Esame di Laboratorio di Calcolo Numerico per Informatica 2022/2023

16/06/2023

È richiesto l'upload in Moodle di tre file Matlab: la function **simpson38_composta.m**, la function **boole_composta.m**, uno script il cui nome deve essere **CognomeNome_matricola.m**.
Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, è possibile approssimare l'integrale

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

sostituendo con f un polinomio interpolante in alcuni punti. Usando polinomi di grado 1 e 2 è possibile generare le formule di quadratura note come formula del trapezio

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{1}{2}h\Big(f(y_0) + f(y_1)\Big)$$

con $h = (b - a)$ e $y_0 = a$ e $y_1 = b$, oppure formula della parabola (o di Simpson).

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{1}{3}h\Big(f(y_0) + 4f(y_1) + f(y_2)\Big)$$

con $h = (b - a)/2$ e $y_i = a + i \cdot h, i = 0, 1, 2$.

Altre formule di quadratura possono essere ricavate utilizzando polinomi di grado superiore, come può essere la formula di Simpson 3/8

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{3}{8}h\Big(f(y_0) + 3f(y_1) + 3f(y_2) + f(y_3)\Big)$$

con $h = (b - a)/3$ e $y_i = a + i \cdot h, i = 0, \ldots, 3$;

oppure la formula di Boole

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{2}{45}h\Big(7f(y_0) + 32f(y_1) + 12f(y_2) + 32f(y_3) + 7f(y_4)\Big)$$

con $h = (b - a)/4$ e $y_i = a + i \cdot h, i = 0, \ldots, 4$.

Tali formule sono descritte per l'intero intervallo di integrazione, nonostante ciò, possono essere utilizzate, come la formula dei trapezi e di Simpson, in maniera composita andando a suddividere l'intervallo $[a, b]$ in N sotto-intervalli e utilizzando tali formule in ciascun sotto-intervallo.

Andando quindi a prendere alcuni punti in ciascun sotto-intervallo (in una quantità necessaria per usare le formule) avremmo una formula di quadratura che utilizzerà dei nodi x_i e un certo peso associato w_i, con cui si andrà a descrivere la formula di quadratura Q_N su tutto l'intervallo $[a, b]$, che sarà del tipo

$$Q_N(f) = \sum_i w_i f(x_i)$$

Si faccia attenzione che in ciascun sotto-intervallo, gli estremi di tale sotto-intervallo sono contenuti in due sotto-intervalli (tranne i punti a e b, ovvero il primo e l'ultimo), da cui si ha che i pesi relativi allo stesso nodo si sommano.

Per capire meglio, ricordiamo che la formula composita delle parabole risulta essere

$$Q_N^{simps}(f) = \sum_{i=0}^{2N} w_i f(x_i) = \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \left(\frac{h}{3} + \frac{h}{3}\right)f(x_2) + \frac{4h}{3}f(x_3) + \cdots + \frac{h}{3}f(x_{2N})$$

da cui si ricavano i seguenti pesi

$$w_0 = w_{2N} = \frac{h}{3}, \quad w_i = \frac{2h}{3}, i \text{ è pari} \quad w_i = \frac{4h}{3}, i \text{ è dispari}$$

e con $h = (b-a)/(2N)$ e $x_i = a + i \cdot h, i = 0, \ldots, 2N$.

Partendo dalla funzione `simpson_composta` allegata si generino due funzioni, `simpson38_composta` e `boole_composta`, dove implementare le due formule descritte sopra ma in maniera composta.

Similmente alla funzione `simpson_composta`, le due funzioni dovranno avere come input gli estremi di integrazione `a`,`b` e il numero di subintervalli `N` in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione $[a, b]$ e come output i nodi di integrazione `x` e i pesi relativi ai nodi `w`.

In seguito, in uno script denominato `CognomeNome_Matricola`, si utilizzino le due funzioni create e le funzioni `simpson_composta` e `trapezi_composta` per approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} \mathrm{d}x = \mathtt{atan}(e) - \frac{\pi}{4}.$$

Si generi quindi l'errore assoluto tra le varie approssimazioni e il valore reale usando un numero di sotto-intervalli $N = 1, \ldots, 15$.

Si salvino questi errori nei vettore `err_trape`, `err_simps`, `err_simps38`, `err_boole`.

Si faccia il grafico, in scala semilogaritmica, dei vari errori sovrapposti disegnati in colori diversi e usando come stile del grafico il cerchietto collegato da una linea. Si aggiunga la legenda al grafico.

Attenzione: Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.