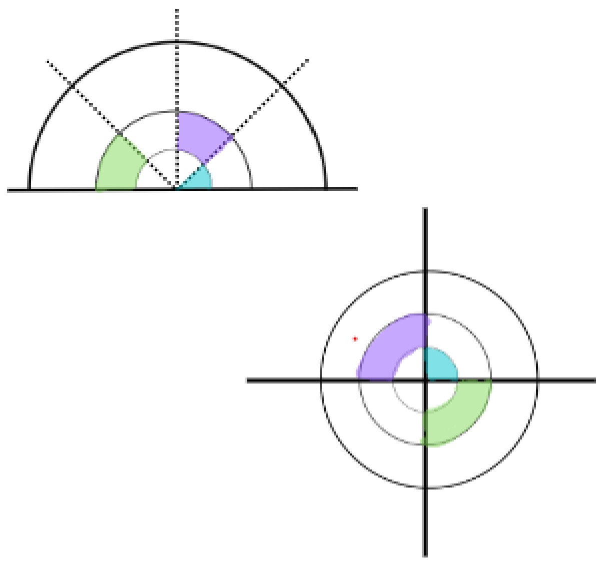
03-10 - Cálculo Complexo

Topologia de $\mathbb{C}$

- Fernandez e Bernardes, cap3
  Exemplos de funções holomorfas:
- $f(Z) = z^2$
  Se $z = re^{i\theta}$, coordenadas polares, $f(z) = r^2 e^{2i\theta}$



Funções Lineares

$$l : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$$

1. $l(z_1 + z_2) = l(z_1) + l(z_2)$
2. $l(\lambda z) = \lambda l(z)$
3. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ então l é chamada $\mathbb{C}$-linear e caso $\lambda \in \mathbb{R}$ então l é chamada $\mathbb{R}$-linear.
4. $l(0) = l(z - z) = l(z) + l(-z)$
   $l(z) - l(z) = 0$
   $\mathbb{R}^2 : l(x, y) = (ax + by, cx + dy)$
   Suponhamos que l é $\mathbb{R}$-linear.
   $l(z) = xl(1) + yl(i)$
   $\alpha = l(1); \beta = l(i)$
   $x\alpha + y\beta = \frac{z+\bar{z}}{2}\alpha - i\beta\frac{z+\bar{z}}{2}$
   $l(z) = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha}z + \frac{\alpha + i\beta}{2}\bar{z}$
   $\mathbb{R}$ linear com coeficientes com conjugada $az + b\bar{z} \implies \bar{a} = b$
   Suponha agora que l é $\mathbb{C}$ linear.
   $z = 1z$
   $l(z) = l(1)z = cz, c \in \mathbb{C}$
   Dizemos que $w = l(z)$
   $w = u + iv$
   $u + iv = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy)$
   $u + iv = (a_1x - a_2y + b_1x + b_2y + i(-b_1y + b_2x + a_1y + a_2x)$

$$u = a_1x + b_1x - a_2y + b_2y$$

$$v = -b_1y + b_2x + a_1y + a_2x$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & -(a_2 - b_2) \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações lineares de $\mathbb{R}^2$

$l(z) = az + b\bar{z}$

$\mu(z) = az$

> Uma transformação é tal que se o espaço estiver limitado por retas, então a transformação também está limitada por retas.

$\mu(z) = az$
$a = re^{i(\theta+\theta_0)}$
$z = \rho e^{i\theta}$
$\mu(z) = \rho re^{i(\theta+\theta_0)}$
(???)

$z(z) = z + z^2$
Vamos mudar a variável
$w = 1/z$