Analisi Matematica 1

by F. Montefalcone

Derivate successive

Il concetto di derivata si generalizza "induttivamente".

Ad esempio, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \varnothing)$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Per semplicità, siano $A \subseteq D(A)$ e $x_0 \in A$.

La *derivata seconda* di f in x_0, se esiste, è data da

$$(f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f')(x) - (f')(x_0)}{x - x_0} \quad (\in \mathbb{R})$$

Notazione. Si usano i simboli $f''(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}, \ldots$

Derivate successive

Analogamente

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}, \ldots,$$

è la *derivata n-esima* di f in x_0, ossia la derivata della funzione $f^{(n-1)}(x)$ in x_0.

In altre parole, *f è derivabile n volte* in x_0 se è derivabile $(n-1)$ volte in x_0 e se esiste il seguente limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

In tal caso si pone

$$f^{(n)}(x_0) \overset{def.}{=} (f^{(n-1)})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivate successive

D'ora in poi useremo la seguente notazione. Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Allora si pone

$$C^n(A) \overset{def.}{=} \left\{ \begin{array}{r} f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } A \text{ e la} \\ \text{derivata } n\text{-esima di } f \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

In particolare $C^0(A) = C(A)$ è l'insieme delle funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$.

Derivate successive

Somma di funzioni e prodotti di una funzione per un numero sono ancora elementi di C(A)

Vedremo che $C^n(A)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Col simbolo $C^\infty(A)$ si indica lo spazio vettoriale delle funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili in A.

Valgono le seguenti inclusioni (strette):

$$\boxed{C^0(A) \supsetneq C^1(A) \supsetneq C^2(A) \supsetneq \cdots \supsetneq C^n(A) \supsetneq C^{n+1}(A) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(A)}.$$

Si pone

$$C^\infty(A) \overset{def.}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A).$$

Osservazione

Che le inclusioni siano strette può essere dimostrato usando il seguente esempio. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{n < \alpha < n+1}$. Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^{\alpha}.$$

Allora $f \in C^n(\mathbb{R})$. Ciò segue dal fatto che

$$D^n f(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|x|^{\alpha-n}(\operatorname{segn} x)^n & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

La formula implica anche che $D^{n+1} f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

Pertanto $f \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$.

Esempi $(x \neq 0)$

- $D|x|^3 = 3|x|^2 \cdot \operatorname{sgn} x$
- $D^2|x|^3 = 3 \cdot 2 \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn}^2 x$
- $D^3|x|^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \operatorname{sgn}^3 x$

$\alpha > 1$

$$\frac{|0+h|^\alpha - 0^\alpha}{h} = |h|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$(\alpha - 1 > 0)$

NB $|h| = h \cdot \operatorname{sgn} h$

- $D|x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} x$ $\boxed{3 < \alpha < 4}$
- $D^2|x|^\alpha = \alpha \cdot (\alpha-1)|x|^{\alpha-2} \cdot \operatorname{sgn}^2 x$
- $D^3|x|^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)|x|^{\alpha-3} \operatorname{sgn}^3 x$

...

Derivate successive

Proposizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme aperto. Siano $f, g \in C^n(A)$, $n \geq 1$. Valgono le seguenti:

1) $f + g \in C^n(A)$ *e*
$$D^n(f+g)(x) = D^n f(x) + D^n g(x) \quad \forall x \in A.$$
2) *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *allora* $\lambda f \in C^n(A)$ *e*
$$D^n \lambda f = \lambda D^n f.$$
3) *Si ha che* $fg \in C^n(A)$ *e vale la formula*
$$D^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x) \quad \forall x \in A.$$

Non dimostriamo la precedente (si può fare per induzione).

$$D(fg) = Df \cdot g + f\, Dg$$

$$D^2(fg) = D^2 f \cdot g + 2\, Df\, Dg + f\, D^2 g$$

$$D^3(fg) = D^3 f \cdot g + 3\, D^2 f \cdot Dg + 3\, Df \cdot D^2 g + f\, D^3 g$$

$$\ldots$$

Questo schema ricalca la tabella dei coefficienti del Triangolo di Tartaglia (ossia quelli nel Binomio di Newton)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ se $x \in A \setminus \{x_0\}$.

Definizione (O grande)

Si dice che f *è un "O grande" di g per* $x \to x_0$, e in tal caso si pone

$$f = O(g) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se

$$\exists\, M > 0 \ : \ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$$

per qualche intorno $W \in \mathscr{U}_{x_0}$.

In altre parole il quoziente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ è localmente limitato per $x \to x_0$.

Definizione (*o* piccolo)

Se esiste $\omega\colon A \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$ e $\omega(x) \to 0$ per $x \to x_0$ si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

In questo caso si dice che f *è un "o piccolo" di* g *per* $x \to x_0$.

Infinitesimi, O grande e o piccolo

La definizione implica che

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

- se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

Notare che se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ allora è vero anche che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Esercizio

Fare ("costruire") esempi di f, g tali che $f = o(g)$ e $f = O(g)$ per $x \to x_0$.

Definizione

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Una funzione $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta *polinomio* di grado $\leq n$ se esistono $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (costanti) tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguito si pone $\mathscr{P}_n$ per indicare la famiglia delle funzioni polinomiali $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di grado $\leq n$. Si osservi che $\mathscr{P}_n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Polinomi di Taylor

- Si può sempre "riscrivere" p(x) col cambio di variabile $x \longleftrightarrow x - x_0$

Proposizione (♣)

Se $p \in \mathscr{P}_n$ con $n \geq 1$, allora

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\ \exists\ b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}\ :\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione.

Cenni. La prova si effettua **per induzione**. Verifichiamo cosa accade per $n = 1$.
Se $p \in \mathscr{P}_1$ allora si ha $p(x) = a_0 + a_1 x$.
Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1 x_0.$$

Allora basta porre

$$b_0 \overset{def.}{=} a_0 + a_1 x_0, \qquad b_1 \overset{def.}{=} a_1.$$

Il resto della prova è lasciato come esercizio facoltativo. □

Es. Se $p(x)$ ha grado 0 e $p(x) = o(1)$ allora $p(x) = a_0 = o(1) \Rightarrow a_0 = 0$.

Se $p(x)$ ha grado 1, $p(x) = a_0 + a_1 x = o(x) \Longrightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0$.

$(x_0 = 0)$

Corollario (♢)

Sia $p \in \mathscr{P}_n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Allora $p = 0$.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente si ottiene che

$$\exists\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\ :\ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Dobbiamo verificare che $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

Ragioniamo per assurdo.
Allora esiste $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tale che $a_k \neq 0$. Prendiamo il minimo di tali k, cioè $m \overset{def.}{\equiv} \min\{k : a_k \neq 0\}$. Si ha

$$p(x) = (x - x_0)^m \left(a_m + a_{m+1}(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^{n-m}\right)$$

e dunque

$$\frac{p(x)}{(x - x_0)^m} \xrightarrow[x \to x_0]{} a_m \neq 0. \tag{2}$$

$\square$

Ma $m \leq n$ e, per ipotesi, $\dfrac{p(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Pertanto

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^m} = \underbrace{\frac{p(x)}{(x-x_0)^n}}_{\downarrow \atop 0} \cdot \underbrace{(x-x_0)^{n-m \geq 0}}_{\downarrow \atop 0} \to 0.$$

Ma questo contraddice (2).

$\square$

Es. $D^2 y^3 = D(3y^2) = 3 \cdot 2 \cdot y$ $\qquad h=2,\ k=3$

$D^3 y^3 = 3!\ ,\ D^4 y^3 = 0$ $\qquad \frac{k!}{(k-h)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2$

$(y = x - x_0)$

Lemma

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ *fissato e sia* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Allora*

$$D^h (x - x_0)^k = \begin{cases} k! \dfrac{(x - x_0)^{k-h}}{(k-h)!} & \text{se } h \le k \\ 0 & \text{se } h > k \end{cases}.$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio facoltativo.

Polinomi di Taylor

Proposizione

Se $p \in \mathscr{P}_n$ allora $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Facoltativa. Ovvia se $n = 0$. Se $n \geq 1$ esistono $b_0, \ldots, b_n$ tali che

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(ciò segue dalla Proposizione (♣)).

Dal Lemma segue che $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che (se $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h \leq n$)

$$D^h p(x) = \sum_{k=h}^{n} b_k k! \, \frac{(x - x_0)^{k-h}}{(k-h)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se $x = x_0$, segue che

$$D^h p(x_0) = b_h h! \quad \forall\; h = 0, 1, \ldots, n.$$

Ossia $b_h = \dfrac{D^h p(x_0)}{h!}$ e la tesi segue usando la (3). □

Definizione (Polinomio di Taylor)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Sia $x_0 \in I$ e si assuma che f è derivabile n volte in x_0.
Si pone

$$\boxed{T_n^{x_0} f(x) \stackrel{def.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Il polinomio $T_n^{x_0}$ è il *polinomio di Taylor di f di ordine n, relativo al punto x_0* (se $x_0 = 0$ si dice *polinomio di McLaurin* di f di ordine n).

N.B. La Proposizione precedente dice che ogni polinomio coincide col suo polinomio di Taylor

Teorema (Formula di Taylor con resto di Peano)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto.
Sia $x_0 \in I$ ed assumiamo che f è derivabile n volte in x_0.
Allora esiste un'unico polinomio $T \in \mathscr{P}_n$ tale che

$$\boxed{f(x) = T(x) + o((x - x_0)^n)} \quad \text{per } x \to x_0. \tag{4}$$

Inoltre $T = T_n^{x_0}$, cioè questo polinomio è il polinomio di Taylor di f relativo al punto x_0 e di ordine n.

Dimostrazione. (Unicità) Se T, $\overline{T}$ sono entrambi polinomi di grado n che soddisfano (4) allora

$$T(x) = \overline{T}(x) + o((x - x_0)^n)$$

ed il Corollario ($\diamondsuit$) implica che $T = \overline{T}$.

(Esistenza) *Sia* $T \overset{def.}{=} T_n^{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Allora si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{5}$$

Dimostriamo la (5).
Sappiamo che

$$T^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per} \quad k = 0, \ldots, n. \tag{6}$$

Dato che, se $x \to x_0$ allora

$$f(x) - T(x) \longrightarrow f(x_0) - T(x_0)$$

e dato che

$$(x - x_0)^n \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,$$

allora (per il teorema dell'Hôpital) si ha

$$(5) \text{ è vera} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0.$$

Si reitera questo ragionamento e si vede che

$$(5) \text{ è vera} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0.$$

Ora, dato che $\underbrace{f^{(n-1)}(x_0) = T^{(n-1)}(x_0)}_{\text{(si usa (6))}}$, se $x \to x_0$ si ha

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \frac{T^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} f^{(n)}(x_0) - T^{(n)}(x_0) = 0$$

(dove si è usata la (6)). $\square$

Osservazione

La funzione $o((x-x_0)^n)$ è chiamata *resto di Peano* dell'approssimazione di f con il suo polinomio di Taylor $T_n^{x_0}$.

Non è l'unico "resto" e non è il più preciso...