03-01 - Cálculo Complexo

Bibliografia:

- Introdução às funções de uma variável complexa (textos universitários - SBM) - Cecília Fernandez e Nilson Bernardes
- Complex Analysis - Ahlfors, Shabat - Edição MIR
- Stein+ angluém

Números Complexos:

Os números complexos são escritos da forma $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, sendo x a parte nomeada de parte real e y a parte imaginária de z. O conjunto que contém todos os números complexos é nomeado de $\mathbb{C}$.
o conjunto dos números imaginários é um corpo algebricamente fechado, isto é, em qualquer polinômio de uma variável e grau dessa variável maior ou igual a 1[1], com coeficientes nesse conjunto, tem uma raiz nesse mesmo conjunto.
O corpo dos complexos é fechado por soma e multiplicação, assim como $\mathbb{R}$.
Soma
Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$, então

$$z + w = (x + iy) + (u + vi) = (x + u) + i(y + v).$$

Produto
Sejam z e w definidos como anteriormente, então:

$$(x + iy)(u + iv) = xu + ixv + iyu - yv = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

O corpo dos complexos mantém as propriedades de comutação, elemento neutro da soma e da multiplicação, existência do oposto e existência de inverso.
Comutação:

$$z + w = (x + iy) + (u + vi) = (x + u) + i(y + v) = w + z.$$

Elemento neutro (+):

$$z + 0 = 0 + z = z$$

Elemento neutro (.):
Definimos a unidade no conjunto dos complexos como $1 = 1 + i0$, então

$$z.1 = 1.z = z$$

Oposto:
Sendo $z = x + iy$, com $z \neq 0$, definimos $-z = -x - iy$ e

$$z + (-z) = 0$$

De fato,

$$z + (-z) = x + iy - x - iy = (x - x) + i(y - y) = 0 + i0 = 0$$

Inverso:
Para todo $z \neq 0$, com $z = a + bi$, existe w tal que $wz = 1$.
Seja $w = (x + iy)$, então

$$zw = (a + bi)(x + iy) = 1$$

$$xa - yb + iay + ibx = 1$$

$$(xa - yb) + (ay + bx)i = 1$$

Como a unidade nos complexos é definida como $(1 + 0i)$, segue que

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

Podemos escrever esses sistema em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Ax = b$$

Multiplicando ambos os termos pela inversa de A, temos:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

ou melhor,

$$x = A^{-1}b$$

Sendo $\Delta = det(A) = \frac{1}{a^2+b^2}$ inversa de A é

$$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$w = x + iy = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi).$$

$$w = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi).$$

A geometria da coisa

- A parte real de z é x e z é real quando $y = 0$.
- A parte imginária de z é y e z é puramente imaginário se $x \neq 0$.
- z é real e imaginário simultaneamente apenas quando $z = 0$.
  Os números complexos podem ser representados em um plano cujo eixo das abcissas é o eixo $x \in \mathbb{R}$ e o eixo das ordenadas é $iy, y \in \mathbb{R}$.
  Definimos a conjugada de $z = x + iy$ como $\bar{z} = x - iy$, onde

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ e } y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

  Segue que $z \mp w = \bar{z} + \bar{w}$ e que $z\bar{w} = \bar{z}\bar{w}$.
  Uma aplicação da conjulgada é, dado uma equação na forma

$$C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_{n-1} z + C_n = 0, (1)$$

com raiz ζ, a conjugada

$$\bar{C}_0\bar{z}^n+\bar{C}_1\bar{z}^{n-1}+\ldots+\bar{C_{n-1}}z+\bar{C}_n=0(2)$$

possui raiz $\bar{\zeta}$ que é também solução de (1).
Definimos

$$|z|^2=z\bar{z}$$

como módulo de z, onde $|z|^2=x^2+y^2$.
$|z|$ pode ser interpretado como o tamanho de z:

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

O módulo de uma soma $|a+b|^2$ é $|a|^2+|b|^2+2Rea\bar{b}$ e o módulo da subtração é
$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2Rea\bar{b}$. Somando as duas equações, temos $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$.
Podemos afirmar que $|z|^2=x^2+y^2\geq x^2=(-x)^2$, d'onde

$$-|z|\leq Rez\leq|z|.$$

De forma semelhante,

$$-|z|\leq Imz\leq|z|$$

Agora, redefinindo a igualdade $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2Rea\bar{b}$ para $|a+b|^2\leq|a|^2+|b|^2+2Rea\bar{b}$, chegamos na Desigualdade Triangular:

$$|a+b|\leq|a|+|b|$$

Essa desigualdade se torna igualdade apenas para
$Rez=|z|\geq0 \text{ e } z\in\mathbb{R}$.
Se $Rez=|z|$ é real positiva, então $\frac{b}{b}a\bar{b}=\frac{a}{b}|b|^2\implies\frac{a}{b}>0$