1 Intro

Queremos encontrar uma ellipse com major-axis a e minor-axis b, tal que ela contenha três pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Vamos assumir que $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $x_2 = 0$. Veja que podemos aplicar translação e rotação aos pontos originais para obter uma instância desta forma.

A equação da ellipse é dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Substituindo (x_1, y_1) chegamos que $F = 0$.

Vamos assumir que todos os outros parametros são diferente de 0. Veja que as equações dadas por (A, B, C, D, E) e $(\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E)$ representam a mesma elipse. Por isso vamos fixar $B = -1$.

Substituindo $(0, y_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} Cy_2^2 + Ey_2 &= 0 \\ E &= -Cy_2 \end{aligned}$$

Substituindo (x_3, y_3) obtemos:

$$\begin{aligned} Ax_3^2 + x_3y_3 + C(y_3^2 - y_2y_3) + Dx_3 &= 0 \\ D &= -\frac{Ax_3^2 - x_3y_3 + C(y_3^2 - y_2y_3)}{x3} \end{aligned}$$

Agora nos resta fixar os parametros da forma da elipse (a, b) e determinar A e C.

2 Determinando A, C

Fixando $B = 1$ impomos que o angulo de rotação da elipse seja diferente de 0.

Temos duas equações que determinam a, b. Seja $\Delta = 4AC - B^2 = 4AC - 1$.

$$a^2 = \frac{2\dfrac{AE^2 - BDE + CD^2}{\Delta}}{A + C - \sqrt{1 + (A - C)^2}} \tag{2}$$

$$b^2 = \frac{2\dfrac{AE^2 - BDE + CD^2}{\Delta}}{A + C + \sqrt{1 + (A - C)^2}} \tag{3}$$

Deixe que $q = \frac{a^2}{b^2}$, q representa a ecentricidade ou a proporção entre a e b. Fixando q, conseguimos fixar a forma, mas não a escala da elipse. Vamos fazer isso pois as contas ficam mais simples.

$$q = \frac{A + C + \sqrt{1 + (A - C)^2}}{A + C - \sqrt{1 + (A - C)^2}}$$
$$\sqrt{1 + (A - C)^2}(q + 1) = (A + C)(q - 1)$$

Seja $w = \frac{q-1}{q+1} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, veja que $w < 1$, isso será útil em algum momento. Portanto:

$$1 + (A - C)^2 = w^2(A + C)^2$$

Também vamos fixar o angulo de rotação $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Seja $t = \tan(2\theta)$, temos:

$$t = \frac{B}{A - C}$$
$$A = C - \frac{1}{t}$$

Voltando a equação anterior, temos:

$$1 + (C - \frac{1}{t} - C)^2 = w^2(C - \frac{1}{t} + C)^2$$
$$1 + \frac{1}{t^2} = w^2(2C - \frac{1}{t})^2$$

Resolvendo a quadrática, achamos o valor de C:

$$C = \frac{w \pm \sqrt{t^2 + 1}}{2tw} \tag{4}$$

Só vamos utilizar C^+ (o C^- da um angulo de rotação maior que $\frac{\pi}{4}$, ainda nao sei o porquê).

2.1 Algumas propriedades

A condição $4AC - B^2 > 0$ tem que ser satisfeita para que a equação da conica represente uma elipse.

Seja $\Gamma = A + C + \sqrt{1 + (A - C)^2}$, substituindo A em Γ, temos:

$$\Gamma = 2C - \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$

Como estamos lidando primeiro com $t > 0$, temos:

$$\Gamma = 2C - \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}$$

Algumas propriedades que verifiquei utilizando Wolfram:

- $4AC - B^2 > 0$ faz com que $A > 0$ e $C > 0$.
- $C' < 0$ para todo t.
- $A' < 0$ se e só se $t < \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w}$
- $\Delta' < 0$ para todo t.
- $\Gamma > 0$ e $\Gamma' < 0$ para todo t.

$$\begin{aligned} D = -(A\alpha + \beta + C\gamma) \\ E = -C\eta \\ \alpha, \gamma, \eta > 0 \end{aligned}$$

Suas derivadas

$$D' = -(A'\alpha + C'\gamma)$$

2.2 Só Falta achar t

Infelizmente não é fácil achar t.

3 Outro Approach

Vamos supor que os pontos são $(0,0), (h,0), (\alpha h, m \times \alpha h)$ e que m é positivo.
Temos que $D = -Ah$ e também fixamos $B = -1$.
Vamos agora utilizar a equação que fixa a ecentricidade para isolar C.

$$\begin{aligned} 1 + (A-C)^2 = w^2(A+C)^2 \\ C = \frac{-Aw^2 - A \pm \sqrt{4A^2w^2 + w^2 - 1}}{w^2 - 1} \end{aligned}$$

Fixando o A e encontrando C, talque $4AC > 1$ irá fixar a ecentricidade da elipse.

3.1 O terceiro ponto

Vamos olhar para a área detemrminada pelo triangulo dos pontos, chamamos a de s. Veja que o diametro da elipse que contem este triangulo é monótona em s que por sua vez é monotona em h.

Primeiro, econtramos a intersecção da reta $y = mx$ com a elipse.

$$\begin{aligned} Ax^2 - x^2m + Cx^2m^2 - Ahx + Emx &= 0 \\ Ax - xm + Cxm^2 - Ah + Em &= 0 \\ x(A - m + Cm^2) &= Ah - Em \\ x &= \frac{Ah - Em}{A - m + Cm^2} \end{aligned}$$

Para determinar E, utilizamos o terceiro ponto.

$$\begin{aligned} A\alpha^2h^2 + B\alpha^2h^2m + Cm^2\alpha^2h^2 - Ah^2\alpha + Em\alpha h &= 0 \\ Em &= -(A(\alpha h - h) - \alpha hm + Cm^2h\alpha) \\ Em &= h(-A(\alpha - 1) + \alpha m - Cm^2\alpha) \\ E &= h\beta \end{aligned}$$

3.2 Semi-major

Fixando A e utilizando a formula do semi-major, fazendo $H = \Delta(A + C - \sqrt{1 + (A - C)^2})$.

$$\begin{aligned} a^2H &= AE^2 + DE + CD^2 \\ a^2H &= Ah^2\beta^2 - Ah^2\beta + CA^2h^2 \\ h^2(A\beta^2 - A\beta + CA^2) &= a^2H \\ h^2 &= \frac{a^2H}{A\beta^2 - A\beta + CA^2} \end{aligned}$$

Voltando para a equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{Ah + (A(\alpha h - h) - \alpha hm + Cm^2h\alpha)}{A - m + Cm^2} \\ y &= mx \\ y &= m\frac{Ah + (A(\alpha h - h) - \alpha hm + Cm^2h\alpha)}{A - m + Cm^2} \end{aligned}$$

Tomando a área do triangulo obtemos, veja que s é conhecida dado h:

$$
\begin{aligned}
m\frac{Ah + (A(\alpha h - h) - \alpha hm + Cm^2 h\alpha)}{A - m + Cm^2} \times h = s \\
A(mh^2\alpha) - h^2m^2\alpha + Cm^3h^2\alpha = s(A - m + Cm^2) \\
A(mh^2\alpha - s) + C(m^3h^2\alpha - sm^2) = h^2m^2\alpha \\
A\beta_1 + C\beta_2 + \beta_3 = 0
\end{aligned}
$$