



6. NP nyelv osztály. Tanú-tétel. Példa NP-beli nyelvekre és a tanú-tétel alkalmazására.

NP nyelv osztály

- **NP osztály (Nemdeterminisztikus Polinomiális idő):**
 - Az NP osztály azon nyelvek halmaza, amelyek eldönthetők egy polinomiális időkorlátos nemdeterminisztikus Turing-géppel.
 - Formálisan: $NP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(n^k)$

Tanú-tétel

- **Tanú-tétel (Certificate Theorem):**
 - A tétel kimondja, hogy egy nyelv akkor és csak akkor van NP-ben, ha létezik egy polinom hosszúságú tanú, amely alapján egy determinisztikus Turing-gép polinomiális időben ellenőrizni tudja, hogy a bemenet a nyelv eleme-e.
- **Formális megfogalmazás:**
 - Egy L nyelv NP-beli, ha létezik olyan polinom $p(n)$ és egy determinisztikus Turing-gép M , hogy:
 - Ha $x \in L$, akkor létezik egy y tanú, amelyre igaz, hogy $|y| \leq p(|x|)$ és M elfogadja az (x, y) bemenetet.
 - Ha $x \notin L$, akkor bármely y esetén M elutasítja az (x, y) bemenetet.

Példa NP-beli nyelvekre

1. Hamilton-kör probléma:

- **Probléma:** Létezik-e a gráfban olyan kör, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint?
- **Tanú:** Egy csúcspermutáció, amely a Hamilton-kört képviseli.
- **Ellenőrzés:** Polinomiális időben ellenőrizhető, hogy a permutáció valóban Hamilton-kör-e a gráfban.

2. 3-SAT probléma:

- **Probléma:** Létezik-e olyan változóértékelés, amely kielégíti a 3-KNF formájú Boole-formulát?
- **Tanú:** Egy változóértékelés.
- **Ellenőrzés:** Polinomiális időben ellenőrizhető, hogy a változóértékelés kielégíti-e a Boole-formulát.

3. Utazóügynök probléma (Travelling Salesman Problem - TSP):

- **Probléma:** Van-e olyan körút a városok között, amely legfeljebb k hosszú és minden várost pontosan egyszer érint?
- **Tanú:** Egy várospermutáció, amely a körutat képviseli.
- **Ellenőrzés:** Polinomiális időben ellenőrizhető, hogy a permutáció valóban körút-e, és a hossz legfeljebb k .

Tanú-tétel alkalmazása

- **Lépések:**

- **1. lépés:** Azonosítsuk a nyelvhez tartozó tanút, amely alapján eldönthető, hogy egy adott bemenet a nyelv eleme-e.
- **2. lépés:** Bizonyítsuk be, hogy a tanú hosszúsága polinom függvénye a bemenet hosszának.
- **3. lépés:** Bizonyítsuk be, hogy a tanú alapján egy determinisztikus Turing-gép polinomiális időben ellenőrizni tudja a bemenet helyességét.

- **Példa alkalmazás - Hamilton-kör probléma:**

- **Tanú:** Egy csúcspérmütáció.
- **Tanú hosszúsága:** A csúcsok száma, amely polinomiális a bemenet méretéhez képest.
- **Ellenőrzés:** A permutáció minden szomszédos csúcsa között létezik él, és a permutáció visszatér a kezdőcsúcsához.