



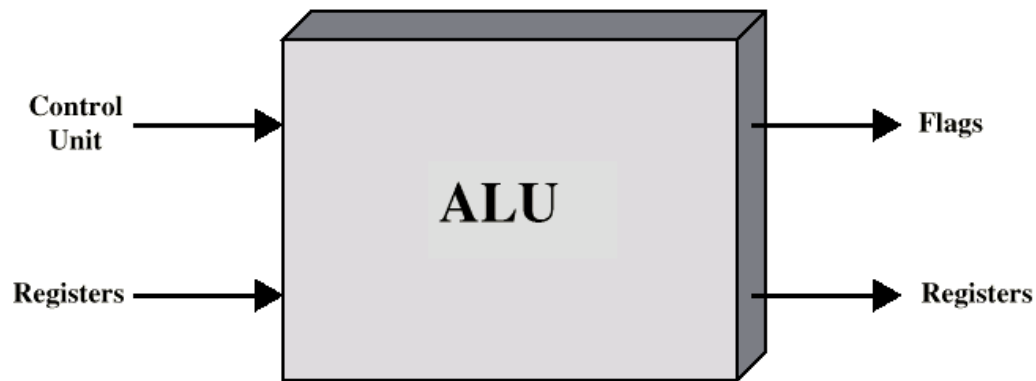
Aritmetica del calcolatore



Unità aritmetica e logica

- Esegue le operazioni aritmetiche e logiche
- Ogni altra componente nel calcolatore serve questa unità
- Gestisce gli interi
- Può gestire anche i numeri reali

Input e output della ALU



Rappresentazione degli interi

- Possiamo solo usare 0 e 1 per rappresentare tutto
- I numeri positivi sono scritti in binario come sappiamo
 - e.g. 41=00101001
- Non c'è bisogno del segno

Rappresentazione in modulo e segno

- Segno: bit più a sinistra

- ☐ 0 significa positivo
- ☐ 1 significa negativo

- Esempio:

- ☐ +18 = 00010010
- ☐ -18 = 10010010

- Problemi

- ☐ Per eseguire operazioni aritmetiche bisogna considerare sia i moduli che i segni
- ☐ Due rappresentazioni per lo 0: +0 and -0

Complemento a due: in generale

- Positivi: da 0 (n zeri) a $2^{n-1} - 1$ (uno zero seguito da n-1 uni)

- Negativi:

- ☐ Bit più significativo (più a sinistra) a 1
- ☐ I restanti n-1 bit possono assumere 2^{n-1} configurazioni diverse, quindi da -1 a -2^{n-1}

- Se sequenza di bit $a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$,

$$\text{numero} = -2^{n-1} a_{n-1} + \sum_{(i=0, \dots, n-2)} 2^i a_i$$

- Numeri positivi: $a_{n-1} = 0$
- Numeri negativi: positivo $- 2^{n-1}$
- NOTA BENE: la formula **definisce** il complemento a due

Rappresentazione in complemento a due

- bit più a sinistra $\rightarrow -2^{n-1}$
- Per n bit: possiamo rappresentare tutti i numeri da -2^{n-1} a $+2^{n-1} - 1$
- Per i numeri positivi, come per modulo e segno
 - n zeri rappresentano lo 0, poi 1, 2, ... in binario per rappresentare 1, 2, ... positivi
- Per i numeri negativi, da n uni per il -1, andando indietro

Complemento a due su 3 e 4 bit

Bit pattern	Value represented
011	3
010	2
001	1
000	0
111	-1
110	-2
101	-3
100	-4

Bit pattern	Value represented
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

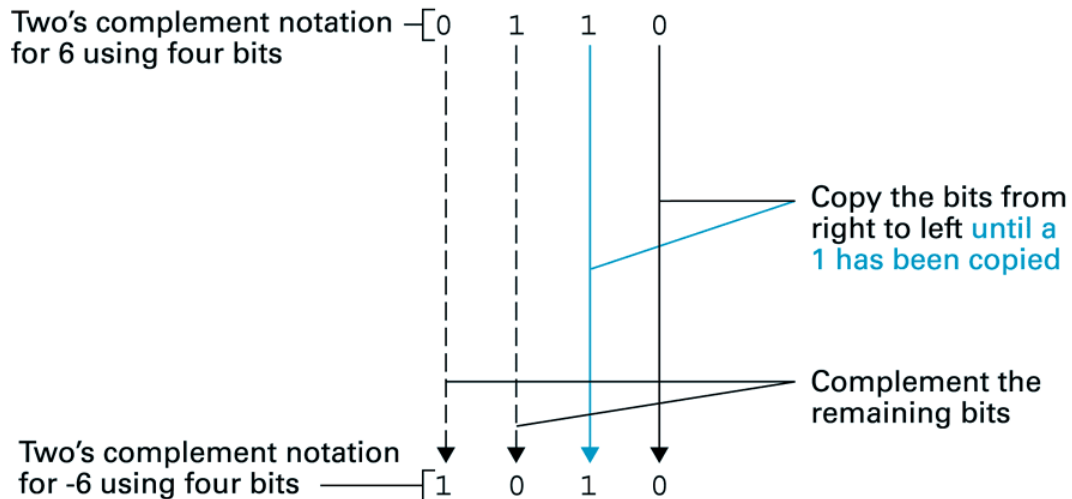
Complemento a due: numeri negativi

- Confrontiamo le rappresentazioni di k e $-k$
 - da destra a sinistra, uguali fino al primo 1 incluso
 - poi una il complemento dell'altra
- Esempio (su 4 bit): $2=0010$, $-2=1110$

Complemento a due: decodifica veloce

- Se bit più a sinistra $=0 \rightarrow$ positivo, altrimenti negativo
- Se positivo, basta leggere gli altri bit
- Se negativo, scrivere gli stessi bit da destra a sinistra fino al primo 1, poi complementare, e poi leggere
- Es.: 1010 è sicuramente negativo (bit più a sinistra vale -2^{n-1}), rappresenta 0110 (6), quindi -6

Da k a -k



Complemento a due: altro metodo di decodifica veloce

- Data la rappresentazione di k (positivo), -k si può anche ottenere così:
 - Complemento bit a bit della rappresentazione di k
 - Somma di 1 al risultato
- Esempio:
 - $2 = 0010$
 - Complemento: 1101
 - $1101 + 1 = 1110$
 - $-2 = 1110$

Benefici del complemento a 2

- Una sola rappresentazione dello zero
- Le operazioni aritmetiche sono facili
- La negazione è facile

- $3 = 00000011$

- Complemento Booleano 11111100

- Somma di 1 11111101

Numeri rappresentabili

- Complemento a 2 su 8 bit

- Numero più grande: $+127 = 01111111 = 2^7 - 1$

- Numero più piccolo: $-128 = 10000000 = -2^7$

- Complemento a 2 su 16 bit

- $+32767 = 01111111\ 11111111 = 2^{15} - 1$

- $-32768 = 10000000\ 00000000 = -2^{15}$

Esercizi

- Da complemento a 2 a base 10:
 - 00011, 01111, 11100, 11010, 00000, 10000
- Da base 10 a complemento a 2 su 8 bit:
 - 6, -6, 13, -1, 0
- Numero più grande e più piccolo per la notazione in complemento a 2 su 4, 6, 8 bit

Conversione tra diverse lunghezze

- Da una rappresentazione su n bit ad una rappresentazione dello stesso numero su m bit ($m > n$)
- Modulo e segno: facile
 - Bit di segno nel bit più a sinistra
 - $m-n$ zeri aggiunti a sinistra
 - Esempio (da 4 a 8 bit): 1001 → 10000001

Conversione tra diverse lunghezze

- Complemento a 2: stessa cosa del modulo e segno per numeri positivi
- Per numeri negativi: replicare il bit più significativo dalla posizione attuale alla nuova

- Esempi:

- ☐ +18 (8 bit) = 00010010
- ☐ +18 (16 bit) = 00000000 00010010
- ☐ -18 (8 bit) = 11101110
- ☐ -18 (16 bit) = 11111111 11101110

Opposto su numeri in complemento a 2

- Due passi:
 - ☐ Complemento
 - ☐ Somma 1

Opposto: caso speciale 1

- $0 =$ 00000000
- Complemento: 11111111
- Somma 1: +1
- Risultato: 1 00000000
- L'uno più a sinistra è un overflow, ed è ignorato. Quindi $-0 = 0$

Opposto: caso speciale 2

- $-128 =$ 10000000
- Complemento: 01111111
- Somma 1: +1
- Risultato: 10000000
- Quindi, $-(-128) = -128$!
- 2^n stringhe su n bit, un numero positivo in più di quelli negativi: -2^n si può rappresentare, ma $+2^n$ no $\rightarrow -2^n$ non può essere complementato

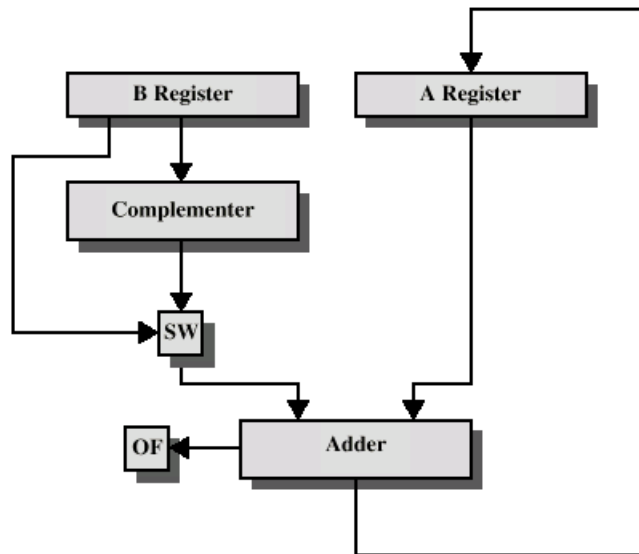
Somma e sottrazione

- Per la somma: normale somma binaria
 - Controllare il bit più significativo per l'overflow
- Per la sottrazione: basta avere i circuiti per somma e complemento
 - Es. (4 bit): $7-5 = 7 + (-5) = 0111 + 1011 = 0010$
 - $5 = 0101 \rightarrow -5 = 1011$

Esempi di somme

Problem in base ten		Problem in two's complement		Answer in base ten
$\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0010 \\ \hline 0101 \end{array}$	→	5
$\begin{array}{r} -3 \\ + -2 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 1101 \\ + 1110 \\ \hline 1011 \end{array}$	→	-5
$\begin{array}{r} 7 \\ + -5 \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{r} 0111 \\ + 1011 \\ \hline 0010 \end{array}$	→	2

Hardware per somma e sottrazione



OF = overflow bit
SW = Switch (select addition or subtraction)

Overflow

- Overflow: quando si sommano due numeri positivi tali che il risultato è maggiore del massimo numero positivo rappresentabile con i bit fissati (lo stesso per somma di due negativi)
- Se la somma dà overflow, il risultato non è corretto
- Come si riconosce? Basta guardare il bit più significativo della risposta: se 0 (1) e i numeri sono entrambi negativi (positivi) → overflow

Esempi di somme su 4 bit

- $-4 (1100) + 4 (0100) = 10000 (0)$
 - Riporto ma non overflow
- $-4 (1100) - 1 (1111): 11011 (-5)$
 - Riporto ma non overflow
- $-7 (1001) - 6 (1010) = 10011$ (non è -13, ma 3)
 - Overflow
- $+ 7 (0111) + 7 (0111) = 1110$ (non è 14, ma -2)
 - Overflow

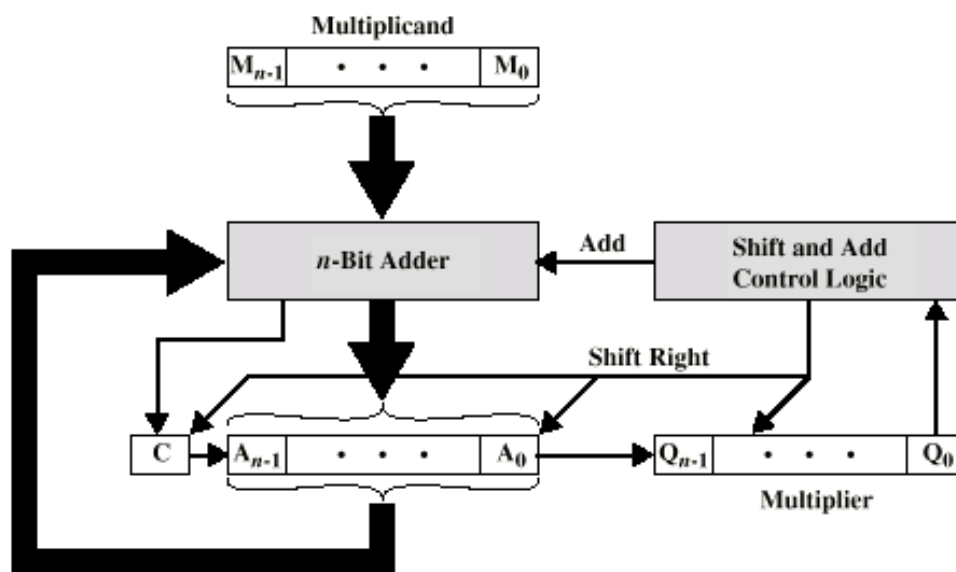
Moltiplicazione

- Più complessa
- Calcolare il prodotto parziale per ogni cifra
- Sommare i prodotti parziali

Esempio di moltiplicazione

- 1011 Moltiplicando (11 decimale)
- x 1101 Moltiplicatore (13 decimale)
- 1011 Prodotto parziale 1
- 0000 Prodotto parziale 2
- 1011 Prodotto parziale 3
- 1011 Prodotto parziale 4
- 10001111 Prodotto (143 decimale)
- Nota: da due numeri di n bit potremmo generare un numero di $2n$ bit

Moltiplicazione di interi **senza segno**

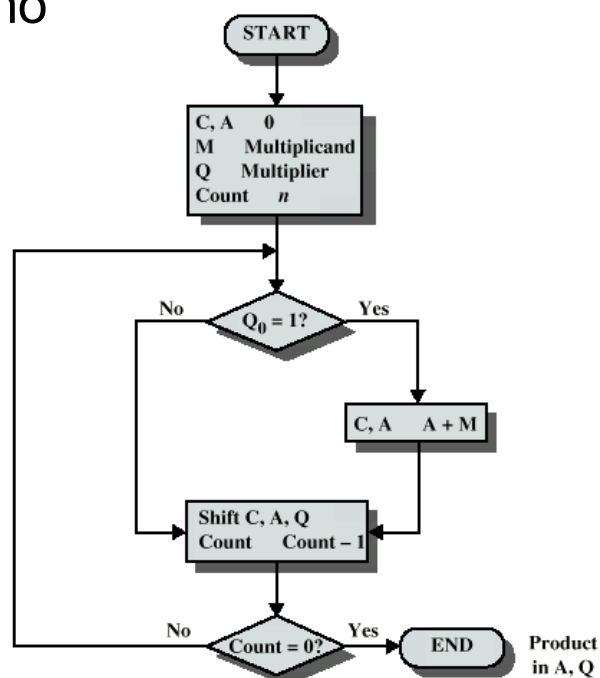


(a) Block Diagram

Implementazione

- Se $Q_0 = 0$, traslazione di C, A e Q
- Se $Q_0 = 1$, somma di A e M in A, overflow in C, poi traslazione di C, A, e Q
- Ripetere per ciascun bit di Q
- Prodotto ($2n$ bit) in A e Q

Diagramma di flusso per la moltiplicazione senza segno



Un esempio

C	A	Q	M	Initial Values	
0	0000	1101	1011		
0	1011	1101	1011	Add	} First Cycle
0	0101	1110	1011	Shift	
0	0010	1111	1011	Shift	} Second Cycle
0	1101	1111	1011	Add	
0	0110	1111	1011	Shift	} Third Cycle
1	0001	1111	1011	Add	
0	1000	1111	1011	Shift	} Fourth Cycle

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Per la somma, i numeri in complemento a 2 possono essere considerati come numeri senza segno
- Esempio:
 - $1001 + 0011 = 1100$
 - Interi senza segno: $9+3=12$
 - Complemento a 2: $-7+3=-4$

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Per la moltiplicazione, questo non funziona!
- Esempio: $11 (1011) \times 13 (1101)$
 - Interi senza segno: 143 (10001111)
 - Se interpretiamo come complemento a 2: $-5 (1011) \times -3 (1101)$ dovrebbe essere 15, invece otteniamo 10001111 (-113)
- **Non funziona se almeno uno dei due numeri è negativo**

Moltiplicare numeri in complemento a 2

- Bisogna usare la rappresentazione in complemento a due per i prodotti parziali:

$\begin{array}{r} 1001 \quad (9) \\ \times 0011 \quad (3) \\ \hline 00001001 \quad 1001 \times 2^0 \\ 00010010 \quad 1001 \times 2^1 \\ \hline 00011011 \quad (27) \end{array}$	$\begin{array}{r} 1001 \quad (-7) \\ \times 0011 \quad (3) \\ \hline 11111001 \quad (-7) \times 2^0 = (-7) \\ 11110010 \quad (-7) \times 2^1 = (-14) \\ \hline 11101011 \quad (-21) \end{array}$
---	--

(a) Unsigned integers

(b) Twos complement integers

- Problemi anche se moltiplicatore negativo
- Una possibile soluzione:
 1. convertire i fattori negativi in numeri positivi
 2. effettuare la moltiplicazione
 3. se necessario (-+ o +-), cambiare di segno il risultato
- **Soluzione utilizzata: algoritmo di Booth (più veloce)**



Divisione

- Più complessa della moltiplicazione
- Basata sugli stessi principi generali
- Utilizza traslazioni, somme e sottrazioni ripetute