Appunti di Ricerca Operativa

A.A. 2023/2024

Rosso Carlo

Contents

1 Introduzione

1.1 Modelli di programmazione lineare

Un modello di programmazione lineare matematico è composto dai seguenti elementi:

- **Insiemi**: gli insiemi in cui sono contenuti gli altri elementi del sistema;
- **Parametri**: i dati del problema;
- **Variabili decisionali**: le incognite del problema;
- **Vincoli**: le relazioni tra le variabili decisionali;
- **Funzione obiettivo**: la funzione che si vuole ottimizzare, ovvero massimizzare o minimizzare.

Notiamo che i modelli di programmazione lineare sono dei particolari modelli di programmazione matematica, in cui:

- la funzione obiettivo è un'espressione lineare delle variabili decisionali;
- i vincoli sono determinati da un insieme di equazioni o disequazioni lineari.

1.2 Costruzione di un modello di programmazione lineare

Di seguito riportiamo i passi per la costruzione di un modello di programmazione:

1. **Definire le variabili decisionali**: ovvero le incognite del problema. Per ogni variabile decisionale è necessario definire il suo dominio, ovvero l'insieme dei valori che può assumere.
2. **Formulare la funzione obiettivo**: ovvero la funzione che si vuole ottimizzare, ovvero massimizzare o minimizzare. La funzione obiettivo è un'espressione lineare delle variabili decisionali.
3. **Formulare i vincoli**: ovvero le relazioni tra le variabili decisionali. I vincoli sono determinati da un insieme di equazioni o disequazioni lineari.

1.3 min-max/max-min

Scriviamo $\min\max\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\min y \\ &y \leq e_1 \\ &y \leq e_2 \\ &\vdots \\ &y \leq e_n \end{aligned}$$

Si lascia al lettore come scrivere $\max\min\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

1.4 Vincoli logici

	Formulazione non lineare	**Formulazione lineare**	**Dominio**
1	if $y_1 > 0$ then $y_2 = 1$	$x \leq My$	$y_1 \in \mathbb{R}\|\mathbb{N}, y_2 \in \{0,1\}$
2	$y_1 = 1$ or $y_2 = 1$	$y_1 + y_2 \geq 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
3	$y_1 = 1$ and $y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
4	$y_1 = 1$ only if $y_2 = 1$	$y_1 \leq y_2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
5	if $y_1 = 1$ then $y_2 = 1$	idem	idem
6	$y_1 = 1$ only if $y_2 = 0$	$y_1 \leq 1 - y_2$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$
7	$y_1 = 1$ xor $y_2 = 1$	$y_1 + y_2 = 1$	$y_1, y_2 \in \{0,1\}$

Di seguito riporto la spiegazione di alcuni vincoli logici:

	$y_1 \geq 1$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_2 = 0$
1	$y_2 = 1$	$y_2 \in \{0,1\}$	$x \in \mathbb{R}\|\mathbb{N}$	$x = 0$
4	$y_2 = 1$	$y_2 \in \{0,1\}$	$y_1 \in \{0,1\}$	$y_1 = 0$
6	$y_2 = 0$	$y_2 \in \{0,1\}$	$y_1 = 0$	$y_1 \in \{0,1\}$

1.5 Problemi di programmazione lineare

Un problema di ottimizzazione lineare è definito dalla minimizzazione o massimizzazione di una funzione obiettivo soggetta a vincoli lineari. In termini matematici scriviamo:

$$\begin{aligned} \min \text{ (oppure} \max) \quad & f(x) \\ \text{s.t. } & g_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & g_i(x) \leq b_i, \quad i = k+1, \dots, k' \\ & g_i(x) \geq b_i, \quad i = k'+1, \dots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

dove

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ sono le variabili decisionali;

- f, g_i sono funzioni lineari del tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

- $b_i \in \mathbb{R}$;

Si noti che si possono scomporre f e g_i per rappresentarle come prodotto tra un vettore di coefficienti e un vettore di variabili decisionali. Indichiamo con c il vettore di coefficienti della funzione obiettivo e con a_i il vettore di coefficienti del vincolo i-esimo. Allora $f = c^T x$ e $g_i = a_i^T x$.

1.6 Soluzioni di un problema

Una soluzione si dice ammissibile se il vettore x soddisfa tutti i vincoli. L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice **insieme ammissibile**. L'insieme ammissibile può essere:

- **vuoto**: ovvero non esistono soluzioni;

- **limitato**: ovvero esiste una soluzione ottima;

- **illimitato**: ovvero i vincoli non limitano la soluzione.

Risolvere un problema di programmazione lineare significa riconoscere uno dei tre casi precedenti, nel caso limitato trovare la soluzione ottima ed il corrispondente valore della funzione obiettivo.

1.7 Problemi di programmazione lineare in forma standard

Un problema di programmazione lineare in forma standard è rispetta le seguenti condizioni:

- la funzione obiettivo è di minimo e senza costanti additive o moltiplicative;
- tutte le variabili sono positive o nulle;
- i vincoli sono tutti di uguaglianza.
- il vettore dei termini noti b è non negativo, ovvero $b_i \geq 0 \forall i \in 1, m$.

1.8 Trovare una soluzione ammissibile

Un problema PL può essere scritto come $\min c^T x : Ax = b, x \geq 0$, dove A è la matrice dei coefficienti dei vincoli, b è il vettore dei termini noti e x è il vettore delle variabili decisionali. Si noti che il PL considerato si trova in forma standart ($\min$, vincoli di uguaglianza e $x \geq 0$).
Ad ogni base della matrice A corrisponde una soluzione ammissibile. Infatti, sia B una base di A allora $x_B = B^{-1}b$ è una soluzione ammissibile. Se utilizziamo la geometria, allora ci immaginiamo che A rappresenti una poliedro dell'iperspazio $\mathbb{R}^n$ e x rappresenta un vertice del poliedro.
Notiamo che se il PL ammette una soluzione ottima, allora esiste una base ottima. Ovvero la soluzione ottima è un vertice del poliedro. Notiamo inoltre che dato un problema PL, e la rispettiva matrice che lo rappresenta $[A|b]$, il numero di soluzioni ammissibili di base è limitato superiormente da $\binom{n}{m}$, ovvero $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, dove m sono le colonne di A che possono formare una base, scelte tra le n colonne totali.

1.9 Metodo del simplesso

Il metodo del simplesso, ad alto livello, funziona nel seguente modo:

- si ha una base ammissibile B;
- si calcola il costo ridotto di ogni variabile non base x_j;
- se tutti i costi ridotti sono non negativi, allora la soluzione corrente è ottima;
- altrimenti, si sceglie una variabile x_j con costo ridotto negativo e si calcola il rapporto tra il termine noto e l'elemento corrispondente della colonna j-esima della matrice B^{-1};

- si sceglie la variabile x_k che minimizza il rapporto precedente;

- si effettua un pivotaggio per rendere x_k una variabile base e x_j una variabile non base;

- si ripete il procedimento.

Tornando alla rappresentazione geometrica, il metodo del simplesso parte da un vertice del poliedro e si sposta verso vertici adiacenti che migliorano il valore della funzione obiettivo. Il metodo termina quando non esistono vertici adiacenti che migliorano il valore della funzione obiettivo. Si noti che ci sono dei casi in cui il metodo del simplesso non termina, oppure termina ma non trova la soluzione ottima. Si pensi ad un poliedro con una faccia ammissibile e sconnessa da un'altra faccia ammissibile con soluzione ottima. Se la prima base corrisponde ad un vertice della prima faccia ammissibile, allora il metodo del simplesso non trova la soluzione ottima e bisogna passare per qualche vertice che non migliora il valore della funzione obiettivo, per poi arrivare ad un vertice della seconda faccia ammissibile. Da questo punto, il metodo del simplesso trova la soluzione ottima.

Se una variabile fuori base x_j ha costo ridotto negativo, allora esiste un base adiacente, tale che migliora la soluzione corrente. In particolare, se x_j non ha bisogno di rispettare alcun vincolo, allora il problema è illimitato e non esiste una soluzione ottima.

1.10 Il tableau del simplesso

Il tableau del simplesso è una rappresentazione tabellare del problema di programmazione lineare. Di seguito riportiamo un esempio di tableau del simplesso:

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
c^T & -1 & 0 \\
\hline
 & 0 & \\
A & \vdots & b \\
 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

A questo punto si applicano le operazioni di pivotaggio per trovare una soluzione di base ammissibile. Per indenderci si applicano le operazioni sulle righe (si possono anche scambiare le colonne). Fino ad arrivare alla seguente forma:

$$
\begin{array}{|ccc|ccc|c|c|}
\hline
0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{F_1} & \cdots & \bar{c}_{F_{n-m}} & -1 & -\bar{z}_B \\
\hline
 & & & \bar{a}_{1F_1} & \cdots & \bar{a}_{1F_{n-m}} & 0 & \\
 & I & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \bar{b} \\
 & & & \bar{a}_{mF_1} & \cdots & \bar{a}_{mF_{n-m}} & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

Il tableau in questa forma è estremamente comodo perché contiene tutte le informazioni necessarie per applicare il metodo del simplesso a portata di mano. Leggiamo il tableau come segue:

- $\bar{b}$ è il vettore che rappresenza la soluzione del problema rispetto alla base corrente;
- $\bar{z}_B$ è il valore della funzione obiettivo rispetto alla soluzione corrente, ovvero ponendo ciascuna variabile fuori base uguale a 0;
- $\bar{c}_{F_j}$ è il costo ridotto della variabile x_{F_j} e la colonna sottostante è il vettore a_{F_j}, che ci permette di capire quale variabile esce dalla base;

Si noti che la penultima colonna è piuttosto inutile e può essere omessa.

1.11 Cambio di base e operazioni di pivot

Rispetto alla matrice qui sopra riportata, notiamo un paio di cose:

- se $\bar{c} \geq 0$, allora la soluzione corrente è ottima;
- se $\exists\, \bar{c}_{F_j} < 0$ e la colonna sottostante ha coefficienti minori o uguali a 0, allora il problema è illimitato;
- risultao molto semplice calcolare il tableau di una base adiacente:
  1. si sceglie una variabile x_{F_j} con costo ridotto negativo;
  2. si calcolano i rapporti $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iF_j}}$, per ogni riga i tale che $\bar{a}_{iF_j} > 0$;
  3. si sceglie la riga k che minimizza il rapporto;
  4. si effettua un pivotaggio per rendere x_{F_j} una variabile base e x_{B_k} una variabile non base.

2 Duale

2.1 Cambiamo punto di vista

Un problema di programmazione lineare consiste nella determinazione del valore ottimo z^* di una funzione obiettivo $c^T x$ su di un poliedro P. Perché cambia il punto di vista? In effetti, possiamo vedere come il poliedro P, come il dominio della funzione obiettivo $c^T x$, ovvero l'insieme di punti in cui si può cercare il valore ottimo. In questo caso, la funzione obiettivo riordina i punti del poliedro P secondo un certo criterio e ci assegna un valore in $\mathbb{R}$. Questo vuol dire che la funzione obiettivo trasforma un poliedro in una retta. La retta, può essere limitata o illimitata, oppure nulla. Il problema di programmazione lineare cerca il valore massimo o minimo della retta e quindi il limite superiore o inferiore dell'insieme di arrivo della funzione obiettivo.

2.2 Problema duale

Sia PL il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} z^* = \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Allora il problema duale PD è:

$$\begin{aligned} w^* = \max \quad & u^T b \\ s.t. \quad & u^T A \leq c^T \\ & u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Dove $u^T = c^T B^{-1}$, dove B è una base ammissibile del problema PL_1.

2.3 Trasformazione al problema duale

	Problema primale $(\min c^T x)$	**Problema duale** $(\max u^T b)$
	$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
Vincoli $\rightarrow$ Dominio	$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
	$a_i^T x = b_i$	u_i libero
	$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
Dominio $\rightarrow$ Vincoli	$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
	x_j libero	$u^T A_j = c_j$

Ovviamente, PL ha una soluzione ottima se e solo se PD ha una soluzione ottima e inoltre $z^* = w^*$. Inoltre, se PL è illimitato, allora PD è inammissibile. Se DL è illimitato, allora PL è inammissibile. Nota bene, esistono casi in cui PL e PD sono entrambi inammissibili. E.g. PL:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 && \geq 1 \\ & - x_1 - x_2 \\ x_1, x_2 & \text{libere} \end{aligned}$$

PD:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + u_2 \\ s.t. \quad & u_1 - u_2 && = 1 \\ & u_1 - u_2 && = 0 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$