Appunti di Analisi

29 settembre **2021**

Carlo Rosso

Indice

Raccomando di controllare wolfarm.com

1 Studio di Funzione

Lo studio di funzione deve essere ordinato e svolto con ordine:

1. Dominio: si enuncia il dominio, i punti in cui la funzione è definita;
2. Limite: si calcola il limite agli estremi del dominio; si verifica l'eventuale esistenza di asintoti, obliqui e non;
3. Zeri della funzione: studiare in quali punti la funzione si annulla;
4. Derivata Prima: si calcola la derivata prima della funzione e si comprende in quali intervalli è crescente oppure decrescente;
5. Derivata Seconda: si studia la concavità e la convessità del grafico ed eventuali punti di flesso.

Gli asintoti obliqui si calcolano con le seguenti equazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = m \tag{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - mx = c \tag{3}$$

$$y = mx + c \tag{4}$$

La prima condizione è di esistenza del limite obliquo. Nella seconda equazione si calcola la tangente, il coefficiente angolare, della limite obliquo. Grazie alla terza equazione, calcoliamo l'intercetta del limite obliquo. Infine, mettiamo assieme tutte le informazioni e scriviamo la formula del limite obliquo. **NB**: il limite obliquo è una retta a cui la funzione tende all'infinito.

2 L'Integrale di Riemann

Si chiama scomposizione di $I0[a;b]$ un sottoinsieme σ finito di I tale che $a, b \in \sigma$.

Si definisce misura di $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ per $k = 1, \dots, n$: $mis(I_k) = x_k - x_{k-1}$.
Si pone $|\sigma| = \max\{mis(I_k) : k = 1, \dots, n\}$. Il numero $|\sigma|$ si chiama finezza della scoposizione σ. Praticamente la finezza di una scomposizione è la distanza più grande tra gli elementi successivi di una scomposizione.
L'insieme di tutte le scomposizioni di $[a, b]$ è indicato con il simbolo $\Omega_{[a,b]}$. Se $\sigma_2 \subset \sigma_1$ si dice che σ_1 è più fine di σ_2. Notare che è sufficiente che σ_1 contenga almeno tutti gli elementi di σ_2 perchè risulti più fine.
Per definizione $S(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} \sup f \cdot mis(I_k)$. Cioè la somma delle aree infinitesimali ottenute moltiplicando le distanze tra gli elementi di σ per il maggiore dei due elementi si dice *somma superiore*. D'altro canto, la somma delle aree infinitesimali ottenute moltiplicando le distanze tra gli elementi di σ per il minore dei due elementi si dice *somma inferiore* e si indica con $s(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} \inf f \cdot mis(I_k)$.
Si dice che una funzione f è integrabile nell'intervallo I se e solo se la somma superiore e la somma inferiore del più fine degli elementi di $\Omega_{[a,b]}$ sono uguali. f è integrabile in I se e solo se

$$\sup\{s(f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\} = \inf\{S(f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$$

In particolare $\sup\{s(f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$ è denominato integrale inferiore e $\inf\{S(f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$ è chiamato integrale superiore. Se l'integrale inferiore e l'integrale superiore coincidono, allora il

medesimo valore è definito integrale.
La funzione di Dirichlet è uno specimen di funzione non Riemann integrabile.

Teorema di Riemann

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora

$$f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \sigma \in \Omega_{[a,b]} : S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon$$

$\mathcal{R}_{[a,b]}$ è l'insieme delle funzioni derivabili nell'insieme $[a,b]$.

Teorema 10.1.2 Se $f \in C([a,b])$ allora $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Se f è continua in I allora f è integrabile in I (non se e solo se).

Teorema 10.1.3 Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, tale che l'insieme $F = \{x \in [a,b] : f$ non è continua in $x\}$ è finito. Allora $f \in \mathcal{R}_[a,b]$.

Proposizione 10.1.2 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Dimostrazione 2.1. *Proposizione 10.1.2 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è iniettiva in $[a,b]$. Per la suriettività è sufficiente prendere il codominio opportuno: l'insieme delle immagini di $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora f è biiettiva se e solo se f è invertibile. Definiamo $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ oppure $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a,b]$, a seconda che f sia monotona crescente oppure decrescente. In particolare f^{-1} è continua nel suo dominio, quindi f^{-1} è derivabile nel suo dominio. Dunque l'integrale di f nel suo dominio è uguale a $|(f(a) - f(b)) \cdot (a - b)|$.*

3 Teoremi con nome

Teorema della permanenza del segno

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Se $l > 0$ allora $\exists \overline{n} : \forall n > \overline{n},\ a_n > 0$.

Teorema dei due carabinieri

Siano $\{a_n\} > \{b_n\} > \{c_n\}$ e sia $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$. Allora $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ una successione limitata, allora ammette sottosuccessione convergente. (Bisogna costruire una sottossuccessione monotona. Tutte le successioni monotone ammettono limite; la sottossucessione è limitata e allora è convergente).

Definizione di successione di Cauchy

Una successione è chiamata di Cauchy se i suoi termini sono arbitrariamente vicini tra loro purchè gli indici siano abbastanza grandi:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} : \forall n, m > \overline{n}\ |a_n - a_m| < \epsilon$$

Teorema di completezza sequenziale di $/mathbbR$

Se una serie è di Cauchy in $\mathbb{R}$ allora converge in $\mathbb{R}$

Definizione di punto di accuulazione

Siano $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, si dice che x_0 è un punto di accumulazione in A se $\forall W \in \mathcal{U}_{x_0}\ A \backslash \{x_0\} \cap W \neq \emptyset$.

Teorema di Cauchy

Dato $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \iff \forall \epsilon \exists W \in \mathcal{U}_{\S\prime}(\forall x, y \in W \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

Teorema di composizione

Siano $f \in C(A)$ e $g \in C(f(A))$, allora $g(f(A)) \in C(A)$.

Teorema di Weierstrass

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme compatto. Se $f \in C(A)$ allora f ha max e min.

Teorema di Bolzano

Siano $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$. $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$.

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a, b]$. $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] : f'(x_0) = 0$.

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a, b]$. $\exists x_0 \in [a, b] : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $[a, b]$. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)}$

Formula di Taylor con resto di Peano

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, una funzione derivabile n volte nell'aperto I, allora

$$f(x)_n^{x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte nell'aperto I e sia $x_0 \in I$, allora

$$f(x)_n^{x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{n+1}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Teorema di Riemann

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua e limitata nell'intervallo chiuso I, allora

$$f \in \mathcal{R}_I \iff \forall \epsilon > 0 \exists \sigma \in \Omega : (S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon)$$

Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \to$ integrabile nell'intervallo definito, allora $\inf_{[a,b]} f < \mu < \sup_{[a,b]} f$ tale che μ sia uguale all'integrale tra gli estremi dell'intervallo e diviso per la differenza degli estremi.

I Teorema fondamentale del calcolo

Sia $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, posto $I_f : [a, b] \to \mathbb{R}$: integrale di f nell'intervallo $[a, b]$. Allora

- *I_f è continua in $[a, b]$;*
- *Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora $f(x_0)$ è la derivata di I_f in x_0.*

II Teorema fondamentale del calcolo

Sia $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, posto $I_f : [a, b] \to \mathbb{R}$: integrale di f nell'intervallo $[a, b]$. Allora l'integrale nell'intervallo $[a, b]$ di f è uguale a $I_f(b) - I_f(a)$.

Teorema del confronto

Sia $f(x) = O(g(x))$ per $x \to$ allora se $g(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$ $f(x) \to kl$ per $x \to x_0$ tale che $k = \frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \to x_0$.

Teorema della convergenza degli integrali oscillanti

Dato l'integrale $I_{f \cdot g} :=$ integrale di $f \cdot g$, $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue nel dominio e la derivata di g è continua nel dominio. $I_{f \cdot g} \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to \infty$ se:

1. *l'integlrale di f è limitato nel dominio;*
2. *g è monotona;*
3. *$g \to 0$ per $x \to \infty$.*

Ovvero se le ipotesi sono vere l'integrale del prodotto tra g ed f è integrabile in senso generalizzato.