03-15 - Análie na Reta

Dizemos que uma sequência x_n é limitada superiormente se $\exists c \in \mathbb{R} | x_n \leq c \forall n \in \mathbb{N}$.
Dizemos que uma sequência x_n é limitada inferiormente se $\exists c \in \mathbb{R} | x_n \geq c \forall n \in \mathbb{N}$.
Dizemos que uma sequência x_n é limitada se for limitada tanto superiormente quanto inferiormente.

Subsequência de uma sequência

Considerar $N' \subset N$, com N' infinito $N' = \{n_1, n_2, \dots n_k, \dots\}$
$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots\}$
Definição: a é limite da sequência a_n se $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 | \forall n \geq n_0$ vale

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Se o limit de x_n é a, denotamos como $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

Teorema

O limite de x_n, se exite, é único.
Suponha que seja a.
Tomo $b \neq a$ e $\epsilon > 0$ tal que $I = (a - \epsilon, a = \epsilon)$ e $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$.
Então existe $n_0 | \forall n \geq n_0 x_n \in I \implies x_n \notin J$

Teorema

Se $\lim x_n = a$, então x_n é limitada.
$\exists n_0 | \forall n \geq n_0 | a - 1 \leq x_n \leq a + 1$
$S = \{x_1, \dots, x_n 0, a - 1, a + 1\}$
Seja $c = minS, d = maxS, c \leq X_n \leq d$, concluimos que é limitada.

- $x_n \geq x_{n+1}$ sequência monótona não crescente
- $x_n \leq x_{n+1}$ sequência monótona não decrescente

- $x_n > x_{n+1}$ sequência monótona decrescente
- $x_n < x_{n+1}$ sequência monótona crescente

Proposição

x_n é monótona e possui uma subsequência limitada, então x_n é limitada.
$x_n \leq x_{n+1} \forall n$
N' infinito $|x_n|' \leq cn' \in N'$
Dado $n \in N \exists n' \in N', n' \geq n$
$x_n \leq x_n' \leq c$

Teorema de Dedekind

Se x_n é monótona e limitada então ela é convergente.
Prova:
$\{x_1, \ldots, x_n\} = x$ é limitado $\implies \exists a = supx$
Tomo $\epsilon > 0$ qualquer
$a - \epsilon < a$
$\exists n_0 | X_{n_0} > a - \epsilon$
$a - \epsilon < X_{n_0} < x_{n_0+1} < \ldots . < n$
$a - \epsilon \leq x_n \leq a + \epsilon$

Teorema de Bolzano Weiertass

Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.
Prova:
$M = \{n \in \mathbb{N} : x_p \leq x_n \forall p \geq n\}$
Se M é infinito
$M = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$
$x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$
Sequência monótona não crescente, Dedekind
Se M é finito
$\exists n \in \mathbb{N} x_1 > m \forall m \in M$
$n_1 \notin M \exists n_2 \in \mathbb{N} | x_{n1} < x_{n2}$
Subsequência estritamente crescente.