03-08 - Probabilidade

Como deve ser a coleção $\mathbb{A}$ dos subconjuntos de Ω aos quais vai se atribuir probabilidade?

1. $\Omega \in \mathbb{A}$ (para poder escrever $P(\Omega) = 1$);
2. $A \in \mathbb{A} \implies A^c = \Omega - A \in \mathbb{A}$ (para poder escrever $P(A^c) = 1 - P(A)$);
3. $A, B \in \mathbb{A} \implies A \cup B \in \mathbb{A}$ (para poder escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, quando A e B disjuntos.
   Consequências:
   $$A, B, C \in \mathbb{A} \implies A \cup B \cup C \in \mathbb{A}$$
   $$A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathbb{A}$$
   $$A, B \in \mathbb{A} \implies A \cap B \in \mathbb{A}$$
   Em particular
   $$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$
   $$A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathbb{A}$$
   Dizemos que $\mathbb{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de Ω.
   Exemplos:
4. $\Omega = \{1, 2, 3\}$
   $\mathbb{A} = \{A / A \subset \Omega\}$ é uma álgebra de subconjuntos.
   $\mathbb{A} = \{\phi, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}\}$ também é uma álgebra de subconjutnos de Ω.
5. $\Omega = [0, 1]$
   $\mathbb{A}_1 = \{A | A\Omega\}$ é álgebra (mas não serve por incluir subconjuntos aos quais não é possível atribuir probabilidade).
   $\mathbb{A}_2 = \{$ intervalos de $[0, 1]\}$ não é álgebra.

$$A = [0, 1/4) \in \mathbb{A} \text{ e } B = [3/4, 1] \in \mathbb{A} \text{ mas } [0, 1/4) \cup [3/4, 1] \notin \mathbb{A}$$

$\mathbb{A}_3 = \{$ uniões finitas de intervalos possivelmente degenerados em $[0, 1]\}$ é álgebra e é a menor álgebra que contém $\mathbb{A}_2$.

Definição: uma coleção $\mathbb{A}$ de subconjuntos de Ω é uma sigma álgebra de subconjuntos de Ω quando satisfaz

1. $\Omega \in \mathbb{A}$
2. $A \in \mathbb{A} \implies A^c \in A$
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A} \implies A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathbb{A} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$
   Toda σ-álgebra é uma álgebra.
   Exemplo:$\Omega = \{1, 2, 3\}$
   $\mathbb{A}$ é σ- álgebra se, e somente se $\mathbb{A}$ é álgebra.
   Exemplo: $\Omega = [0, 1]$
   $\mathbb{B}$ é álgebra de Borel.
   $\mathbb{B}$ é a menor σ-álgebra que contém todos os intervalos
   $\mathbb{B} = \cap\{\mathbb{F} | \mathbb{F}$ é sigma álgebra e $\mathbb{F}$ possui como elemento os intervalos$\}$

   > 2^{Ω} representa união de todos os conjuntos

$\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ é sigma álgebra.
Definição: um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ onde

- Ω é um conjunto (espaço amostral);
- $\mathbb{A}$ é sigma álgebra de subconjuntos de Ω (o conjunto dos eventos aleatórios).
- P é uma função de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{R}$.
  tal que:

1. $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathbb{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$ e são disjuntos 2 a 2, então
   $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
   Em particular se A e B são disjuntos, então

$P(A \cup B) = P(A \cup B \cup \phi \dots) = P(A) + P(B) + 0 + \dots = P(A) + P(B)$

Consequências:

4. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   $P(A^c \cup A) = 1$
5. $0 \leq P(A) \leq 1$
6. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
7. $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
8. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$
9. Se $A_n \uparrow A$ então $P(A_n) \uparrow P(A)$.

   Se $A_n \downarrow A$ então $P(A_n) \downarrow P(A)$.

   Dizemos que $A_n \uparrow A$ quando $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$

   Exemplo:

   $A_n = [0, 1 - 1/n]$, então $A_n \uparrow [0, 1)$