Métodos Númericos II

Avaliação Parcial 2 e 3

Autores:
Daniel Nogueira Rebouças
Everson Magalhães Cavalcante
Moésio Junior de Meneses Filho
Vitória Mendes Freixinho

Graduandos em Ciência da Computação
Universidade Federal do Ceará

30 de Junho de 2019

Conteúdo

1 Prova AP2: Auto-valores e Auto-vetores **2**

1.1 Questão 1 2

1.2 Questão 2 3

1.3 Questão 3: 5

2 Prova AP3: Problemas de Valor Inicial e Valores de Contorno **7**

2.1 Questão 1 7

2.2 Questão 2 8

1 Prova AP2: Auto-valores e Auto-vetores

1.1 Questão 1

O número de condicionamento de uma matriz simética com relação à norma 2 é a razão do maior autovalor sobre o menor autovalor da matriz. Seja nossa matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 37 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 21 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 56 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 36 & 11 \\ 3 & 7 & 6 & 11 & 57 \end{pmatrix}$$

Podemos obter o o maior autovalor de A utilizando o método da potência regular. Ao rodarmos o método da potência regular obtivemos os seguinte resultados para maior autovalor e autovetor associado:

$$\lambda_{MAX} = 70.7352801675$$

$$X_{MAX} = \begin{pmatrix} 0.1696273790205 \\ 0.2236040600015 \\ 0.576493420210 \\ 0.3498377872685 \\ 0.683005589794 \end{pmatrix}$$

com o número de iterações $= 33$.

Podemos obter o o menor autovalor de A utilizando o método da potência inversa. Ao rodarmos o método da potência inversa obtivemos os seguinte resultados para menor autovalor e autovetor associado:

$$\lambda_{MIN} = 17.97260713443$$

$$X_{MIN} = \begin{pmatrix} -0.155124116686 \\ 0.9635977231 \\ -0.16978721318 \\ 0.0051023649414 \\ -0.136243181576 \end{pmatrix}$$

com o número de iterações $= 26$.

Assim, o número do condicionamento é:

$$k(A) = \frac{\lambda_{MAX}}{\lambda_{MIN}} = \frac{70.73528016751396}{17.972607134438807} = 3.935727278652423$$

1.2 Questão 2

A Decomposição em Valores Singulares (SVD) é dada por $A = U\Sigma V^t$ e pela definição temos que $A^t = V\Sigma^t U^t$. Antes de analisarmos os resultados e ajustes mostraremos algumas propriedades:

1. $[AA^t]U = U\Sigma\Sigma^t$.
   Pela definição temos que $AA^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t$, mas como V é ortogonal, então pela definição $V^tV = I$. Assim temos que $AA^t = U\Sigma I\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$. Multiplicando o final de ambas as partes por U conseguimos $[AA^t]U = U\Sigma\Sigma^t U^t U$, mas como U é ortogonal, então pela definição $U^tU = I$. Assim temos que $[AA^t]U = U\Sigma\Sigma^t I = U\Sigma\Sigma^t$, logo conseguimos mostrar que $[AA^t]U = U\Sigma\Sigma^t$. $\square$

2. $[A^tA]V = V\Sigma^t\Sigma$.
   Pela definição temos que $A^tA = V\Sigma^t U^t U\Sigma V^t$, mas como U é ortogonal, então pela definição $U^tU = I$. Assim temos que $A^tA = V\Sigma^t I\Sigma V^t = V\Sigma^t\Sigma V^t$. Multiplicando o final de ambas as partes por V conseguimos $[A^tA]V = V\Sigma^t\Sigma V^t V$, mas como V é ortogonal, então pela definição $V^tV = I$. Assim temos que $[A^tA]V = V\Sigma^t\Sigma I = V\Sigma^t\Sigma$, logo conseguimos mostrar que $[A^tA]V = V\Sigma^t\Sigma$. $\square$

Vamos analisar cada matriz em particular que forma a Decomposição em Valores Singulares (SVD). A matriz a qual vamos analisar é:

$$A = \begin{pmatrix} 37 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 21 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 56 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 36 & 11 \\ 3 & 7 & 6 & 11 & 57 \end{pmatrix}$$

Assim, como $A = U\Sigma V^t$ para a SVD, vamos achar as decomposições:

1. Matriz U de autovetores de AA^t usando o método de Jacobi.
   Pelo método de Jacobi conseguimos os seguintes resultados:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 942.46462 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 323.01461 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & -0.00000 & 5003.47986 & 0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 1344.05039 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 2593.99053 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.18308 & -0.15512 & 0.16963 & 0.95556 & -0.02343 \\ 0.09537 & 0.96360 & 0.22360 & 0.09713 & -0.05432 \\ 0.09107 & -0.16979 & 0.57649 & -0.16639 & -0.77643 \\ -0.92082 & 0.00510 & 0.34984 & 0.11823 & 0.12529 \\ 0.31808 & -0.13624 & 0.68301 & -0.18923 & 0.61478 \end{pmatrix}$$

   Então, ordenando X de forma decrescente com relação ao autovalor associado ficamos com a seguinte matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 0.16963 & -0.02343 & 0.95556 & 0.18308 & -0.15512 \\ 0.22360 & -0.05432 & 0.09713 & 0.09537 & 0.96360 \\ 0.57649 & -0.77643 & -0.16639 & 0.09107 & -0.16979 \\ 0.34984 & 0.12529 & 0.11823 & -0.92082 & 0.00510 \\ 0.68301 & 0.61478 & -0.18923 & 0.31808 & -0.13624 \end{pmatrix}$$

2. Matriz V de autovetores de A^tA usando o método QR.
Pelo método de QR conseguimos os seguintes resultados:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 5003.47986 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 \\ -0.00000 & 2593.99053 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & 1344.05039 & 0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & 942.46462 & -0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 323.01461 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.16963 & 0.02343 & 0.95556 & -0.18308 & 0.15512 \\ 0.22360 & 0.05432 & 0.09713 & -0.09537 & -0.96360 \\ 0.57649 & 0.77643 & -0.16639 & -0.09107 & 0.16979 \\ 0.34984 & -0.12529 & 0.11823 & 0.92082 & -0.00510 \\ 0.68301 & -0.61478 & -0.18923 & -0.31808 & 0.13624 \end{pmatrix}$$

Então, ordenando X de forma decrescente com relação ao autovalor associado ficamos com a seguinte matriz V:

$$V = \begin{pmatrix} 0.16963 & 0.02343 & 0.95556 & -0.18308 & 0.15512 \\ 0.22360 & 0.05432 & 0.09713 & -0.09537 & -0.96360 \\ 0.57649 & 0.77643 & -0.16639 & -0.09107 & 0.16979 \\ 0.34984 & -0.12529 & 0.11823 & 0.92082 & -0.00510 \\ 0.68301 & -0.61478 & -0.18923 & -0.31808 & 0.13624 \end{pmatrix}$$

3. Matriz Σ de autovalores de AA^t.
Pelo método de Jacobi que utilizamos para achar U, também achamos os autovalores de AA^t. Assim temos eles ordenados de maneira decrescente:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 5003.47986 \\ 2593.99053 \\ 1344.05039 \\ 942.46462 \\ 323.01461 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos montar a matriz Σ onde para cada $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Colocando cada σ_i de forma decrescente na diagonal principal temos:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 70.73528 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 50.93123 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 36.66129 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 30.69959 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 17.97261 \end{pmatrix}$$

Como A é simétrico, é fácil ver que U e V serão iguais, pois, U é autovetor para AA^t e V é autovetor para A^tA, entretanto $A^tA = AA^t$, pois A é simétrico e $A = A^t$. Para realizar os ajustes, devemos inverter a direção dos autovetores das colunas 2, 4 e 5 de V. Assim temos:

$$V = \begin{pmatrix} 0.16963 & -0.02343 & 0.95556 & 0.18308 & -0.15512 \\ 0.22360 & -0.05432 & 0.09713 & 0.09537 & 0.96360 \\ 0.57649 & -0.77643 & -0.16639 & 0.09107 & -0.16979 \\ 0.34984 & 0.12529 & 0.11823 & -0.92082 & 0.00510 \\ 0.68301 & 0.61478 & -0.18923 & 0.31808 & -0.13624 \end{pmatrix}$$

Quando multiplicamos $U\Sigma V^t$ conseguimos o seguinte resultado:

$$U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 37.00000 & 4.00000 & 3.00000 & 3.00000 & 3.00000 \\ 4.00000 & 21.00000 & 8.00000 & 3.00000 & 7.00000 \\ 3.00000 & 8.00000 & 56.00000 & 6.00000 & 6.00000 \\ 3.00000 & 3.00000 & 6.00000 & 36.00000 & 11.00000 \\ 3.00000 & 7.00000 & 6.00000 & 11.00000 & 57.00000 \end{pmatrix}$$

que é exatamente nossa matriz A, verificando assim a veracidade da Decomposição em Valores Singulares (SVD).

1.3 Questão 3:

Vamos analisar cada matriz em particular que forma a Decomposição em Valores Singulares (SVD). A matriz a qual vamos analisar é:

$$A = \begin{pmatrix} 37 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 21 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 56 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Assim, como $A = U\Sigma V^t$ para a SVD, vamos achar as decomposições:

1. Matriz U de autovetores de AA^t usando o método de Jacobi.
   Pelo método de Jacobi conseguimos os seguintes resultados:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1373.67444 & 0.00000 & -0.00000 \\ -0.00000 & 374.42607 & -0.00000 \\ -0.00000 & -0.00000 & 3523.89950 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.96215 & -0.19630 & 0.18903 \\ 0.14839 & 0.95917 & 0.24077 \\ -0.22857 & -0.20361 & 0.95200 \end{pmatrix}$$

   Então, ordenando X de forma decrescente com relação ao autovalor associado ficamos com a seguinte matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 0.18903 & 0.96215 & -0.19630 \\ 0.24077 & 0.14839 & 0.95917 \\ 0.95200 & -0.22857 & -0.20361 \end{pmatrix}$$

2. Matriz V de autovetores de A^tA usando o método QR.
   Pelo método de QR conseguimos os seguintes resultados:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 3523.89950 & 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 & -0.00000 \\ 0.00000 & 1373.67444 & 0.00000 & -0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 374.42607 & 0.00000 & 0.00000 \\ -0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -0.00000 \\ -0.00000 & -0.00000 & -0.00000 & 0.00000 & -0.00000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.16963 & 0.02343 & 0.95556 & -0.18308 & 0.15512 \\ 0.22360 & 0.05432 & 0.09713 & -0.09537 & -0.96360 \\ 0.57649 & 0.77643 & -0.16639 & -0.09107 & 0.16979 \\ 0.34984 & -0.12529 & 0.11823 & 0.92082 & -0.00510 \\ 0.68301 & -0.61478 & -0.18923 & -0.31808 & 0.13624 \end{pmatrix}$$

Então, ordenando X de forma decrescente com relação ao autovalor associado ficamos com a seguinte matriz V:

$$V = \begin{pmatrix} 0.18215 & -0.95803 & 0.20863 & -0.06268 & -0.03933 \\ 0.22621 & -0.13858 & -0.91620 & -0.09550 & -0.28474 \\ 0.94007 & 0.23545 & 0.22312 & -0.08901 & -0.05584 \\ 0.11794 & -0.05289 & -0.05514 & 0.98946 & -0.03500 \\ 0.13417 & -0.06890 & -0.25342 & 0.00000 & 0.95553 \end{pmatrix}$$

3. Matriz Σ de autovalores de AA^t.
Pelo método de Jacobi que utilizamos para achar U, também achamos os autovalores de AA^t. Assim temos eles ordenados de maneira decrescente:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 3523.899497 \\ 1373.674435 \\ 374.426067 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos montar a matriz Σ onde para cada $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Colocando cada σ_i de forma decrescente na diagonal principal temos:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 59.36244 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 37.06311 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 19.35009 & 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

Para que a forma $A = U\Lambda V^t$ seja verificada corretamente, precisamos ajustar a direção de alguns autovetores. Como U possui a menor dimensão, então testamos com ele. É necessário que invertamos os autovetores das colunas 2 e 3 de U e assim temos:

$$U = \begin{pmatrix} 0.18903 & -0.96215 & 0.19630 \\ 0.24077 & -0.14839 & -0.95917 \\ 0.95200 & 0.22857 & 0.20361 \end{pmatrix}$$

Quando multiplicamos $U\Sigma V^t$ conseguimos o seguinte resultado:

$$U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 37.00003 & 4.00005 & 3.00008 & 3.00006 & 2.99996 \\ 4.00020 & 21.00001 & 8.00009 & 2.99996 & 7.00007 \\ 2.99986 & 8.00012 & 55.99990 & 5.99985 & 6.00023 \end{pmatrix}$$

que é uma boa aproximação da nossa matriz A, desde que estamos utilizando uma tolerância de 0.00001, porém se aumentarmos significativamente a tolerância conseguiremos a matriz exata, e então verificando assim a veracidade da Decomposição em Valores Singulares (SVD).

2 Prova AP3: Problemas de Valor Inicial e Valores de Contorno

2.1 Questão 1

O movimento do carrinho é dado pela equação diferencial: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t)/m$. Para isto, temos os seguintes valores para as constantes:

- $m = 1$, massa do carrinho em Kg.
- $k = 4$, rigidez da mola em N/m.
- $\omega = \sqrt{k/m} = 2$, frequência natural de vibração em ciclos/s.
- $\zeta = 0.05$, fator de amortecimento.
- $f(t) = \begin{cases} 4t, & \text{se } 0.0 \leq t \leq 0.5 \\ 4(1-t), & \text{se } 0.5 \leq t \leq 1.0 \\ 0, & \text{se } 1.0 \leq t \end{cases}$, força externa aplicada no carrinho em N.
- $x(0) = 2$, posição inicial do carrinho.
- $v(0) = 0$, velocidade inicial do carrinho.

Primeiro vamos realizar uma substituição de variáveis para nos facilitar a execução do algoritmo. Sabemos que $\frac{dx}{dt} = x' = v$. Assim, vamos substituir $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ por v' e $\frac{dx}{dt}$ por v e $x(t)$ por x variável. Assim temos a equação diferencial: $v' + 2\zeta\omega v + \omega^2 x = f(t)/m$, e podemos ver que $v' = f(t)/m - 2\zeta\omega v - \omega^2 x$.
Vamos criar uma estrutura $S = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$. Se buscarmos a derivada desta podemos facilmente ver que $\dfrac{dS}{dt} = F(S,t) = \begin{pmatrix} v' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t)/m - 2\zeta\omega v - \omega^2 x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) - 0.2v - 4.0x \\ v \end{pmatrix}$.
Sabemos que $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, então queremos achar qual a posição do carrinho no instante $t = 1.2$s. Para isto, iremos utilizar o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem. Utilizamos um método de resolução onde $\Delta t = 0.1$ e para cada iteração dividimos Δt por 2.

Os resultados que conseguimos foram a partir da tolerância = 0.000000001, onde só precisou de apenas uma iteração para achar o resultado. Primeira iteração resultou nas seguintes respostas: Para $t = 1.2$s temos $v = -2.295099921361916$ e $x = -0.8218842404841891$, e para iteração seguinte resultou nas respostas: Para $t = 1.2$s temos $v = -2.295028365508145$ e $x = -0.8219089714759474$. Como $\dfrac{x_1 - x_0}{x_1} \leq 0.000000001$, então o resultado para questão é que $x(1.2) = -0.8218842404841891$.

2.2 Questão 2

A equação diferencial dada para o problema do deslocamento é: $Ty''(r) + \frac{T}{r}y'(r) = -P$, então passando T para o lado direito, $y''(r) + \frac{y'(r)}{r} = \frac{-P}{T}$. Os valores para as constantes são: $N = 4$, $T = 10$, $P = 14$ e $\Delta r = (0.5 - 0.2)/4 = 0.075$. Então temos finalmente: $y''(r) + \frac{1}{r}y'(r) = -1.4$.
Temos para a Malha das Diferenças Finitas as seguintes deduções usando teorias centrais:

- $y_i'' = \frac{1}{\Delta r^2}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}]$
- $y_i' = \frac{1}{2\Delta r}[y_{i+1} - y_{i-1}]$

Onde substituindo na equação diferencial temos: $\frac{1}{\Delta r^2}[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] + \frac{1}{2r\Delta r}[y_{i+1} - y_{i-1}] = -1.4$. Reordenando a equação com relação aos termos y: $\left(\frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r}\right)y_{i-1} + \left(\frac{-2}{\Delta r^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r}\right)y_{i+1}$. Assim temos a malha:

$$\boxed{\frac{1}{0.005625} - \frac{1}{0.15r}} \text{———} \text{-355.55556} \text{———} \boxed{\frac{1}{0.005625} + \frac{1}{0.15r}}$$

Como particionamos em $N = 4$ partes, temos 5 pontos, onde 2 deles são os pontos extremos 0.2 e 0.5 conhecidos. Então, os pontos internos chamaremos de $r_1 = 0.275$, $r_2 = 0.35$ e $r_3 = 0.425$, onde os valores de $y(r_i) = y_i$ que queremos conhecer.
Montamos a estrutura no produto de matrizes a seguir:

$$\begin{pmatrix} -355.55556 & 202.02020 & 0.00000 \\ 158.73016 & -355.55556 & 196.82540 \\ 0.00000 & 162.09150 & -355.55556 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ -1.4 \\ -1.4 \end{pmatrix}$$

Como sabemos, este problema é um Sistema Linear que podemos resolver com o método LU. Aplicando nosso solucionador obtivemos os valores $y_1 = 0.012995348443843 03$, $y_2 = 0.015941813261163736$ e $y_3 = 0.011205091339648175$.

Portanto, pelo método das diferenças finitas, encontramos os resultados para particionamento de $N = 4$:

- y(0.2) = 0.00000
- y(0.275) = 0.01299534844384303
- y(0.35) = 0.015941813261163736
- y(0.425) = 0.011205091339648175
- y(0.5) = 0.00000