

Higher-Order Tikhonov

$$x_\alpha = \min_x \left\{ \|Gx - y\|_2^2 + \alpha^2 \|Lx\|_2^2 \right\}$$

$$= \min_x \left\| \begin{bmatrix} G \\ \alpha L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} G^T & \alpha L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ \alpha L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} G^T & \alpha L^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (G^T G + \alpha^2 L^T L) x - G^T y = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{solve}$$

$$(G^T G + \alpha^2 L^T L) x = G^T y$$