03-06 - Probabilidade

Bibliografia
Livro Barry James - Prob: um curso em nível intermediário
Conteúdos a serem abordados:

1. Modelos probabilísticos - prob condicional e independência
2. Variáveis aleatórias e funções de distribuição
3. Esperança matemática. Integral de Stieltys
4. Distribuição e esperança condicional
5. Lei dos Grandes Números
6. Teorema Central do Limite

A origem da probabilidade se dá em jogos de azar, como:

- Lançamento de dados ou moedas, cartas, bolas em urnas, etc.
- Todos modelos equprováveis.
  Chamamos de Ω o espaço amostral (conjunto dos resultados possíveis).

  $$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

  Exemplo 1: lançamento de um dado

  $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  Subconjuntos desse elemento são chamados de evento.Ex:

  $$\text{evento(sair par)} = \{2, 4, 6\}$$

  Probabilidade de um evento:

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ casos favoraveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ casos possiveis}}$$

  $$P(\text{sair par}) = \frac{n(\text{sair par})}{n(\Omega)} = \frac{n\{2, 4, 6\}}{n\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2:
5 sorvetes são distribuídos "ao acaso" entre 10 pessoas, das quais 2 só gostam de morango e 3 somente de chocolate. Qual a probabilidade de todas ficarem satisfeitas?
Solução:
Suponha que vamos distribuir os sorvetes para as pessoas que querem morango. Da primeira pessoa à receber o sorvete, existem 5 casos favoráveis de todos os 10 casos possíveis. A segunda pessoa, no entanto,só tem a opção de 9 sorvetes, dos quais apenas 4 são de morango. Dentre as pessoas que gostam de chocolate, a primeira pode receber 5 dentre os 8 sorvetes restante, a segunda que só quer morango recebe um dos 4 entre os 7 restantes e a ultima pessoa exigente pode receber 3 dos 6 restantes. as demais pessoas podem receber qualquer sorvete. Sendo assim,

$$\frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{5!}{5!} = \frac{5}{126}$$

O número de subconjuntos de p elementos de um conjunto com n elementos é

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 3:
Moeda honesta é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de saírem 2 caras e 1 coroa?
Vamos pensar primeiro no total de casos possíveis. Existem duas opções de resposta pra cada lançamento,coroa(C) ou cara(K) o que significa $2.2.2 = 8$ resultados possíveis.
Agora, imagine que no primeiro lançamento saiu C. É necessário que saia apenas uma cara dentre os próximos lançamentos. Pode acontecer de sair KC ou CK. Agora, caso no primeiro lançamento saia K, é necessário que nos dois seguintes lançamentos caiam CC. Ou seja, existem 3 casos favoráveis dentre os 8 casos possíveis. Logo, a probabilidade é de $3/8$.

De forma mais geral, dado um espaço amostral Ω finito ou infinito enumerável,

$$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

Definimos $p_i =$ probabilidade de sair resultado w_i.

$$(p_i \geq 0, \forall i, p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$$

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i$$

Um espaço de probabilidade amostral é uma tripla (Ω, A, P) onde Ω é o espaço amostral, A é uma álgebra (ou σ-álgebra) de subconjuntos de Ω(conjunto de enventos aleatórios).
$P : A \longmapsto \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade.