03-03 - Curvas

Difeomorfismo

Dados intervalos abertos $U \in \mathbb{R}^n$ e $V \in \mathbb{R}^m$, uma bijeção $f : U \longmapsto V$ é dita difeomorfismo quando f e f^{-1} são diferenciáveis.

Reparametrização

A curva $\beta(s)$ é chamada reparametrização de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$ regular quando dados I_0 e um difeomorfismo $\phi(s) : I_0 \longmapsto I$ temos que $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$

Orientação de uma curva

A orientação de uma curva plana é o sentido do percurso do traço de α.
Seja $\alpha(t) > (a, b) \longmapsto \mathbb{R}^2$ e $\beta(s) : (c, d) \longmapsto \mathbb{R}^2$. Daqui, $\beta(s)$ é dita reparametrização positiva de d se $\exists \phi(s) : (c, d) \longmapsto (a, b)$ tal que $\phi'(s) > 0 \forall c < s < d$.
Veremos agora que:

- (i) Diomorfismos preservam regularidade;
- (ii) A função comprimento de arco é um difeomorfismo;
- (iii) Toda curva regular admite reparametrização por comprimento de arco.

(i) Qualquer reparametrização de uma curva regular é regular.
Tome $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, com

$$\begin{cases} \phi(t) : (c,d) \longmapsto (a,b) & t \in (a,b) \\ \phi^{-1}(s) : (a,b) \longmapsto (c,d) & s \in (c,d) \end{cases}$$

observamos que

$$\phi^{-1}(\phi(s)) = s.$$

Agora, aplicando a derivada dos dois lados dessa equação:

$$(\phi^{-1}(\phi(s)))'.\, \phi'(s) = 1.$$

O que implica que todas as derivações são diferentes de zero. Por outro lado,

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s))$$

$$||\beta'(s)|| = ||(\alpha(\phi(s)))'||$$

$$||\beta'(s)|| = ||\alpha'(\phi(s)).\, \phi'(s)||$$

Observe que $\alpha'(\phi(s)) \neq 0$ por regularidade e $\phi(s) \neq 0$ por difeomorfismo (ou como vimos acima). Daí, $||\beta'(s)|| \neq 0 \forall s \implies \beta$ é regular.
(ii) A função comprimento de arco é um difeomorfismo.
Seja $\alpha(t) : I \longmapsto \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Consideramos um ponto $t_0 \in I$ e definimos a função

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du, t \in I.$$

Temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo que L é diferenciável e satisfaz

$$L'(t) = ||\alpha'(t)|| \neq 0, \forall t \in I,$$

isto é, L é uma função contínua diferenciável estritamente crescente. Em outras palavras, é uma bijeção.
O difeomorfismo de L (que leva um comprimento de arco em um parâmetro) pode ser escrito como

$$\forall s \in I_0, L(\phi(s)) = s$$

$\phi(s)$ é o parâmetro correspondente ao lugar aonde a curva tem comprimento s. Daí,

$$L'(\phi(s))\phi'(s) = 1$$

$$\phi'(s) = \frac{1}{L'(\phi(s))} = \frac{1}{||\alpha'(t)||}$$

Logo, concluimos que ela é diferenciável e $L(t)$ é difeormorfismo.
Tomemos a função comprimento de arco que vimos ser um difeomorfismo (sendo $\phi(s)$ o lugar(ponto) correspondente) temos $L(\phi(s)) = s$.
Tomando $\phi(s)$ como reparametrização, temos $(\beta(s) = \alpha(\phi(s)))$.
Derivando essa equação dos dois lados:

$$\beta'(s) = \alpha'(\phi(s))\phi'(s) = \alpha'(\phi(s)). \frac{1}{||\alpha'(\phi(s))||} = 1$$

(iii) Toda curva regular admite reparametrização por comprimento de arco.
(vamos nos referir à reparametrização por comprimento de arco como UNIT SPEED).
Exemplo: expiral logaritmica.

$$\gamma_k(t) = (e^{kt}cost, e^{kt}sent)$$

$$\gamma_k'(t) = (e^{kt}(kcost - sent), e^{kt}(ksent + cost))$$

$$||\alpha_k'(t)||^2 = e^{2kt}(k^2 + 1)$$

Então a função comprimento de arco da função logaritmica é

$$L_0^t(\gamma_k) = \int_0^t \sqrt{k^2+1}e^{ku}du = \sqrt{k^2+1}(e^{tk}-1)$$

Em particular, para $t = 1$:

$$= \sqrt{2}(e^t - 1)$$

Daí a função comprimento de arco a partir de $t = 0$ é dada por $L_0^t(\gamma_1)$. A função a ser usada como reparametrização é a inversa da comprimento de arco, dada por

$$L^{-1}(s) = ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$$

$$\bar{\gamma}(s) = ((\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)cosln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1), (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)sinln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1))$$

> REPARMETRIZAÇÃO POR COMPRIMENTO DE ARCO

1 - Calcular a derivada da função r(t);

2 - Calcular o módulo da derivada r'(t) ;

3 - Resolver a integral do módulo |r'(t)| no intervalo de tempo qualquer ;

4 - Escrever t em função de s ;

5 - Substituir na expressão inicial ;

6 - A parametrização por comprimento de arco está pronta