



Tómacs Tibor

# Matematikai statisztika gyakorlatok összefoglaló

Kivonat az alábbi jegyzetből:

[https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Matematikai\\_statisztika\\_gyakorlatok.pdf](https://tomacstibor.uni-eszterhazy.hu/tananyagok/Matematikai_statisztika_gyakorlatok.pdf)

Eger, 2023

# Tartalomjegyzék

<b>Jelölések</b>	<b>3</b>
<b>1. Összefoglaló</b>	<b>5</b>
1.1. Eloszlások generálása . . . . .	5
1.1.1. Egyenletes eloszlásból származtatott eloszlások . . . . .	5
1.1.2. Normális eloszlásból származtatott eloszlások . . . . .	6
1.2. Grafikus illeszkedésvizsgálat . . . . .	7
1.3. Intervallumbecslések . . . . .	7
1.4. Paraméteres hipotézisvizsgálatok . . . . .	8
1.5. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok . . . . .	12
1.6. Regressziószámítás . . . . .	15
1.7. Excel függvények . . . . .	17
1.7.1. Analysis ToolPak aktiválása . . . . .	17
1.7.2. Képlet bevitele . . . . .	18
1.7.3. Tömbképlet bevitele . . . . .	18
1.7.4. Tömbképlet javítása . . . . .	18
1.7.5. Műveletek . . . . .	18
1.7.6. Relációk . . . . .	18
1.7.7. Konstansok . . . . .	18
1.7.8. Logikai függvények . . . . .	19
1.7.9. Elemi függvények . . . . .	19
1.7.10. Mátrixok . . . . .	19
1.7.11. Kombinatorika . . . . .	20
1.7.12. Pszeudo-véletlen szám generálása . . . . .	20
1.7.13. Statisztikák . . . . .	20
1.7.14. Eloszlásfüggvények . . . . .	21
1.7.15. Inverz eloszlásfüggvények . . . . .	22
1.7.16. Eloszlások . . . . .	23
1.7.17. Sűrűségfüggvények . . . . .	23

1.7.18.	Grafikus illeszkedésvizsgálat . . . . .	24
1.7.19.	Intervallumbecslés . . . . .	24
1.7.20.	Paraméteres hipotézisvizsgálatok . . . . .	24
1.7.21.	Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok . . . . .	25
1.7.22.	Regressziószámítás . . . . .	25

# Jelölések

## Általános

$\mathbb{N}$	a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$ -nek önmagával vett $n$ -szeres Descartes-szorzata
$\mathbb{R}_+$	a pozitív valós számok halmaza
$(a, b)$	rendezett elempár vagy nyílt intervallum
$\simeq$	közelítőleg egyenlő
$[x]$	az $x$ valós szám egész része
$f^{-1}$	az $f$ függvény inverze
$A^\top$	az $A$ mátrix transzponáltja
$A^{-1}$	az $A$ mátrix inverze

## Valószínűségszámítás

$P(A)$	az $A$ esemény valószínűsége
$E\xi$	$\xi$ várható értéke
$D\xi, D^2\xi$	$\xi$ szórása illetve szórásnégyzete
$\text{cov}(\xi, \eta)$	kovariancia
$\text{corr}(\xi, \eta)$	korrelációs együttható
$\varphi$	a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye
$\Phi$	a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye
$\Gamma$	Gamma-függvény
$I_A$	az $A$ esemény indikátorváltozója
$\text{Bin}(r; p)$	az $r$ -edrendű $p$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\text{Exp}(\lambda)$	a $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók halmaza

$\text{Norm}(m; \sigma)$	az $m$ várható értékű és $\sigma$ szórású normális eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\text{Gamma}(r; \lambda)$	az $r$ -edrendű $\lambda$ paraméterű gamma-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\text{Khi}(s)$	az $s$ szabadsági fokú khi-négyzet eloszlású valószínűségi változók halmaza
$\text{T}(s)$	az $s$ szabadsági fokú t-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$F(s_1; s_2)$	az $s_1$ és $s_2$ szabadsági fokú F-eloszlású valószínűségi változók halmaza
$F[V]$	Ha $\xi$ valószínűségi változó és $V$ a $\xi$ -vel azonos eloszlású valószínűségi változók halmaza, akkor $F[V]$ a $V$ -beli valószínűségi változók közös eloszlásfüggvényét jelenti. Például $\Phi = F[\text{Norm}(0; 1)]$ .

## Matematikai statisztika

$F_n^*$	tapasztalati eloszlásfüggvény
$\bar{\xi}$	a $\xi$ -re vonatkozó minta átlaga (mintaátlag)
$S_n, S_n^2$	tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n}, S_{\xi,n}^2$	$\xi$ -re vonatkozó tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_n^*, S_n^{*2}$	korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$S_{\xi,n}^*, S_{\xi,n}^{*2}$	$\xi$ -re vonatkozó korrigált tapasztalati szórás illetve szórásnégyzet
$\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$	rendezett minta
$\text{Cov}_n(\xi, \eta)$	tapasztalati kovariancia
$\text{Corr}_n(\xi, \eta)$	tapasztalati korrelációs együttható
$\hat{\vartheta}$	a $\vartheta$ paraméter becslése
$H_0, H_1$	nullhipotézis, ellenhipotézis

# 1. fejezet

## Összefoglaló

### 1.1. Eloszlások generálása

#### 1.1.1. Egyenletes eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az  $\eta, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$  független, a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelent.

- **Diszkrét egyenletes eloszlás**

Ha  $m \in \mathbb{N}$ , akkor  $[m\eta] + 1$  diszkrét egyenletes eloszlású az  $\{1, \dots, m\}$  halmazon.

- **Karakterisztikus eloszlás**

Ha  $0 < p < 1$ , akkor  $I_{\eta < p}$  karakterisztikus eloszlású  $p$  paraméterrel.

- **Binomiális eloszlás**

Ha  $r \in \mathbb{N}$  és  $0 < p < 1$ , akkor  $\sum_{i=1}^r I_{\eta_i < p}$   $r$ -edrendű  $p$  paraméterű binomiális eloszlású.

- **Hipergeometrikus eloszlás**

Legyen  $r, M, N \in \mathbb{N}$ ,  $M < N$ , továbbá  $r \leq \min\{M, N - M\}$ . Ekkor

$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_i := \begin{cases} \xi_{i-1} + 1, & \text{ha } \eta_i < \frac{M - \xi_{i-1}}{N - i + 1}, \\ \xi_{i-1}, & \text{különben,} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, r)$$

jelöléssel  $\xi_r$  hipergeometrikus eloszlású  $N, M, r$  paraméterekkel.

- **Poisson-eloszlás**

Ha  $\lambda > 0$ , akkor  $\min \left\{ s \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_s < e^{-\lambda} \right\}$  Poisson-eloszlású  $\lambda$  paraméterrel.

- **Geometriai eloszlás**

Ha  $0 < p < 1$ , akkor  $\min \{s \in \mathbb{N} : \eta_s < p\}$  geometriai eloszlású  $p$  paraméterrel.

- **Folytonos egyenletes eloszlás**

Ha  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , akkor  $a + (b - a)\eta$  az  $[a, b]$  intervallumon egyenletes eloszlású.

- **Exponenciális eloszlás**

Ha  $\lambda > 0$ , akkor  $-\frac{\ln \eta}{\lambda}$  exponenciális eloszlású  $\lambda$  paraméterrel.

- **Gamma-eloszlás**

Ha  $\lambda > 0$  és  $r \in \mathbb{N}$ , akkor  $-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^r \ln \eta_i$   $r$ -edrendű  $\lambda$  paraméterű gamma-eloszlású. Tetszőleges  $r, \lambda > 0$  esetén  $F^{-1}(\eta)$   $r$ -edrendű  $\lambda$  paraméterű gamma-eloszlású, ahol  $F = F[\text{Gamma}(r; \lambda)]$ .

- **Normális eloszlás**

Ha  $m \in \mathbb{R}$  és  $\sigma > 0$ , akkor  $m + \sigma\sqrt{-2 \ln \eta_1} \cos(2\pi\eta_2)$  illetve  $F^{-1}(\eta)$  normális eloszlású  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással, ahol  $F = F[\text{Norm}(m; \sigma)]$ . (Standard normális eloszlás esetén  $m = 0$ ,  $\sigma = 1$  és  $F = \Phi$ .)

### 1.1.2. Normális eloszlásból származtatott eloszlások

Itt az  $\eta, \eta_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) független standard normális eloszlású valószínűségi változókat, míg  $\xi$  a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent.

- **Khi-négyzet eloszlás**

Ha  $s \in \mathbb{N}$ , akkor  $\sum_{i=1}^s \eta_i^2$  illetve  $F^{-1}(\xi)$  khi-négyzet eloszlású  $s$  szabadsági fokkal, ahol  $F = F[\text{Khi}(s)]$ .

- **t-eloszlás**

Ha  $s \in \mathbb{N}$ , akkor  $\eta \sqrt{s / \sum_{i=1}^s \eta_i^2}$  illetve  $F^{-1}(\xi)$  t-eloszlású  $s$  szabadsági fokkal, ahol  $F = F[\text{T}(s)]$ .

- **Cauchy-eloszlás**

Ha  $\mu \in \mathbb{R}$  és  $\sigma > 0$ , akkor  $\mu + \sigma \frac{\eta_1}{\eta_2}$  illetve  $\mu + \sigma \tan \frac{\pi}{2}(2\xi - 1)$  Cauchy-eloszlású  $\mu$  és  $\sigma$  paraméterekkel. (Standard Cauchy-eloszlás esetén  $\mu = 0$  és  $\sigma = 1$ .)

- **F-eloszlás**

Ha  $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ , akkor  $\frac{s_2}{s_1} \sum_{i=1}^{s_1} \eta_i^2 / \sum_{i=s_1+1}^{s_1+s_2} \eta_i^2$  illetve  $F^{-1}(\xi)$  F-eloszlású  $s_1$  és  $s_2$  szabadsági fokkal, ahol  $F = F[\text{F}(s_1; s_2)]$ .

## 1.2. Grafikus illeszkedésvizsgálat

Legyen  $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ , továbbá tegyük fel, hogy a mintarealizáció legkisebb eleme nagyobb  $x_1$ -nél, a mintarealizáció legnagyobb eleme pedig kisebb  $x_r$ -nél.

- **Exponencialitásvizsgálat**

Ha a vizsgált valószínűségi változó exponenciális eloszlású  $\lambda$  paraméterrel, akkor  $y_i := \ln(1 - F_n^*(x_i))$  jelöléssel az  $(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$  koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek  $-\lambda$  a meredeksége és átmegy az origón.

- **Normalitásvizsgálat**

Ha a vizsgált valószínűségi változó normális eloszlású  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással, akkor  $y_i := \Phi^{-1}(F_n^*(x_i))$  jelöléssel az  $(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$  koordinátájú pontok körülbelül egy olyan egyenesre esnek, melynek  $\frac{1}{\sigma}$  a meredeksége és  $-\frac{m}{\sigma}$  értéknél metszi a függőleges tengelyt.

## 1.3. Intervallumbecslések

Legyen a  $\xi$  valószínűségi változóra vonatkozó minta  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , és  $1 - \alpha$  a becslendő paraméterre vonatkozó  $[\tau_1, \tau_2]$  konfidenciaintervallum biztonsági szintje.

- $\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$

$m$  az ismeretlen becslendő paraméter,  $\sigma$  ismert

$$\tau_1 = \bar{\xi} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \tau_2 = \bar{\xi} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

- $\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$

$m$  ismert,  $\sigma$  az ismeretlen becslendő paraméter

$$F = F[\text{Khi}(n)]$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{1}{F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m)^2} \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{1}{F^{-1}(\frac{\alpha}{2})} \sum_{i=1}^n (\xi_i - m)^2}$$

- $\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$

$m$  ismeretlen,  $\sigma$  az ismeretlen becslendő paraméter

$$n \geq 2, \quad F = F[\text{Khi}(n-1)]$$

$$\tau_1 = S_n \sqrt{\frac{n}{F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}} \quad \tau_2 = S_n \sqrt{\frac{n}{F^{-1}(\frac{\alpha}{2})}}$$

- $\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$

$m$  az ismeretlen becslendő paraméter,  $\sigma$  ismeretlen



$$n \geq 2, F = F[T(n-1)]$$

$$\tau_1 = \bar{\xi} - \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \tau_2 = \bar{\xi} + \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

- $\xi \in \text{Exp}(\lambda)$

$\lambda$  az ismeretlen becsülendő paraméter

$$F = F[\text{Gamma}(n; 1)]$$

$$\tau_1 = (n\bar{\xi})^{-1} F^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad \tau_2 = (n\bar{\xi})^{-1} F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

- $\xi \in \text{Bin}(1; p)$

$p$  az ismeretlen becsülendő paraméter

$$\tau_1 = \frac{1}{n} \max \left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^z \binom{n}{i} \bar{\xi}^i (1 - \bar{\xi})^{n-i} < \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{n} \min \left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^z \binom{n}{i} \bar{\xi}^i (1 - \bar{\xi})^{n-i} \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$$

Nagy  $n$ -re:

$$c = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\tau_1 = \frac{\bar{\xi} + \frac{c^2}{2n} - \frac{c}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1 + \frac{c^2}{n}} \simeq \bar{\xi} - \frac{c}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi})}$$

$$\tau_2 = \frac{\bar{\xi} + \frac{c^2}{2n} + \frac{c}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi}) + \frac{c^2}{4n}}}{1 + \frac{c^2}{n}} \simeq \bar{\xi} + \frac{c}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi})}$$

- $\xi$  az  $[a, b]$  intervallumon egyenletes eloszlású

$a$  ismert,  $b$  az ismeretlen becsülendő paraméter

$$F = F[\text{Gamma}(n; 1)], \quad c_1 = F^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right), \quad c_2 = F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\tau_1 = a + \left( e^{c_1} \prod_{i=1}^n (\xi_i - a) \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\tau_2 = a + \left( e^{c_2} \prod_{i=1}^n (\xi_i - a) \right)^{\frac{1}{n}}$$

## 1.4. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben  $1 - \alpha$  a próba szintjét jelenti.

- **Egymintás u-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$ ,  $m$  ismeretlen,  $\sigma$  ismert, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n$  elemű,  
 $m_0 \in \mathbb{R}$ .

$H_0: m = m_0$	kritikus tartomány
$H_1: m \neq m_0$	$2 - 2\Phi( u ) < \alpha$
$H_1: m < m_0$	$1 - \Phi( u ) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1: m > m_0$	$1 - \Phi( u ) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$u = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}.$$

- **Kétmintás u-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$ ,  $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$  függetlenek,  $m_1, m_2$  ismeretlenek,  $\sigma_1, \sigma_2$  ismertek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n_1$  elemű, az  $\eta$ -ra vonatkozó minta  $n_2$  elemű.

$H_0: m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1: m_1 \neq m_2$	$2 - 2\Phi( u ) < \alpha$
$H_1: m_1 < m_2$	$1 - \Phi( u ) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1: m_1 > m_2$	$1 - \Phi( u ) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

- **Egymintás t-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$ , a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n$  elemű,  $m_0 \in \mathbb{R}$ .

$H_0: m = m_0$	kritikus tartomány
$H_1: m \neq m_0$	$2 - 2F( t ) < \alpha$
$H_1: m < m_0$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1: m > m_0$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t = \frac{\bar{\xi} - m_0}{S_n^*} \sqrt{n} \quad \text{és} \quad F = F[T(n-1)].$$

- **Kétmintás t-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$ ,  $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$  függetlenek,  $\sigma_1 = \sigma_2$ , a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n_1$  elemű, az  $\eta$ -ra vonatkozó minta  $n_2$  elemű.

$H_0: m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1: m_1 \neq m_2$	$2 - 2F( t ) < \alpha$
$H_1: m_1 < m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1: m_1 > m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{n_1 S_{\xi, n_1}^2 + n_2 S_{\eta, n_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad \text{és} \quad F = F[T(n_1 + n_2 - 2)].$$

- **Scheffé-módszer**

$\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$ ,  $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$  függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n_1$  elemű, az  $\eta$ -ra vonatkozó minta  $n_2$  elemű,  $n_1 \leq n_2$ .

$H_0: m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1: m_1 \neq m_2$	$2 - 2F( t ) < \alpha$
$H_1: m_1 < m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1: m_1 > m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$\zeta_i := \xi_i - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \eta_i + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \sum_{k=1}^{n_1} \eta_k - \bar{\eta} \quad (i = 1, \dots, n_1)$$

jelöléssel

$$t = \frac{\bar{\zeta}}{S_{\zeta, n_1}^*} \sqrt{n_1} \quad \text{és} \quad F = F[T(n_1 - 1)].$$

Speciálisan  $n_1 = n_2$  esetén  $\zeta_i = \xi_i - \eta_i$  teljesül. A módszert ekkor *párosított  $t$ -próbának* is nevezik. Ebben az esetben a módszer akkor is alkalmazható, ha a minták nem függetlenek, de csak akkor, ha  $\xi - \eta$  normális eloszlású.

- **Welch-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$ ,  $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$  függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n_1$  elemű, az  $\eta$ -ra vonatkozó minta  $n_2$  elemű.

$H_0: m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1: m_1 \neq m_2$	$2 - 2F( t ) < \alpha$
$H_1: m_1 < m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1: m_1 > m_2$	$1 - F( t ) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t := \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{S_{\xi, n_1}^{*2}}{n_1} + \frac{S_{\eta, n_2}^{*2}}{n_2}}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[T(s)].$$

Az  $s$  szabadsági fok a  $c$  értékének kerekítése a legközelebbi egészre, ahol

$$a := \frac{S_{\xi, n_1}^{*2}}{n_1}, \quad b := \frac{S_{\eta, n_2}^{*2}}{n_2}, \quad c := \frac{(a + b)^2}{\frac{a^2}{n_1 - 1} + \frac{b^2}{n_2 - 1}}.$$

- **F-próba**

$\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$ ,  $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$  függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n_1$  elemű, az  $\eta$ -ra vonatkozó minta  $n_2$  elemű.

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$	kritikus tartomány
$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$	$2 \min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$
$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$	$\min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$ és $F < 1$
$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$	$\min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$ és $F > 1$

ahol

$$F = \frac{S_{\xi, n_1}^{*2}}{S_{\eta, n_2}^{*2}} \quad \text{és} \quad F := F[F(n_1 - 1; n_2 - 1)].$$

- **Khi-négyzet próba normális eloszlás szórására**

$\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$ , a paraméterek ismeretlenek, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n$  elemű,  $\sigma_0 > 0$ .

$H_0: \sigma = \sigma_0$	kritikus tartomány
$H_1: \sigma \neq \sigma_0$	$2 \min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$
$H_1: \sigma < \sigma_0$	$\min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$ és $\chi^2 < n - 1$
$H_1: \sigma > \sigma_0$	$\min\{F(\chi^2), 1 - F(\chi^2)\} < \alpha$ és $\chi^2 > n - 1$

ahol

$$\chi^2 = \frac{S_n^{*2}}{\sigma_0^2}(n - 1) \quad \text{és} \quad F = F[\text{Khi}(n - 1)].$$

- **Statisztikai próba az exponenciális eloszlás paraméterére**

$\xi \in \text{Exp}(\lambda)$ , ahol  $\lambda$  ismeretlen, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n$  elemű,  $\lambda_0 > 0$ .

$H_0: \lambda = \lambda_0$	kritikus tartomány
$H_1: \lambda \neq \lambda_0$	$2 \min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$
$H_1: \lambda < \lambda_0$	$\min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$ és $\gamma > n$
$H_1: \lambda > \lambda_0$	$\min\{F(\gamma), 1 - F(\gamma)\} < \alpha$ és $\gamma < n$

ahol

$$\gamma = \lambda_0 n \bar{\xi} \quad \text{és} \quad F = F[\text{Gamma}(n; 1)].$$

- **Statisztikai próba valószínűsége**

$\xi \in \text{Bin}(1; p)$ ,  $p$  ismeretlen, a  $\xi$ -re vonatkozó minta  $n$  elemű,  $0 < p_0 < 1$ .

$H_0: p = p_0$	kritikus tartomány
$H_1: p \neq p_0$	$n\bar{\xi} < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vagy $n\bar{\xi} > F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
$H_1: p < p_0$	$n\bar{\xi} < F^{-1}(\alpha)$
$H_1: p > p_0$	$n\bar{\xi} > F^{-1}(1 - \alpha)$

ahol

$$F^{-1}(x) = \min \left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^z \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i} \geq x \right\}.$$

## 1.5. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

A következőkben  $1 - \alpha$  a próba szintjét jelenti.

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat valószínűségre**

$A_1, \dots, A_r$  teljes eseményrendszer,  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}_+$ ,  $p_1 + \dots + p_r = 1$ .

$$\boxed{H_0: A_i \text{ valószínűsége } p_i \ \forall i},$$

Legyen  $\varrho_i$  az  $A_i$  gyakorisága  $n$  kísérlet után ( $\varrho_i \geq 10 \ \forall i$ ),

$$\nu_i = np_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\text{Khi}(r-1)].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat eloszlásfüggvényre**

Legyen  $\xi$  a vizsgált valószínűségi változó és  $F_0$  egy eloszlásfüggvény.

$$\boxed{H_0: \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_0}$$

Legyen  $a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1}$ ,  $I_1 = (-\infty, a_1)$ ,  $I_2 = [a_1, a_2)$ ,  $I_3 = [a_2, a_3)$ ,  $\dots$ ,  $I_{r-1} = [a_{r-2}, a_{r-1})$ ,  $I_r = [a_{r-1}, \infty)$ . Jelölje  $\varrho_i$  a  $\xi$ -re vonatkozó  $n$  elemű mintában az  $I_i$  intervallumba eső mintaelemek számát ( $\varrho_i \geq 10 \ \forall i$ ), továbbá legyen  $p_1 = F_0(a_1)$ ,  $p_2 = F_0(a_2) - F_0(a_1)$ ,  $p_3 = F_0(a_3) - F_0(a_2)$ ,  $\dots$ ,  $p_{r-1} = F_0(a_{r-1}) - F_0(a_{r-2})$ ,  $p_r = 1 - F_0(a_{r-1})$ ,

$$\nu_i = np_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\text{Khi}(r-1)].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Becsléses illeszkedésvizsgálat**

Legyen  $\xi$  a vizsgált valószínűségi változó és  $F_\vartheta$  eloszlásfüggvény minden  $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^v$  esetén.

$$\boxed{H_0: \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F_\vartheta \text{ valamely } \vartheta \in \Theta \text{ esetén}}$$

Legyen  $a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1}$ ,  $I_1 = (-\infty, a_1)$ ,  $I_2 = [a_1, a_2)$ ,  $I_3 = [a_2, a_3)$ ,  $\dots$ ,  $I_{r-1} = [a_{r-2}, a_{r-1})$ ,  $I_r = [a_{r-1}, \infty)$ . Jelölje  $\varrho_i$  a  $\xi$ -re vonatkozó  $n$  elemű mintában az  $I_i$  intervallumba eső mintaelemek számát ( $\varrho_i \geq 10 \ \forall i$ ). Legyen

$\hat{\vartheta}$  a  $\vartheta$  maximum likelihood becslése  $H_0$  feltételezésével, továbbá  $\hat{p}_1 = F_{\hat{\vartheta}}(a_1)$ ,  $\hat{p}_2 = F_{\hat{\vartheta}}(a_2) - F_{\hat{\vartheta}}(a_1)$ ,  $\hat{p}_3 = F_{\hat{\vartheta}}(a_3) - F_{\hat{\vartheta}}(a_2)$ ,  $\dots$ ,  $\hat{p}_{r-1} = F_{\hat{\vartheta}}(a_{r-1}) - F_{\hat{\vartheta}}(a_{r-2})$ ,  $\hat{p}_r = 1 - F_{\hat{\vartheta}}(a_{r-1})$ ,

$$\nu_i = n\hat{p}_i, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(\varrho_i - \nu_i)^2}{\nu_i} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\text{Khi}(r-1-v)].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Függetlenségvizsgálat eseményrendszerekre**

$A_1, \dots, A_r$  és  $B_1, \dots, B_s$  két teljes eseményrendszer. A nullhipotézisben azt feltételezzük, hogy a két eseményrendszer független egymástól, azaz

$$\boxed{H_0: P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \quad \forall i, j},$$

ahol  $P$  a valódi valószínűség. Végezzünk  $n$  darab kísérletet. Legyen  $\varrho_{ij}$  az  $A_i \cap B_j$  gyakorisága ( $\varrho_{ij} \geq 10$ ),  $k_i$  az  $A_i$  gyakorisága,  $l_j$  az  $B_j$  gyakorisága,

$$\nu_{ij} = \frac{k_i l_j}{n}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\text{Khi}((r-1)(s-1))].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Függetlenségvizsgálat két valószínűségi változóra**

A vizsgált valószínűségi változók  $\xi$  és  $\eta$ .

$$\boxed{H_0: \xi \text{ és } \eta \text{ függetlenek}}$$

A  $(\xi, \eta)$ -ra vonatkozó minta  $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ .

Legyen  $a_0 < a_1 < \dots < a_r$ , tegyük fel, hogy  $\xi_1, \dots, \xi_n$  minden eleme benne van az  $[a_0, a_r)$  intervallumban. Jelölje  $k_i$  a  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mintában az  $[a_{i-1}, a_i)$  intervallumba eső elemek számát.

Legyen  $b_0 < b_1 < \dots < b_s$ , tegyük fel, hogy  $\eta_1, \dots, \eta_n$  minden eleme benne van a  $[b_0, b_s)$  intervallumban. Jelölje  $l_j$  az  $\eta_1, \dots, \eta_n$  mintában a  $[b_{j-1}, b_j)$  intervallumba eső elemek számát.

Jelölje  $\varrho_{ij}$  a  $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$  mintában az  $[a_{i-1}, a_i) \times [b_{j-1}, b_j)$  tartományba eső elemek számát ( $\varrho_{ij} \geq 10$ ),

$$\nu_{ij} = \frac{k_i l_j}{n}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F \simeq F[\text{Khi}((r-1)(s-1))].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Homogenitásvizsgálat**

Legyenek  $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$  és  $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$  a  $\xi$  illetve  $\eta$  független valószínűségi változókra vonatkozó minták.

$$H_0: \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}$$

Legyen  $a_0 < a_1 < \dots < a_r$ , tegyük fel, hogy mindkét minta minden eleme benne van az  $[a_0, a_r)$  intervallumban. Jelölje  $\varrho_{i1}$  a  $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$  mintában az  $[a_{i-1}, a_i)$  intervallumba eső elemek számát ( $\varrho_{i1} \geq 10$ ), illetve  $\varrho_{i2}$  az  $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$  mintában az  $[a_{i-1}, a_i)$  intervallumba eső elemek számát ( $\varrho_{i2} \geq 10$ ), továbbá

$$\nu_{ij} = \frac{(\varrho_{i1} + \varrho_{i2})n_j}{n_1 + n_2}, \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^2 \frac{(\varrho_{ij} - \nu_{ij})^2}{\nu_{ij}} \quad \text{és} \quad F = F[\text{Khi}(r-1)].$$

Kritikus tartomány:  $1 - F(\chi^2) < \alpha$ .

- **Kétmintás előjelpróba**

$(\xi, \eta)$ -ra vonatkozó minta  $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ .

$H_0: P(\xi > \eta) = \frac{1}{2}$	kritikus tartomány
$H_1: P(\xi > \eta) \neq \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}(\frac{\alpha}{2})$ vagy $B > F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$
$H_1: P(\xi > \eta) < \frac{1}{2}$	$B < F^{-1}(\alpha)$
$H_1: P(\xi > \eta) > \frac{1}{2}$	$B > F^{-1}(1 - \alpha)$

ahol  $B$  azon  $(\xi_i, \eta_i)$  mintaelemek száma, melyekre  $\xi_i - \eta_i$  pozitív, továbbá

$$F^{-1}(x) = \min \left\{ z \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^z \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq x \right\}.$$

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle kétmintás próba**

$\xi$  és  $\eta$  folytonos eloszlásfüggvényű független valószínűségi változók, az ezekre vonatkozó minták  $\xi_1, \dots, \xi_n$  illetve  $\eta_1, \dots, \eta_n$  ( $n > 30$ ).

$$H_0: \xi \text{ és } \eta \text{ azonos eloszlású}$$

$\xi$ -re illetve  $\eta$ -ra vonatkozó mintákhoz tartozó tapasztalati eloszlásfüggvények  $F_n^*$  illetve  $G_n^*$ ,

$$D = \sqrt{\frac{n}{2}} \max_{i=1, \dots, n} \max \left\{ |F_n^*(\xi_i) - G_n^*(\xi_i)|, |F_n^*(\eta_i) - G_n^*(\eta_i)| \right\},$$

$$K(z) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 z^2}.$$

Kritikus tartomány:  $K(D) \geq 1 - \alpha$ .

- **Kolmogorov – Szmirnov-féle egymintás próba**

$\xi$  folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó, az erre vonatkozó minta  $\xi_1, \dots, \xi_n$  ( $n > 30$ ).

$$\boxed{H_0: \xi \text{ eloszlásfüggvénye } F}$$

$$D = \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} \max\{|F_n^*(\xi_i) - F(\xi_i)|, |G_n^*(\xi_i) - F(\xi_i)|\},$$

ahol  $F_n^*$  a tapasztalati eloszlásfüggvény,  $k_i$  azon mintaelemek száma, melyek nem nagyobbak  $\xi_i$ -nél és  $G_n^*(\xi_i) = \frac{k_i}{n}$ .

$$K(z) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 z^2}.$$

Kritikus tartomány:  $K(D) \geq 1 - \alpha$ .

## 1.6. Regressziószámítás

Az  $\eta, \xi_1, \dots, \xi_k$  valószínűségi változókra adjuk meg azt az  $\eta \simeq g(\xi_1, \dots, \xi_k)$  közelítést adó  $g$  függvényt, melyre  $E(\eta - g(\xi_1, \dots, \xi_k))^2$  minimális. Az ilyen tulajdonságú  $g$  függvényt (*regressziós függvény*) a gyakorlatban csak becsülni tudjuk az  $(\eta, \xi_1, \dots, \xi_k)$  valószínűségi vektorváltozóra vonatkozó

$$(\eta_i, \xi_{i1}, \dots, \xi_{ik}), \quad i = 1, \dots, n$$

minta alapján. Legyen ez a becslés  $\hat{g}$ . Ezután az  $\boxed{\eta \simeq \hat{g}(\xi_1, \dots, \xi_k)}$  közelítést fogjuk használni.

- **Lineáris regresszió**

A regressziós függvényt csak a

$$\boxed{g(x_1, \dots, x_k) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k \quad (a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R})}$$

alakú függvények között keressük. Ekkor az

$$\boxed{\eta \simeq \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \xi_1 + \dots + \hat{a}_k \xi_k}$$



közelítést fogjuk használni, ahol  $\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_k$  rendre  $a_0, \dots, a_k$  becslései.

- **Fixpontos lineáris regresszió**

Legyenek  $t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R}$  rögzített konstansok. A regressziós függvényt

$$g(x_1, \dots, x_k) = t_0 + a_1(x_1 - t_1) + \dots + a_k(x_k - t_k) \quad (a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Ekkor az

$$\eta \simeq t_0 + \hat{a}_1(\xi_1 - t_1) + \dots + \hat{a}_k(\xi_k - t_k)$$

közelítést fogjuk használni, ahol  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$  rendre  $a_1, \dots, a_k$  becslései.

- **Polinomos regresszió**

$k = 1$  és a regressziós függvényt

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r \quad (a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}_+)$$

alakban keressük. Az  $a_0, \dots, a_r$  együtthatókat az  $\boxed{\eta, \xi_1, \xi_1^2, \dots, \xi_1^r}$  között végrehajtott lineáris regresszió adja.

- **Hatványkitevős regresszió**

$k = 1$  és a regressziós függvényt

$$y = ax^b \quad (a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\ln y = \ln a + b \ln x,$$

így ekkor  $\boxed{\ln \eta \text{ és } \ln \xi_1}$  között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott  $a_0, a_1$  együtthatókra teljesül, hogy

$$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = a_1}.$$

- **Exponenciális regresszió**

$k = 1$  és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = ab^x \quad (a, b \in \mathbb{R}_+)}$$

alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$\ln y = \ln a + (\ln b)x,$$

így ekkor  $\boxed{\ln \eta \text{ és } \xi_1}$  között lineáris regressziót végrehajtva, a kapott  $a_0, a_1$  együtthatókra teljesül, hogy

$$\boxed{a = e^{a_0}, \quad b = e^{a_1}}.$$

- **Logaritmikus regresszió**

$k = 1$  és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = a + b \ln x \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

alakban keressük. Így ekkor  $\boxed{\eta \text{ és } \ln \xi_1}$  között lineáris regressziót végrehajtva,

$$\boxed{a = a_0, \quad b = a_1}.$$

- **Hiperbolikus regresszió**

$k = 1$  és a regressziós függvényt

$$\boxed{y = \frac{1}{a + bx} \quad (a, b \in \mathbb{R})}$$

alakban keressük. Ez azzal ekvivalens, hogy

$$y^{-1} = a + bx,$$

így ekkor  $\boxed{\eta^{-1} \text{ és } \xi_1}$  között lineáris regressziót végrehajtva,

$$\boxed{a = a_0, \quad b = a_1}.$$

## 1.7. Excel függvények

### 1.7.1. Analysis ToolPak aktiválása

Az *Adatok/Adatelemzés* menüpont használatához aktiválja az *Analysis ToolPak* bővítményt: *Fájl/Beállítások/Bővítmények* majd *Ugrás* gomb. Pipálja ki az *Analysis ToolPak* sort majd *OK*.

### 1.7.2. Képlet bevitele

Minden képletet = jellel kell kezdeni. Ha a képlet egyértékű eredményt ad, akkor nyomjon *Enter*-t.

### 1.7.3. Tömbképlet bevitele

Ha a képlet eredménye tömb (például egy mátrix inverze), akkor először jelölje ki a megfelelő méretű tömböt, gépelje be a képletet (előtte =), majd nyomjon *Ctrl+Shift+Enter*-t.

### 1.7.4. Tömbképlet javítása

Ha egy tömbképletet javítani akar, akkor jelölje ki a tömbképletre vonatkozó tömböt, *F2*, javítás, majd *Ctrl+Shift+Enter*.

### 1.7.5. Műveletek

- ☐ összeadás
- ☐ kivonás
- ☐ szorzás
- ☐ osztás
- ☐ hatványozás

### 1.7.6. Relációk

- ☐ egyenlő
- ☐ kisebb
- ☐ nagyobb
- ☐ kisebb vagy egyenlő
- ☐ nagyobb vagy egyenlő
- ☐ nem egyenlő

### 1.7.7. Konstansok

$$e = \boxed{\text{KITEVŐ}(1)}$$
$$\pi = \boxed{\text{PI}()}$$

### 1.7.8. Logikai függvények

$\text{HA}(\text{feltétel}; \text{ha igaz}; \text{ha hamis})$

$\text{ÉS}(\text{feltétel1}; \text{feltétel2}; \dots)$

$\text{VAGY}(\text{feltétel1}; \text{feltétel2}; \dots)$

### 1.7.9. Elemi függvények

$|x| = \text{ABS}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$[x] = \text{INT}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\text{sign } x = \text{ELŐJEL}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\ln x = \text{LN}(x) \quad x > 0$

$\log_a x = \text{LOG}(x; a) \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$

$\sqrt{x} = \text{GYÖK}(x) \quad x \geq 0$

$x^a = \text{HATVÁNY}(x; a) = x^a$

$e^x = \text{KITEVŐ}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \text{SIN}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \text{COS}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\text{tg } x = \text{TAN}(x) \quad x \in \mathbb{R}, x \neq k\frac{\pi}{2}, \text{ ahol } k \text{ páratlan egész}$

$\arcsin x = \text{ARCSIN}(x) \quad x \in [-1, 1]$

$\arccos x = \text{ARCCOS}(x) \quad x \in [-1, 1]$

$\text{arctg } x = \text{ARCTAN}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du = \text{GAMMA}(x) \quad x > 0$

### 1.7.10. Mátrixok

$\text{MDETERM}(\text{tömb})$  A tömb-ben található  $n \times n$  típusú mátrix determinánsa

$\text{TRANSZPONÁLÁS}(\text{tömb})$  A tömb-ben található  $m \times n$  típusú mátrix transzponáltja, mely egy  $n \times m$  méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\text{INVERZ.MÁTRIX}(\text{tömb})$  A tömb-ben található  $n \times n$  típusú mátrix inverze, mely egy  $n \times n$  méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

$\text{MSZORZAT}(\text{tömb1}; \text{tömb2})$  A tömb1-ben található  $m \times n$  típusú mátrix és a tömb2-ben található  $n \times k$  típusú mátrix szorzata, mely egy  $m \times k$  méretű tömbben helyezkedik el (tömbképlet!).

### 1.7.11. Kombinatorika

$$m! = \boxed{\text{FAKT}(m)} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$m!! = \boxed{\text{FAKTDUPLA}(m)} \quad m \in \mathbb{N} \quad (m!! \text{ az ún. szemifaktoriális, amely } 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m, \text{ ha } m \text{ páratlan, illetve } 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m, \text{ ha } m \text{ páros.})$$

$$\binom{m}{k} = \boxed{\text{KOMBINÁCIÓK}(m; k)} \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \dots, m$$

$$\frac{m!}{(m-k)!} = \boxed{\text{VARIÁCIÓK}(m; k)} \quad m \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \dots, m$$

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} = \boxed{\text{SZORHÁNYFAKT}(k_1; k_2; \dots; k_r)} \quad k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N}$$

### 1.7.12. Pszeudo-véletlen szám generálása

$$\boxed{\text{VÉL}()} \quad [0, 1] \text{ intervallumon egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám}$$

$$\boxed{\text{VÉLETLEN.KÖZÖTT}(a; b)} = \boxed{\text{INT}((b-a+1) * \text{VÉL}()) + a} \quad (a, b \in \mathbb{N}, \quad a < b) \text{ diszkrét egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen szám az } \{a, a+1, \dots, b\} \text{ halmazon}$$

### 1.7.13. Statisztikák

Legyen a  $\xi$  valószínűségi változóra vonatkozó  $x_1, \dots, x_n$  mintarealizáció az **A** oszlopban.

Jelölje  $x_1^*, \dots, x_n^*$  a rendezett mintarealizációt. Ekkor

$$x_1^* = \boxed{\text{MIN}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$x_n^* = \boxed{\text{MAX}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$x_k^* = \boxed{\text{KICSI}(\mathbf{A}:\mathbf{A}; k)} \quad k = 1, \dots, n$$

$$x_{n-k}^* = \boxed{\text{NAGY}(\mathbf{A}:\mathbf{A}; k+1)} \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\min\{k : x_k^* = x_i\} = \boxed{\text{RANG.EGY}(x_i; \mathbf{A}:\mathbf{A}; 1)} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\min\{k : x_{n-k}^* = x_i\} + 1 = \boxed{\text{RANG.EGY}(x_i; \mathbf{A}:\mathbf{A}; 0)} \quad i = 1, \dots, n$$

$$n = \boxed{\text{DARAB}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$\bar{\xi} = \boxed{\text{ÁTLAG}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$S_n = \boxed{\text{SZÓR.S}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$S_n^2 = \boxed{\text{VAR.S}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$S_n^* = \boxed{\text{SZÓR.M}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$S_n^{*2} = \boxed{\text{VAR.M}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$\text{tapasztalati medián} = \boxed{\text{MEDIÁN}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$\text{tapasztalati módusz} = \boxed{\text{MÓDUSZ.EGY}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$100t\text{-os tapasztalati kvantilis} = \boxed{\text{PERCENTILIS.TARTALMAZ}(\mathbf{A}:\mathbf{A}; t)} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{tapasztalati alsó kvartilis} = \boxed{\text{KVARTILIS.TARTALMAZ}(\mathbf{A}:\mathbf{A}; 1)}$$

$$\text{tapasztalati felső kvartilis} = \boxed{\text{KVARTILIS.TARTALMAZ}(\mathbf{A}:\mathbf{A}; 3)}$$

$$\text{tapasztalati ferdeség} = \boxed{\text{FERDESÉG.P}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$\text{tapasztalati lapultság (csúcsosság)} = \boxed{\text{CSÚCSOSSÁG}(\mathbf{A}:\mathbf{A})}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \boxed{\text{SZUM(A:A)}}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \boxed{\text{NÉGYZETÖSSZEG(A:A)}}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{\xi})^2 = \boxed{\text{SQ(A:A)}}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{\xi}| = \boxed{\text{ÁTL.ELTÉRÉS(A:A)}}$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = \boxed{\text{SZORZAT(A:A)}}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \boxed{\text{MÉRTANI.KÖZÉP(A:A)}} \quad x_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1} = \boxed{\text{HARM.KÖZÉP(A:A)}} \quad x_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$a$ -nál kisebb elemek száma =  $\boxed{\text{DARABTELI(A:A;"<"\&a)}}$   $a \in \mathbb{R}$  (2023. márciusa utáni Excel-verziókban ez a függvény **DARABHA** néven érhető el.)

$(a, b]$ -beli elemek száma =  $\boxed{\text{DARABHATÖBB(A:A;">"\&a;A:A;"<="&b)}}$   $a, b \in \mathbb{R}$

$a$ -nál kisebb elemek összege =  $\boxed{\text{SZUMHA(A:A;"<"\&a)}}$   $a \in \mathbb{R}$

$(a, b]$ -beli elemek összege =  $\boxed{\text{SZUMHATÖBB(A:A;A:A;">"\&a;A:A;"<="&b)}}$   $a, b \in \mathbb{R}$

$a$ -nál kisebb elemek átlaga =  $\boxed{\text{ÁTLAGHA(A:A;"<"\&a)}}$   $a \in \mathbb{R}$

$(a, b]$ -beli elemek átlaga =  $\boxed{\text{ÁTLAGHATÖBB(A:A;A:A;">"\&a;A:A;"<="&b)}}$   $a, b \in \mathbb{R}$

Legyen a  $\xi$ -re vonatkozó mintarealizáció  $x_1, \dots, x_n$  és az  $\eta$ -ra vonatkozó mintarealizáció  $y_1, \dots, y_n$ . Az A oszlop  $i$ -edik sorában legyen  $x_i$ , illetve a B oszlop  $i$ -edik sorában legyen  $y_i$ . Ekkor

$$\text{Cov}_n(\xi, \eta) = \boxed{\text{KOVARIANCIA.S(A:A;B:B)}}$$

$$\text{Corr}_n(\xi, \eta) = \boxed{\text{KORREL(A:A;B:B)}}$$

$$R^2 = \text{Corr}_n^2(\xi, \eta) = \boxed{\text{RNÉGYZET(A:A;B:B)}}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \boxed{\text{SZORZATÖSSZEG(A:A;B:B)}}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \boxed{\text{SZUMXBŐLY2(A:A;B:B)}}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = \boxed{\text{SZUMX2BŐLY2(A:A;B:B)}}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) = \boxed{\text{SZUMX2MEGY2(A:A;B:B)}}$$

### 1.7.14. Eloszlásfüggvények

- **Binomiális eloszlás** ( $r$ -edrendű  $p$  paraméterű)

$$\sum_{i=0}^k \binom{r}{i} p^i (1-p)^{r-i} = \boxed{\text{BINOM.ELOSZL}(k;r;p;\text{IGAZ})}$$

$r \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \dots, r, \quad 0 < p < 1$

- **Hipergeometrikus eloszlás**

$$\sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \binom{N-M}{r-i}}{\binom{N}{r}} = \boxed{\text{HIPGEOM.ELOSZLÁS}(k; r; M; N; \text{IGAZ})}$$

$r, M, N \in \mathbb{N}, M < N, r \leq \min\{M, N - M\}, k = 0, \dots, r$

- **Poisson-eloszlás** ( $\lambda$  paraméterű)

$$\sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \boxed{\text{POISSON.ELOSZLÁS}(k; \lambda; \text{IGAZ})} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, \dots$$

- **Exponenciális eloszlás** ( $\lambda$  paraméterű)

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \boxed{\text{EXP.ELOSZL}(x; \lambda; \text{IGAZ})} \quad \lambda > 0, x \geq 0$$

- **F-eloszlás** ( $s_1$  és  $s_2$  szabadsági fokú)

$$F(x) = \boxed{\text{F.ELOSZL}(x; s_1; s_2; \text{IGAZ})} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{N}, x \geq 0$$

- **Gamma-eloszlás** ( $r$ -edrendű  $\lambda$  paraméterű)

$$F(x) = \boxed{\text{GAMMA.ELOSZL}(x; r; 1/\lambda; \text{IGAZ})} \quad r, \lambda > 0, x \geq 0$$

- **Khi-négyzet eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$F(x) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.ELOSZLÁS}(x; s; \text{IGAZ})} \quad s \in \mathbb{N}, x \geq 0$$

- **Normális eloszlás** ( $m$  és  $\sigma$  paraméterű)

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\text{NORM.ELOSZLÁS}(x; m; \sigma; \text{IGAZ})}$$

$m, x \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

- **Standard normális eloszlás**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \boxed{\text{NORM.S.ELOSZLÁS}(x; \text{IGAZ})} \quad x \in \mathbb{R}$$

- **t-eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$F(x) = \boxed{\text{T.ELOSZL}(x; s; \text{IGAZ})} \quad s \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

### 1.7.15. Inverz eloszlásfüggvények

- **Exponenciális eloszlás** ( $\lambda$  paraméterű)

$$F^{-1}(x) = \boxed{-\text{LN}(1-x)/\lambda} \quad \lambda > 0, 0 < x < 1$$

- **F-eloszlás** ( $s_1$  és  $s_2$  szabadsági fokú)

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{F.INVERZ}(x; s_1; s_2)} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{N}, 0 < x < 1$$

- **Gamma-eloszlás** ( $r$ -edrendű  $\lambda$  paraméterű)

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{GAMMA.INVERZ}(x; r; 1/\lambda)} \quad r, \lambda > 0, 0 < x < 1$$

- **Khi-négyzet eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.INVERZ}(x; s)} \quad s \in \mathbb{N}, 0 < x < 1$$

- **Normális eloszlás** ( $m$  és  $\sigma$  paraméterű)

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{NORM.INVERZ}(x;m;\sigma)} \quad m \in \mathbb{R}, \sigma > 0, 0 < x < 1$$

- **Standard normális eloszlás**

$$\Phi^{-1}(x) = \boxed{\text{NORM.S.INVERZ}(x)} \quad 0 < x < 1$$

- **t-eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{T.INVERZ}(x;s)} \quad s \in \mathbb{N}, 0 < x < 1$$

### 1.7.16. Eloszlások

- **Binomiális eloszlás** ( $r$ -edrendű  $p$  paraméterű)

$$\binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k} = \boxed{\text{BINOM.ELOSZL}(k;r;p;\text{HAMIS})}$$

$$r \in \mathbb{N}, k = 0, \dots, r, 0 < p < 1$$

- **Hipergeometrikus eloszlás**

$$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r}} = \boxed{\text{HIPGEOM.ELOSZLÁS}(k;r;M;N;\text{HAMIS})}$$

$$r, M, N \in \mathbb{N}, M < N, r \leq \min\{M, N - M\}, k = 0, \dots, r$$

- **Poisson-eloszlás** ( $\lambda$  paraméterű)

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \boxed{\text{POISSON.ELOSZLÁS}(k;\lambda;\text{HAMIS})} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, \dots$$

### 1.7.17. Sűrűségfüggvények

- **Exponenciális eloszlás** ( $\lambda$  paraméterű)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \boxed{\text{EXP.ELOSZL}(x;\lambda;\text{HAMIS})} \quad \lambda > 0, x \geq 0$$

- **F-eloszlás** ( $s_1$  és  $s_2$  szabadsági fokú)

$$F(x) = \boxed{\text{F.ELOSZL}(x;s_1;s_2;\text{HAMIS})} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{N}, x \geq 0$$

- **Gamma-eloszlás** ( $r$ -edrendű  $\lambda$  paraméterű)

$$f(x) = \boxed{\text{GAMMA.ELOSZL}(x;r;1/\lambda;\text{HAMIS})} \quad r, \lambda > 0, x \geq 0$$

- **Khi-négyzet eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$f(x) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.ELOSZLÁS}(x;s;\text{HAMIS})} \quad x \geq 0$$

- **Normális eloszlás** ( $m$  és  $\sigma$  paraméterű)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \boxed{\text{NORM.ELOSZLÁS}(x;m;\sigma;\text{HAMIS})}$$

$$m, x \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$



- **Standard normális eloszlás**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \boxed{\text{NORM.S.ELOSZLÁS}(x;\text{HAMIS})} \quad x \in \mathbb{R}$$

- **t-eloszlás** ( $s$  szabadsági fokú)

$$F(x) = \boxed{\text{T.ELOSZL}(x;s;\text{HAMIS})} \quad s \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

### 1.7.18. Grafikus illeszkedésvizsgálat

$\boxed{\text{MEREDEKSÉG}(\text{tömb\_}y_i;\text{tömb\_}x_i)}$  Az  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$  pontokra illesztett lineáris trendvonal meredeksége.

$\boxed{\text{METSZ}(\text{tömb\_}y_i;\text{tömb\_}x_i)}$  Az  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$  pontokra illesztett lineáris trendvonal függőleges tengelymetszete.

### 1.7.19. Intervallumbecslés

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) = \boxed{\text{MEGBÍZHATÓSÁG.NORM}(\alpha;\sigma;n)} \quad 0 < \alpha < 1, \quad \sigma > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} F^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) = \boxed{\text{MEGBÍZHATÓSÁG.T}(\alpha;S_n^*;n)} \quad F = F[\text{T}(n-1)], \quad 0 < \alpha < 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\min \left\{ c \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq x \right\} = \boxed{\text{BINOM.INVERZ}(n;p;x)} \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < x < 1$$

### 1.7.20. Paraméteres hipotézisvizsgálatok

A  $\xi$ -re illetve  $\eta$ -ra vonatkozó mintarealizációk az A illetve B oszlopokban vannak.

- **Egymintás u-próba**

$$1 - \Phi(u) = \boxed{\text{Z.PRÓB}(A:A;m_0;\sigma)}$$

$$2 - 2\Phi(|u|) = \boxed{2*\text{MIN}(\text{Z.PRÓB}(A:A;m_0;\sigma);1-\text{Z.PRÓB}(A:A;m_0;\sigma))}$$

- **Egymintás t-próba**

A  $\xi$ -re vonatkozó mintarealizáció minden tagja mellett szerepeljen  $m_0$  értéke a B oszlopban.

$$2 - 2F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(A:A;B:B;2;1)}$$

$$1 - F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(A:A;B:B;1;1)}$$

- **F-próba**

$$2 \min\{F(F), 1 - F(F)\} = \boxed{\text{F.PRÓB}(A:A;B:B)}$$

- **Kétmintás t-próba**

$$2 - 2F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(A:A;B:B;2;2)}$$

$$1 - F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(A:A;B:B;1;2)}$$

- **Scheffé-módszer azonos mintaelemszámra (párosított t-próba)**

$$2 - 2F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{A:A}; \text{B:B}; 2; 1)}$$

$$1 - F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{A:A}; \text{B:B}; 1; 1)}$$

- **Scheffé-módszer különböző mintaelemszámra**

Az  $\zeta$ -ra vonatkozó mintarealizáció a C oszlopban van és minden tagja mellett szerepeljen 0 a D oszlopban.

$$2 - 2F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{C:C}; \text{D:D}; 2; 1)}$$

$$1 - F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{C:C}; \text{D:D}; 1; 1)}$$

- **Welch-próba**

$$2 - 2F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{A:A}; \text{B:B}; 2; 3)}$$

$$1 - F(|t|) = \boxed{\text{T.PRÓB}(\text{A:A}; \text{B:B}; 1; 3)}$$

- **Statisztikai próba valószínűségre**

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{BINOM.INVERZ}(n; p_0; x)}$$

### 1.7.21. Nemparaméteres hipotézisvizsgálatok

- **Tiszta illeszkedésvizsgálat**

$$1 - F(\chi^2) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.PRÓBA}(\varrho_i \text{ tartománya}; \nu_i \text{ tartománya})}$$

- **Függetlenségvizsgálat**

$$1 - F(\chi^2) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.PRÓBA}(\varrho_{ij} \text{ tartománya}; \nu_{ij} \text{ tartománya})}$$

- **Homogenitásvizsgálat**

$$1 - F(\chi^2) = \boxed{\text{KHINÉGYZET.PRÓBA}(\varrho_{ij} \text{ tartománya}; \nu_{ij} \text{ tartománya})}$$

- **Kétmintás előjelpróba**

$$F^{-1}(x) = \boxed{\text{BINOM.INVERZ}(n; 1/2; x)}$$

### 1.7.22. Regressziószámítás

- **Lineáris regresszió**

**eta:**  $\eta$ -ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times 1$  méretű tömb.

**xi:**  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ -ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times k$  méretű tömb.

**x:**  $x_1, \dots, x_k$  számokat tartalmazó  $1 \times k$  méretű tömb.

$(\hat{a}_k, \hat{a}_{k-1}, \dots, \hat{a}_0) = \boxed{\text{LIN.ILL}(\text{eta}; \text{xi})}$  ( $1 \times (k + 1)$  méretű tömbképlet!)

$\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \dots + \hat{a}_k x_k = \boxed{\text{TREND}(\text{eta}; \text{xi}; \text{x})}$

- **Fixpontos lineáris regresszió**

**eta-t**:  $(\eta - t_0)$ -ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times 1$  méretű tömb.

**xi-t**:  $(\xi_1 - t_1, \dots, \xi_k - t_k)$ -ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times k$  méretű tömb.

**x-t**:  $x_1 - t_1, \dots, x_k - t_k$  számokat tartalmazó  $1 \times k$  méretű tömb.

$(\hat{a}_k, \hat{a}_{k-1}, \dots, \hat{a}_1) = \boxed{\text{LIN.ILL}(\text{eta-t}; \text{xi-t}; \text{HAMIS})}$  ( $1 \times k$  méretű tömbképlet!)

$\hat{a}_1(x_1 - t_1) + \dots + \hat{a}_k(x_k - t_k) = \boxed{\text{TREND}(\text{eta-t}; \text{xi-t}; \text{x-t}; \text{HAMIS})}$

- **Exponenciális regresszió**

**eta**:  $\eta$ -ra vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times 1$  méretű tömb.

**xi**:  $\xi_1$ -re vonatkozó mintarealizációt tartalmazó  $n \times 1$  méretű tömb.

$(\hat{b}, \hat{a}) = \boxed{\text{LOG.ILL}(\text{eta}; \text{xi})}$  ( $1 \times 2$  méretű tömbképlet!)

$\hat{a} \cdot \hat{b}^x = \boxed{\text{NÖV}(\text{eta}; \text{xi}; x)}$