03-03 - Cálculo Complexo

Coordenadas Polares

Seja $z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$
IMAGEM AQUI
Cada ponto pode ser representado em coordenadas polares como

$$z = r(cos\theta, sen\theta),$$

onde θ é a inclinação do vetor que representa o número e r é a distância desse ponto à origem (módulo do vetor):

$$r = |z| = (x^2 + y^y)^{1/2}$$

e o argumento $arg(z) = \theta + 2\pi z$.
Tomando então dois números complexos expressos em coordenadas polares:

$$z = |z|(cos\theta, sen\theta)$$

$$w = |w|(cos\rho, sen\rho)$$

Ao efetuar a multiplicação desses dois vetores temos

$$zw = |z||w|(cos\theta + isen\theta)(cos\rho + isen\rho)$$

$$= |z||w|(cos\theta cos\rho - sen\theta sen\rho + i(sen\rho cos\theta + sen\theta cos\rho))$$

> Nota:
> $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$
> $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$

$$= |z||w|(cos(\theta + \rho) + isen(\theta + \rho))$$

Em particular, para $w = z$:

$$z^2 = |z|^2(cos2\theta + isen2\theta)$$

$$z^n = |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

<u>Fórmula de Moivre</u>

$$(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$$

Dado $a \in \mathbb{C}$, $z^n = a, a \neq 0$, existe $\sqrt[n]{a} = z$?
Sendo $a, z \in \mathbb{C}$ podemos reparametrizá-los em coordenadas polares como :

$$a = r(cos\rho + isen\rho), r \neq 0,$$

$$z = p(cos\theta + isen\theta), p \neq 0,$$

Temos

$$z^n = a$$

$$p^n(cos\theta + isen\theta)^n = r(cos\rho + isen\rho)$$

Pela fórmula de Moivre:

$$p^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) = r(cos\rho + isen\rho)$$

ou seja, $p^n = r$, $cos(n\theta) = cos\rho$, $sen(n\theta) = sen\rho$.
Sendo assim, concluimos que $p = r^{1/n}$ e que
$n\theta = \rho \implies \theta = \frac{2k\pi + \rho}{n}, k \in \mathbb{Z}$.
Note que existem infinitas soluções. Para sermos mais precisos:

$$\begin{cases} k=0 \implies \theta_0 = \frac{\rho}{n} & w_0 \\ k=1 \implies \theta_1 = \frac{\rho+2\pi}{n} & w_1 \\ \vdots \\ k=n-1 \implies \theta_{n-1} = \frac{\rho+2(n-1)\pi}{n} & w_{n-1} \\ k=n \implies \theta_n = \frac{\rho+2(n)\pi}{n} = \frac{\rho}{n} + 2\pi & w_n \end{cases}$$

A partir de $k=n$ as soluções começam a se repetir, portanto as soluções podem ser resumidamente escritas como
$S = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$
Ao representar todas essas soluções no plano, encontramos vetores de mesmo módulo e que possuem mesmo ângulo entre soluções adjacentes, formando uma polígono regular:
IMAGEM AQUI

> Exercício
> Encontre as soluções para $z^3 = 1$.

Solução:
Reescrevendo z em coordenadas polares temos $z = r(cos\theta + isen\theta)$.
Logo, $z^3 = r^3(cos3\theta + isen3\theta)$, por Moivre.
Como $z^3 = 1 = 1(1,0) = r^3(cos3\theta + isen3\theta)$, $r^3 = 1 \implies r = 1$

$$\begin{cases} cos3\theta & = 1 \\ sen3\theta & = 0 \end{cases}$$

Donde $sen3\theta = 0$ apenas se $3\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \implies \theta = \frac{k\pi}{3}$.
Se $\theta = \frac{k\pi}{3}$, então $cos3\theta = 1$ apenas para $k=2$, sem repetições.
Sendo assim, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{2\pi}{3} & w_1 \\ \theta_1 = 2\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} & w_2 \\ \theta_2 = 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi & w_3 \\ \theta_3 = 4\frac{2\pi}{3} = 2\pi & w_4 \\ \theta_4 = 5\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi & w_5 \end{cases}$$

Note que a partir de w_3 as soluções começam a se repetir, portanto existem 3 soluções, que são $\{2\pi/3; 4\pi/3 \text{ e } 2\pi\}$.

Funções Complexas

Uma função complexa é uma aplicação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
Exemplo 1:

$$f(z) = z/2$$

Sendo $z = x + iy$, então $f(x, y) = (x/2, y/2) = 1/2(x + iy)$.
Em particular, o círculo de raio $|z|$ é comprimido ao círculo de raio $|z|/2$.

Exemplo 2:

$$f(z) = i(z)$$

Sendo $z = x + iy$ então $iz = ix - y$, isto é, $f(x, y) \longmapsto (-y, x)$.
Importante destacar que essa transformação é tal que leva um vetor à um vetor ortogonal.

> Exercício
> Averiguar que ângulo foi rodado o vetor na aplicação anterior.

Calculando o produto interno entre $x + iy$ e $ix - y$ temos:

$$< (x, y), (-y, x) >= -xy + xy = 0$$

Logo, como o produto interno é 0, os vetores são ortogonais.

Exemplo 3:

$$f(z) = (z + iz)/2$$

> Problema
> 1) $f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$
> 2) $f(z) = \lambda z + z^2$

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \longmapsto \mathbb{C}$. A função f é dita analítica em Ω se $\forall z \in \Omega$

$$f'(z) = lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existir e independente da direção em que se chegue ao ponto em discussão a derivada for a mesma.
Sendo $z = x + iv$, podemos definir $f(z) = u(z) + iv(z)$ como $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.
Se aproximando primeiro pela horizontal temos

$$f'(z) = lim_{h \longmapsto 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h} = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}, h \in \mathbb{R}$$

Se aproximando agora pela vertical temos

$$f'(z) = lim_{k \longmapsto 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik}$$

Multiplicando denominador e numerador por $-i$:

$$-i.\, lim_{k \longmapsto 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{k} = -i.\, lim_{k \longmapsto 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k} = -i\frac{\delta f}{\delta y}$$

$$-i(\frac{\delta u}{\delta y} + i\frac{\delta v}{dy}) = \frac{\delta v}{\delta y} - i\frac{\delta u}{dy}$$

Em resumo, se aproximamos pela horizontal temos

$$\frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}$$

E se nos aproximamos pela vertical temos

$$\frac{\delta v}{\delta y} - i\frac{\delta u}{\delta y}$$

Logo, como o limite deve existir e ser igual para que a derivada exista, então

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y} \end{cases}$$

Essas são as equações de Cauchy-Riemman.
Analisando $|f'(z)|^2$, temos:

$$|f(z)|^2 = (\frac{\delta u}{\delta x})^2 + (\frac{\delta v}{\delta x})^2$$

Utilizando as equações de Cauchy-Riemman podemos reeescrever como

$$|f(z)|^2 = \frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x}\frac{\delta u}{\delta y}$$

Podemos interpretar essa equação como determinante da matriz Jacobiana.

$$= det\left(\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix}\right)$$

A equação Laplaciana é

$$\Delta u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}.$$

Fazendo uma breve analogia com as equações de Cauchy:

$$\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta v}{\delta y})$$

$$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta y}) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta v}{\delta x}).$$

Portanto, se

$$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta v}{\delta y}) - \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta v}{\delta x}) = 0,$$

u é chamada de função harmônica e satisfaza equação de Laplace $\Delta u = 0.$