Bevezetés a számítógépi grafikába

Az Hermite-ív

Troll Ede Mátyás

Matematikai és Informatikai Intézet
Eszterházy Károly Katolikus Egyetem

Eger, 2024

Áttekintés

Áttekintés

Hermite-ív

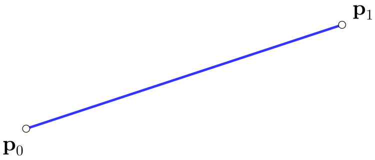
Hogyan definiáljuk a görbét?

Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.

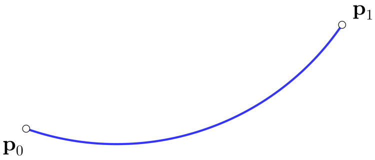
Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



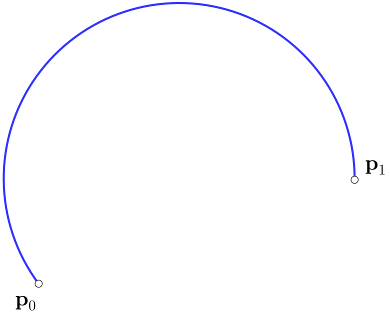
Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



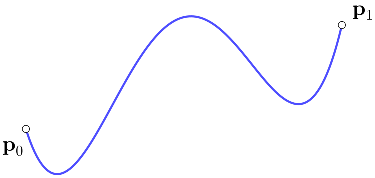
Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



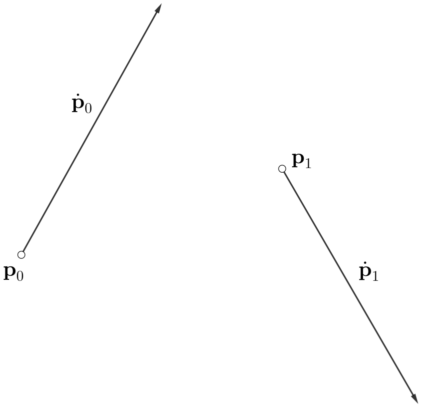
Hermite-ív

Hogyan definiáljuk a görbét?
Ha adott a görbe két végpontja, azzal még nem definiáljuk egyértelműen.



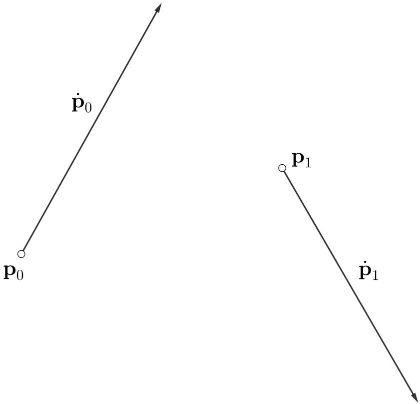
Hermite-ív

Legyenek adottak a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$
pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$.



Hermite-ív

Legyenek adottak a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$ pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Célunk leírni az $\mathbf{s}(t)$ görbét a kontroll alakzatok, és bizonyos bázisfüggvények lineáris kombinációjaként.



Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható

Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez

Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Az Hermite-ív kifejlesztésekor a számítógépek számítási kapacitása erősen limitált volt, így a keresett függvények függvényterét az $\{1, t, t^2, t^3\}$ bázisban keresték.

Hermite-ív

Mit várunk el a bázisfüggvényektől?

- Legyen gyorsan számolható
- Biztosítson kellő rugalmasságot a tervezéshez
- A velük definiált görbe igazodjon a kontroll alakzatokhoz

Az Hermite-ív kifejlesztésekor a számítógépek számítási kapacitása erősen limitált volt, így a keresett függvények függvényterét az $\{1, t, t^2, t^3\}$ bázisban keresték. A későbbiekben természetesen készítettek olyan görbéket is, melyek már más, például az $\{1, t, \sin t, \cos t\}$, vagy az $\{1, t, t^2, \ldots, t^k \sin t, \cos t\}$ bázisokból kerültek ki.

Hermite-ív

Adottak tehát a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$ pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

Hermite-ív

Adottak tehát a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$ pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t)\,\mathbf{p}_0 + H_1(t)\,\mathbf{p}_1 + H_2(t)\,\dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t)\,\dot{\mathbf{p}}_1,$$

Hermite-ív

Adottak tehát a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$ pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t)\,\mathbf{p}_0 + H_1(t)\,\mathbf{p}_1 + H_2(t)\,\dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t)\,\dot{\mathbf{p}}_1,$$

ahol a $H_i(t)$ függvények egyelőre ismeretlen harmadfokú polinomok.

Hermite-ív

Adottak tehát a $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}_1$ pontok, valamint a keresendő göre végpontjaiban az érintővektorok $\dot{\mathbf{p}}_0$ és $\dot{\mathbf{p}}_1$. Keressük az $\mathbf{s}(t)$ görbét harmadfokú polinomiális alapfüggvények, valamint a végpontok és végérintők lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{s}(t) = H_0(t)\,\mathbf{p}_0 + H_1(t)\,\mathbf{p}_1 + H_2(t)\,\dot{\mathbf{p}}_0 + H_3(t)\,\dot{\mathbf{p}}_1,$$

ahol a $H_i(t)$ függvények egyelőre ismeretlen harmadfokú polinomok. Írjuk fel a problémát mátrixos alakban, azaz

$$\mathbf{s}(t) = AP = A \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \end{pmatrix}.$$

Hermite-ív

Keressük tehát a $H_i(t)$ függvények együtthatóiból álló H mátrixot.

Hermite-ív

Keressük tehát a $H_i\,(t)$ függvények együtthatóiból álló H mátrixot. Azt szeretnénk, hogy a görbeív a $[0,1]$ intervallumon legyen értelmezve.

Hermite-ív

Keressük tehát a $H_i(t)$ függvények együtthatóiból álló H mátrixot. Azt szeretnénk, hogy a görbeív a $[0,1]$ intervallumon legyen értelmezve. Ez alapján felírható az alábbi 4 egyenletből álló egyelnetrendszer

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{p}_0$$
$$\mathbf{s}(1) = \mathbf{p}_1$$
$$\dot{\mathbf{s}}(0) = \dot{\mathbf{p}}_0$$
$$\dot{\mathbf{s}}(1) = \dot{\mathbf{p}}_1$$

Hermite-ív

Szorozzuk meg a paraméterek vektorát a H mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hermite-ív

Szorozzuk meg a paraméterek vektorát a H mátrixszal:

$$\left(t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1\right) H = \left(t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1\right) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A szorzás eredményeképpen megkapjuk a $H_i\left(t\right)$ függvényeket:

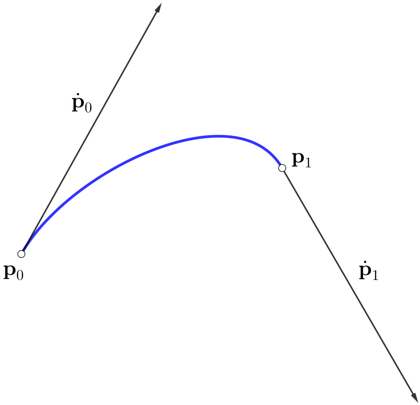
$$\begin{aligned} H_0\left(t\right) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 = \left(t-1\right)^2\left(2t+1\right) \\ H_1\left(t\right) &= -2t^3 + 3t^2 = t^2\left(3-2t\right) \\ H_2\left(t\right) &= t^3 - 2t^2 + t = \left(t-1\right)^2 t \\ H_3\left(t\right) &= t^3 - t^2 = \left(t-1\right) t^2 \end{aligned}$$

A fentiek alapján a keresett görbe:

$$\mathbf{s}\left(t\right) = H_0\left(t\right)\mathbf{p}_0 + H_1\left(t\right)\mathbf{p}_1 + H_2\left(t\right)\dot{\mathbf{p}}_0 + H_3\left(t\right)\dot{\mathbf{p}}_1$$

Hermite-ív

A $H_i(t)$ bázisfüggvényekkel definiált Hermite-ív.



Mátrixos alakban felírt görbék megjelenítése

A számítógépes megjelenítés során a mátrixos felírás sok esetben lehet előnyös, hiszen a mátrixok szorzásának asszociativitása miatt a bázisfüggvények együtthatóit előre összeszorozhatjuk a kontroll alakzatok vektorával, így utólag már csak ezt kell megszoroznunk a t hatványait tartalmazó vektorral.

Áttekintés

Hermite-ívek összefűzése

Mivel 3-adfokú görbét definiáltunk a kontroll alakzatokkal, így azok módosítása bármennyire is nagy szabadsági fokot ad a tervezésben, hullámot már nem tudunk megadni egyetlen Hermite-ívvel.

Hermite-ívek összefűzése

Mivel 3-adfokú görbét definiáltunk a kontroll alakzatokkal, így azok módosítása bármennyire is nagy szabadsági fokot ad a tervezésben, hullámot már nem tudunk megadni egyetlen Hermite-ívvel.
Két Hermite-ív csatlakoztatását úgy oldhatjuk meg, ha bizonyos mértékű folytonosságot várunk el a görbék csatlakozási pontjában.

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak.

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak. A hagyományos (analízisbeli) **n-edrendű folytonosság** alatt azt értjük, hogy a két görbe deriváltjai az adott pontben n-edrendben megegyeznek, azaz

Csatlakozó görbék folytonossága

Legyenek adottak az $\mathbf{s}(t)$ és $\mathbf{r}(u)$ görbék, melyek a

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(u_0)$$

pontban csatlakoznak. A hagyományos (analízisbeli) **n-edrendű folytonosság** alatt azt értjük, hogy a két görbe deriváltjai az adott pontben n-edrendben megegyeznek, azaz

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(u_0) \\ \ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \ddot{\mathbf{r}}(u_0) \\ \dots \\ \mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \mathbf{r}^{(n)}(u_0)\end{gathered}$$

és ezt C^n-nel jelöljük.

Csatlakozó görbék folytonossága

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a **p**-ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora.

Csatlakozó görbék folytonossága

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a **p**-ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}\left(t_0\right) = \lambda \mathbf{r}\left(u_0\right), \;\; \lambda > 0.$$

Csatlakozó görbék folytonossága

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a **p**-ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}(t_0) = \lambda \mathbf{r}(u_0), \ \lambda > 0.$$

Ez utóbbi kritérium előnye a C^1 folyotnossággal szemben, hogy tisztán geometriai feltétellel írható le.

Csatlakozó görbék folytonossága

Geometriailag a C^1 folyotnosság azt jelenti, hogy a **p**-ben találkozó görbéknek ebben a pontban megegyezik az érintővektora. Ettől gyengébb feltétel az lenne, ha csupán az érintővektorok iránya egyezne meg, azaz

$$\mathbf{s}(t_0) = \lambda \mathbf{r}(u_0), \;\; \lambda > 0.$$

Ez utóbbi kritérium előnye a C^1 folyotnossággal szemben, hogy tisztán geometriai feltétellel írható le. Ez utóbbi feltételnek megfelelő görbéknél a csatlakozást **geometriailag elsőrendben folytonos**nak nevezzük, és GC^1-gyel jelöljük.

Csatlakozó görbék folytonossága

A geometriailag n-edrendben csatlakozó görbeíveket a klasszikus folytonossághoz hasonlóan a

$$\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_1 \dot{\mathbf{r}}(u_0)$$
$$\ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_2 \ddot{\mathbf{r}}(u_0)$$
$$\dots$$
$$\mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \lambda_n \mathbf{r}^{(n)}(u_0)$$

egyenlőségekkel adjuk meg, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$.

Csatlakozó görbék folytonossága

A geometriailag n-edrendben csatlakozó görbeíveket a klasszikus folytonossághoz hasonlóan a

$$\dot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_1 \dot{\mathbf{r}}(u_0)$$
$$\ddot{\mathbf{s}}(t_0) = \lambda_2 \ddot{\mathbf{r}}(u_0)$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{s}^{(n)}(t_0) = \lambda_n \mathbf{r}^{(n)}(u_0)$$

egyenlőségekkel adjuk meg, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$. Mivel a görbék **görbületét** (mennyire görbe a görbe, azaz mennyire tér el az egyenestől) a második deriválttal, a **torzióját** (mennyire tér el a síktól) pedig a harmadik deriválttal írjuk le, így általában ezeket a folytonosságokat szoktuk megkövetelni.

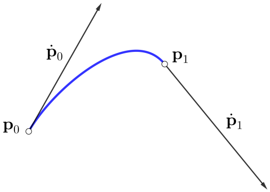
Csatlakozó görbék folytonossága

Praktikusan síkban a másod-, térben pedig a harmadrendben való geometriai folytonosság megkövetelése azt jelenti, hogy az emberi szem nem fogja tudni megmondani, hol csatlakoznak a görbeívek.

Áttekintés

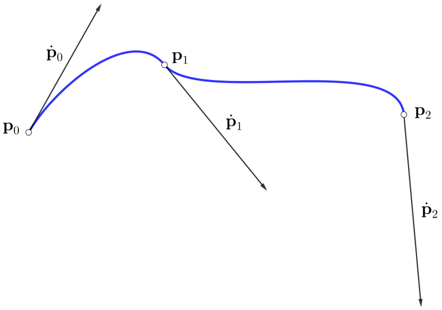
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel.



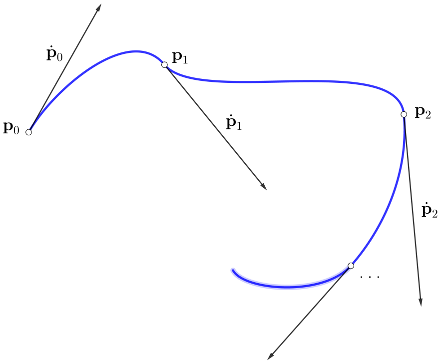
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja $\mathbf{p}_1$, kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen.



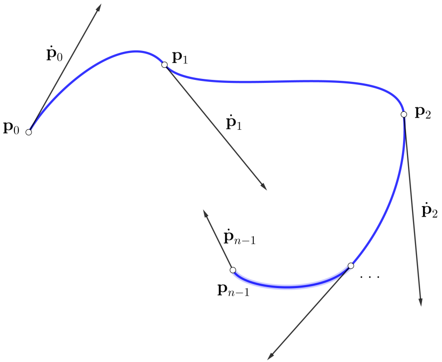
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja $\mathbf{p}_1$, kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



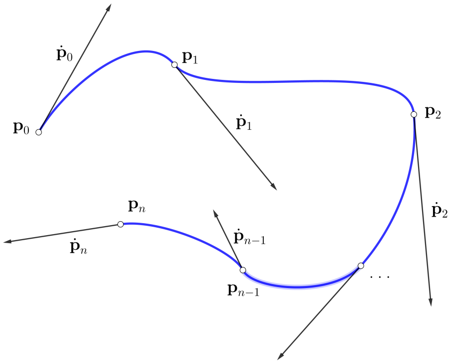
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja $\mathbf{p}_1$, kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



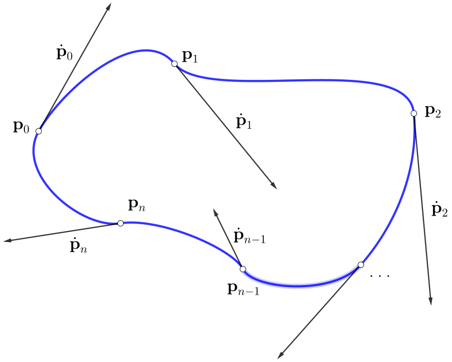
Hermite-ívek csatlakoztatása

Hermite-íveket legegyszerűbben úgy tudunk csatlakoztatni, hogy ha adott az $\mathbf{s}_1(t)$ Hermite-ív a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ pontokkal és a végpontokkal $\dot{\mathbf{p}}_0, \dot{\mathbf{p}}_1$ végérintőkkel. A hozzá csatlakozó $\mathbf{s}_2(t)$ ívet úgy definiáljuk, hogy annak kezdőpontja $\mathbf{p}_1$, kezdőérintője $\dot{\mathbf{p}}_1$ legyen. És így tovább...



Hermite-ívek csatlakoztatása, zárt görbe

A görbeívek csatlakozásakor úgy tudunk zárt görbét készíteni, hogy utolsó ívként megrajzoljuk azt a görbét, melynek kezdőpontja és kezdőérintője $\mathbf{p}_n, \dot{\mathbf{p}}_n$, végpontja és végérintője pedig $\mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{p}}_0$.



Köszönöm a figyelmet!