1 Intro

Queremos encontrar uma ellipse com major-axis a e minor-axis b, tal que ela contenha três pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Vamos assumir que $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $x_2 = 0$. Veja que podemos aplicar translação e rotação aos pontos originais para obter uma instância desta forma.

A equação da ellipse é dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Substituindo (x_1, y_1) chegamos que $F = 0$.

Vamos assumir que todos os outros parametros são diferente de 0. Veja que as equações dadas por (A, B, C, D, E) e $(\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E)$ representam a mesma elipse. Por isso vamos fixar $B = -1$.

Substituindo $(0, y_2)$ obtemos:

$$\begin{aligned} Cy_2^2 + Ey_2 &= 0 \\ E &= -Cy_2 \end{aligned}$$

Substituindo (x_3, y_3) obtemos:

$$\begin{aligned} Ax_3^2 + x_3y_3 + C(y_3^2 - y_2y_3) + Dx_3 &= 0 \\ D &= -\frac{Ax_3^2 - x_3y_3 + C(y_3^2 - y_2y_3)}{x3} \end{aligned}$$

Agora nos resta fixar os parametros da forma da elipse (a, b) e determinar A e C.

2 Determinando A, C

Fixando $B = 1$ impomos que o angulo de rotação da elipse seja diferente de 0.

Temos duas equações que determinam a, b. Seja $\Delta = 4AC - B^2 = 4AC - 1$.

$$a^2 = \frac{2\dfrac{AE^2 - BDE + CD^2}{\Delta}}{A + C - \sqrt{1 + (A - C)^2}} \tag{2}$$

$$b^2 = \frac{2\dfrac{AE^2 - BDE + CD^2}{\Delta}}{A + C + \sqrt{1 + (A - C)^2}} \tag{3}$$

Deixe que $q = \frac{a^2}{b^2}$, q representa a ecentricidade ou a proporção entre a e b. Fixando q, conseguimos fixar a forma, mas não a escala da elipse. Vamos fazer isso pois as contas ficam mais simples.

$$q = \frac{A + C + \sqrt{1 + (A-C)^2}}{A + C - \sqrt{1 + (A-C)^2}}$$
$$\sqrt{1 + (A-C)^2}(q+1) = (A+C)(q-1)$$

Seja $w = \frac{q-1}{q+1} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, veja que $w < 1$, isso será útil em algum momento. Portanto:

$$1 + (A-C)^2 = w^2(A+C)^2$$

Também vamos fixar o angulo de rotação $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Seja $t = \tan(2\theta)$, temos:

$$t = \frac{B}{A-C}$$
$$A = C - \frac{1}{t}$$

Voltando a equação anterior, temos:

$$1 + (C - \frac{1}{t} - C)^2 = w^2(C - \frac{1}{t} + C)^2$$
$$1 + \frac{1}{t^2} = w^2(2C - \frac{1}{t})^2$$

Resolvendo a quadrática, achamos o valor de C:

$$C = \frac{w \pm \sqrt{t^2+1}}{2tw} \tag{4}$$

Só vamos utilizar C^+ (o C^- da um angulo de rotação maior que $\frac{\pi}{4}$, ainda nao sei o porquê).

2.1 Algumas propriedades

A condição $4AC - B^2 > 0$ tem que ser satisfeita para que a equação da conica represente uma elipse.

Seja $\Gamma = A + C + \sqrt{1 + (A-C)^2}$, substituindo A em Γ, temos:

$$\Gamma = 2C - \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$

Como estamos lidando primeiro com $t > 0$, temos:

$$\Gamma = 2C - \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}$$

Algumas propriedades que verifiquei utilizando Wolfram:

- $4AC - B^2 > 0$ faz com que $A > 0$ e $C > 0$.
- $C' < 0$ para todo t.
- $A' < 0$ se e só se $t < \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w}$
- $\Delta' < 0$ para todo t.
- $\Gamma > 0$ e $\Gamma' < 0$ para todo t.

$$\begin{aligned} D = -(A\alpha + \beta + C\gamma) \\ E = -C\eta \\ \alpha, \gamma, \eta > 0 \end{aligned}$$

Suas derivadas

$$D' = -(A'\alpha + C'\gamma)$$

2.2 Só Falta achar t

Infelizmente não é fácil achar t.

3 Outro Approach

Vamos supor que os pontos são $(0,0), (h,0), (\alpha h, m \times \alpha h)$ e que m é positivo.

Temos que $D = -Ah$ e também fixamos $B = -1$.

Vamos agora utilizar a equação que fixa a ecentricidade para isolar C.

$$\begin{aligned} 1 + (A-C)^2 = w^2(A+C)^2 \\ C = \frac{-Aw^2 - A \pm \sqrt{4A^2w^2 + w^2 - 1}}{w^2 - 1} \end{aligned}$$

Fixando o A e encontrando C, talque $4AC > 1$ irá fixar a ecentricidade da elipse.

3.1 O terceiro ponto

Vamos olhar para a área detemrminada pelo triangulo dos pontos, chamamos a de s. Veja que o diametro da elipse que contem este triangulo é monótona em s que por sua vez é monotona em h.

Primeiro, econtramos a intersecção da reta $y = mx$ com a elipse.

$$\begin{aligned}
Ax^2 - x^2m + Cx^2m^2 - Ahx + Emx &= 0 \\
Ax - xm + Cxm^2 - Ah + Em &= 0 \\
x(A - m + Cm^2) &= Ah - Em \\
x &= \frac{Ah - Em}{A - m + Cm^2}
\end{aligned}$$

Para determinar E, utilizamos o terceiro ponto.

$$\begin{aligned}
A\alpha^2h^2 + B\alpha^2h^2m + Cm^2\alpha^2h^2 - Ah^2\alpha + Em\alpha h &= 0 \\
Em &= -(A(\alpha h - h) - \alpha hm + Cm^2h\alpha) \\
Em &= h(-A(\alpha - 1) + \alpha m - Cm^2\alpha) \\
E &= h\beta
\end{aligned}$$

3.2 Semi-major

Fixando A e utilizando a formula do semi-major, fazendo $H = \Delta(A + C - \sqrt{1 + (A - C)^2})$.

$$\begin{aligned}
a^2H &= AE^2 + DE + CD^2 \\
a^2H &= Ah^2\beta^2 - Ah^2\beta + CA^2h^2 \\
h^2(A\beta^2 - A\beta + CA^2) &= a^2H \\
h^2 &= \frac{a^2H}{A\beta^2 - A\beta + CA^2}
\end{aligned}$$

3.2.1 Domínio A

A função h^2 não está definida para todo A. Como A pode ser encontrado em função de $t = tan(2\theta)$, em que θ é o angulo de rotação da elipse, omitindo-se as contas temos:

$$A = \frac{-w + \sqrt{t^2+1}}{2tw} \tag{5}$$

$$\lim_{t \to \infty} A = \frac{1}{2w} \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0^+} A = \infty \tag{7}$$

$$A' = -\frac{w + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{2wt^2} < 0 \tag{8}$$

Logo, o domínio de A é $\left[\frac{1}{2w}, \infty\right)$.

Vamos propor que h é uma função monótona. Portanto, será possível aplicar o algoritmo da bisseção para encontrar a resposta.

A partir desse definição de A, também obtemos que $C = A + \frac{1}{t}$, ou seja $C > A$.

3.3 Monotonicidade

É possível, calculando a derivada de C em função de A, ver que C é crescente. Como $\Delta > 0$ e $\Delta' > 0$, verificamos a seguir que H é crescente:

$$(A + C - \sqrt{1 + (A-C)^2})' = 1 + C' - \frac{(A-C)(1-C')}{\sqrt{1+(A-C)^2}}$$