_1|^2 + \ldots + |b_{k+1}|^2)$$

Tomemos o primeiro membro da desigualdade , como a seguir:

$$|a_1b_1 + \ldots + a_{k+1}b_{k+1}|^2 = |(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) + (a_{k+1}b_{k+1})|^2$$

Pela Desigualdade Triangular:

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n + a_{k+1}b_{k+1}| \leq |a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| + |a_{k+1}b_{k+1}|$$

Da nossa hipótese indutiva, temos que

$$|a_1b_1 + \ldots + a_kb_k| \leq \sqrt{(|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)}\sqrt{(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2)}$$

Substituindo esse módulo no segundo termo da desigualdade triangular:

$$|a_1b_1 + \ldots + a_nb_n| + |a_{k+1}b_{k+1}| =$$

$$\sqrt{(|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)}\sqrt{(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2)} + |a_{k+1}b_{k+1}|$$

Daí, temos que

$$|a_1b_1 + \ldots + a_{k+1}b_{k+1}|^2 \leq$$

$$(\sqrt{(|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)}\sqrt{(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2)} + |a_{k+1}b_{k+1}|)^2$$

Desenvolvendo essa potência:

$$(|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2 + |a_{k+1}b_{k+1}|^2 +$$

$$2\sqrt{(|a_1|^2 + \ldots + |a_k|^2)}\sqrt{(|b_1|^2 + \ldots + |b_k|^2)}|a_{k+1}b_{k+1}|$$

Olhando pela desigualdade de Cauchy para $k+1$, basta provarmos que (1)

$$2\sqrt{(\sum_{i=1}^{k}|a_k|^2)}\sqrt{(\sum_{i=1}^{k}|b_k|^2)}|a_{k+1}||b_{k+1}| \leq (\sum_{i=1}^{k}|a_k|^2)|b_{k+1}|^2 + (\sum_{i=1}^{k}|a_k|^2)(|a_{k+1}|^2)$$

Para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}$ é válido $(A-B)^2 > 0 \implies A^2 + B^2 > 2AB$. Sendo

$$A = \sqrt{(\sum_{i=1}^{k}|a_k|^2)(b_{k+1})}$$

$$B = \sqrt{(\sum_{i=1}^{k}|a_k|^2)(|a_{k+1}|)}$$

concluímos que (1) é verdade e portanto

$$|a_1b_1+...+a_{k+1}b_{k+1}|^2 \leq (|a_1|^2+...+|a_k|^2+|a_{k+1}|^2)(|b_1|^2+...+|b_k|^2+|b_{k+1}|^2))$$

2. **Demonstre que**

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$$

se $|a| < 1$ **e** $|b| < 1$**.**
Podemos pegar o quadrado da desigualdade e tomar o módulo do denomindor e numerador da fração separadamente:

$$\frac{|a-b|^2}{|1-\bar{a}b|^2} < 1$$

Sendo $|c| = \bar{c}c$, temos:

$$\frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})} < 1$$

Desenvolvendo as multiplicações:

$$\frac{a\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{a}+b\bar{b}}{1-a\bar{b}-\bar{a}b+\bar{a}ba\bar{b}} < 1$$

ou melhor,

$$\frac{|a|^2-a\bar{b}-b\bar{a}+|b|^2}{1-a\bar{b}-\bar{a}b+|b|^2|a|^2} < 1$$

$$|a|^2-a\bar{b}-b\bar{a}+|b|^2 < 1-a\bar{b}-\bar{a}b+|b|^2|a|^2$$

$$|a|^2+|b|^2 < 1+|b|^2|a|^2$$

Pelo enunciado $|a| < 1 \implies |a|^2 < 1$. Podemos reescrever $1 = \frac{1-|b|^2}{1-|b|^2} > |a|^2$. Multiplicando ambos os termos da desigualdade por $(1-|b|^2)$:

$$|a|^2|1-|b|^2| < |1-|b|^2| \implies |a|^2-|a|^2|b|^2 < 1-|b|^2$$

Rearranjando os termos dessa desigualdade, temos

$$|a|^2 + |b|^2 < 1 + |b|^2|a|^2.$$

Concluimos portanto que $|a|^2 + |b|^2 < 1 + |b|^2|a|^2$, o que implica

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

3) **Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano complexo, com $z \in \mathbb{C}$:**

- $Re(1/z^2) < 1/2$
- $|z-1| = Imz$
- $z^4 = 16$
  Respostas:
  (i) Seja $z = x + iy$ complexo, então $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ e

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + i(2xy)}.$$

Multiplicando a fração pela conjugada:

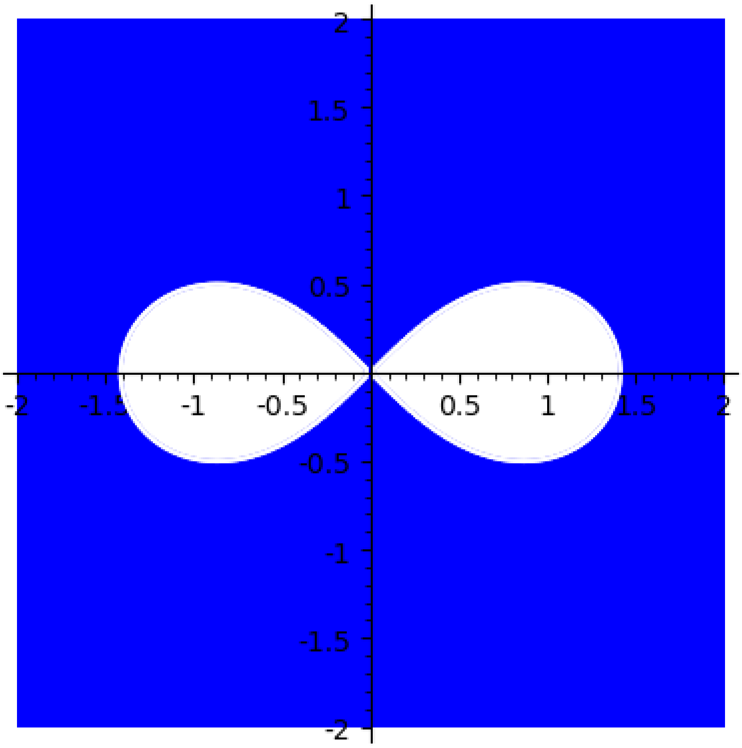
$$\frac{1}{(x^2-y^2)+i(2xy)} \cdot \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{(x^2-y^2)-i(2xy)} = \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{x^4+y^4+2x^2y^2} = \frac{(x^2-y^2)-i(2xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tomando apenas a parte real, temos

$$Re(1/z^2) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} < \frac{1}{2},$$

equação essa que representa uma lemniscata, sendo os pontos de coordenadas exteriores a essa lemniscata favoráveis à desigualdade. Verificar que essa equaçãao representa o exterior de uma lemniscata não é trivial e foram utilizados recursos computacionais para exibir o domínio dessa função.



(ii) Sendo $z = x + iy$:

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$Im(z) = y$$

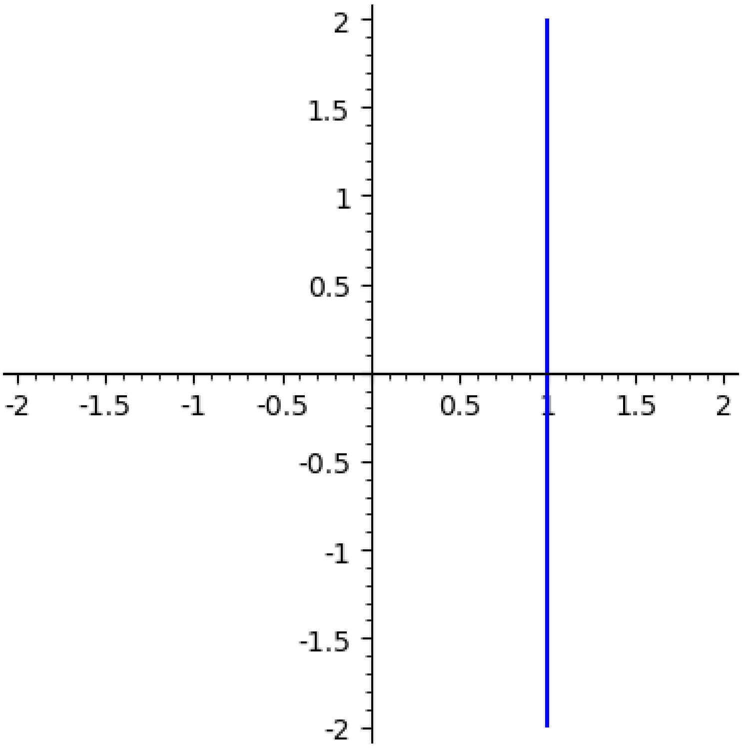
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = y$$

$$(x-1)^2 + y^2 = y^2$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1.$$

Concluímos que o conjunto que satisfaz a igualdade é a reta $x = 1$.



(iii) Sendo $z = x + iy$ e $u = z^2$. Então $u^2 = 16$.
Daí,

$$u = \pm\sqrt{16}$$

$$u = \pm 4$$

Se $z^2 = u = +4$:

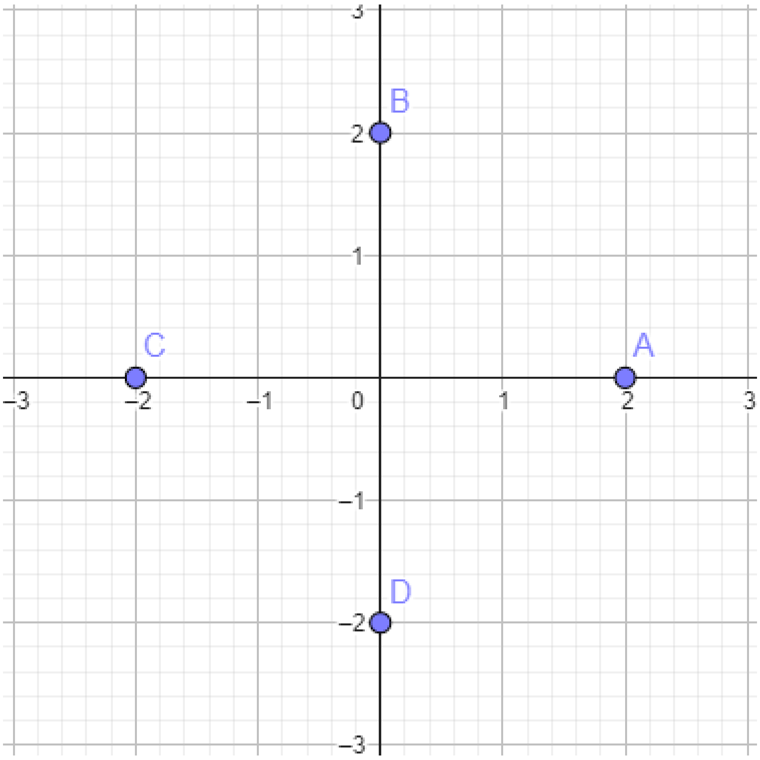
$$z = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Se $z^2 = u = -4$:

$$z = \sqrt{-4} = \pm 2i.$$

Logo, concluímos que o conjunto que satisfaz $z^4 = 16$ é

$$\Omega = \{2, -2, 2i, -2i\}$$



4. **Encontre a raiz quadrada de $1+\sqrt{2}i$ e a raiz cúbica de -81.**
   (i) Sendo $z = x + iy$, complexo tal que $z^2 = 1 + \sqrt{2}i$.

$$(x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Daí,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ 2xy & = \sqrt{2} \end{cases}$$

Da segunda equação deste sistema, temos

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2x}.$$

Substituindo na primeira equação deste mesmo sistema:

$$x^2 - \frac{2}{4x^2} = 1$$

$$4x^4 - 2 = 4x^2$$

$$2x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

Sendo $\bar{x} = x^2$:

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{x} - 1 = 0$$

$$\bar{x} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.2(-1)}}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

No entanto, $\sqrt{\bar{x}} = x$.

$$x = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}}$$

Como $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}.$$

Por fim, substituindo os valores de x encontrados na primeira equação do sistema:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - 1$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$$

Note que da segunda equação temos que o produto xy é positivo, então x e y possuem mesmo sinal.
Logo, as soluções são

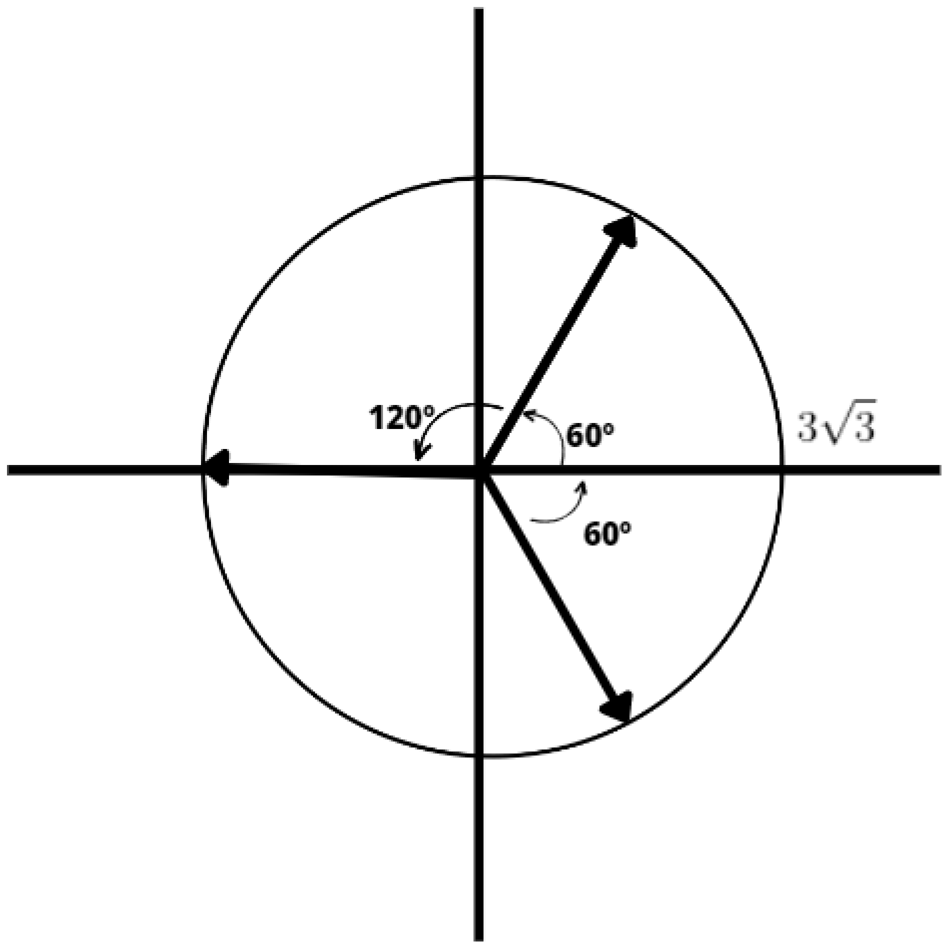
$$z_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}i$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}i$$

(ii) Sendo $z = x + iy$ uma das três raizes de -81:

$$\sqrt[3]{-81} = -3\sqrt[3]{3} \implies z_1 = -3\sqrt[3]{3} + 0i$$

Como visto em sala, as soluções tem mesmo módulo e formam ângulos iguais entre soluções adjacentes quando interpretadas como vetores no plano complexo. Em outras palavras, o ângulo entre duas soluções adjacentes equivale a $120º$, sendo as soluções distribuidas sobre a circunferência de raio $3\sqrt[3]{3}$, como a seguir:



Assim sendo, temos :

$$z_1 = 3\sqrt[3]{3}$$

$$z_2 = 3\sqrt[3]{3}(cos(60º) + isen(60º) = 3\sqrt[3]{3}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$z_3 = 3\sqrt[3]{3}(cos(60º) - isen(60º) = 3\sqrt[3]{3}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$