Отчет

Рынок: Бразилия

Период наблюдения: 2017 год

<u>Подготовка модели.</u>
Выберите на рынке 20 активов (N=20).
По наблюдениям за год оцените математические ожидания доходностей и матрицу ковариаций доходностей (используйте выборочную матрицу ковариаций).
Найденные вектор средних и матрица ковариаций будут далее использованы в экспериментах как «истинные» вектор $E=(E_1, E_2, \dots, E_N)$ и матрица ковариаций $(\sigma_{i,j})$.
Убедитесь, что матрица ковариаций невырожденная (если она близка к вырожденной, то измените состав активов).

Из 50 активов(были выбраны в предыдущей лабораторной работе) были выбраны 20 в соответствие с коэффициентом Шарпа, то есть для 50 активов был посчитан коэффициент, а потом отобраны 20 лучших(по данному показателю) активов. В результате получилось следующее распределение активов:

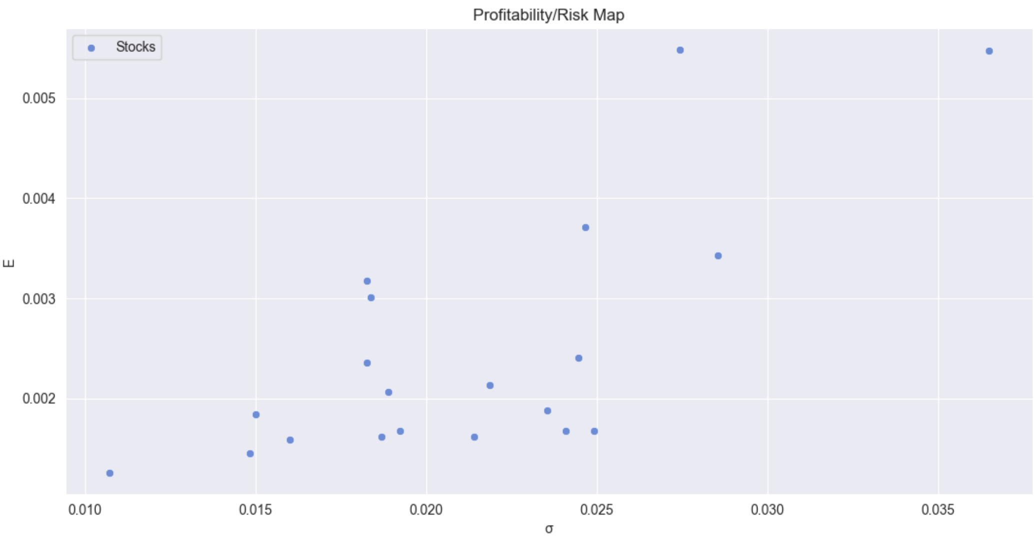

Рис. 1 Распределение 20 активов

Детерминант матрицы ковариации больше нуля, а обусловленность матрицы ковариации ~66

1. Истинный оптимальный портфель в модели Марковица с заданным отношением к риску.
Задана константа b. Решите задачу оптимизации

$$-E(x) + b\sigma(x) \to min$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

(т.е. найдите оптимальный портфель с отношением к риску, равным b).

Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции.

Здесь $E(x) = E_1 x_1 + E_2 x_2 + .. + E_N x_N$ **,** $\sigma^2(x) = \sum\sum \sigma_{i,j} x_i x_j$

Константа b выбрана из следующего уравнения:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-\beta)} \exp(-(\Phi^{-1}(\beta))^2/2)$$

Решение задачи оптимизации реализовано аналогично предыдущей лабораторной работе(посредством языка Python,а точнее с помощью библиотеке scipy).

Константа b = 5.08

Результаты получились следующие:

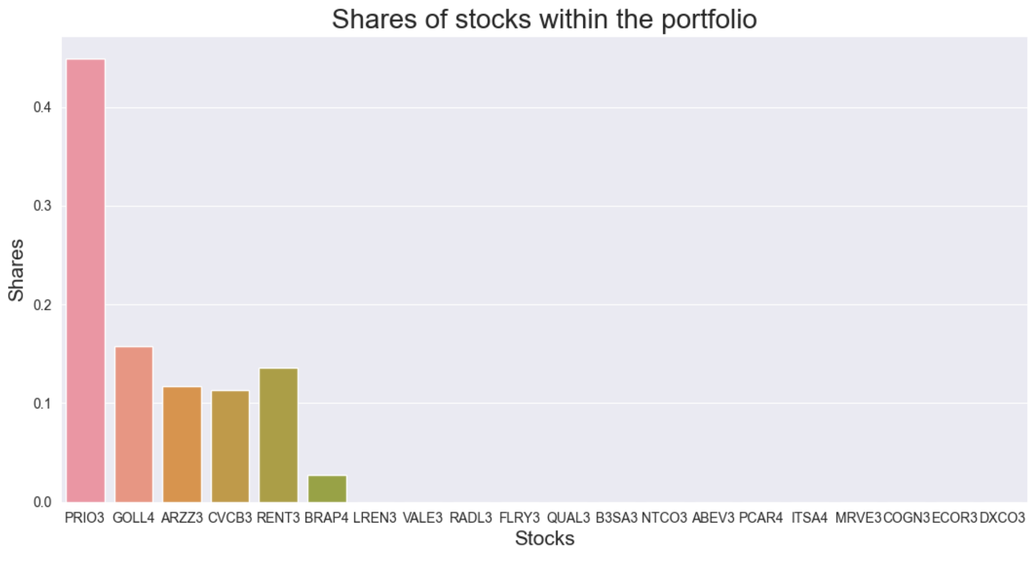

Рис.2 Распределение долей каждого актива

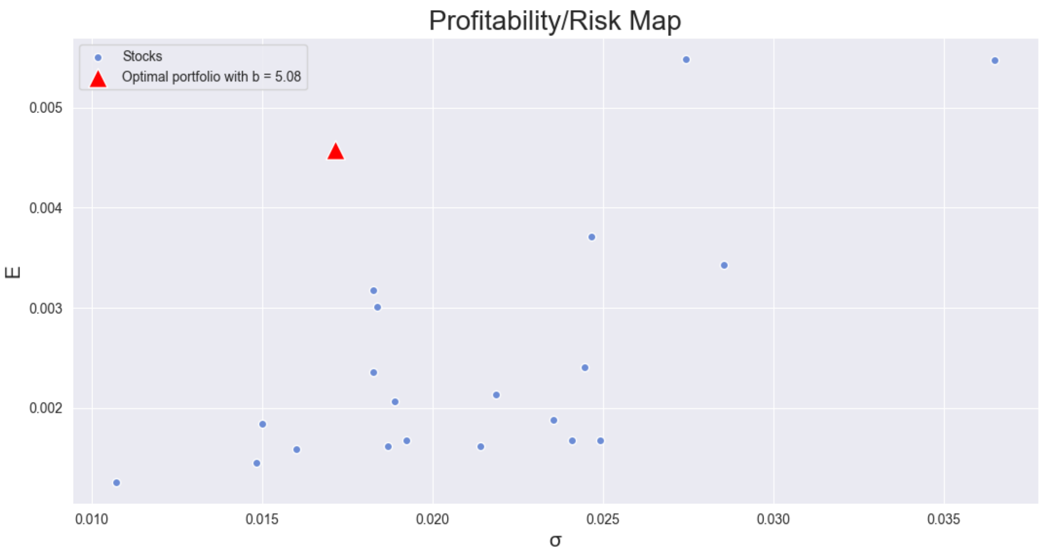

Рис.3 Оптимальный портфель относительно активов

В результате истинные портфель имеет следующее характеристики:

E ~ 0.0047
σ ~ 0.018

2. Оценка неопределенности оптимального портфеля в модели Марковица с заданным отношением к риску.

2.1 Задайте число наблюдений T=30. С помощью генератора многомерного нормального распределения создайте выборку размера T из нормального распределения с вектором математических ожиданий $E=(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ и матрицей ковариаций $(\sigma_{i,j})$.

С помощью встроенных инструментов python мы генерируем выборку размера T из нормального распределения, то есть генерируем 20 активов с 30-тью наблюдениями.

2.2. По построенной выборке сделайте оценку E^{est} вектора математических ожиданий и оценку $(\sigma^{est}_{i,j})$ матрицы ковариаций.

С помощью встроенных функций python рассчитали вектор математических ожиданий и матрицу ковариаций.

2.3 Используя эти оценки решите задачу оптимизации

$$-E^{est}(x) + b\sigma^{est}(x) \to min$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Здесь $E^{est}(x) = E_1^{est}x_1 + E_2^{est}x_2 + \ldots + E_N^{est}x_N$, $[\sigma^{est}(x)]^2 = \sum\sum \sigma_{i,j}^{est} x_i x_j$

(т.е. найдите выборочный оптимальный портфель с отношением к риску, равным b). Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции.

Результаты получились следующие:

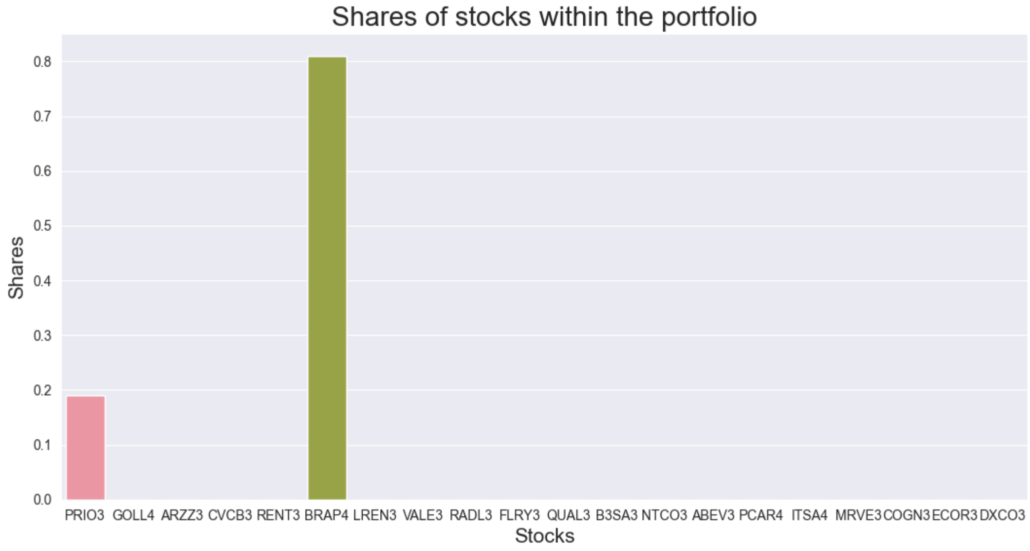

Рис.4 Распределение долей каждого актива

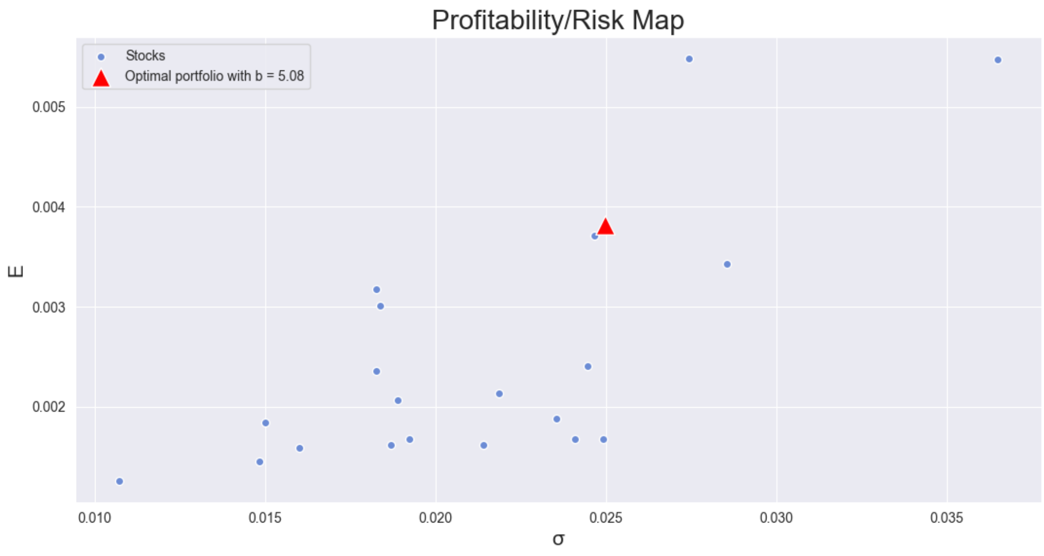

Рис.5 Оптимальный портфель относительно активов

В результате получился портфель со следующими характеристиками:
E ~ 0.0038
σ ~ 0.025

2.4 Сравните два портфеля: истинный (п.1) и выборочный (п.2.3). Оцените относительную ошибку в определении весов портфеля в норме Manhattan (L^1 норма Минковского). Сделайте выводы. Сделайте сравнение в системе координат (σ, E).

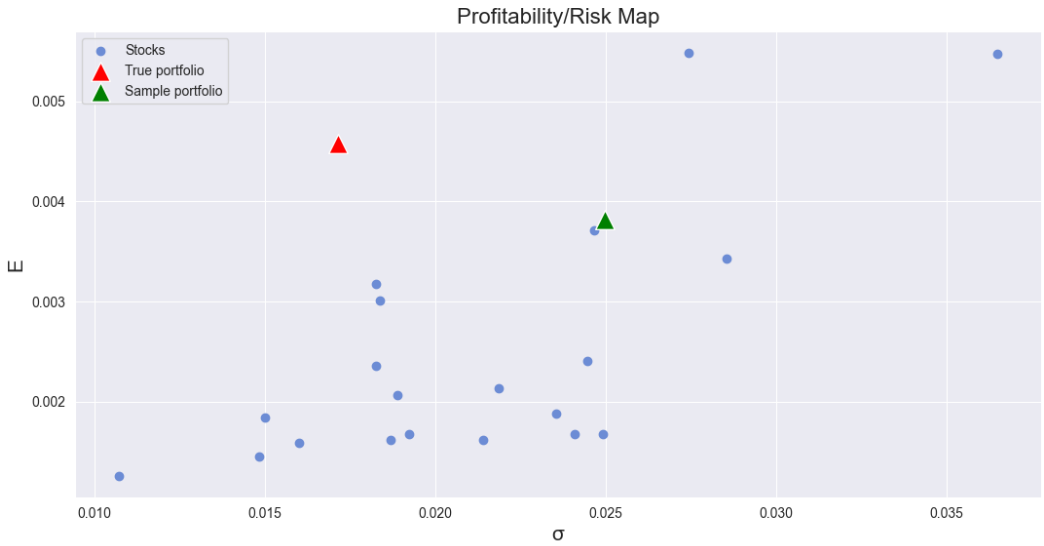

Рис.6 Сравнение двух портфелей

<u>L1 норма вектора - 1.564</u>

Можно сделать вывод, что сгенерированный портфель достаточно далеко находится от истинного, так он более рискованный, но менее доходный относительно исходного портфеля.

2.5. Повторите эксперимент S=40 раз и оцените среднюю относительную ошибку по S повторениям эксперимента. Сделайте выводы. Сделайте сравнение в системе координат (σ, E).

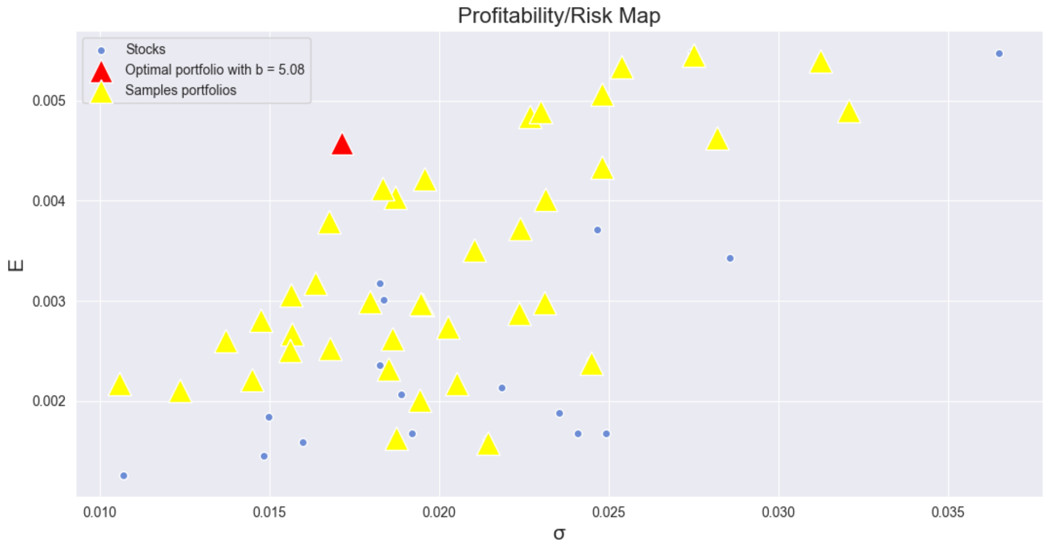

Рис.7 Демонстрация результатов

Средняя L1-норма по 40 экспериментам - 1.491

Можно заметить достаточно сильный разброс генерируемых портфелей, что говорит о не точности данной оценки. Однако на карте изображены портфели, которые достаточно близко расположены от истинного, но их количество крайне мало. Так же отметим, что все сгенерированные портфели расположены ниже эффективного фронта.

2.6 Предположите, что нам известны точные значения математических ожиданий E=(E_1, E_2, …, E_N). Повторите пп. 2.2-2.5. используя оценку только матрицы ковариаций (т.е. решайте задачу оптимизации

$$-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{est}}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{min}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Здесь $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E_1 x_1} + \boldsymbol{E_2 x_2} + \ldots + \boldsymbol{E_N x_N}$, $[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{est}}(\boldsymbol{x})]^2 = \sum\sum \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{i,j}}^{\mathrm{est}} \boldsymbol{x_i x_j}$
Сравните точность этих портфелей и портфелей п.2.3

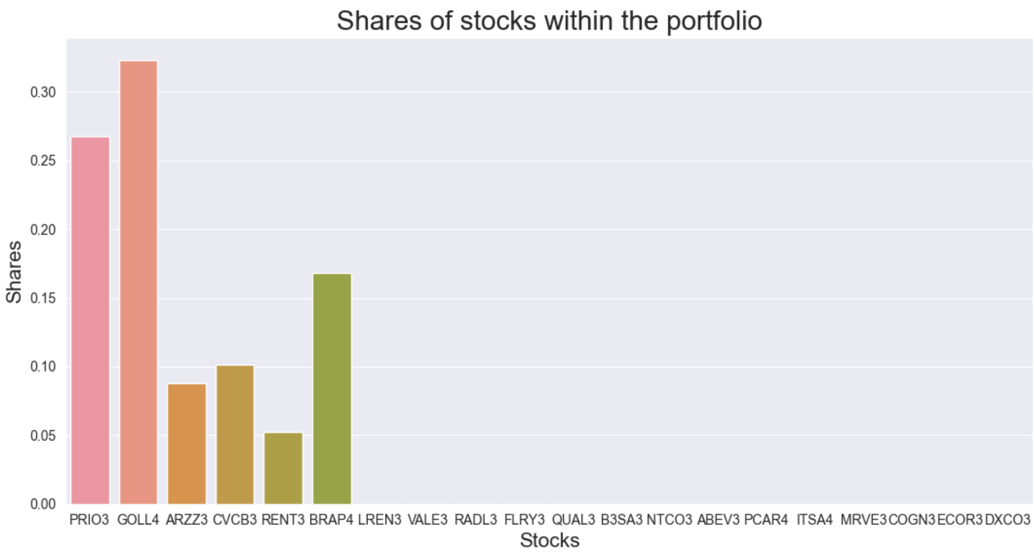

Рис.8 Распределение долей каждого актива

Стоит отметить, что данное распределение долей активов близко к распределению долей активов в истинном портфеле.

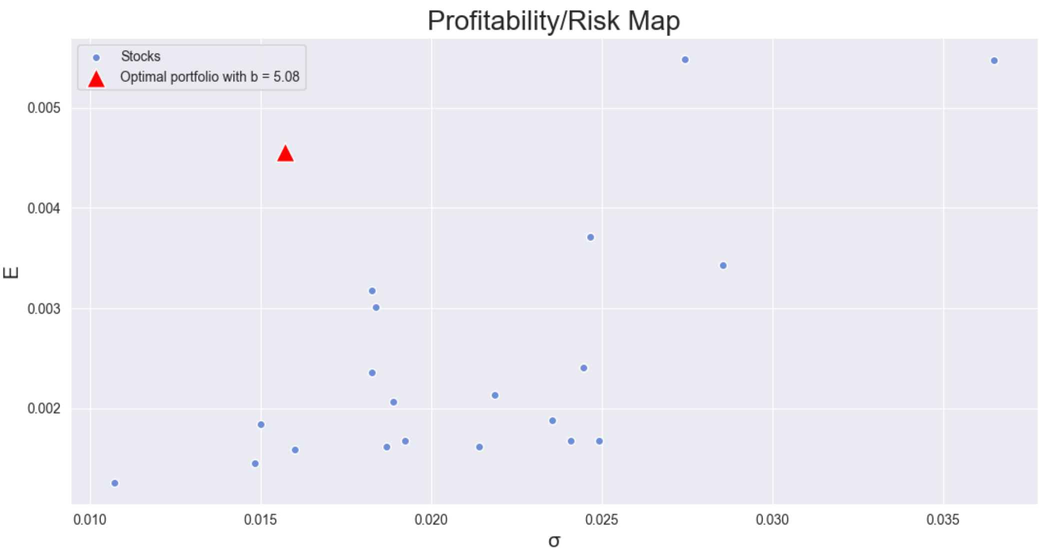

Рис.9 Расположение портфеля относительно активов

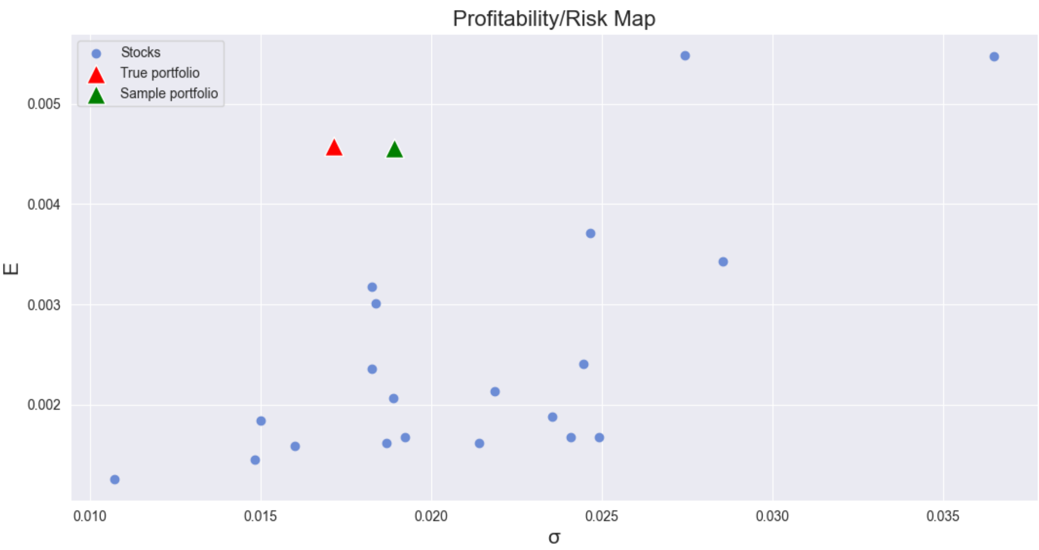

Рис.10 Сравнение полученного портфеля и истинного

Отметим, что полученный портфель достаточно близко находится от исходного, что говорит о хорошей точности оценки.

<u>L1 норма 0.551</u>

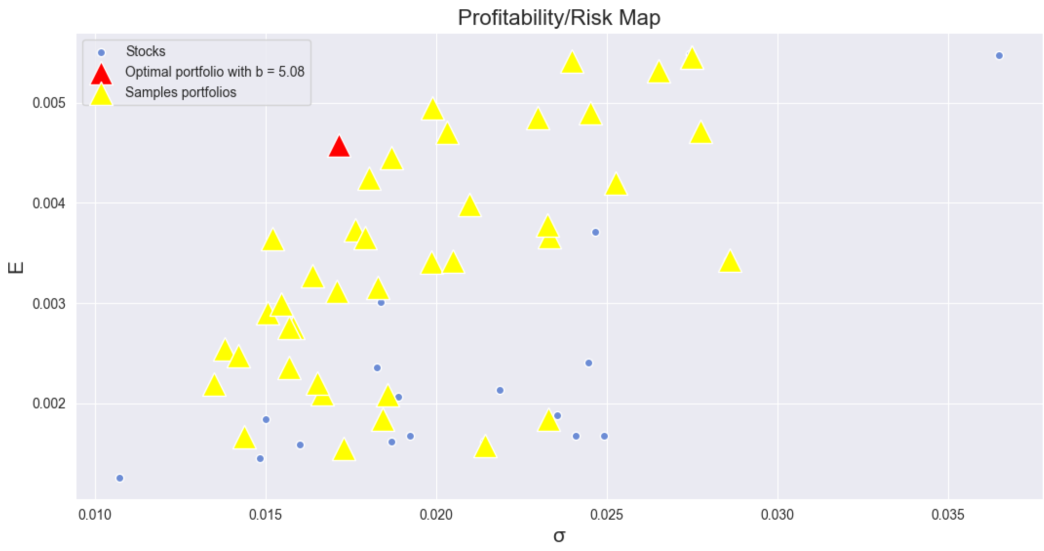

Рис.11 Демонстрация результатов генерации

<u>Средняя L1-норма по 40 экспериментам - 1.460</u>

Заметим, что в данном случае распределение генерированных портфелей более приближенное к исходному, в сравнении с предыдущей оценкой.

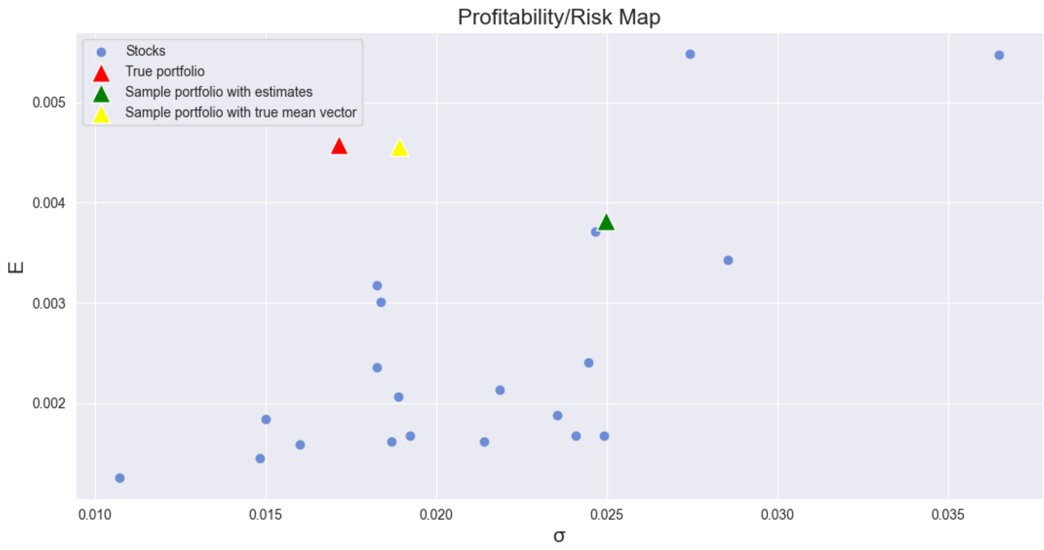

Рис.12 Сравнение полученных портфелей

В результате, знание вектора средних позволяет нам сделать более точную оценку относительно истинного портфеля.

3. Оценка неопределенности оптимального CVaR портфеля
3.1 Уровень значимости β выбран 0,95. Число наблюдений T. Используя сгенерированные наблюдения из п.2.1 решите задачу ЛП для определения оптимального $CVaR_{\beta}$ портфеля. Найдите и зафиксируйте веса портфеля и значение целевой функции CVaR.

Задача имеет вид:

$$u_t = -x_1 r_1(t) - x_2 r_2(t) - \cdots - x_N r_N(t) - \alpha;$$

$$\alpha + \frac{1}{T(1-\beta)} \sum_{t=1}^{T} u_t \to \min$$

subject to $(t = 1, 2, \ldots, T)$

$$x \in D, \ u_t \geq 0, \ x_1 r_1(t) + x_2 r_2(t) + \cdots + x_N r_N(t) + \alpha + u_t \geq 0$$

Решение задачи оптимизации реализовано аналогично предыдущей лабораторной работе(посредством языка Python,а точнее с помощью библиотеке scipy).

В результате получился следующий портфель:

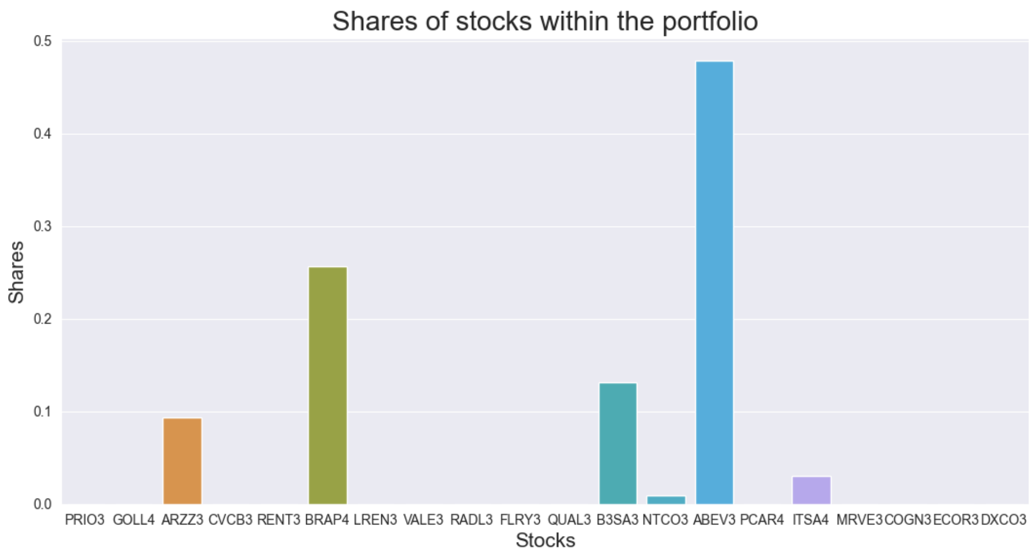

Рис.13 Распределение долей каждого актива

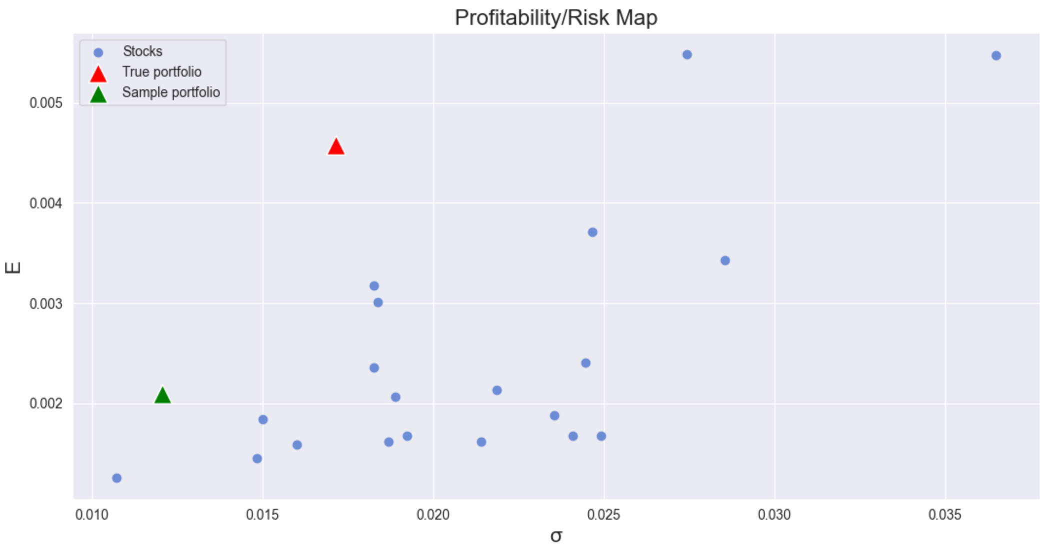

Рис.14 Расположение полученного портфеля относительно всех активов

3.2 Сравните два портфеля: истинный (п.1) и найденный в п.3.1. Оцените относительную ошибку в определении весов портфеля в норме Manhattan (L^1 норма Минковского). Сравните с ошибкой портфеля из п. 2.3

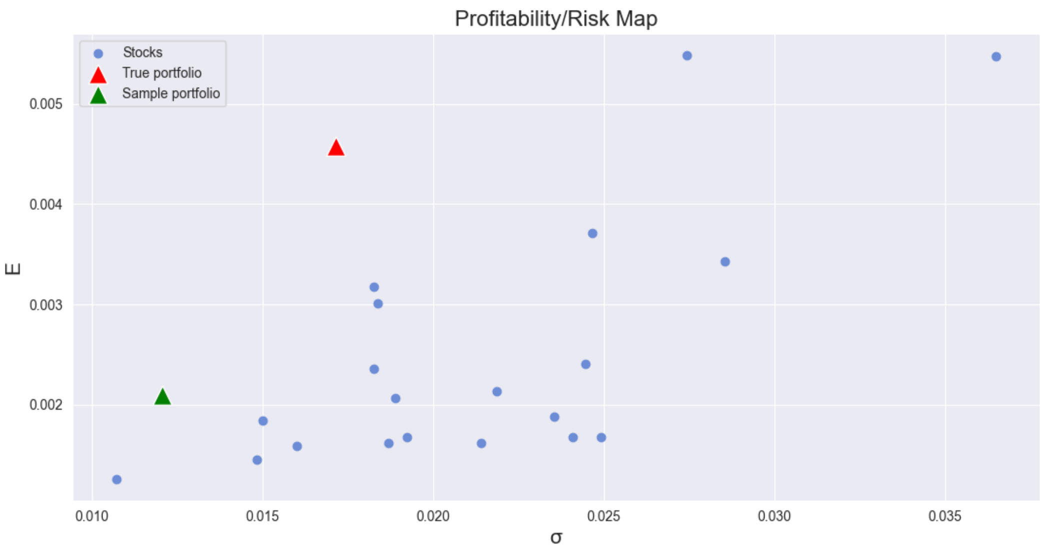

Рис.15 Сравнение найденного портфеля с истинным портфелем.

Отметим, что полученный портфель расположен достаточно далеко относительно исходного портфеля.

<u>L1 норма вектора в п.2.3 - 1.564</u>
<u>L1 норма вектора для CVAR - 1.758</u>

3.3. Повторите эксперимент S раз и оцените среднюю относительную ошибку по S повторениям эксперимента. Сделайте выводы. Сравните с ошибкой из п. 2.5

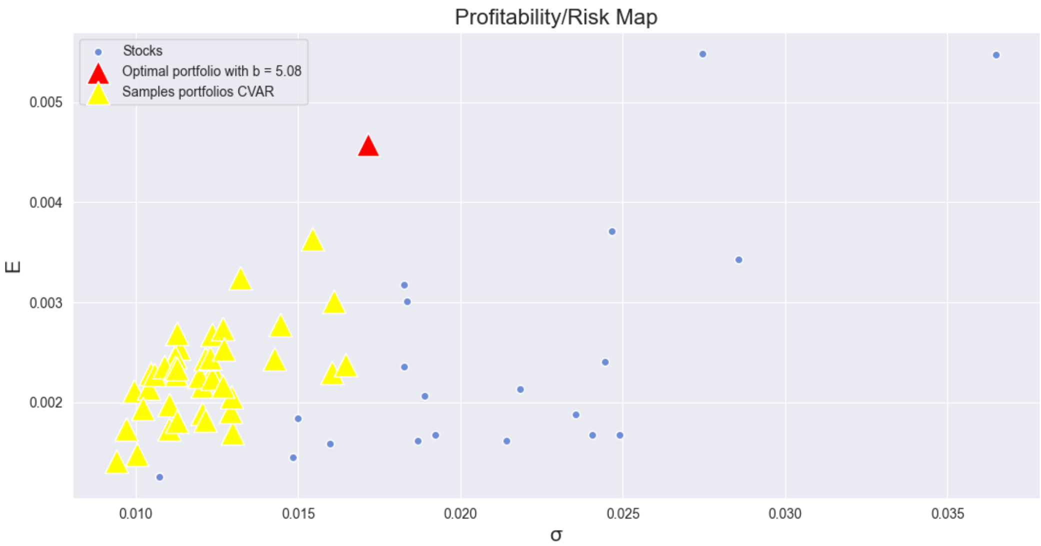

Рис.16 Демонстрация результатов генерации портфелей.

<u>Средняя L1-норма CVAR по 40 экспериментам - 1.628</u>

Заметим, что сгенерированные портфели расположены относительно далеко истинного портфеля.