02-27 - Curvas

Um dos objetivos do estudo de curvas é encontrar o quanto uma curva se inclina (se curva), o que nos fornece essa curvatura é o ângulo entre a função e a sua derivada.
Encontramos o valor do ângulo entre dois segmentos de reta através da Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cos\theta,$$

onde os segmentos podem ser interpretados como vetores:

$$||u - v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||||v||cos\theta,$$

ou melhor,

$$cos\theta = \frac{< u, v >}{||u||||v||}$$

O Produto interno é uma função $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ em um espaço vetorial (real) $\mathbb{V}$, linear em cada variável. Essa função f pode ser simétrica, antissimétrica ou positiva.

- Simétrica: $f(x, y) = f(y, x)$
- Anti-simétrica: $f(x, y) = -f(y, x)$
- Positiva: $f(x, x) > 0, x \neq 0$

> **Exercício**
> O produto interno é uma forma bilinear simétrica, positiva e definida.

Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$, segue que

$$< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n =< v, u >,$$

ou seja, simétrico. AQUI! (POSITIVA DEFINIDA)
A <u>Norma euclidiana</u> associa cada vetor a um número real:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

A <u>Distância euclidiana</u> é a distância entre dois pontos, em que é aplicado o teorema de pitágora recorrentemente.

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Uma <u>parametrização</u> em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\Gamma : I \to \mathbb{R}^n$, sendo I um intervalo aberto.
A curva parametrizada pode ser expressa em coordenadas em função de uma variável externa:

$$t \in I \to \Gamma(t) : (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \ldots, \Gamma_n(t))$$

Exemplo:
Circunferência de raio 1 em $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma(t) = (cos(t), sen(t))$$

Mola de raio 1 em $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma(t) = (cos(t), sen(t), t)$$

O conjunto imagem da função parametrizada é chamada de <u>traço</u>.
Seja $\Gamma : I \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação com $\Gamma(t) = (\Gamma_1(t) + \ldots + \Gamma_n(t))$, o vetor $\Gamma'(t) = (\Gamma_1'(t) + \ldots + \Gamma_n'(t))$ é chamado de vetor tangente de Γ em t, ou vetor velocidade.
Em uma curva parametrizada diferenciável, dizemos que essa curva

é regular se $\Gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$
Exemplo:

$$\Gamma(t) = (t^3, t^2)$$

$$\Gamma'(t) = (3t^2, 2t)$$

Para $t = 0$, $\Gamma'(t) = 0$.
Podemos determinar a reta tangente à curva em t a partir do ponto t e do vetor velocidade:

$$r(\lambda) = \Gamma(t) + \lambda\Gamma'(t)$$

As curvas regulares podem ser medidas integrando o módulo do vetor tangente. O comprimento da curva é dado pela noção de aproximação poligonal levada ao limite. A regularidade é essencial nesse conceito. Seja $\Gamma : I \subset \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Vamos considerar uma partição do intervalo $[a, b]$: $P = t_0, t_1, \ldots t_{n-1}, t_n \subset [a, b]$ com $a = t_0 \leq t_1 \leq t_n$. A união de todos os segmentos $[\Gamma(t_{i-1}); \Gamma(t_i)]$ é uma linha poligonal e seu comprimento é

$$\boldsymbol{L}_a^b(\Gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} ||\Gamma'(t_i) - \Gamma'(t_{i-1})||$$

Vrifica-se que L é limitada e satisfaz

$$supL_a^b(\Gamma, P) = \int_a^b ||\Gamma'(t)||dt$$

Exemplo:
Expiral logarítmica

$$\Gamma(t) = (e^{kt}cos(t), e^{kt}sen(t))$$

onde k é constante diferente de zero
O vetor tangente é

$$\Gamma(t) = (e^{kt}(kcos(t) - sen(t)), e^{kt}(ksen(t) - sen(t)))$$

Daí, o tamanho do vetor tangente é

$$||\Gamma'(t)||^2 = e^{2kt}(kcost - sent)^2 + e^{2kt}(cost + ksent)^2$$

$$= (k^2+1)e^{2kt}$$

Concluimos então que o comprimento da espiral é dado por

$$\boldsymbol{L}_0^t(\Gamma_k) = \int_0^t \sqrt{k^2+1}e^{ku}du = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}(e^{kt}-1)$$

Em particular, para $k=1$:

$$\boldsymbol{L}_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$