03-15 - Cálculo Complexo

Séries de potência

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$a_n \in \backslash c, n \in \mathbb{N}, z \in \backslash c$$

Teorema de Hadamard

Existe $o \leq R < \infty$ tal que:

1. Se $|z| < R$ então a série

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

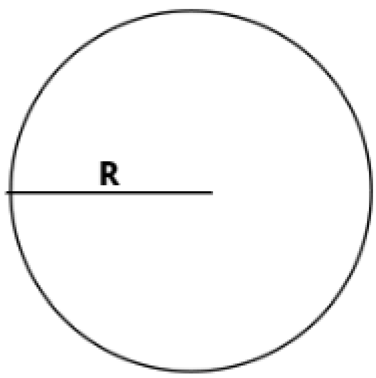
   é absolutamente convergente, isso é,

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$$

   e o raio do disco de convergência é dado por

   $$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} sup|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

   De forma visual,

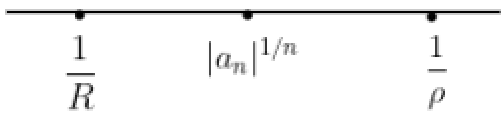
   $D_R = \{|z| < R\}$ disco de convergência, onde os pontos estritamente dentro do disco fazem a sequência convergir (disco aberto).

2. Se $|z| > R$ então a série diverge.

Demonstração:

1. $|z| < R$, existe $\rho : |z| < \rho < R$

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} sup|a_n|^{1/n}$$



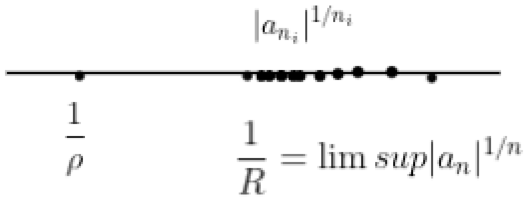
$n \geq n_0 : |a_n|^{1/n} < 1/\rho \implies |a_n| < \frac{1}{\rho^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{\rho^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Temos uma série geométrica absolutamente convergente se $r < 1$. a soma dos seus valores absolutos é convergente.

2. Seja $|z| > R$, existe $\rho : |z| > \rho > R$.

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$$



Existe subsequência (a_{n_i}) tal que

$$|a_{n_i}|^{1/n_i} > \frac{1}{\rho}$$

$$|a_{n_i}| > \frac{1}{\rho^{1/n_i}}$$

$$\sum |a_{n_i}||z^{n_i}| > \frac{|z|^{n_i}}{\rho^{n_i}} = \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n_i}$$

Temos aqui uma sequência divergente

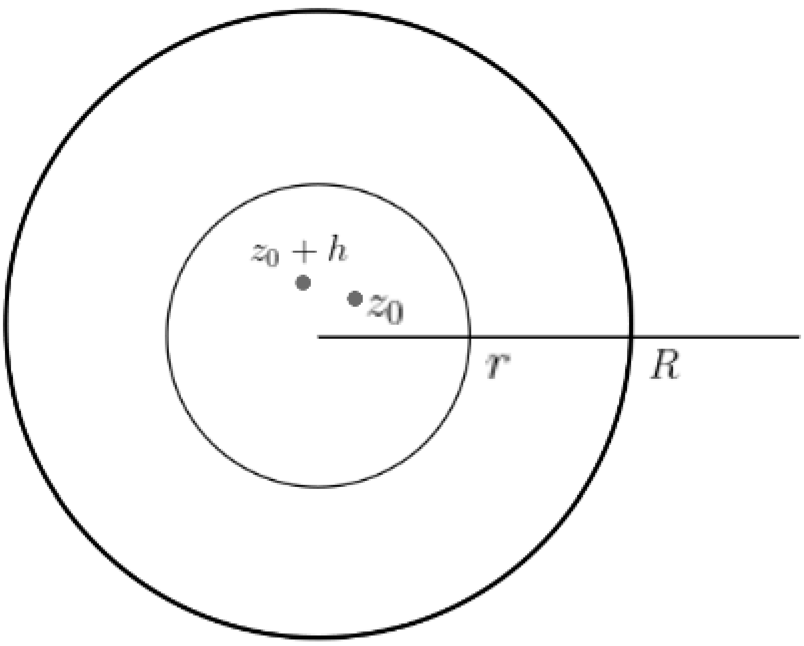
Teorema

A função f definida como o somatório do teorema anterior é holomorfa.
A derivada é

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

E o disco de convergência de $f'(z)$ é D_R.

Demonstração



Seja $0 < r < R$ e $|z| < r$. Mostraremos que $f'(z_0)$ existe e coincide

com a série derivada termo à termo.
Seja o nosso candidato a derivada:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$$

Aí então , (chamaremos a equação abaixo de EQ1)

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \to 0$$

Seja $f(z) = S_N(z) + E_N(z)$o somatório repartido em uma parte finita (S) e outra infinita (E) como abaixo:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ e } E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Substituindo em EQ1, temos EQ2

$$\frac{S_n(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} - g(z_0) \to 0$$

Vamos incluir dois termos opostos por soma aqui, chamando essa equação de EQ3

$$\frac{S_n(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) + (S'_N(z_0) - g(z_0)) + \frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} \to$$

INCLUIR AQUI OLHA

Dado $\epsilon > 0$, o valor absoluto de

$$\frac{S_n(z_0 + h) - S_N(z_0)}{h} - S'_N(z_0) < \epsilon$$

$$\frac{E_N(z_0 + h) - E_N(z_0)}{h} < \epsilon$$

Resta provarmos que

$$(S'_N(z_0) - g(z_0)) < \epsilon$$

temos que

$$\lim S_N'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}\Big|_{z=z_0} = g(z_0)$$

Então existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $S_N'(z_0) - g(z_0) < \epsilon$
O raio de convergência de

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

é o mesmo que o raio de convergência de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} sup|a_n|^{1/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} sup|a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} sup n^{1/n}|a_n|^{1/n}$$

$$\lim sup n^{1/n} = 1$$

$$\lim sup|a_n|^{1/n} = 1/R$$

Concluimos então que EQ3$< 3\epsilon$.
A série

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!}$$

converge para todo $z \in$ \c
Veremos isso melhor na próxima aula.