Отчет

Рынок: Бразилия

Период наблюдения: 2017 год

<u>Подготовка модели.</u>
Выберите на рынке 20 активов (N=20).
По наблюдениям за год оцените математические ожидания доходностей и матрицу ковариаций доходностей (используйте выборочную матрицу ковариаций).
Найденные вектор средних и матрица ковариаций будут далее использованы в экспериментах как «истинные» вектор $E=(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ и матрица ковариаций $(\sigma_{i,j})$.
Убедитесь, что матрица ковариаций невырожденная (если она близка к вырожденной, то измените состав активов).

Из 50 активов(были выбраны в предыдущей лабораторной работе) были выбраны 20 в соответствие с коэффициентом Шарпа, то есть для 50 активов был посчитан коэффициент, а потом отобраны 20 лучших(по данному показателю) активов. В результате получилось следующее распределение активов:

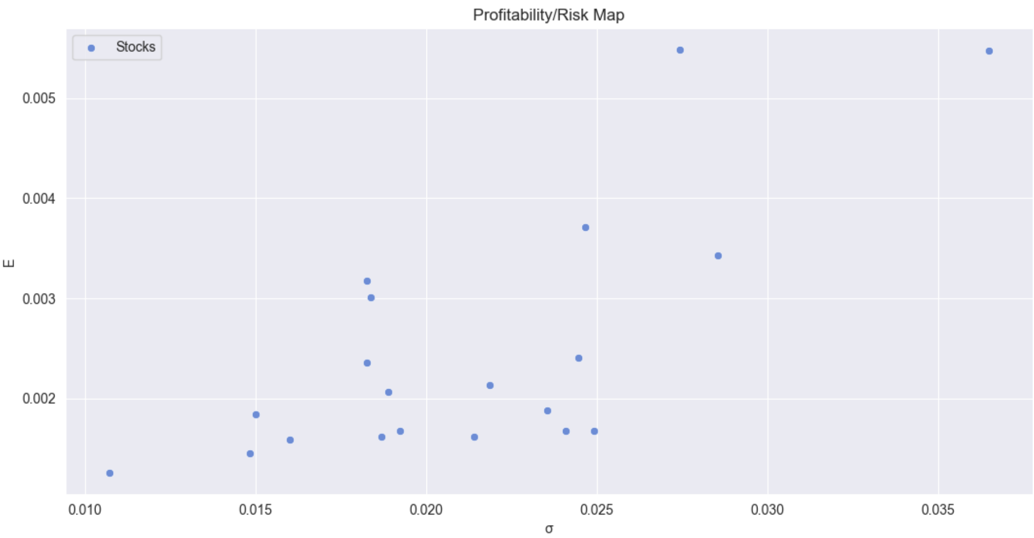

Рис. 1 Распределение 20 активов

Детерминант матрицы ковариации больше нуля, а обусловленность матрицы ковариации ~66

1. Истинный оптимальный портфель в модели Марковица с заданным отношением к риску.
Задана константа b. Решите задачу оптимизации

$$-E(x) + b\sigma(x) \to min$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

(т.е. найдите оптимальный портфель с отношением к риску, равным b).

Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции.

Здесь $E(x) = E_1x_1 + E_2x_2 + \ldots + E_Nx_N$, $\sigma^2(x) = \sum\sum \sigma_{i,j}x_ix_j$

Константа b выбрана из следующего уравнения:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-\beta)} \exp(-(\Phi^{-1}(\beta))^2/2)$$

Решение задачи оптимизации реализовано аналогично предыдущей лабораторной работе(посредством языка Python,а точнее с помощью библиотеке scipy).

Результаты получились следующие:

Рис.2 Распределение долей каждого актива

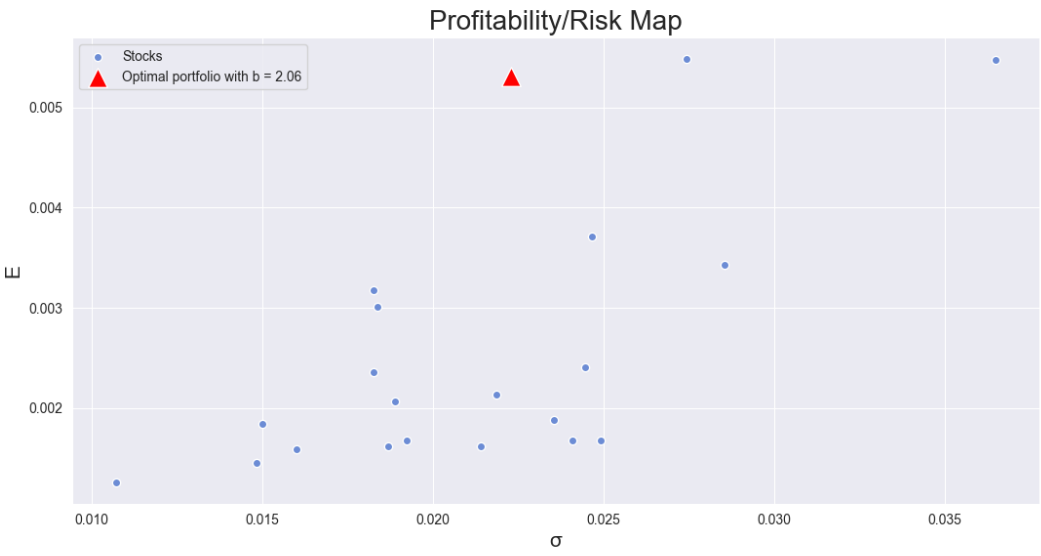

Рис.3 Оптимальный портфель относительно активов

В результате истинные портфель имеет следующее характеристики:

E ~ 0.0054

σ ~ 0.025

2. Оценка неопределенности оптимального портфеля в модели Марковица с заданным отношением к риску.

2.1 Задайте число наблюдений T=30. С помощью генератора многомерного нормального распределения создайте выборку размера T из нормального распределения с вектором математических ожиданий $E=(E_1, E_2, \dots, E_N)$ и матрицей ковариаций $(\sigma_{i,j})$.

С помощью встроенных инструментов python мы генерируем выборку размера T из нормального распределения, то есть генерируем 20 активов с 30-тью наблюдениями.

2.2. По построенной выборке сделайте оценку E^{est} вектора математических ожиданий и оценку $(\sigma^{est}_{i,j})$ матрицы ковариаций.

С помощью встроенных функций python рассчитали вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций.

2.3 Используя эти оценки решите задачу оптимизации

$$-E^{est}(x) + b\sigma^{est}(x) \to min$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Здесь $E^{est}(x) = E_1^{est}x_1 + E_2^{est}x_2 + \dots + E_N^{est}x_N$, $[\sigma^{est}(x)]^2 = \sum\sum \sigma_{i,j}^{est} x_i x_j$

(т.е. найдите выборочный оптимальный портфель с отношением к риску, равным b). Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции.

Константа b взята аналогично п.1
Результаты получились следующие:

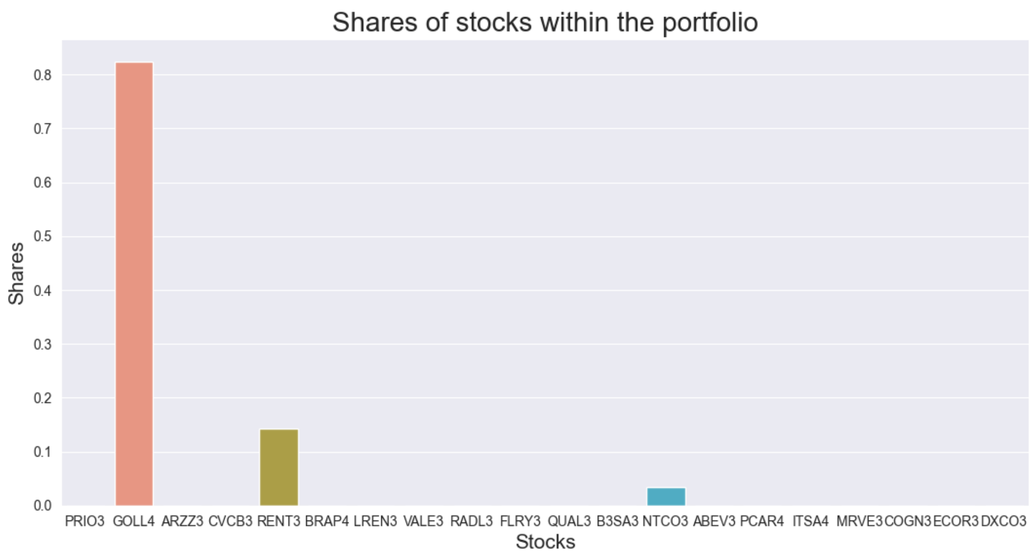

Рис.4 Распределение долей каждого актива

Рис.5 Оптимальный портфель относительно активов

В результате получился портфель со следующими характеристиками:
E ~ 0.00976

σ ~ 0.026

2.4 Сравните два портфеля: истинный (п.1) и выборочный (п.2.3). Оцените относительную ошибку в определении весов портфеля в норме Manhattan (L^1 норма Минковского). Сделайте выводы. Сделайте сравнение в системе координат (σ, E).

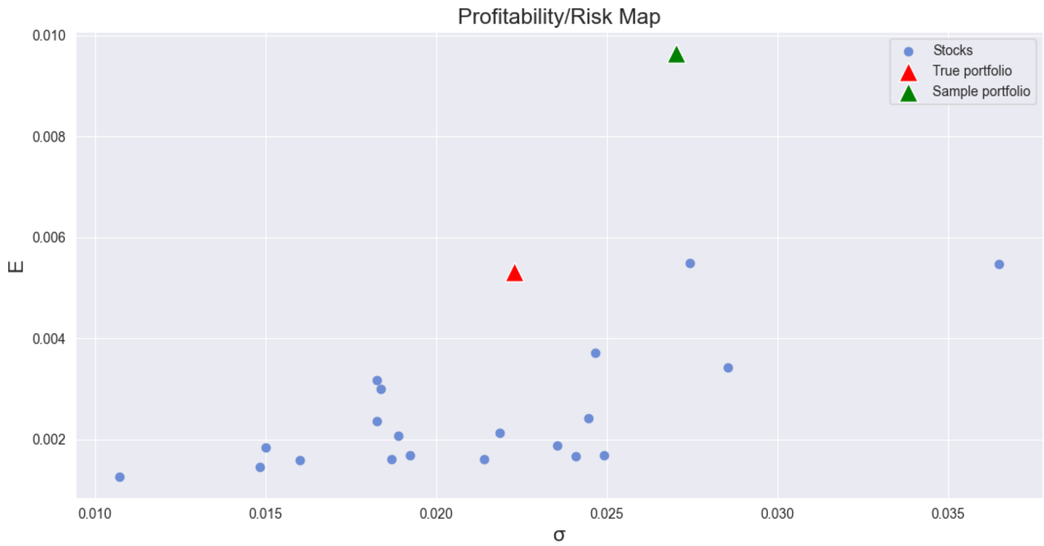

Рис.6 Сравнение двух портфелей

L1 норма вектора - 1.292

Можно сделать вывод, что сгенерированный портфель достаточно далеко находится от истинного, так он более рискованный и более доходный относительно исходного портфеля.

2.5. Повторите эксперимент S=40 раз и оцените среднюю относительную ошибку по S повторениям эксперимента. Сделайте выводы. Сделайте сравнение в системе координат (σ, E).

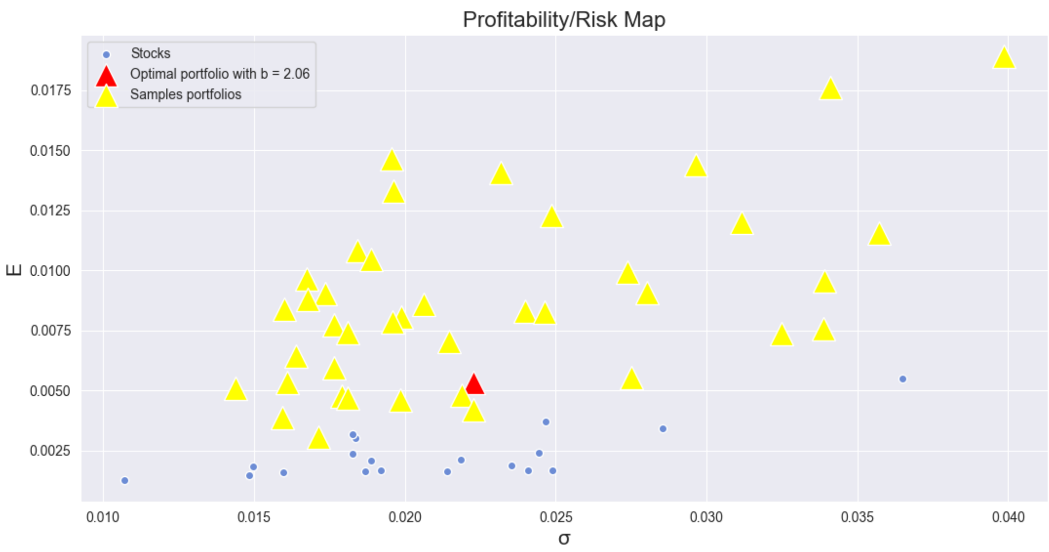

Рис.7 Демонстрация результатов

Средняя L1-норма по 40 экспериментам - 1.535

Можно заметить достаточно сильный разброс генерируемых портфелей, что говорит о не точности данной оценки. Однако на карте изображены портфели, которые достаточно близко расположены от истинного, но их количество крайне мало.

2.6 Предположите, что нам известны точные значения математических ожиданий E=(E_1, E_2, …, E_N). Повторите пп. 2.2-2.5. используя оценку только матрицы ковариаций (т.е. решайте задачу оптимизации

$$-E(x) + b\sigma^{\text{est}}(\text{x}) \to min$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Здесь $E(x) = E_1x_1 + E_2x_2 + .. + E_Nx_N$, $[\sigma^{\text{est}}(x)]^2 = \sum\sum \sigma_{\text{i,j}}^{\text{est}} x_i x_j$
Сравните точность этих портфелей и портфелей п.2.3

Рис.8 Распределение долей каждого актива

Стоит отметить, что данное распределение долей активов близко к распределению долей активов в истинном портфеле.

Рис.9 Расположение портфеля относительно активов

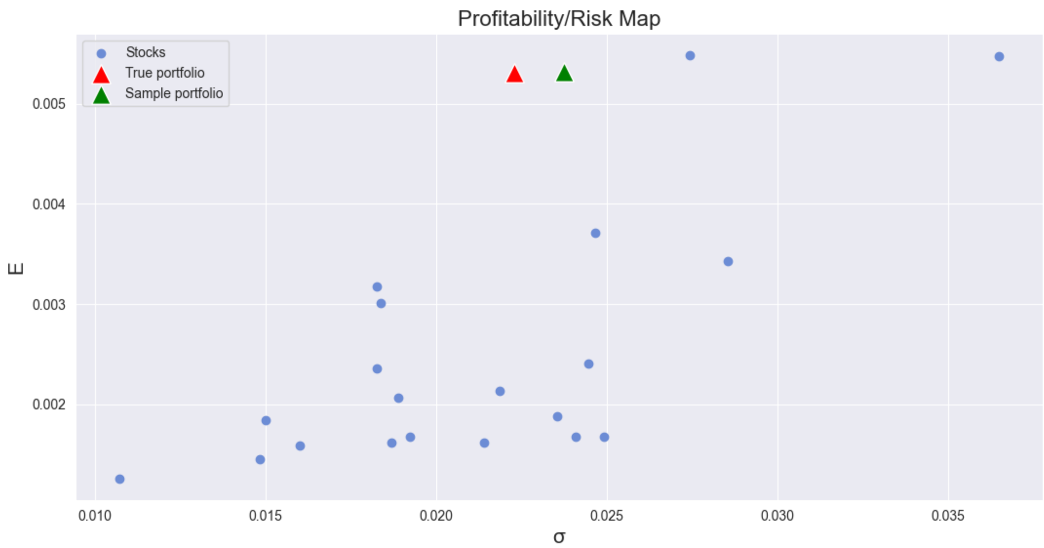

Рис.10 Сравнение полученного портфеля и истинного

Отметим, что полученный портфель достаточно близко находится от исходного, что говорит о хорошей точности оценки.

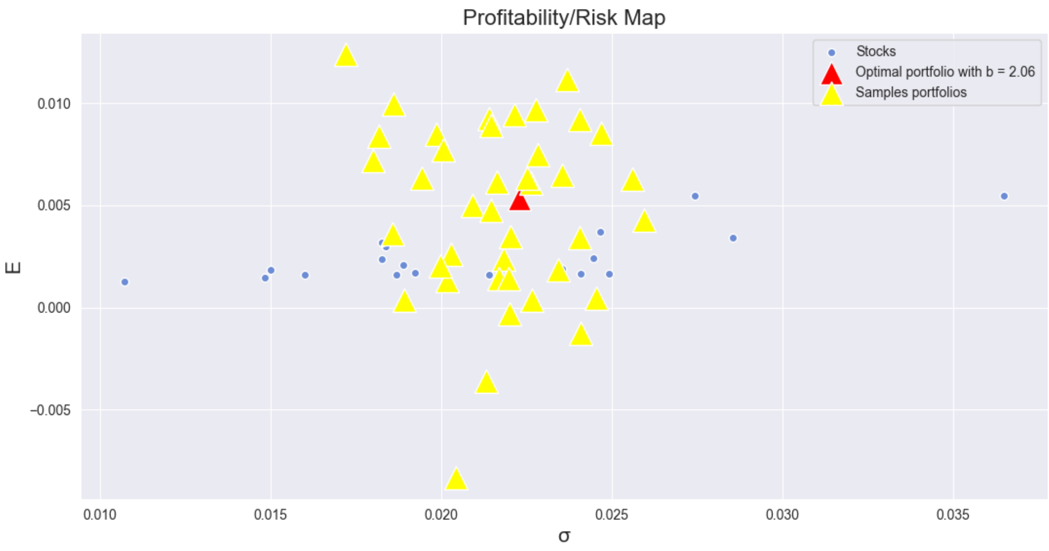

Рис.11 Демонстрация результатов генерации

Заметим, что в данном случае распределение генерированных портфелей плотнее и более приближенное к исходному, в сравнении с предыдущей оценкой.

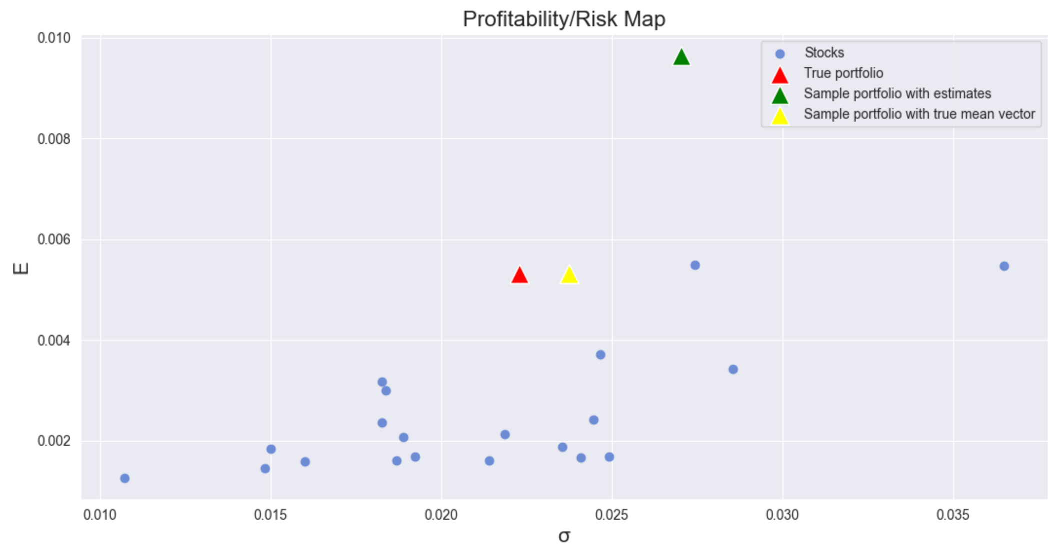

Рис.12 Сравнение полученных портфелей

В результате, знание вектора средних позволяет нам сделать более точную оценку относительно истинного портфеля.

3. Оценка неопределенности оптимального CVaR портфеля
3.1 Уровень значимости β выбран 0,95. Число наблюдений T. Используя сгенерированные наблюдения из п.2.1 решите задачу ЛП для определения оптимального CVaR$_\beta$ портфеля. Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции CVaR.

Задача имеет вид:

$$u_t = -x_1 r_1(t) - x_2 r_2(t) - \cdots - x_N r_N(t) - \alpha;$$

$$\alpha + \frac{1}{T(1-\beta)} \sum_{t=1}^{T} u_t \to \min$$

subject to $(t = 1, 2, \ldots, T)$

$$x \in D,\ u_t \geq 0,\ x_1 r_1(t) + x_2 r_2(t) + \cdots + x_N r_N(t) + \alpha + u_t \geq 0$$

Решение задачи оптимизации реализовано аналогично предыдущей лабораторной работе(посредством языка Python,а точнее с помощью библиотеке scipy).

В результате получился следующий портфель:

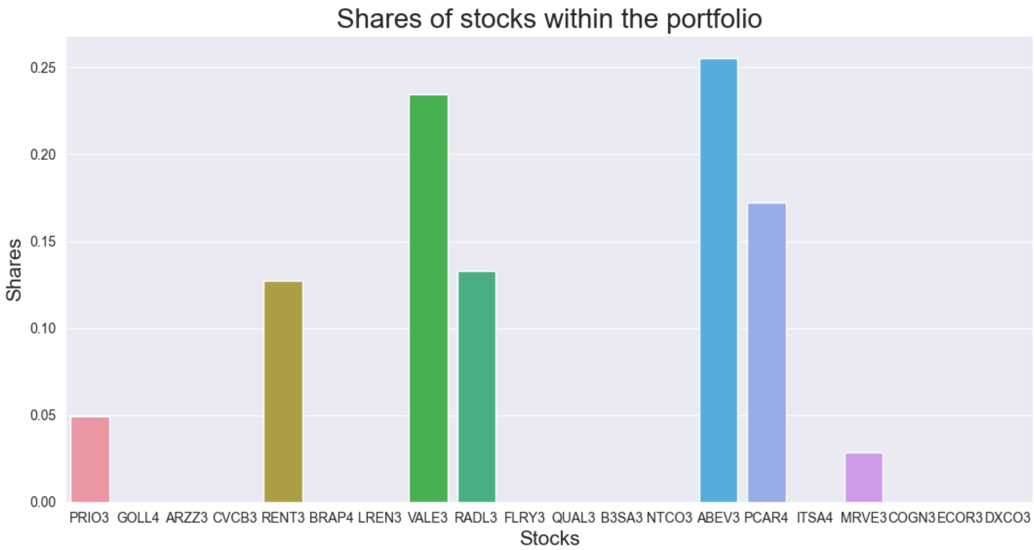

Рис.13 Распределение долей каждого актива

Рис.14 Расположение полученного портфеля относительно всех активов

3.2 Сравните два портфеля: истинный (п.1) и найденный в п.3.1. Оцените относительную ошибку в определении весов портфеля в норме Manhattan (L^1 норма Минковского). Сравните с ошибкой портфеля из п. 2.3

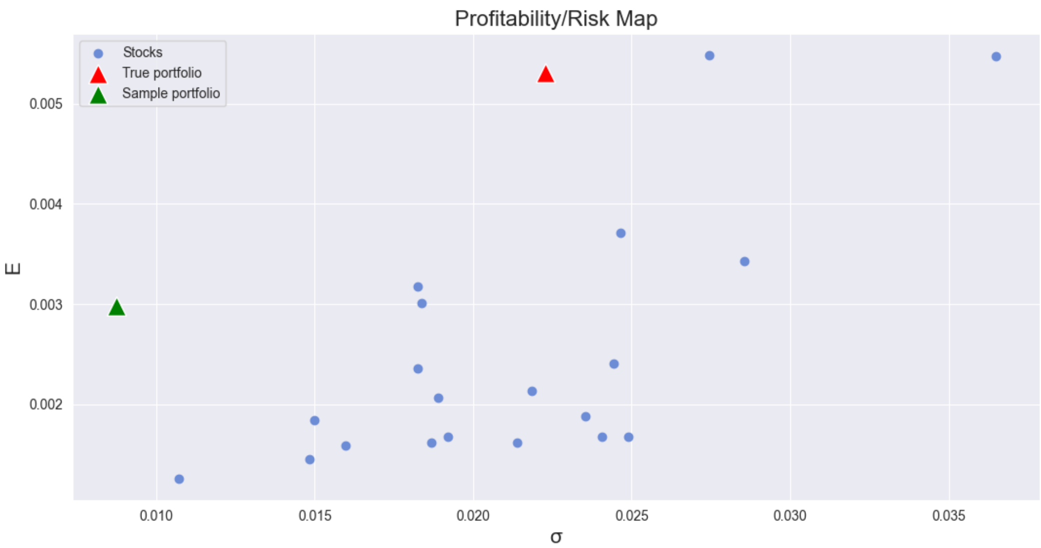

Рис.15 Сравнение найденного портфеля с истинным портфелем.

Отметим, что полученный портфель расположен достаточно далеко относительно исходного портфеля.

L1 норма вектора в 2.3 - 1.292
L1 норма вектора для CVAR - 1.901

3.3. Повторите эксперимент S раз и оцените среднюю относительную ошибку по S повторениям эксперимента. Сделайте выводы. Сравните с ошибкой из п. 2.5

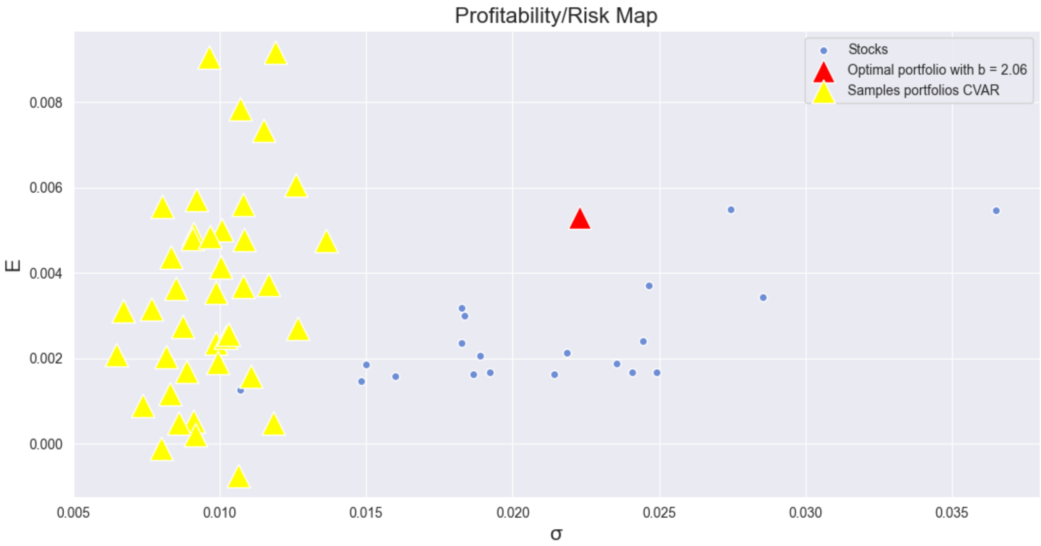

Рис.16 Демонстрация результатов генерации портфелей.

Заметим, что сгенерированные портфели расположены относительно далеко истинного портфеля.